

А. ван дер Зул

ПРИ ИЗМЕРЕНИЯХ

Издательство «Мир»

# **NOISE IN MEASUREMENTS**

**ALDERT VAN DER ZIEL**

**Electrical Engineering Department  
University of Minnesota**

**Electrical Engineering Department  
University of Florida**

**A WILEY-INTERSCIENCE PUBLICATION  
JOHN WILEY & SONS, NEW YORK. LONDON. TORONTO.  
SYDNEY**

**А. ван дер Зул**

**ШУМЫ  
ПРИ ИЗМЕРЕНИЯХ**

Перевод с английского  
под редакцией  
канд. техн. наук А. К. НАРЫШКИНА.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»  
Москва 1979

В книге подробно обсуждаются физическая природа и математическое описание распространенных источников шума. Рассматриваются шумы полевых и биполярных транзисторов и усилительных каскадов на них. Описаны методы измерения малых токов, напряжений и зарядов, приводятся результаты исследования работы детекторов, смесителей и усилителей излучения. Отдельная глава посвящена исследованию шума в телевизионных передающих трубках. Большой интерес представляет материал по светотехническим измерениям.

Книга предназначена для научных и инженерно-технических работников, специализирующихся в области разработки, изготовления или использования электронной аппаратуры, а также для студентов радиотехнических и электронных специальностей вузов.

*Редакция литературы по новой технике*

2403000000

Copyright © 1976 by John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved. Authorized translation from English language edition published by John Wiley & Sons, Inc.

30104-169  
041(01)-79 169-79

© Перевод на русский язык, «Мир», 1979

## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

В нашей стране специалисты по флуктуационным явлениям в электронных и полупроводниковых приборах хорошо знают и высоко ценят книги известного американского ученого А. ван дер Зила, переведенные на русский язык (например, Флуктуации в радиотехнике и физике. — М.: Госэнергониздат, 1958; Шум (источники, описание измерение). — М.: Советское радио, 1973). Эти книги ценны высокой достоверностью излагаемых в них теоретических и экспериментальных результатов, полученных автором и его учениками и основанных на обобщении большого числа публикаций других авторов.

В новой книге А. ван дер Зила наряду с уже известными фактами нашли отражение новые актуальные вопросы (оптимизация процессов светотехнических измерений и оценка возникающих погрешностей, использование новых методов измерения слабых токов, напряжений и зарядов). Структура книги позволяет легко ориентироваться в материале, а полнота изложения — обходиться без дополнительных источников информации.

Перевод предисловия, гл. 1—5, 7, 10, 16, 17 и приложения выполнен канд. техн. наук В. Н. Кулешовым, гл. 6, 8, 9, 11—15 — канд. техн. наук Д. П. Царапкиным.

При переводе были исправлены некоторые опечатки, замеченные в оригинале. Кроме того, иногда возникали трудности терминологического характера. В случае расхождения терминов, принятых в отечественной и зарубежной литературе, в переводе, как правило, использовалась отечественная терминология. Однако в ряде случаев оставлена терминология оригинала (например, Миллер-эффект, приборы с управлением по заряду, ПТПЗ с плавающим затвором).

Следует отметить и тот факт, что в перечне литературы, использованной в книге, отсутствуют ссылки на широко известные работы советских авторов. Например, в гл. 10 необходимо было бы упомянуть сборник грудов основоположника противозумовых коррекций Г. В. Брауде (Коррекция телевизионных и импульсных сигналов — М.: Связь, 1967).

Уверен, что предлагаемая новая книга А. ван дер Зила по достоинству будет оценена советским читателем.

*А. К. Нарышкин*

## ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

В этой книге обсуждается влияние шумов на точность измерений. В ней собран материал, содержащийся во многих учебниках и огромном числе прежних и текущих публикаций; сюда также вошли материалы лекций, прочитанных в университетах шт. Миннесота и Флорида.

Главы 1—7 содержат необходимые общие сведения о шуме. После краткого введения (гл. 1) изложен метод расчета средних значений случайных величин, авто- и взаимокорреляционных функций при помощи функций распределения (гл. 2). В гл. 3 рассмотрены некоторые случаи применения, а в гл. 4 изучаются биномиальная, пуассоновская и нормальная функции распределения, приводится доказательство теоремы о дисперсии. В гл. 5 обсуждаются методы спектрального анализа и приводятся расчеты спектральных плотностей. Гл. 6 посвящена описанию шумов в двух- и четырехполосниках, а в гл. 7 обсуждаются фликершум и генерационно-рекомбинационный шум.

Главы 8—17 посвящены практическим применениям. Описываются измерения малых токов, напряжений и зарядов (гл. 8), детекторы теплового излучения, например термпары и болометры (гл. 9), фотодетекторы фотоэмиссионного и фотодиодного типов и классические детекторы (гл. 10), фотопроводниковые детекторы (гл. 11), пироэлектрические детекторы и емкостные болометры (гл. 12). Затем рассматриваются шумы в телевизионных передающих трубках (гл. 13), исследуется фотопреобразование (гл. 14), а также усиление света с использованием электролюминесценции (гл. 15). В гл. 16 дается обсуждение применения приборов с контактом Джозефсона, в гл. 17 кратко рассматриваются детекторы частиц и квантов высокой энергии.

В приложении выводятся некоторые формулы теории ферроэлектриков, используемые в гл. 12.

Я признателен моим аспирантам из университетов шт. Миннесота и Флорида, которые помогли подготовить рукопись, а также г-же ван дер Зил, которая помогла оформить ее.

Миннеаполис, Миннесота  
Апрель 1976

*А. ван дер Зил*

---

## ВВЕДЕНИЕ

В физике и электротехнике часто сталкиваются с флуктуирующими сигналами, возникающими в электрических цепях, приборах или измерительных системах. Такие флуктуирующие сигналы обычно называют *шумами*.

Название «шум» требует пояснения. Если флуктуирующее напряжение (или ток), возникшее в элементе схемы или в электронном приборе, усиливается с помощью усилителя низкой частоты и подается на громкоговоритель, последний издает шипящий звук. Отсюда и название «шум». В настоящее время название «шум» относят к любым самопроизвольным флуктуациям независимо от того, производят они слышимый звук или нет.

Шум определяет нижний предел для сигналов, которые могут быть обработаны электронными средствами. Он также устанавливает нижние пределы практически для всех видов измерений. В любом измерении важно свести к минимуму отношение сигнал/шум и таким образом определить предел точности этих измерений. Цель данной книги заключается в ознакомлении читателя с этими проблемами при измерении токов, напряжений, зарядов и интенсивности излучения.

К наиболее часто встречающимся шумам относятся: тепловой, дробовой, генерационно-рекомбинационный шумы, шум, обусловленный температурными флуктуациями, а также фликер-шум. Рассмотрим эти шумы несколько подробнее.

*Тепловой шум* вызывается случайным движением носителей заряда в любом проводнике. Вследствие этого движения на концах проводника возникает флуктуирующая электродвижущая сила (э. д. с.)  $V(t)$ . Точно такое же явление наблюдается в проводящем канале полевых транзисторов (ПТ). Этот источник шума является основным в любом устройстве, имеющем электрическую природу и находящемся в тепловом равновесии с окружающей средой, поддерживаемой при постоянной температуре  $T$ .

*Дробовой шум* имеет место всегда, когда шумовое явление можно рассматривать как последовательность независимых случайных событий. Например, в случае испускания электронов термокатодом или фотокатодом эмиссия электронов представляет собой последовательность независимых случайных событий. Следовательно, в эмиссионных токах наблюдается дробовой шум. В  $p-n$ -переходах и транзисторах явления пересечения перехода носителями заряда (электронами или дырками) составляют последовательность независимых случайных событий, и токи в этих приборах несут в себе дробовой шум. Это также справедливо и для переходов между двумя энергетическими уровнями, например при генерации и рекомбинации носителей в полупроводнике или при испускании фотонов лазером. В каждом случае необходимо задаваться вопросом, что же именно образует последовательность независимых случайных событий, которая вызывает дробовой шум.

*Генерационно-рекомбинационный шум* возникает, когда свободные носители генерируются или рекомбинируют в полупроводниковом материале. Флуктуирующие скорости генерации и рекомбинации могут рассматриваться как последовательности независимых случайно возникающих событий, и, следовательно, этот процесс может рассматриваться как дробовой шум. Однако флуктуации  $\delta n$  концентрации носителей  $n$  полезно рассматривать так же, как причину возникновения флуктуаций  $\delta R$  сопротивления  $R$  прибора. Эти флуктуации сопротивления  $\delta R$  могут быть обнаружены при прохождении постоянного тока  $I$  через прибор. Ток  $I$



создает на его зажимах флуктуирующую э. д. с.  $V(t) = I\delta R(t)$ , и эта э. д. с. может быть усилена и измерена обычными методами.

*Шум, обусловленный температурными флуктуациями* небольшого тела, возникает из-за флуктуирующего теплообмена между этим телом и окружающей его средой, из-за флуктуаций испускаемого и поглощаемого излучения и флуктуаций теплопроводности. Первый процесс можно описать флуктуациями скорости испускания и поглощения квантов малым телом. Всегда существуют и флуктуации теплопроводности, поскольку малое тело должно обязательно иметь теплопроводящие элементы (провода, соединения и т. д.), связывающие его с окружающим пространством. При движении воздуха вблизи малого тела или обтекании его жидкостью возникают также флуктуации конвективного теплообмена; однако они несущественны, поскольку могут быть исключены с использованием соответствующих методов

*Фликер-шум* может возникать по различным причинам и характеризуется своей спектральной плотностью (гл. 5). Большинство источников шума имеет спектральную плотность, которая постоянна на низких частотах и более или менее быстро убывает выше некоторой «переходной» частоты, которая является характеристикой рассматриваемого источника шума. Общей чертой различных видов фликер-шума является то, что их спектральная плотность имеет вид  $\text{const}/f^\alpha$  (где  $\alpha$  — показатель, близкий к единице), так что их влияние наиболее существенно на низких частотах.

Флуктуирующие величины, такие, как ток, напряжение, температура или число носителей, называются *случайными переменными*. Если флуктуирующая величина может принимать непрерывное множество значений, то говорят о *непрерывной* случайной переменной; если она может принимать лишь дискретные значения, то говорят о *дискретной* переменной. Флуктуирующее число носителей в полупроводниковом образце является примером дискретной случайной переменной.

---

## ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ, СРЕДНИЕ ЗНАЧЕНИЯ, АВТО- И ВЗАИМНОКОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ

При расчетах шума в электрических измерительных системах часто необходимо рассчитать среднее значение функции  $g(X)$  исследуемой случайной переменной  $X(t)$ . Оно обозначается  $\overline{g(X)}$  и рассчитывается при помощи *плотности вероятности* или функции распределения переменной  $X(t)$ .

Эта функция в свою очередь вводится при рассмотрении вероятностей в ансамбле, т. е. в очень большой совокупности систем, подверженных независимым флуктуациям. Чтобы сделать эти рассуждения более строгими, число систем необходимо устремить к бесконечности<sup>1</sup>. Эти вопросы для одной случайной переменной обсудим в разд. 2.1.1, а для нескольких — в разд. 2.1.2.

Для двух случайных переменных  $X(t)$  и  $Y(t)$ , когда  $\overline{X} = \overline{Y} = 0$ , среднее значение произведения  $\overline{XY}$  может не равняться нулю. Тогда говорят, что величины  $X(t)$  и  $Y(t)$  *коррелированы*. В частности, когда рассматривается корреляция между значениями случайной переменной  $X(u)$  в моменты времени  $t$  и  $t + s$ , функция  $\overline{X(t)X(t+s)}$  называется автокорреляционной. Обобщение этого определения для нескольких случайных переменных приводит к понятиям *авто- и взаимнокорреляционных функций* (разд. 2.2).

---

<sup>1</sup> В ансамбле из  $N$  элементов относительная точность определения средних значений равна  $N^{-1/2}$ , так что это соответствует 0,01 при  $N = 10^4$ .

## 2.1. ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И СРЕДНИЕ ЗНАЧЕНИЯ

### 2.1.1. ОДНА СЛУЧАЙНАЯ ПЕРЕМЕННАЯ

Рассмотрим ансамбль из  $N$  систем, флуктуации в которых описываются случайной переменной  $X(t)$ , и устремим  $N$  к бесконечности. Пусть  $\Delta N$  элементов данного ансамбля имеют величину  $X(t)$ , заключенную в момент  $t_1$  в пределах между  $X$  и  $X + \Delta X$ . Число  $\Delta P = \Delta N/N$  называют вероятностью того, что случайная переменная  $X(t)$  в момент времени  $t_1$  имеет значение, заключенное между  $X$  и  $X + \Delta X$ . Очевидно, что если  $\Delta X$  достаточно мало, то  $\Delta N$  пропорционально  $\Delta X$ , т. е. отношение  $\Delta P/\Delta X$  не зависит от  $\Delta X$ . Более точно это можно записать в дифференциальной форме

$$\frac{dP}{dX} = f(X, t_1) \text{ или } dP = f(X, t_1) dX. \quad (2.1)$$

Функция  $f(X, t_1)$  называется *плотностью вероятности* величины  $X$  в момент времени  $t_1$ . Если функция  $f(X, t_1 + t)$  не зависит от  $t$ , т. е.

$$f(X, t_1 + t) = f(X, t_1) = f(X), \quad (2.1a)$$

то переменную называют *стационарной*. Случайные процессы, которые встречаются в физике и технике, почти всегда стационарны.

Поскольку переменная  $X$  обязательно должна лежать в пределах диапазона допустимых значений, для интеграла по всем возможным значениям  $X$  справедливо соотношение

$$\int f(X) dX = 1. \quad (2.2)$$

Такая функция  $f(X)$  называется *нормированной*. Если функция  $f(X)$  не нормирована, ее можно умножить на нормировочный постоянный коэффициент  $C$ , чтобы функция  $Cf(X)$  оказалась нормированной, т. е.

$$\int Cf(X) dX = 1, \text{ или } C = \left[ \int f(X) dX \right]^{-1}. \quad (2.2a)$$

Таким образом, не нарушая общности, можно считать, что функция  $f(X)$  нормирована.

Теперь мы можем определить *среднее по ансамблю* следующим образом: среднее по ансамблю  $X^m$ , обозначаемое через  $\overline{X^m}$ , определяется соотношением

$$\overline{X^m} = \int X^m f(X) dX, \quad (2.3)$$

а среднее значение функции  $g(X)$  переменной  $X$  определяется равенством

$$\overline{g(X)} = \int g(X) f(X) dX, \quad (2.3a)$$

где интегрирование ведется по всей области значений  $X$ . Если  $f(X)$  — четная функция  $X$ , т. е.  $f(X) = f(-X)$ , и  $X$  может изменяться в пределах от  $-X_0$  до  $X_0$ , то средние значения всех нечетных степеней  $X$  равны нулю.

Наиболее важными средними являются  $\overline{X}$  и  $\overline{X^2}$ . Если  $\overline{X}$  не равно нулю, следует ввести новую случайную переменную  $\Delta X = X - \overline{X}$ . Тогда наиболее важным средним значением является дисперсия  $\overline{\Delta X^2}$ , которая обозначается символами  $\text{var } X$  или  $\sigma_x^2$ :

$$\begin{aligned} \text{var } X = \sigma_x^2 &= \overline{(X - \overline{X})^2} = \overline{X^2} - \overline{2X\overline{X}} + \overline{(\overline{X})^2} = \\ &= \overline{X^2} - (\overline{X})^2. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Если мы наблюдаем за единственным элементом ансамбля в течение временного интервала  $0 \leq t \leq T$ , то можем ввести среднее по времени значение  $\langle g(X) \rangle$  функции  $g(X)$ , определив его равенством

$$\langle g(X) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T g(X) dt. \quad (2.5)$$

Если это среднее по времени значение приближается к среднему по ансамблю при  $T$ , стремящемся к бесконечности, то говорят, что рассматриваемые случайные процессы являются *эргодическими*. Случайные процессы, встречающиеся в физике и технике, практически всегда являются эргодическими.

В случае дискретных случайных переменных эти определения должны быть соответствующим образом видоизменены, и все операции интегрирования должны быть заменены операциями суммирования. Пусть  $P(n)$  — вероятность того, что дискретная переменная имеет значение  $n$ . Тогда условие нормировки принимает вид

$$\sum_n P(n) = 1, \quad (2.6)$$

а среднее по ансамблю  $n^m$  должно определяться как

$$\overline{n^m} = \sum_n n^m P(n) \quad (2.7)$$

( $m = 1, 2, \dots$ ). Дисперсия  $n$  вновь определяется как

$$\text{var } n = \overline{(n - \bar{n})^2} = \overline{n^2} - (\bar{n})^2. \quad (2.8)$$

## 2.1.2 МНОГОМЕРНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И СРЕДНИЕ ЗНАЧЕНИЯ

Для двух непрерывных переменных  $X_1(t)$  и  $X_2(t)$  можно найти вероятность того, что в определенный момент времени  $t_1$  величина  $X_1(t)$  имеет значение, заключенное между  $X_1$  и  $X_1 + dX_1$ , и одновременно величина  $X_2(t)$  имеет значение, заключенное между  $X_2$  и  $X_2 + dX_2$ . По аналогии с выражением (2.1) *совместная вероятность*  $dP$  может быть записана в виде

$$dP = f(X_1, X_2, t_1) dX_1 dX_2, \quad (2.9)$$

а  $f(X_1, X_2, t_1)$  называется *совместной плотностью вероятности* переменных  $X_1$  и  $X_2$  в момент времени  $t_1$ . Обычно имеем

$$f(X_1, X_2, t_1 + t) = f(X_1, X_2, t_1) = f(X_1, X_2) \quad (2.9a)$$

для всех значений  $t$ . Такой случайный процесс называют *стационарным*.

Условие нормировки в данном случае имеет вид

$$\iint f(X_1, X_2) dX_1 dX_2 = 1, \quad (2.10)$$

а средние значения определяются тем же способом, что и для одной переменной, т. е.

$$\overline{X_1^n X_2^m} = \iint X_1^n X_2^m f(X_1, X_2) dX_1 dX_2, \quad (2.11)$$

где интегрирование выполняется по всем значениям  $X_1$  и  $X_2$ .

Обычно  $\overline{X_1} = \overline{X_2} = 0$ . Тогда наиболее важными средними значениями являются  $\overline{X_1^2}$ ,  $\overline{X_2^2}$  и  $\overline{X_1 X_2}$ . Если  $\overline{X_1 X_2} = 0$ , то величины называют *некоррелированными*; если  $\overline{X_1 X_2} \neq 0$ , то величины называют *коррелированными*. Параметр

$$c = \frac{\overline{X_1 X_2}}{(\overline{X_1^2} \cdot \overline{X_2^2})^{1/2}}, \quad (2.12)$$

называют *коэффициентом корреляции*. Используя неравенство  $(aX_1 + bX_2)^2 \geq 0$  (для всех значений  $a$  и  $b$ ), можно показать, что  $-1 \leq c \leq 1$ . В случае  $|c| = 1$  говорят о *полной* корреляции, в случае  $|c| < 1$  — о *частичной*.

Эти рассуждения легко распространить на случай  $m$  переменных  $X_1, X_2, \dots, X_m$  или дискретных переменных  $n_1, n_2, \dots, n_m$ . Соответствующие определения подобны тем, которые введены в случае двух переменных.

Если две случайные переменные  $X(t)$  и  $Y(t)$  частично коррелированы, т. е.  $|c| < 1$ , то  $Y$  можно разделить на часть  $aX$ , полностью коррелированную с  $X$ , и часть  $Z$ , которая с  $X$  не коррелирована. Таким образом, можно записать

$$Y = aX + Z, \quad (2.13)$$

где  $\overline{X} = \overline{Y} = \overline{Z} = 0$  и  $\overline{XZ} = 0$ . Поскольку  $\overline{XY} = a\overline{X^2}$ , а  $\overline{Y^2} = a^2\overline{X^2} + \overline{Z^2}$ , из определения коэффициента  $c$  получим

$$a = c \left( \frac{\overline{Y^2}}{\overline{X^2}} \right)^{1/2}, \quad \overline{Z^2} = \overline{Y^2} (1 - c^2). \quad (2.13a)$$

Эти формулы полезны при обсуждении шумов в биполярных и полевых транзисторах.

## 2.2. АВТО- И ВЗАИМОКОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ

Особенно важным оказывается случай двух частично коррелированных переменных, когда  $X_1(t) = X(t)$ , а  $X_2(t) = X(t+s)$ . Тогда обычным образом можно ввести совместную функцию плотности вероятности  $f(X_1, X_2)$  и средние значения. Среднее значение  $\overline{X_1 X_2} = \overline{X(t) X(t+s)}$  называется *автокорреляционной функцией*. Она является мерой продолжительности последствия данной флуктуации.

Автокорреляционная функция обладает следующими свойствами.

1.  $\overline{X(t) X(t+s)}$  не зависит от  $t$ , если  $X(t)$  стационарна.

2.  $\overline{X(t) X(t+s)}$  — либо непрерывная функция, либо является  $\delta$ -функцией от  $s$ . Если  $\overline{X(t) X(t+s)}$  не является  $\delta$ -функцией от  $s$ , то любые разрывы  $X(t)$  и  $X(t+s)$  имеют место в различные моменты для различных элементов ансамбля, так что они исчезают после выполнения операции усреднения. Вследствие этого  $\overline{X(t) X(t+s)} = \overline{X^2(t)}$  при  $s = 0$ , если только автокорреляционная функция не является  $\delta$ -функцией от  $s$ .

3.  $\overline{X(t) X(t+s)}$  — четная функция от  $s$ , если  $X(t)$  стационарна. Это доказывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \overline{X(t) X(t+s)} &= \overline{X(u-s) X(u)} = \overline{X(u) X(u-s)} = \\ &= \overline{X(t) X(t-s)}. \end{aligned}$$

Первый шаг заключается в подстановке  $u = t + s$ . Второй шаг — в перестановке сомножителей. Третий шаг — в замене переменной  $u$  на  $t$ , которая возможна, поскольку функция  $X(t)$  стационарна.

4. При  $s \rightarrow \infty$  функция  $\overline{X(t)X(t+s)}$  стремится к нулю достаточно быстро, так что интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\overline{X(t)X(t+s)}| ds \quad (2.14)$$

существует. Это справедливо для всех источников шума за исключением, быть может, фликер-шума.

5. Коэффициент корреляции

$$c(s) = \frac{\overline{X_1 X_2}}{[\overline{X_1^2} \cdot \overline{X_2^2}]^{1/2}} = \frac{\overline{X(t)X(t+s)}}{\overline{X^2}} \quad (2.15)$$

называется *нормированной автокорреляционной функцией*. Она существует, если  $\overline{X(t)X(t+s)}$  не является  $\delta$ -функцией от  $s$ . Здесь мы использовали тот факт, что  $X(t)$  стационарна, так что  $\overline{X_1^2} = \overline{X_2^2} = \overline{X^2}$ .

В особом случае двух частично коррелированных переменных  $X(t)$  и  $Y(t)$  можно ввести *автокорреляционные функции*  $\overline{X(t)X(t+s)}$  и  $\overline{Y(t)Y(t+s)}$  и *взаимокорреляционные функции*  $\overline{X(t)Y(t+s)}$  и  $\overline{X(t+s)Y(t)}$ . Первые из них — четные функции от  $s$ , в то время как последние — обычно нечетны. Более того, взаимокорреляционные функции, хотя и связаны между собой, не являются тождественными. Аналогично случаю одной переменной получим

$$\overline{X(t)Y(t+s)} = \overline{X(u-s)Y(u)} = \overline{X(t-s)Y(t)}, \quad (2.16)$$

$$\overline{X(t+s)Y(t)} = \overline{X(u)Y(u-s)} = \overline{X(t)Y(t-s)}. \quad (2.16a)$$

В каждом случае в процессе первого шага переменная  $t+s$  заменяется на  $u$ , в процессе второго —  $u$  на  $t$ . Последнее возможно, если случайные процессы стационарны.



---

## ПРОСТЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

С помощью представлений о средних значениях случайных величин мы уже можем понять, какова предельная точность некоторых простых измерений, определяемая влиянием внутреннего шума измерительной системы.

В качестве первого примера мы рассмотрим шум в электрических цепях (разд. 3.1.1) и покажем, что он становится существенным, когда обрабатываемый сигнал находится в микровольтовом диапазоне. Во втором примере мы проанализируем шум в чувствительных гальванометрах (разд. 3.1.2) и покажем, что он ограничивает точность измерения тока, когда токи имеют величины порядка 1 пА.

Гораздо большей чувствительности измерений можно достичь, если имеется возможность использования счетной техники (разд. 3.2). Например, электронные токи в вакууме можно усилить с помощью электронного умножителя настолько, что появится возможность считать отдельные электроны. Таким способом могут быть измерены весьма малые токи (разд. 3.2.1). Поток фотонов можно направить на катод фотоумножителя и считать таким способом отдельные фотоны. Этим методом можно измерять очень малые мощности излучения (разд. 3.2.2).

### 3.1. ШУМ ПРИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЯХ

Малые частицы, взвешенные в жидкости, совершают случайное зигзагообразное движение, названное *броуновским*. Интенсивные исследования броуновского движения проводились в 1890—1910 гг., а в 1905 г. Эйнштейн развил его теорию. Эйнштейн предположил, что средняя кинетическая энергия, приходящаяся на одну степень свободы частицы, должна определяться соотношением статистической механики

$$\frac{1}{2} M \overline{v_x^2} = \frac{1}{2} kT, \quad (3.1)$$

где  $M$  — масса частицы,  $v_x$  — проекция ее мгновенной скорости на ось  $X$ ,  $\overline{v_x^2}$  — ее средний квадрат,  $k$  — постоянная Больцмана и  $T$  — абсолютная температура. Однако реально наблюдается под микроскопом не составляющая мгновенной скорости  $v_x$ , а смещение  $\Delta x$  в направлении  $X$  в течение временного интервала  $t$ . Эйнштейн показал, что

$$\overline{\Delta x^2} = 2Dt, \quad (3.2)$$

где  $\overline{\Delta x^2}$  — средний квадрат  $\Delta x$ ,  $D$  — коэффициент диффузии. Это равенство было подтверждено позже экспериментально.

Эйнштейн нашел, что броуновское движение должно наблюдаться во многих физических системах. Например, тепловой шум — это не что иное, как броуновское движение носителей заряда в электрических цепях. Обсудим здесь его проявления во входной цепи широкополосного усилителя и в чувствительном гальванометре.

#### 3.1.1. ШУМ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

В качестве примера электрической схемы рассмотрим  $RC$ -цепь (рис. 3.1). Под влиянием случайного теплового движения электронов в резисторе  $R$  конденсатор  $C$  будет случайным образом заряжаться и разря-

жаться. По аналогии с (3.1) средняя энергия, накопленная в конденсаторе, определяется равенством

$$\frac{1}{2} C \bar{v}^2 = \frac{1}{2} kT \quad \text{или} \quad \bar{v}^2 = kT/C. \quad (3.3)$$

Величина  $(\bar{v}^2)^{1/2}$  лежит в микровольтовом диапазоне. Примем  $C = 30$  пФ,  $T = 300$  К,  $k = 1,38 \times 10^{-23}$  Дж/град, в таком случае  $\bar{v}^2 = 1,38 \cdot 10^{-10}$  В<sup>2</sup>

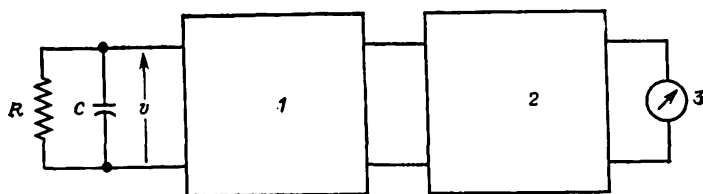


Рис. 3.1.

Напряжение  $v$  теплового шума  $RC$ -цепи усиливается широкополосным усилителем 1, проходит через квадратичный детектор 2 и измеряется прибором 3.

и  $(\bar{v}^2)^{1/2} \cong 12$  мкВ. Следовательно, если необходимо обрабатывать с помощью широкополосного усилителя электрические сигналы и уровень этих сигналов на входе лежит в микровольтовом диапазоне, мы столкнемся с проблемой шума входной цепи.

Необходимо заметить, что величина сопротивления  $R$  резистора не входит в конечное выражение. Оно определяет лишь величину полосы широкополосного усилителя, обрабатывающего шумовой сигнал, требуемую для измерения полного напряжения на конденсаторе  $C$ .

Структурная схема измерения  $\bar{v}^2$  показана на рис. 3.1. Электрическая цепь подключена к входу широкополосного усилителя, который усиливает напряжение  $v$  в  $g$  раз ( $g \gg 1$ ). Выходное напряжение подается на квадратичный детектор, который образует на выходе величину  $g^2 \bar{v}^2$ , поступающую на измерительный прибор  $M$ , так что его показание пропорционально  $\bar{v}^2$ .

Очень часто задача ставится иначе. Например, требуется измерить малое постоянное напряжение  $v_0$ , или малый переменный сигнал  $v_0 \cos \omega t$  с фиксированной частотой. Шум при этом является мешающим фактором, и его необходимо сделать по возможности малым. Поэтому важно отфильтровать большую часть при помощи узкополосного фильтра (фильтра нижних частот в случае постоянного сигнала и полосового фильтра с центральной частотой  $\omega$  в случае переменного сигнала). Чтобы рассчитать выходную величину такого фильтра, необходимо провести фурье-анализ шума; этот вопрос обсуждается в гл. 5.

В заключение докажем теорему (3.3) о равномерном распределении энергии по степеням свободы. Если система имеет температуру  $T$ , то вероятность того, что она имеет энергию  $E$ , пропорциональна  $\exp(-E/kT)$ . Множитель  $\exp(-E/kT)$  называется *множителем Больцмана*. В  $RC$ -цепи энергия, накопленная в конденсаторе  $C$ , равна  $\frac{1}{2}Cv^2$ , где  $v$  — напряжение на конденсаторе  $C$ . Вероятность  $dP$  того, что величина напряжения лежит в интервале между  $v$  и  $v + dv$ , определена выражением

$$dP = C_0 \exp\left(-\frac{\frac{1}{2}Cv^2}{kT}\right) dv, \quad (3.4)$$

где постоянная  $C_0$  должна выбираться так, чтобы

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dP &= 1 \text{ или } C_0 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\frac{1}{2}Cv^2}{kT}\right) dv = \\ &= C_0 \left(\frac{2kT}{C}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx = \\ &= \left(\frac{2kT}{C}\right)^{1/2} \pi^{1/2} C_0 = 1, \text{ или } C_0 = \left(\frac{C}{2\pi kT}\right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.4a)$$

Здесь  $x^2 = Cv^2/2kT$ . Поэтому подстановкой выражения для  $C_0$  получим

$$\begin{aligned}\bar{v}^2 &= C_0 \int_{-\infty}^{\infty} v^2 \exp\left(-\frac{Cv^2}{2kT}\right) dv = \\ &= C_0 \left(\frac{2kT}{C}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp(-x^2) dx = \\ &= C_0 \left(\frac{2kT}{C}\right)^{1/2} \cdot \frac{\pi^{1/2}}{2} = \frac{kT}{C}.\end{aligned}\quad (3.46)$$

Этот результат совпадает с выражением (3.3).

### 3.1.2. ШУМ В ГАЛЬВАНОМЕТРАХ

Другим примером броуновского движения является случайное вращение катушки гальванометра вокруг оси ее подвеса. Рассмотрим гальванометр с электромагнитным демпфированием, в котором отклонение катушки описывается дифференциальным уравнением

$$\Theta \frac{d^2\varphi}{dt^2} + n_0^2 \frac{A^2 B^2}{r} \cdot \frac{d\varphi}{dt} + D\varphi = n_0 ABi(t). \quad (3.5)$$

Здесь  $\Theta$  — момент инерции катушки,  $A$  — ее площадь,  $n_0$  — число витков,  $B$  — плотность магнитного потока,  $D\varphi$  — восстанавливающий момент, который стремится вернуть катушку в состояние равновесия, и  $i(t)$  — ток, протекающий через катушку, который вызывает отклоняющий момент  $n_0 ABi(t)$ , действующий на нее. Наконец,  $r$  — это сопротивление замкнутой цепи, состоящее из сопротивления катушки и некоторого внешнего резистора.

Член  $(n_0^2 A^2 B^2 / r) (d\varphi / dt)$  представляет собой демпфирующий момент, действующий на катушку. Чтобы понять его смысл, заметим, что  $d\varphi / dt$  — угловая скорость катушки; следовательно,  $-n_0 AB (d\varphi / dt)$  — это наведенная э. д. с., вызванная движением катушки, а  $-(n_0 AB / r) (d\varphi / dt)$  — ток, протекающий по цепи; умножая это выражение на  $n_0 AB$ , получим демпфиру-

ющий момент —  $(n_0^2 A^2 B^2 / r) (d\varphi / dt)$ . В такой форме он учитывается в правой части уравнения (3.5). Переносим его в левую часть, получим (3.5) в окончательном виде.

Если ток  $i(t)$ , протекающий через катушку, представляет собой постоянный ток  $I$ , то решение уравнения (3.5) в установившемся режиме имеет вид

$$\varphi = \frac{n_0 AB}{D} I. \quad (3.6)$$

Постоянная величина  $n_0 AB / D$  называется *технической чувствительностью* гальванометра. Ее можно сделать большой, уменьшая величину  $D$ . Однако, двигаясь в этом направлении, сталкиваются с проблемами шума. В соответствии с теоремой о равномерном распределении энергии по степеням свободы средняя потенциальная энергия, запасенная в катушке, определяется выражением

$$\frac{1}{2} D \overline{\varphi^2} = \frac{1}{2} kT \quad \text{или} \quad \overline{\varphi^2} = \frac{kT}{D}. \quad (3.7)$$

Таким образом, малой величине  $D$  соответствует большое среднеквадратичное отклонение (СКО)  $(\overline{\varphi^2})^{1/2}$  катушки. Доказательство равенства (3.7) подобно ранее приведенному доказательству равенства (3.3).

К сожалению, коэффициент диффузии  $D$  не так легко измерить. Поэтому желательно выразить  $\overline{\varphi^2}$  через более удобные параметры. Более того, нас не столько интересует сама величина  $(\overline{\varphi^2})^{1/2}$ , сколько минимальный ток  $I_{\text{мин}}$ , который ей соответствует.

В гальванометрах практически всегда используют критическое затухание, поскольку оно позволяет получить наибольшую скорость и наилучшее качество переходного процесса. Чтобы объяснить, что это значит, рассмотрим реакцию гальванометра на воздействие тока  $i(t)$  в виде ступенчатой функции  $ai(t)$ , где  $a$  — малый скачок тока. Введем три параметра (резонансную частоту  $\omega_0$ , коэффициент затухания  $n$  и постоянную времени  $\tau_0$ ) при помощи следующих равенств:

$$\omega_0 = \left( \frac{D}{\Theta} \right)^{1/2}; \quad \frac{n_0^2 A^2 B^2}{r} = 2n\omega_0\Theta; \quad \tau_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (3.8)$$

Разделив уравнение (3.5) на  $\Theta$  и выполнив соответствующие подстановки, получим

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2n\omega_0 \frac{d\varphi}{dt} + \omega_0^2 \varphi = \frac{n_0 AB}{\Theta} a u(t). \quad (3.9)$$

Теперь применение стандартного математического метода показывает, что решение уравнения (3.9) описывает затухающее периодическое колебание, если  $n < 1$ , и аperiodическое колебание, если  $n > 1$ . Наибольшая скорость и наилучшее качество переходного процесса получаются при  $n = 1$ . При этом гальванометр работает на границе аperiodического режима, и говорят, что он *критически демпфирован*.

Введем теперь предельный постоянный ток  $I_{\text{мин}}$ , который требуется для получения отклонения, равного  $(\overline{\varphi^2})^{1/2}$ . Следовательно,

$$I_{\text{мин}} \frac{n_0 AB}{D} = (\overline{\varphi^2})^{1/2} \quad (3.10)$$

или

$$I_{\text{мин}} = \left( \frac{D^2}{n_0^2 A^2 B^2} \cdot \frac{kT}{D} \right)^{1/2} = \left( \frac{DkT}{2n\omega_0 \Theta r} \right)^{1/2} = \left( \frac{\pi kT}{nr\tau_0} \right)^{1/2}. \quad (3.10a)$$

Эти величины легко измерить.

Принимая величины  $r = 1000$  Ом,  $n = 1$ ,  $\tau_0 = 2$  с,  $T = 300$  К, получим величину  $I_{\text{мин}} = 2,5 \cdot 10^{-12}$  А. Таким образом, шум гальванометра становится существенным при измерении токов порядка пикоампер.

## 3.2. ИЗМЕРЕНИЯ ПРИ ПОМОЩИ СЧЕТНОЙ ТЕХНИКИ

Предположим, что определенные события, например испускание электронов или фотонов, происходят в случайные моменты времени со средней частотой  $\lambda$ . Такие события называют *пуассоновскими*. Вопрос теперь заключается в том, как измерить  $\lambda$  и определить точность этого измерения.

Если в течение временного интервала  $\tau$  наблюдается  $N$  событий, то среднее значение  $N$  равно

$$\bar{N} = \lambda\tau \text{ или } \lambda = \bar{N}/\tau. \quad (3.11)$$

Если наблюдение повторяется многократно, то наблюдаемое значение  $N$  будет флуктуировать относительно величины  $\bar{N}$ . Введем флуктуацию  $\Delta N = N - \bar{N}$ . В гл. 4 будет показано, что для таких событий

$$\overline{\Delta N^2} = \text{var } N = \bar{N} = \lambda\tau. \quad (3.12)$$

Следовательно, погрешность единичного измерения равна  $\Delta\lambda = \Delta N/\tau$ , а ее средний квадрат определяется выражением

$$\overline{\Delta\lambda^2} = \overline{\left(\frac{\Delta N}{\tau}\right)^2} = \frac{\overline{\Delta N^2}}{\tau^2} = \frac{\lambda}{\tau}. \quad (3.12a)$$

Таким образом, среднеквадратичная погрешность единичного измерения составляет  $1/\tau^{1/2}$ . Чем больше значение  $\tau$ , тем точнее измерение величины  $\lambda$ .

Введем теперь предельную точность измерения, поставив вопрос о том, какая наименьшая величина  $\lambda$  может быть измерена. Примем эту величину  $\lambda$  такой, что

$$[(\Delta\lambda)^2]^{1/2} = \lambda, \text{ или } \left(\frac{\lambda}{\tau}\right)^{1/2} = \lambda, \text{ или } \lambda\tau = \bar{N} = 1. \quad (3.12b)$$

Таким образом, предельная точность достигается, если в среднем один отсчет делается за  $\tau$  секунд.

Рассмотрим в качестве примера подсчет электронов. Пусть электроны подсчитываются в течение 5 с. Если на интервал счета приходится в среднем один электрон, то средний ток равен

$$\bar{I} = \frac{e}{\tau} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19}}{5} = 3,2 \cdot 10^{-20} \text{ А.}$$

Точность этого метода на много порядков лучше точности измерения тока при помощи гальванометров; она показывает, насколько мощным является метод счета.



### 3.2.1. ИЗМЕРЕНИЕ ТОКА ПРИ ПОМОЩИ СЧЕТНОЙ ТЕХНИКИ

Измерение тока при помощи счетной техники можно осуществить при наличии свободных электронов, движущихся в вакууме. Тогда их можно ускорить и направить на первый динод вторично-эмиссионного умножителя с  $t$  динодами (рис. 3.2).

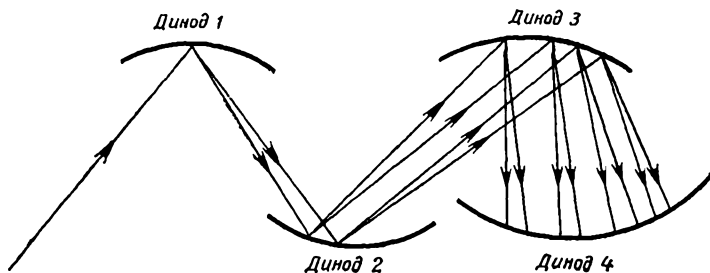


Рис. 3.2. Умножение электронов во вторично-эмиссионном умножителе.

Электронный луч падает на первый динод, умножается и с ускорением направляется на второй динод, снова умножается и с ускорением направляется на третий динод, снова умножается и т. д.

Пусть каждый динод дает  $\delta$  вторичных электронов на падающий первичный электрон. Тогда на выходе получается  $\delta^t$  электронов на падающий первичный электрон. Это число может быть сделано настолько большим, что появится возможность считать отдельные импульсы.

В этом методе имеются две трудности, связанные с первым динодом, который поглощает отдельные электроны и испускает электроны сам в соответствии с эффектом термоэлектронной эмиссии. Сущность первой трудности в том, что вероятность  $p$  возникновения выходного импульса при ударе электрона о первый динод является величиной, несколько меньшей единицы. Если входные электроны появляются независимо и случайно, то и выходные импульсы образуются неза-

висимо и случайно. Следовательно, если  $N$  входящих электронов вызывают появление  $n$  импульсов, то

$$\bar{n} = \bar{N}p, \text{ var } n = \overline{\Delta n^2} = \bar{n} = \bar{N}p. \quad (3.13)$$

Если время наблюдения равно  $\tau$ , то средняя частота прихода электронов  $\lambda = \bar{N}/\tau$ , а средняя частота образования импульсов  $\bar{n}/\tau = p\lambda$ . Следовательно,

$$\left(\frac{\Delta n}{\tau}\right)^2 = \frac{\bar{n}}{\tau^2} = \frac{\bar{N}p}{\tau^2} = \frac{p\lambda}{\tau}. \quad (3.13a)$$

Теперь предельная точность достигается, если

$$\left(\frac{p\lambda}{\tau}\right)^{1/2} = p\lambda, \text{ или } p\lambda\tau = 1, \text{ или } \bar{N} = \frac{1}{p}. \quad (3.13b)$$

Во вторично-эмиссионных умножителях, дающих умножение в  $\delta$  раз на каскад, величина  $p$  приближенно определяется формулой (гл. 4)

$$p = 1 - \exp(-\delta), \quad (3.14)$$

так что при  $\delta > 4$  этот эффект незначителен, в то время как при меньших  $\delta$  его влияние весьма существенно. Кроме того, некоторые из первичных электронов отражаются динодом и не выбивают вторичных электронов. Это явление не учитывается выражением (3.14).

Вторая трудность лучше всего преодолевается охлаждением динодов. Ток эмиссии  $I$  определяется законом Ричардсона

$$I = CST^2 \exp\left(-\frac{e\Phi}{kT}\right), \quad (3.15)$$

где  $C = 120 \text{ A/cm}^2$ ,  $S$  — площадь динода,  $\Phi$  — работа выхода в электрон-вольтах и  $T$  — температура динода. Следовательно, охлаждением динода можно свести экспоненциальный множитель к очень малой величине.

Метод, основанный на использовании вторично-эмиссионных умножителей, находит широкое применение в физике и технике для измерения очень малых электронных или ионных токов в вакууме.

### 3.2.2. ИЗМЕРЕНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ ПОМОЩИ СЧЕТНОЙ ТЕХНИКИ

Такой же подход применим для счета числа фотонов. Если фотоны испускаются лазером, их испускание происходит независимо и случайно, т. е.  $\text{var } N = \bar{N}$ , где  $\bar{N}$  — число фотонов, испускаемых в течение заданного временного интервала  $\tau$ .

Теперь для счета фотонов необходимо использовать фотоумножитель. Он состоит из фотокатода, испускающего электроны под действием фотонов. Эти электроны фокусируются на первом диноде вторично-эмиссионного умножителя, умножающего число первичных электронов и создающего достаточно мощные электрические импульсы, которые можно считать.

Трудность этого метода состоит в том, что фотокатод обычно имеет низкий квантовый выход  $\eta$ , определяемый средним числом фотоэлектронов, испускаемых под действием падающего кванта. Такова цена, которую приходится платить за возможность использования метода счета фотонов. Очевидно, что теория, рассмотренная в предыдущем разделе, остается справедливой, если  $p$  заменить на  $\eta$ . Это значит, что минимальное число фотонов, которое можно сосчитать за  $\tau$  секунд, равно

$$\bar{N} = 1/\eta. \quad (3.16)$$

Пример:  $\eta = 0,05$ , энергия фотона  $V_{\phi} = 2,0$  эВ,  $\tau = 5$  с.

В этом случае  $\bar{N} = 1/\eta = 20$ . Минимальная обнаруживаемая энергия  $E_{\text{мин}} = e\bar{N}V_{\phi} = 1,6 \cdot 10^{-19} \times 20 \times 2,0 = 6,4 \cdot 10^{-18}$  Дж, а минимальная обнаруживаемая мощность равна

$$P_{\text{мин}} = \frac{E_{\text{мин}}}{\tau} = \frac{6,4 \cdot 10^{-18}}{5} = 1,28 \cdot 10^{-18} \text{ Вт.}$$

$1,28 \cdot 10^{-18} \text{ Вт}$

---

## ТИПИЧНЫЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ. ТЕОРЕМА О ДИСПЕРСИИ

В этой главе мы рассмотрим три типичных закона распределения, встречающихся в физике и технике: а) биномиальный закон, б) закон Пуассона и в) нормальный закон. Кроме того, мы обсудим теорему Буржесса о дисперсии, используемую для расчета средних квадратов в сложных статистических задачах.

### 4.1. ТИПИЧНЫЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

#### 4.1.1. БИНОМИАЛЬНЫЙ ПРОЦЕСС

Биномиальный процесс определяется следующим образом. Предположим, что некоторый эксперимент повторяется  $m$  раз. Пусть  $p$  — вероятность успешного исхода эксперимента, а  $1 - p$  — вероятность неудачного исхода. Допустим, что из  $m$  попыток достигнуто  $n$  успешных исходов. Тогда

$$\bar{n} = mp, \quad \text{var } n = mp(1 - p), \quad (4.1)$$

и распределение вероятности имеет вид

$$P_m(n) = \frac{m!}{n!(m-n)!} p^n (1-p)^{m-n}. \quad (4.2)$$

Этот закон называется *биномиальным*, поскольку  $P_m(n)$  — это  $(n + 1)$ -й член разложения бинома  $[p + (1 - p)]^m$ .

Прежде чем доказывать эти теоремы, обсудим несколько случаев их применения.

1. **Вакуумный пентод.** «Испытание» здесь — испускание электрона катодом. «Успех» — попадание электрона на анод, а «неуспех» — улавливание его экранной сеткой.

2. **Транзистор.** «Испытание» — инжекция неосновного носителя из эмиттера в базу. «Успех» — достижение этим носителем коллектора, а «неуспех» — рекомбинация его в базе.

3. **Фотодиод.** «Испытание» — поглощение фотона  $p$  —  $n$ -переходом. «Успех» — тот случай, когда регистрируется рождение пары электрон — дырка, и «неуспех», — когда эта пара не регистрируется.

4. **Фотокатод.** «Испытание» — поглощение фотона катодом. «Успех» — эмиссия фотоэлектрона, «неуспех» — случай отсутствия эмиссии электрона.

5. **Полупрозрачное зеркало.** «Испытание» — подход фотона к зеркалу. «Успех» — прохождение фотона, «неуспех» — отражение его.

Теперь несколько слов о соотношениях (4.1). Первое из них очевидно. Поскольку  $p$  — вероятность успеха (при независимых испытаниях),  $\bar{n}$  равно числу испытаний, умноженному на вероятность успеха в каждом испытании. Второе становится понятным, если принять во внимание, что понятия «успех» и «неуспех» являются равноценными, и, следовательно, выражение  $\text{var } n$  должно быть симметричным относительно  $p$  и  $1 - p$ . Второе из выражений (4.1) представляет собой простейшую формулу, в которой это условие выполняется. Поскольку отдельные испытания независимы, очевидно, что  $\text{var } n$  должна быть пропорциональна величине  $m$ . Следовательно, достаточно доказать его справедливость для  $m = 1$ . Это сделать просто, так как если  $m = 1$ , то величина  $n$  равна 0 или 1. Далее, если  $n = 0$ , то  $n^2 = 0$ , а если  $n = 1$ , то  $n^2 = 1$ , т. е. в любом случае  $n^2 = n$ . Следовательно,

$$\bar{n} = p, \quad \overline{n^2} = \bar{n} = p,$$

$$\text{var } n = \overline{n^2} - (\bar{n})^2 = p - p^2 = p(1 - p),$$

что и требовалось доказать.

Следует отметить, что  $\text{var } n = 0$  при  $p = 0$  и  $p = 1$ ; наибольшее значение оно принимает при  $p = 1/2$ , причем в этом случае  $\text{var } n = m/4$ .

Перейдем к доказательству равенства (4.2). Вероятность того, что  $m$  испытаний дадут точно  $n$  успехов и  $m - n$  неуспехов в заданной последовательности, равна  $p^n (1 - p)^{m-n}$ . Существует

$$\frac{m!}{n!(m-n)!}$$

способов различного расположения  $n$  успехов в последовательности из  $m$  испытаний, и все они равновероятны. Следовательно, выражение (4.2) справедливо.

Другим важным примером биномиальной статистики является статистика Ферми. В статистике Ферми «энергетическое состояние» описывается квантовыми числами  $n_1, n_2, n_3$  и  $m_s$ , где  $n_1, n_2, n_3$  описывают тип волны, а  $m_s$  — ориентацию спина. В соответствии с принципом Паули энергетическое состояние может быть пустым или занятым одним электроном. Следовательно, применима биномиальная статистика. Если  $f$  есть вероятность того, что определенное энергетическое состояние занято, и в этом состоянии находится  $n$  электронов, то

$$\bar{n} = f, \quad \text{var } n = f(1 - f) = \bar{n} - (\bar{n})^2. \quad (4.3)$$

В последней из этих формул нет ничего необычного. Она является простым следствием принципа Паули.

#### 4.1.2. ПУАССОНОВСКИЙ ПРОЦЕСС

Пуассоновский процесс может быть определен следующим образом. Пусть некоторое число событий происходит независимо в случайные моменты времени. Если  $n$  событий происходит в течение фиксированного временного интервала  $\tau$ , то

$$\text{var } n = \bar{n}, \quad (4.4)$$

и функция распределения  $P(n)$  для  $n$  является *распределением Пуассона*.

$$P(n) = \frac{(\bar{n})^n}{n!} \exp(-\bar{n}). \quad (4.5)$$

Перед доказательством этих теорем приведем несколько примеров таких процессов.

1. **Ток насыщения в термоэлектронном катоде.** Электроны эмиттируются независимо в случайные моменты времени. Следовательно, эмиссия электронов есть пуассоновский процесс.

2. **Инжекция электронов в  $p$ -область  $n^+$  —  $p$ -диода** Электроны инжектируются независимо и в случайные моменты времени. Следовательно, инжекция электронов — пуассоновский процесс.

3. **Испускание фотонов лазером.** Фотоны испускаются независимо и в случайные моменты времени. Следовательно, процесс их испускания является пуассоновским. Поскольку излучение фотонов лазером — это также последовательность независимых событий, происходящих в случайные моменты времени, процесс также является пуассоновским.

Однако процесс испускания излучения черным телом не является пуассоновским, так как фотоны испускаются группами. Следовательно,  $\text{var } n > \bar{n}$ . Такой процесс испускания называют *суперпуассоновским*.

Чтобы доказать равенства (4.4) и (4.5), разделим временной интервал  $\tau$  на  $m$  интервалов равной длины  $\tau/m$ , где  $m \gg \bar{n}$ . Тогда вероятность  $p = \bar{n}/m$  того, что в течение интервала  $\tau/m$  произойдет одно событие, очень мала, а вероятность того, что произойдет более чем одно событие, такова, что ею можно пренебречь. Таким образом, справедлив биномиальный закон, т. е.

$$\bar{n} = mp, \quad \text{var } n = mp(1 - p),$$

и функция распределения равна  $P_m(n)$ . Устремим теперь  $m$  к бесконечности так, чтобы произведение  $mp = \bar{n}$  оставалось постоянным. Тогда  $p \rightarrow 0$  и, следовательно,  $\text{var } n = mp = \bar{n}$ , что и требовалось доказать.

Чтобы доказать равенство (4.5), необходимо показать, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty, mp = \bar{n}} P_m(n) = \frac{(\bar{n})^n}{n!} \exp(-\bar{n}).$$

Сделать это несложно. Запишем

$$P_m(n) = \frac{(1-p)^m}{n!} \frac{m!}{(m-n)!} \cdot (1-p)^{-n} p^n.$$

Учтем, что

$$\begin{aligned} (1-p)^m &= [(1-p)^{1/p}]^{mp} = [(1-p)^{1/p}]^{\bar{n}} = \\ &= \left(\frac{1}{e}\right)^{\bar{n}} = \exp(-\bar{n}), \end{aligned}$$

поскольку  $\lim_{p \rightarrow 0} (1-p)^{1/p} = 1/e$  и  $\lim_{p \rightarrow 0} (1-p)^{-n} = 1$  при любом конечном  $n$ . Теперь осталось доказать, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{mp = \bar{n}} \frac{m! p^n}{(m-n)!} = (\bar{n})^n.$$

Поскольку  $p = \bar{n}/m$ ,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{mp = \bar{n}} \frac{m!}{(m-n)!} p^n = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m!}{(m-n)!} \frac{(\bar{n})^n}{m^n},$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m}{m} \cdot \frac{m-1}{m} \cdot \frac{m-2}{m} \cdot \dots \cdot \frac{m-n+1}{m} \cdot (\bar{n})^n = (\bar{n})^n,$$

что и требовалось доказать.

Применим теперь закон Пуассона к вторично-эмиссионному диноду, чтобы оценить вероятность отсутствия эмиссии вторичного электрона. Предположим, что процесс вторичной эмиссии может приближенно рассматриваться как пуассоновский, пока начальная энергия не слишком велика (разд. 4.2). Следовательно, вероятность того, что электрон не испускается, равна

$$P(0) = 1 - p = \frac{(\bar{n})^0}{0!} \exp(-\bar{n}) = \exp(-\bar{n}) = \exp(-\delta)$$

или  $p = 1 - P(0) = 1 - \exp(-\delta)$ . Этим доказывается равенство (3.14).



### 4.1.3. НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН

Для больших значений  $n$  биномиальное распределение  $P_m(n)$  и пуассоновское распределение  $P(n)$  могут быть аппроксимированы так называемым *нормальным распределением*

$$P(n) = \frac{1}{(2\pi \operatorname{var} n)^{1/2}} \exp\left[-\frac{(n - \bar{n})^2}{2 \operatorname{var} n}\right]. \quad (4.6)$$

В том случае, когда  $\operatorname{var} n = \bar{n}$ , его иногда называют *гауссовским* распределением. Для пуассоновского процесса (или дробового шума)  $\operatorname{var} n = \bar{n}$ .

Доказательство (4.6) проводится следующим образом. Пусть функция  $P_m(n)$  имеет максимум при  $n = n_0 \cong \bar{n}$ . Разложим функцию  $\ln P_m(n)$  в ряд Тейлора по  $\Delta n = n - n_0$  и ограничимся членами второго порядка. Такое представление оказывается достаточно точным, если  $n_0$  велико. Поскольку  $n$  является большим числом, можно использовать приближенное выражение

$$\frac{d}{dn} [\ln P_m(n)] \cong \frac{\ln P_m(n+1) - \ln P_m(n)}{n+1-n}. \quad (4.6a)$$

Приравнивая это выражение к нулю, найдем  $n_0$ . Вычисляя вторую производную при  $n = n_0$ , найдем

$$\ln P_m(n) = \ln P_m(n_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dn^2} \ln P_m(n) \Big|_{n=n_0} \Delta n^2. \quad (4.6b)$$

Сравнение этого выражения с выражением (4.6) показывает их полное совпадение и позволяет определить  $\operatorname{var} n$ .

Подобное распределение может быть записано и для непрерывной случайной переменной  $x$  со средним значением  $\bar{x}$  и дисперсией  $\sigma_x^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$ . По аналогии с выражением (4.6) имеем

$$P(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma_x^2)^{1/2}} \exp\left(-\frac{(x - \bar{x})^2}{2\sigma_x^2}\right). \quad (4.7)$$

Это выражение легко обобщается на случай нескольких переменных. В случае двух переменных  $x$  и  $y$  необходимо рассматривать средние значения  $\bar{x}^2$ ,  $\bar{xy}$  и  $\bar{y}^2$ . Мы сначала обсудим случай, когда  $\bar{xy} = 0$ . Такие случайные переменные независимы и имеют совместную плотность вероятности.

$$P(x, y) = \frac{1}{2\pi(\sigma_x^2\sigma_y^2)^{1/2}} \exp \left[ -\frac{(x - \bar{x})^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y - \bar{y})^2}{2\sigma_y^2} \right]. \quad (4.8)$$

Теперь ортогональным преобразованием можно перейти к новым случайным переменным  $x_1$  и  $x_2$ , которые могут быть частично коррелированы. Для них получается плотность вероятности [1]

$$P(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi M^{1/2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (x' M^{-1} x) \right], \quad (4.9)$$

где  $x$ ,  $x'$  и  $M$  — матрицы следующего вида:

$$x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}, \quad x' = \{x_1, x_2\}, \quad M = \begin{Bmatrix} \bar{x}_1^2 & \bar{x}_1 x_2 \\ \bar{x}_1 x_2 & \bar{x}_2^2 \end{Bmatrix}, \quad (4.9a)$$

где  $M^{-1}$  — матрица, обратная  $M$ , а  $M$  — определитель матрицы  $M$ .

Это выражение легко обобщается на случай большего числа переменных [1].

Оказывается, что практически все шумы, встречающиеся в физике и технике, могут быть описаны при помощи нормального распределения. Это является следствием *центральной предельной теоремы*, которая справедлива практически для всех шумовых явлений. Она может быть сформулирована следующим образом [2].

Если  $X_1, X_2, \dots, X_n$  — независимые случайные переменные, имеющие одну и ту же плотность вероятности, а следовательно, и одинаковые средние значения  $\bar{X}_i = \bar{X}_1$ , и дисперсии  $\text{var } X_i = \text{var } X_1 = \sigma^2$ , то сумма  $Y = \sum_{i=1}^n X_i$  является асимптотически нормальной при больших  $n$  случайной величиной со

средним значением  $\bar{Y} = n\bar{X}_1$  и дисперсией  $\sigma_1^2 n$  при условии, что  $\sigma_1$  существует.

Вследствие этого практически для всех шумовых явлений экспериментальное определение плотности вероятности дает очень мало информации, так как, вероятнее всего, это распределение окажется нормальным.

## 4.2. ТЕОРЕМА О ДИСПЕРСИИ

Существует много задач о шумах, решение которых может быть сведено к рассмотрению случайного процесса методом, найденным Буржессом [3].

Пусть последовательность из  $N$  событий происходит в течение временного интервала  $\tau$ . Пусть каждому событию сопоставлена величина  $a_i$ . Введем другую величину  $n$ , определяемую равенство

$$n = \sum_{i=1}^N a_i. \quad (4.10)$$

Предположим теперь, что  $N$  и  $a_i$  флуктуируют,  $\bar{a}_i = \bar{a}$  и  $\bar{a}_i^2 = \bar{a}^2$  не зависят от  $i$ . Тогда

$$\bar{n} = \bar{N}\bar{a}, \quad \text{var } n = (\bar{a})^2 \text{var } N + \bar{N} \text{var } a \quad (4.11)$$

(теорема Буржесса о дисперсии).

Чтобы доказать теорему о дисперсии, рассмотрим статистический ансамбль и выполним усреднение по нему в три этапа.

1. Разделим ансамбль на подансамбли с одинаковыми значениями  $N$ .

2. Усредним сначала по каждому подансамблю отдельно.

3. В заключение усредним по всем подансамблям.

Обозначим среднее по подансамблям знаком  $\bar{\quad}^s$ , а среднее по ансамблю — знаком  $\bar{\quad}$ . Тогда запишем  $\bar{n} = \bar{n}^s = \bar{N}\bar{a} = \bar{N}\bar{a}$ , что и доказывает справедливость первого из равенств (4.11). Для доказательства справедливости второго из этих равенств заметим, что

$$n^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_i a_j.$$

Следовательно,

$$\overline{n^2} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \overline{a_i a_j} = N(N-1)(\bar{a})^2 + N\bar{a}^2,$$

поскольку в этой сумме есть  $N$  слагаемых  $a_i a_i$ , с  $i = j$ , для которых  $\overline{a_i a_i} = \bar{a}^2$ , и  $N(N-1)$  слагаемых  $a_i a_j$ , с  $i \neq j$ , для которых  $\overline{a_i a_j} = (\bar{a})^2$ . Следовательно,

$$\overline{n^2} = N^2 (\bar{a})^2 + N \text{var } a,$$

или

$$\overline{n^2} = \overline{\bar{n}^2} = \bar{N}^2 (\bar{a})^2 + \bar{N} \text{var } a,$$

так что

$$\text{var } n = \overline{n^2} - (\bar{n})^2 = (\bar{a})^2 [\bar{N}^2 - (\bar{N})^2] + \bar{N} \text{var } a,$$

что доказывает справедливость второго из равенств (4.11).

#### 4.2.1. ПРИМЕНЕНИЕ К ПЕНТОДАМ И ТРАНЗИСТОРАМ ШУМ ТОКОРАСПРЕДЕЛЕНИЯ

В качестве первого примера рассмотрим *вакуумный пентод*. Пусть катод испускает  $n_c$  электронов,  $n_1$  из них достигают анода, а  $n_2$  попадают на экранную сетку. При условии, что ток ограничивается пространственным зарядом в промежутке катод—сетка, флуктуации катодного тока частично подавляются пространственным зарядом, в результате чего  $\text{var } n_c < \bar{n}_c$ .

В этом случае  $n$  соответствует числу  $N$ . Положим  $a_i = 1$ , если электрон попадает на анод, и  $a_i = 0$ , если электрон попадает на экранную сетку. Если  $\lambda$  — вероятность того, что электрон попадает на анод, то  $\bar{a} = \lambda$  и  $\text{var } a = \lambda(1-\lambda)$ . Следовательно, применима теорема о дисперсии, причем

$$\bar{n}_1 = \bar{n}_c \lambda, \quad \bar{n}_2 = \bar{n}_c (1-\lambda), \quad (4.12)$$

$$\text{var } n_1 = \lambda^2 \text{var } n_c + \overline{n_c} \lambda (1-\lambda), \quad (4.13)$$

$$\text{var } n_2 = (1-\lambda)^2 \text{var } n_c + \overline{n_c} \lambda (1-\lambda).$$

Член  $\lambda^2 \text{var } n_c$  описывает *ослабленный дробовой шум*, а член  $\overline{n_c} \lambda (1-\lambda)$  — *шум токораспределения*.

Мы можем переписать первое из равенств (4.13) в виде

$$\text{var } n_a = \bar{n}_c \lambda + \lambda^2 (\text{var } n_c - \bar{n}_c) = \bar{n}_a + \lambda^2 (\text{var } n_c - \bar{n}_c). \quad (4.13a)$$

Следовательно, если шум катодного тока не подавляется пространственным зарядом ( $\text{var } n_c = \bar{n}_c$ ), то  $\text{var } n_a = \bar{n}_a$ . Иными словами, анодный ток содержит полный дробовой шум при условии, что катодный ток содержит полный дробовой шум.

Можно также записать

$$\begin{aligned} n_c &= n_a + n_2, \quad \Delta n_c = \Delta n_a + \Delta n_2, \\ \overline{\Delta n_c^2} &= \text{var } n_c = \overline{\Delta n_a^2} + \overline{2\Delta n_a \Delta n_2} + \overline{\Delta n_2^2} = \\ &= \text{var } n_a + \text{var } n_2 + \overline{2\Delta n_a \Delta n_2} = \\ &= [\lambda^2 + (1 - \lambda)^2] \text{var } n_c + 2\bar{n}_c \lambda (1 - \lambda) + \\ &\quad + \overline{2\Delta n_a \Delta n_2}. \end{aligned}$$

Поскольку  $1 - \lambda^2 - (1 - \lambda)^2 = 2\lambda(1 - \lambda)$ , то

$$\overline{2\Delta n_a \Delta n_2} = -2\bar{n}_c \lambda (1 - \lambda) + 2\lambda(1 - \lambda) \text{var } n_c,$$

или

$$\overline{\Delta n_a \Delta n_2} = (\text{var } n_c - \bar{n}_c) \lambda (1 - \lambda). \quad (4.14)$$

Следовательно, если  $\text{var } n_c = \bar{n}_c$ , то  $\Delta n_a$  и  $\Delta n_2$  независимы.

Мы можем также записать следующие соотношения:

$$\Delta n_a = \lambda \Delta n_c + \Delta n_p, \quad \Delta n_2 = (1 - \lambda) \Delta n_c - \Delta n_p,$$

где  $\Delta n_p$  не зависит от  $\Delta n_c$ . Эта система равенств отражает тот факт, что электроны, попадающие на экранную сетку, не доходят до анода, и наоборот. В соответствии с выражением (4.13)

$$\text{var } n_a = \lambda^2 \overline{\Delta n_c^2} + \overline{\Delta n_p^2}$$

или

$$\overline{\Delta n_p^2} = \bar{n}_c \lambda (1 - \lambda), \quad (4.15)$$

а, согласно выражению (4.14),

$$\overline{\Delta n_a \Delta n_2} = \lambda(1-\lambda) \overline{\Delta n_c^2} - \overline{\Delta n_p^2} = \lambda(1-\lambda)(\text{var } n_c - \overline{n_c}).$$

Член  $\overline{\Delta n_p^2}$  описывает шум токораспределения. Это единственный шум, который будет наблюдаться, если флуктуации катодного тока полностью подавлены.

В качестве второго примера рассмотрим транзистор. Пусть  $n_E$  — скорость инжекции электронов из эмиттера в базу,  $n_B$  — скорость их рекомбинации в базе и  $n_C$  — скорость поступления электронов на коллектор. Тогда применима теорема о дисперсии и

$$n_E = n_B + n_C, \quad \overline{n_B} = (1 - \alpha_F) \overline{n_E}, \quad \overline{n_C} = \alpha_F \overline{n_E}, \quad (4.16)$$

где  $\alpha_F$  — коэффициент усиления транзистора по постоянному току в схеме с общей базой. Кроме того, поскольку

$$\text{var } n_E = \overline{n_E},$$

$$\text{var } n_C = \alpha_F^2 \text{var } n_E + \overline{n_E} \alpha_F (1 - \alpha_F) = \overline{n_E} \alpha_F = \overline{n_C}, \quad (4.17)$$

$$\text{var } n_B = (1 - \alpha_F)^2 \text{var } n_E + \overline{n_E} \alpha_F (1 - \alpha_F) = \overline{n_E} (1 - \alpha_F) = \overline{n_B} \quad (4.18)$$

Наконец, если  $\Delta n_B = n_B - \overline{n_B}$  и  $\Delta n_C = n_C - \overline{n_C}$ , то аналогично выражению (4.14)

$$\overline{\Delta n_B \Delta n_C} = (\text{var } n_E - \overline{n_E}) \alpha_F (1 - \alpha_F) = 0. \quad (4.19)$$

Иными словами, токи коллектора и базы в транзисторе флуктуируют независимо, и каждый ток содержит полный дробовой шум.

#### 4.2.2. ПРОЦЕССЫ УМНОЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ

Применим теперь наши результаты к процессу умножения электронов. Пусть  $N$  — число электронов, приходящих к прибору, и пусть  $\text{var } N = \overline{N}$  (пуассоновский процесс). Пусть  $a_i$  — число вторичных электронов, выбиваемых  $i$ -м первичным электроном. Поскольку все первичные электроны имеют одинаковую

вероятность выполнения акта умножения, то  $\bar{a}_i = \bar{a}$ , и  $\bar{a}_i^2 = \bar{a}^2$  независимо от значения  $i$ . Следовательно, применима теорема о дисперсии и справедливы равенства

$$\bar{n} = \bar{N}\bar{a}, \quad \text{var } n = (\bar{a})^2 \text{var } N + \bar{N} \text{var } a. \quad (4.20)$$

Первый член выражения для  $\text{var } n$  описывает усиленный первичный шум, а второй член  $\bar{N} \text{var } a$  — шум умножения. Если используем тот факт, что  $\text{var } N = \bar{N}$ , получим

$$\text{var } n = \bar{N}\bar{a}^2 = \bar{N}\bar{a} \frac{\bar{a}^2}{\bar{a}} = \bar{n} \frac{\bar{a}^2}{\bar{a}}. \quad (4.20a)$$

В частном случае, когда  $\text{var } a = \bar{a}$ , имеем  $\bar{a}^2 = \bar{a} + (\bar{a})^2$ . Тогда

$$\text{var } n = \bar{n}(\bar{a} + 1). \quad (4.20b)$$

В случае когда каким-либо способом флуктуации  $N$  полностью подавлены, так что  $\text{var } N = 0$ , остается только шум умножения, т. е.

$$\text{var } n = \bar{N} \text{var } a. \quad (4.20в)$$

Применим теперь эти результаты к случаю генерации электронно-дырочных пар в  $p - n$ -переходе или фотопроводнике под действием квантов высокой энергии, электронов или более тяжелых частиц. В этом случае применима изложенная выше теория, и если  $\text{var } N = \bar{N}$ , то шум полностью описывается выражением (4.20a).

Рассмотрим случай генерации электронно-дырочных пар в  $p - n$ -переходе, в котором вероятность расщепления пары равна  $\lambda$ . Если из  $n$  возникающих пар  $m$  расщепляются, то в соответствии с теоремой о дисперсии

$$\bar{m} = \bar{n}\lambda = \bar{N}\bar{a}\lambda, \quad (4.21)$$

$$\text{var } m = \lambda^2 \text{var } n + \bar{n}\lambda(1 - \lambda) =$$

$$= \bar{n}\lambda^2 \frac{\bar{a}^2}{\bar{a}} + \bar{n}\lambda(1 - \lambda) = \bar{m} \left( \lambda \frac{\bar{a}^2}{\bar{a}} + 1 - \lambda \right). \quad (4.22)$$

В частном случае, когда процесс умножения также является пуассоновским, мы имеем  $\text{var } a = \bar{a} = \bar{a}^2 - (\bar{a})^2$  или  $\bar{a}^2 = (\bar{a})^2 + \bar{a}$ . Следовательно, из выражения (4.22) находим

$$\text{var } m = \bar{m}(\lambda \bar{a} + 1). \quad (4.23)$$

Следует сказать несколько слов о вероятности генерации электронов в фотокатодах [4]. Ранее считалось, что эта вероятность мала, так как энергия химического сродства электрона  $\chi$  к поверхности полупроводника была положительной (рис. 4.1, а). Поскольку покинуть поверхность могут лишь те электроны, у которых величина  $1/2 m v_{\perp}^2 > \chi$  (где  $v_{\perp}$  — составляющая скорости, перпендикулярная поверхности), вероятность выхода фотоэлектронов была крайне малой. Существуют фотокатоды с отрицательной энергией сродства  $\chi$ . В этом случае потенциально могут выйти все электроны, которые переведены в зону проводимости (рис. 4.1, б). Электроны теперь могут отдавать энергию, производя пары электрон—дырка, если величина  $1/2 m v^2 > eE_g$ , или возбуждая колебания решетки, если  $1/2 m v^2 < eE_g$ . Здесь  $v$  — скорость фотоэлектронов.

Чтобы свести к минимуму термоэлектронную эмиссию катода, следует делать работу выхода из поверхности полупроводника максимально возможной. Этого достигают, делая фотокатод  $p^+$ -типа. В нем фотоэлектроны на пути к поверхности будут рекомбинировать с дырками. Если электроны имеют время жизни  $\tau_n$  и коэффициент диффузии  $D_n$ , то их диффузионная длина равна  $L_n = (D_n \tau_n)^{1/2}$ . Движение к поверхности представляет собой диффузионный процесс, и глубина, с которой могут выходить фотоэлектроны, равна диффузионной длине  $L_n$ . Она может достигать нескольких микрометров.

Рис. 4.1, б иллюстрирует случай *плоской зоны*, когда отсутствует изгиб зоны с приближением к поверхности. Это случай поверхностей полупроводников GaAs и GaP, покрытых слоем O — Cs. В других случаях, например около поверхностей полупроводников



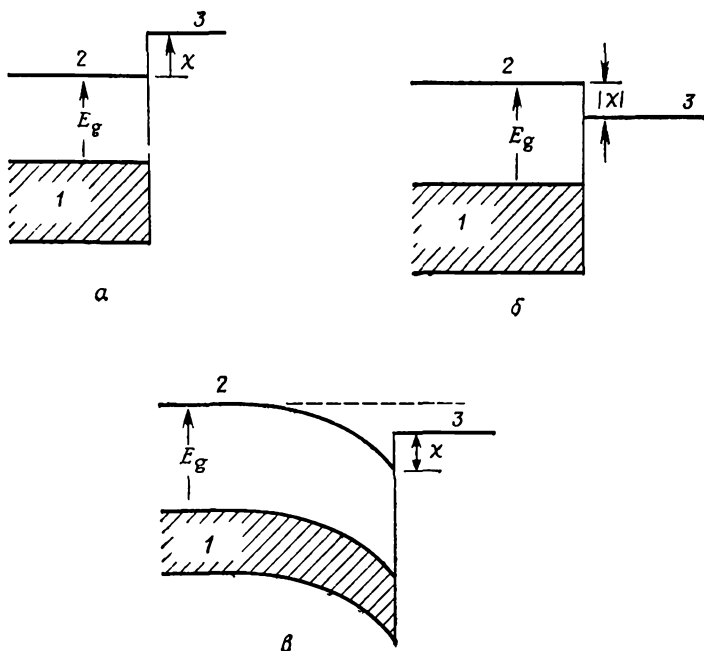


Рис. 4.1.

а — зонная диаграмма полупроводника с валентной зоной 1, зоной проводимости 2, запрещенной зоной шириной  $E_g$  и положительной энергией сродства  $\chi$  электронов к поверхности; б — то же самое, но с отрицательной энергией сродства  $\chi$  электронов, в — то же самое, но с положительной энергией сродства  $\chi$  и таким изгибом энергетических зон вблизи поверхности что дно зоны проводимости в объеме лежит выше уровня вакуума 3.

$\text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$  или Si, покрытых слоем O — Cs, имеет место изгиб зоны у поверхности (рис. 4.1, в). Вероятность выхода здесь меньше, чем в случае плоской зоны.

#### 4.2.3. УМНОЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВТОРИЧНОЙ ЭМИССИИ

Применим теперь развитый выше подход к анализу вторичной электронной эмиссии динодов. Обычно в этом случае полагают  $\bar{a} = \delta$  и  $\bar{a}^2 = \kappa\delta$ . Равенства (4.20) теперь могут быть записаны в виде

$$\bar{n} = \bar{N}\delta, \quad \text{var } n = \delta^2 \text{var } N + \bar{N}\delta(\kappa - \delta). \quad (4.24)$$

Второй член обычно описывает шум вторичной эмиссии. Если  $\text{var } N = \bar{N}$ , то

$$\text{var } n = \bar{n}. \quad (4.24a)$$

Поскольку для хорошего каскада вторично-эмиссионного умножителя  $\kappa \gg 1$ , то  $\text{var } n \gg \bar{n}$ . Шум в этом случае является *суперпуассоновским*.

Часто, особенно при относительно низких энергиях первичных электронов,  $(\kappa - \delta) \cong 1$ , так что

$$\text{var } n = \delta^2 \text{var } N + \bar{n}. \quad (4.24b)$$

Это *совместимо* с предположением о том, что шум вторичной эмиссии является пуассоновским процессом [как предполагалось в разд. 4.1.2 при выводе уравнения (3.14)], но не доказывает его.

С увеличением энергии первичных электронов величина  $\delta$  проходит через максимум  $\delta_{\text{макс}}$  при энергии  $E_{p0} = E_{\text{макс}}$  и убывает при  $E_{p0} > E_{\text{макс}}$ , в то время как  $\kappa$  при  $E_{p0} > E_{\text{макс}}$  стремится к постоянной величине [5]. Если энергия  $E_{p0}$  выбрана так, что отношение  $\kappa/\delta$  минимально, то относительный вклад шума вторичной эмиссии сводится к минимуму.

Наилучшими эмиттерами вторичных электронов являются GaAs и GaP, покрытые монослоем  $0 - \text{Cs}$ . Они имеют относительно большую величину  $\delta$  при относительно малых энергиях первичных электронов и очень большое значение  $\delta_{\text{макс}}$  при относительно большой энергии  $E_{\text{макс}}$ . Как упоминалось выше, эти эмиттеры должны быть сильно легированы акцепторами, чтобы увеличить работу выхода и таким образом снизить термоэлектронную эмиссию.

#### 4.2.4. КОЭФФИЦИЕНТ ФАНО

Во многих системах обнаружения частиц или квантов высокой энергии используются процессы умножения, в которых на каждую отдельную входящую частицу или квант приходится большое число выбиваемых электронов или электронно-дырочных пар. Такой про-

цесс умножения можно характеризовать средним числом частиц  $\bar{a}$ , освобождаемых при каждом элементарном событии, и дисперсией этого числа  $\text{var } a$ .

Если бы процесс умножения был пуассоновским, то выполнялось бы равенство  $\text{var } a = \bar{a}$ . Но, поскольку в процессе умножения должно удовлетворяться ограничение, состоящее в том, что на освобождение электрона или образование электронно-дырочной пары расходуется фиксированная величина энергии  $E$  входящей частицы или кванта, величина  $\text{var } a$  может отличаться от  $\bar{a}$ . В этом случае обычно вводится коэффициент Фано  $F$  для данного процесса умножения, определяемый соотношением

$$\text{var } a = F\bar{a}. \quad (4.25)$$

Обычно величина  $\bar{a}$  пропорциональна энергии  $E$  входящих частиц или квантов, и, следовательно, амплитуда импульсов, вызываемых отдельными событиями, является мерой энергии  $E$ . Поскольку величина  $\text{var } a$  соответствует разбросу амплитуд импульсов, она характеризует степень неопределенности измеряемой энергии  $E$ . Если желательно разделить импульсы тока, вызываемые частицами или квантами мало отличающихся энергий, то величина  $\text{var } a$ , а следовательно, и коэффициент Фано  $F$  должны быть по возможности малыми.

В последующих главах этой книги обсуждается ряд процессов умножения. С коэффициентами Фано этих процессов мы будем иметь дело в гл. 17.

## СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ФЛУКТУИРУЮЩИХ ВЕЛИЧИН. СПЕКТРАЛЬНЫЕ ПЛОТНОСТИ

В этой главе проведем спектральный анализ случайного сигнала  $X(t)$  и определим его спектральную плотность  $S_x(f)$ . Затем обобщим это на случай частично коррелированных случайных процессов  $X(t)$  и  $Y(t)$  и введем наряду с их спектральными плотностями  $S_{xx}(f)$  и  $S_{yy}(f)$  взаимные спектральные плотности  $S_{xy}(f)$  и  $S_{yx}(f)$  (разд. 5.1).

В разд. 5.2 обсудим ряд методов расчета спектральных плотностей.

### 5.1. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ. ТЕОРЕМА ВИНЕРА — ХИНЧИНА

Чтобы найти реакцию измерительной системы с частотной характеристикой  $g(f)$  на случайный сигнал  $X(t)$ , необходимо провести спектральный анализ  $X(t)$ . Для этого нужно использовать *теорему Фурье*, которая может быть сформулирована следующим образом.

Пусть кусочно-непрерывная функция  $X(t)$  определена на временном интервале  $0 < t < T$ , и пусть в точке разрыва  $t = t_0$  функция  $X(t)$  имеет значение

$$X(t_0) = \lim_{h>0, h \rightarrow 0} \frac{1}{2} [X(t_0 + h) + X(t_0 - h)].$$

Допустим, что при  $t = 0$  и  $t = T$  функция  $X(t)$  имеет значения

$$X(0) = X(T) = \lim_{h>0, h \rightarrow 0} \frac{1}{2} [X(h) + X(T - h)].$$

Тогда функция  $X(t)$  на отрезке  $0 < t < T$ , включающем конечные точки и точки разрывов, равна сумме ее ряда Фурье

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(j\omega_n t), \quad (5.1)$$

где

$$\omega_n = 2\pi n/T, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \text{ и}$$

$$a_n = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) \exp(-j\omega_n t) dt. \quad (5.1a)$$

Очевидно, что если  $a_n^*$  — величина, комплексно-сопряженная с  $a_n$ , то

$$a_{-n} = a_n^*. \quad (5.1b)$$

Заметим далее, что для данной величины  $T$  компонента ряда Фурье с частотой  $\omega_n$  имеет вид

$$x_n = a_n \exp(j\omega_n t) + a_{-n} \exp(-j\omega_n t). \quad (5.2)$$

Если запишем это выражение для элементов ансамбля идентичных, но независимо флуктуирующих систем, то их коэффициенты  $a_n$  будут иметь произвольные случайные значения фаз. Поэтому, если возьмем средние по ансамблю значения, то

$$\begin{aligned} \overline{x_n^2} &= \overline{a_n^2} \exp(j2\omega_n t) + \overline{a_{-n}^2} \exp(-2j\omega_n t) + \\ &+ \overline{2a_n a_n^*} = \overline{2a_n a_n^*}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

поскольку из-за случайного распределения фаз  $\overline{a_n^2} = \overline{a_{-n}^2} = 0$ . Это выражение является отправной точкой при определении спектральных плотностей.

Изложенное выше справедливо как при  $\overline{X} = 0$ , так и при  $\overline{X} \neq 0$ . Поскольку вместо  $X(t)$  всегда можно ввести флуктуацию  $X(t) - \overline{X}$ , не нарушая общности, предполагаем, что  $\overline{X} = 0$ .

### 5.1.1. ТЕОРЕМА ВИНЕРА—ХИНЧИНА. СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ

Рассчитаем теперь величину  $2\overline{a_n a_n^*}$ . Для этого запишем

$$a_n = \frac{1}{T} \int_0^T X(u) \exp(-j\omega_n u) du,$$

$$a_n^* = \frac{1}{T} \int_0^T X(v) \exp(j\omega_n v) dv,$$

так что

$$\overline{2a_n a_n^*} = \frac{2}{T^2} \int_0^T \int_0^T \overline{X(u) X(v)} \exp[j\omega_n (v - u)] dudv. \quad (5.4)$$

Подынтегральное выражение имеет наибольшее значение  $\overline{X^2(v)}$  вдоль линии  $u = v$  и убывает более или менее быстро при удалении от этой диагонали (рис. 5.1). Введем теперь другую область интегрирования, проведя две линии, параллельные этой диагонали и отстоящие от нее на расстояние  $\pm M$  по вертикали. Выберем расстояние  $M$  настолько большим, что при  $s = v - u$

$$\int_{-M}^M \overline{X(u) X(u+s)} \exp(j\omega_n s) ds \cong$$

$$\cong \int_{-\infty}^{\infty} \overline{X(u) X(u+s)} \exp(j\omega_n s) ds. \quad (5.5)$$

Это можно сделать, если записанный интеграл абсолютно сходится. Выберем  $T \gg M$ . Тогда

$$\frac{2}{T^2} \int_0^T du \int_{-u}^{T-u} \overline{X(u) X(u+s)} \exp(j\omega_n s) ds \cong$$

$$\cong \frac{2}{T^2} \int_0^T du \int_{-M}^M \overline{X(u) X(u+s)} \exp(j\omega_n s) ds, \quad (5.6)$$

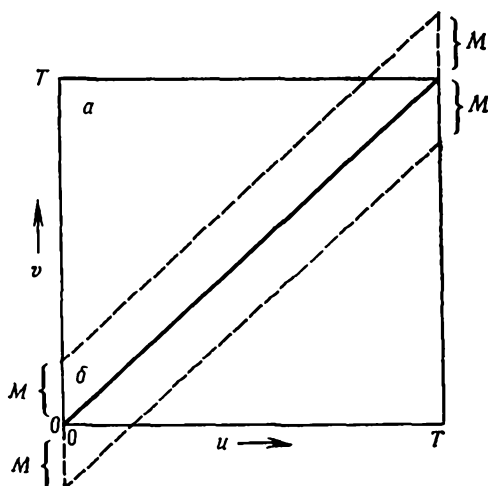


Рис. 5.1. Две области интегрирования.

$a$  — квадрат со стороной  $T$ ,  $b$  — параллелограмм со стороной  $2M$ , параллельной оси  $u$ ; эти две области различаются на два больших треугольника, для которых пренебрежимо мало подынтегральное выражение, и два малых треугольника интегрирование по которым дает пренебрежимо малый вклад, если  $T \gg M$ .

так как эти две области интегрирования различаются лишь на два больших треугольника, в которых величина  $\overline{X(u)X(u+s)} = 0$ , и на два малых треугольника с длинами боковых сторон, равными  $M$ . Вклад последних пренебрежимо мал, если  $T \gg M$ . Теперь интеграл

$$\int_{-M}^M \overline{X(u)X(u+s)} \exp(j\omega_n s) ds$$

не зависит от  $u$  (стационарность), а интеграл  $\int_0^T du = T$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \overline{2a_n a_n^*} &\cong \frac{2}{T} \int_{-M}^M \overline{X(u)X(u+s)} \exp(j\omega_n s) ds \cong \\ &\cong \frac{2}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{X(u)X(u+s)} \exp(j\omega_n s) ds, \end{aligned} \quad (5.7)$$

так как этот интеграл абсолютно сходится. Если теперь учесть, что  $\Delta f = 1/T$  (интервал между частотами  $f_n$ ), то можно записать

$$\overline{x_n^2} = S_x(f_n) \Delta f, \quad (5.7a)$$

где

$$S_x(f_n) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \overline{X(u) X(u+s)} \exp(j\omega_n s) ds. \quad (5.7b)$$

Таким образом, функция  $S_x(f_n)$  равна удвоенному преобразованию Фурье от  $\overline{X(u) X(u+s)}$ . Она называется *спектральной плотностью*  $X(t)$ . Равенство (5.7b) называется *теоремой Винера—Хинчина*.

Когда справедлив этот вывод? Достаточным условием его справедливости является абсолютная интегрируемость  $\overline{X(u) X(u+s)}$ , т. е. существование интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\overline{X(u) X(u+s)}| ds.$$

Если это условие выполнено, то преобразование Фурье функции  $\overline{X(u) X(u+s)}$  существует, и равенство (5.5) справедливо.

Докажем, что

$$\overline{a_n a_m^*} = 0 \text{ при } m \neq n, \quad (5.8)$$

т. е. что спектральные составляющие с различными частотами независимы. Сделать это просто. Поскольку

$$a_n = \frac{1}{T} \int_0^T X(u) \exp(-j\omega_n u) du,$$

$$a_m^* = \frac{1}{T} \int_0^T X(v) \exp(j\omega_m v) dv,$$



то, выбирая  $T \gg M$  и используя ту же процедуру, что и выше, получим

$$\begin{aligned} \overline{a_n a_m^*} &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T \overline{X(u) X(v)} \exp(-j\omega_n u + j\omega_m v) du dv \cong \\ &\cong \frac{1}{T^2} \int_0^T \exp[-j(\omega_n - \omega_m)u] du \int_{-M}^M \overline{X(u) X(u+s)} \\ &\quad \exp(j\omega_m s) ds = 0. \end{aligned}$$

Здесь первый интеграл равен нулю при  $m \neq n$ , а второй, по  $s = v - u$ , ограничен. Этим доказывается равенство (5.8).

Если опустить индекс  $n$ , то доказанное нами можно сформулировать следующим образом.

1. Можно ввести спектральную плотность  $S_x(f)$  функции  $X(t)$ , так что  $\{S_x(f) \Delta f\}^{1/2}$  представляет собой среднеквадратичное значение составляющей ряда Фурье  $X(t)$ , соответствующей частотному интервалу  $\Delta f$  вблизи частоты  $f$ .

2. Составляющие Фурье, соответствующие различным частотным интервалам, независимы.

3. Для нахождения этих среднеквадратичных составляющих может быть применен метод анализа цепей переменного тока.

Таким образом, расчет шума сводится к определению  $S_x(f)$ .

### 5.1.2. ТЕОРЕМЫ О СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ

Для спектральной плотности  $S_x(f)$  справедливы следующие теоремы.

1. Если случайный сигнал  $X(t)$  имеет спектральную плотность  $S_x(f)$ , то

$$\overline{X^2} = \int_0^\infty S_x(f) df. \quad (5.9)$$

Иными словами, если мы знаем  $S_x(f)$ , то знаем и  $\overline{X^2}$ ,

*Доказательство.* Поскольку  $X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(j\omega_n t)$ , то, принимая во внимание равенства  $\overline{a_n a_m^*} = 0$  при  $m \neq n$  и  $a_{-n} = a_n^*$ , получим

$$\begin{aligned} \overline{X^2} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{a_n a_{-n}} = \sum_{n=0}^{\infty} 2\overline{a_n a_n^*} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} S_x(f_n) \Delta f_n = \int_0^{\infty} S_x(f) df. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} S_x(f) &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \overline{X(t) X(t+s)} \exp(j\omega s) ds = \\ &= 4 \int_0^{\infty} \overline{X(t) X(t+s)} \cos \omega s ds. \end{aligned} \quad (5.10)$$

*Доказательство.*  $\exp(j\omega s) = \cos \omega s + j \sin \omega s$ . Поскольку  $\overline{X(t) X(t+s)}$  и  $\cos \omega s$  являются четными функциями  $s$ , а  $\sin \omega s$  — нечетной функцией  $s$ , имеем

$$\begin{aligned} S_x(f) &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \overline{X(t) X(t+s)} \cos \omega s ds = \\ &= 4 \int_0^{\infty} \overline{X(t) X(t+s)} \cos \omega s ds. \end{aligned}$$

Следует быть особенно внимательными при использовании этого соотношения, если функция  $\overline{X(t) X(t+s)}$  является  $\delta$ -функцией от  $s$ .

3. Если справедливо выражение (5.10), то

$$\overline{X(t) X(t+s)} = \int_0^{\infty} S_x(f) \cos \omega s df. \quad (5.11)$$

Этот результат получается простым обращением преобразования (5.10).

4. Чтобы существовал средний квадрат  $\overline{X^2}$ , интеграл в выражении (5.9) должен сходиться. Это означает, что должны существовать такие две частоты  $f_1$  и  $f_2$ , что функция  $S_x(f)$  изменяется медленнее, чем  $1/f$  при  $f < f_1$ , и быстрее, чем  $1/f$  при  $f > f_2$ . Это условие не выполняется для фликер-шума, который имеет спектр вида  $1/f^\alpha$  при  $\alpha \cong 1$ . Это указывает на то, что спектр не может изменяться по закону  $1/f$  вплоть до  $f = 0$  и при  $f \rightarrow \infty$ .

5. Если случайный сигнал  $X(t)$  со спектральной плотностью  $S_x(f)$  проходит через усилитель с комплексным коэффициентом усиления по напряжению  $g(f)$ , то выходной случайный сигнал  $Y(t)$  имеет средний квадрат

$$\overline{Y^2} = \int_0^{\infty} S_x(f) |g(f)|^2 df. \quad (5.12)$$

*Доказательство.* Запишем  $X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(j\omega_n t)$ ,

$Y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \exp(j\omega_n t)$ . В соответствии с символическим методом расчета цепей переменного тока  $b_n = a_n g(f_n)$ , так что

$$S_y(f_n) = S_x(f_n) |g(f_n)|^2.$$

Опуская индекс  $n$  и используя выражение (5.9), получаем

$$\overline{Y^2} = \int_0^{\infty} S_y(f) df = \int_0^{\infty} S_x(f) |g(f)|^2 df.$$

6. Уравнение (5.12) можно использовать для изменения величины  $S_x(f)$ . Пусть усилитель настроен на частоту  $f_0$  и имеет полосу пропускания  $B \ll f_0$ . Тогда  $S_x(f) \cong S_x(f_0)$  для всех частот, представляющих практический интерес. Если  $g(f_0) = g_0$ , то можно записать

$$\overline{Y^2} = S_x(f_0) \int_0^{\infty} |g(f)|^2 df = S_x(f_0) g_0^2 B_{эфф}, \quad (5.13)$$

где

$$B_{\text{эфф}} = \int_0^{\infty} \left| \frac{g(f)}{g_0} \right|^2 df. \quad (5.13a)$$

Поскольку величины  $\bar{V}^2$ ,  $g_0^2$  и  $B_{\text{эфф}}$  можно измерить, то можно определить и величину  $S_x(f_0)$ . Величину  $B_{\text{эфф}}$  называют *эффективной шириной полосы* пропускания усилителя.

7. Значение функции  $S_x(f)$  на низких частотах  $S_x(0)$  обычно можно записать в виде

$$S_x(0) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \overline{X(t)X(t+s)} ds. \quad (5.14)$$

В самом деле, если частота  $\omega$  достаточно мала, то  $\cos \omega s \cong 1$  для всех значений  $s$ , при которых функция  $\overline{X(t)X(t+s)}$  отличается от нуля. Единственным исключением является снова фликер-шум, который имеет спектр типа  $1/f$ . Практически для всех других спектров функция  $S_x(f)$  не зависит от частоты в области низких частот. Такой спектр называют *белым* на этих частотах.

8. Если спектр  $S_x(f)$  является на низких частотах спектром белого шума и

$$X_{\tau} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} X(u) du,$$

то

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} 2\tau \overline{X_{\tau}^2} = S_x(0). \quad (5.15)$$

*Доказательство.* Если интервал  $\tau$  достаточно велик и спектр  $S_x(f)$  — белый на низких частотах, то

$$\begin{aligned} \overline{X_{\tau}^2} &= \frac{1}{\tau^2} \int_0^{\tau} \int_0^{\tau} \overline{X(u)X(v)} dudv \cong \\ &\cong \frac{1}{\tau^2} \int_0^{\tau} du \int_{-M}^M \overline{X(u)X(u+s)} ds \cong \end{aligned}$$

$$\cong \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{X(u) X(u+s)} ds = \frac{S_x(0)}{2\tau}.$$

Этим доказано выражение (5.15). Часто оказывается возможным определить  $\overline{X^2}$  и, следовательно, найти  $S_x(0)$  при помощи выражения (5.15).

### 5.1.3. ОБОБЩЕНИЕ НА БОЛЬШЕЕ ЧИСЛО СЛУЧАЙНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Повторим проведенные выше рассуждения для двух случайных переменных  $X(t)$  и  $Y(t)$ , которые частично коррелированы. В этом случае мы имеем две автокорреляционные функции  $\overline{X(t) X(t+s)}$  и  $\overline{Y(t) Y(t+s)}$  и две взаимнокорреляционные функции  $\overline{X(t) Y(t+s)}$  и  $\overline{Y(t) X(t+s)}$ . Следовательно, можно ввести две «собственные» спектральные плотности  $S_{x,x}(f)$  и  $S_{y,y}(f)$  и две взаимные спектральные плотности  $S_{x,y}(f)$  и  $S_{y,x}(f)$ . Используя те же рассуждения, что и в случае одной переменной, получим

$$S_{x,x}(f) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \overline{X(t) X(t+s)} \exp(j\omega s) ds,$$

$$S_{y,y}(f) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \overline{Y(t) Y(t+s)} \exp(j\omega s) ds \quad (5.16)$$

и аналогично

$$S_{x,y}(f) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \overline{X(t) Y(t+s)} \exp(j\omega s) ds,$$

$$S_{y,x}(f) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \overline{Y(t) X(t+s)} \exp(j\omega s) ds. \quad (5.17)$$

Легко показать, что

$$S_{y,x}(f) = S_{x,y}^*(f), \quad (5.17a)$$

где \* обозначает комплексно-сопряженную величину. В самом деле,

$$\begin{aligned}\overline{Y(t)X(t+s)} &= \overline{Y(t'-s)X(t')} = \overline{X(t')Y(t'-s)} = \\ &= \overline{X(t)Y(t-s)}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}S_{y,x}(f) &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \overline{X(t)Y(t-s)} \exp(j\omega s) ds = \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \overline{X(t)Y(t+s')} \exp(-j\omega s') ds' = S_{x,y}^*(f),\end{aligned}$$

как следует из замены переменной  $s = -s'$ .

## 5.2. РАСЧЕТ ФУНКЦИИ $S_x(f)$ ИЛИ $S_x(0)$

Обсудим здесь ряд методов расчета  $S_x(f)$ .

### 5.2.1. РАСЧЕТ ПРИ ПОМОЩИ АВТОКОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ

Покажем с помощью одного примера, как иногда можно непосредственно рассчитать автокорреляционную функцию. В слаболегированном полупроводниковом материале  $n$ -типа электронно-дырочные пары возникают (под действием света или из-за тепловой генерации) и исчезают в процессе рекомбинации. Вследствие этого число дырок в образце  $P$  будет флуктуировать относительно среднего значения  $\bar{P}$ . Пусть  $\Delta P = P - \bar{P}$  представляет собой такую флуктуацию, и предположим, что процесс генерации—рекомбинации характеризуется постоянной времени  $\tau$ .

Рассмотрим ансамбль идентичных, но независимо флуктуирующих систем. Затем возьмем подансамбль систем, в котором  $\Delta P = \Delta P_0$  при  $t = 0$ . Далее найдем

среднее по этому подансамблю  $\overline{\Delta P^s}$  для любого последующего момента  $u$  ( $u > 0$ ) в виде

$$\overline{\Delta P^s} = \Delta P_0 \exp\left(-\frac{u}{\tau}\right)$$

в соответствии с определением времени жизни. Следовательно, при  $u > 0$

$$\begin{aligned} \Delta P_0 \overline{\Delta P^s} &= \Delta P_0^2 \exp\left(-\frac{u}{\tau}\right), \\ \overline{\Delta P(0) \Delta P(u)} &= \overline{\Delta P_0 \overline{\Delta P^s}} = \overline{\Delta P_0^2} \exp\left(-\frac{u}{\tau}\right) = \\ &= \overline{\Delta P^2} \exp\left(-\frac{u}{\tau}\right). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} S_p(f) &= 4 \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Delta P^2} \exp\left(-\frac{u}{\tau}\right) \cos \omega u \, du = \\ &= 4 \overline{\Delta P^2} \frac{\tau}{1 + \omega^2 \tau^2}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Мы вернемся к этой задаче в разд. 5.2.6.

### 5.2.2. РАСЧЕТ $S_n(0)$ ЧЕРЕЗ $\overline{X_T^2}$

Наиболее важный результат применения этого метода состоит в том, что для последовательности случайных событий, происходящих с частотой  $n(t)$ ,

$$S_n(0) = 2 \operatorname{var} n, \quad (5.20)$$

где  $\operatorname{var} n$  — дисперсия  $n(t)$ .

*Доказательство.* Число  $N$  событий, происходящих в течение интервала  $\tau$ , равно

$$N = \int_0^{\tau} n(t) \, dt \quad \text{или} \quad \overline{N} = \bar{n}\tau,$$

поскольку вариации за каждую секунду независимы и средние по времени равны средним по ансамблю.

Поскольку  $\overline{\Delta N^2} = \tau \text{ var } n$ , то при достаточно большом  $\tau$  для  $X_\tau = \Delta N / \tau$  найдем

$$\overline{X_\tau^2} = \frac{\overline{\Delta N^2}}{\tau^2} = \frac{\tau \text{ var } n}{\tau^2} = \frac{\text{var } n}{\tau},$$

так что  $S_n(0) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} 2\tau \overline{X_\tau^2} = 2 \text{ var } n$ , что и требовалось доказать.

Эта теорема имеет много применений.

1. *Шум термоэлектронного диода в режиме насыщения.* Докажем, что спектральная плотность флуктуирующего тока диода  $I(t)$  со средним значением  $\bar{I}$  определяется выражением

$$S_I(0) = 2e\bar{I}. \quad (5.21)$$

Это выражение называют *теоремой Шоттки*.

*Доказательство.* Поскольку термоэлектронная эмиссия подчиняется статистике Пуассона, то  $\text{var } n = \bar{n}$ , а  $I(t) = en(t)$ , где  $e$  — заряд электрона. Следовательно,

$$\bar{I} = e\bar{n}, \quad S_I(0) = e^2 S_n(0) = 2e^2 \text{ var } n = 2e^2 \bar{n} = 2e\bar{I},$$

что и требовалось доказать.

2. *Шум в термоэлектронном диоде с током, ограниченным пространственным зарядом.* Здесь флуктуации тока ослаблены влиянием пространственного заряда, так что  $\text{var } n < \bar{n}$ . Записывая

$$\text{var } n = \bar{n}\Gamma^2, \quad (5.22)$$

где  $\Gamma^2$  — коэффициент подавления пространственным зарядом, получим

$$S_I(0) = 2e^2 \text{ var } n = 2e^2 \bar{n}\Gamma^2 = 2e\bar{I}\Gamma^2. \quad (5.23)$$

3. *Шум в твердотельном  $p^+ - n$ -переходе.* Ток через этот переход описывается характеристикой

$$\bar{I} = I_{rs} \left[ \exp\left(\frac{eV}{kT}\right) - 1 \right]. \quad (5.24)$$

Он состоит из двух флуктуирующих токов:  $I_{rs} \exp(eV/kT)$  и  $I_{rs}$ , текущих в противоположных



направлениях и флуктуирующих независимо. Поскольку спектр каждого тока определяется выражением (5.21), то

$$S_I(0) = 2eI_{rs} \exp\left(\frac{eV}{kT}\right) + 2eI_{rs} = 2e(\bar{I} + 2I_{rs}). \quad (5.25)$$

При  $\bar{I} \gg I_{rs}$  это выражение соответствует (5.21). Другая запись (5.25) имеет вид

$$S_I(0) = 2e\bar{I} \frac{\exp(eV/kT) + 1}{\exp(eV/kT) - 1} = 2e\bar{I} \operatorname{cth}\left(\frac{eV}{2kT}\right). \quad (5.25a)$$

4. *Дробовой шум в транзисторах.* Если мы пренебрежем малыми токами насыщения и обозначим токи эмиттера, базы и коллектора соответственно через  $I_E$ ,  $I_B$  и  $I_C$ , то

$$S_{I_E}(0) = 2eI_E, \quad S_{I_B}(0) = 2eI_B, \quad S_{I_C}(0) = 2eI_C, \quad (5.26)$$

$$S_{I_C, I_B}(0) = 0, \quad S_{I_E, I_C}(0) = 2eI_C. \quad (5.26a)$$

*Доказательство.* Мы показали выше, что

$$\operatorname{var} n_C = \bar{n}_C, \quad \operatorname{var} n_B = \bar{n}_B, \quad \overline{\Delta n_C \Delta n_B} = 0,$$

т. е. эти флуктуации являются независимыми и пуассоновскими. Отсюда следует справедливость второго и третьего равенств (5.26), а также первого из равенств (5.26a). Кроме того,

$$I_E = I_B + I_C \quad \text{и} \quad \Delta I_E = \Delta I_B + \Delta I_C;$$

на основании последнего равенства из (5.26) и первого из (5.26a) получим

$$\begin{aligned} S_{I_E}(0) &= S_{I_B}(0) + S_{I_C}(0) + 2S_{I_C, I_B}(0) = \\ &= 2e(I_B + I_C) = 2eI_E. \end{aligned}$$

Этим доказано первое из равенств (5.26). Более того,

$$\overline{\Delta I_E \Delta I_C} = \overline{\Delta I_B \Delta I_C} + \overline{\Delta I_C^2} = \overline{\Delta I_C^2},$$

и, следовательно,

$$S_{I_E, I_C}(0) = S_{I_C}(0) = 2eI_C,$$

что доказывает вторую половину выражения (5.26a). Эти результаты важны для транзистора, включенного по схеме с общей базой.

### 5.2.3. РАСЧЕТ ВЕЛИЧИНЫ $S_v(0)$ НА ОСНОВЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ СООБРАЖЕНИЙ

В некоторых случаях статистические соображения дают достаточно информации, чтобы рассчитать величину  $S_v(0)$ . В качестве примера мы докажем теорему Найквиста, согласно которой спектральная плотность

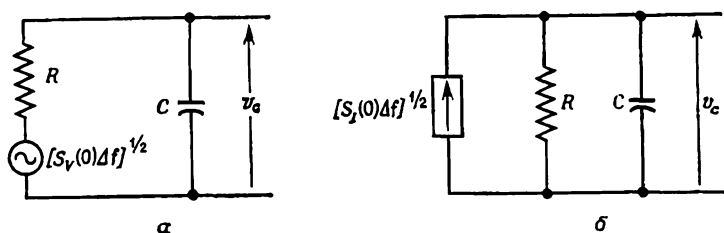


Рис. 5.2.

*a* — тепловой шум  $RC$ -цепи, представленный шумовой э. д. с.  $[S_V(0) \Delta f]^{1/2}$ , включенной последовательно с сопротивлением  $R$ ; *б* — тепловой шум  $RC$ -цепи, представленный генератором шумового тока  $[S_I(0) \Delta f]^{1/2}$ , включенным параллельно сопротивлению  $R$ .

$S_V(0)$  шумовой э. д. с.  $V(t)$ , включенной последовательно с сопротивлением  $R$ , находящимся при температуре  $T$ , равна

$$S_V(0) = 4kTR, \quad (5.27)$$

где  $k$  — постоянная Больцмана.

*Доказательство.* Тепловой шум может быть описан с помощью среднеквадратичной э. д. с.  $[S_V(0) \Delta f]^{1/2}$ , включенной последовательно с сопротивлением  $R$ . Если рассмотреть  $RC$  — цепь, показанную на рис. 5.2, *a*, то видно, что частотный интервал  $df$  дает вклад

$$\overline{dv_c^2} = S_V(0) df \frac{1/\omega^2 C^2}{R^2 + 1/\omega^2 C^2} = \frac{S_V(0) df}{1 + \omega^2 C^2 R^2}$$

в средний квадрат напряжения  $v_c$  на конденсаторе  $C$ . Следовательно,

$$\overline{v_c^2} = \int_0^\infty \overline{dv_c^2} = S_V(0) \int_0^\infty \frac{df}{1 + \omega^2 C^2 R^2} = \frac{S_V(0)}{2\pi CR} \int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{S_V(0)}{4CR},$$

где  $x = \omega CR$ . Однако в соответствии с законом о равномерном распределении энергии по степеням свободы

$$\frac{1}{2} C \overline{v_c^2} = \frac{1}{2} kT, \text{ или } \overline{v_c^2} = \frac{kT}{C}. \quad (5.28)$$

Следовательно,  $S_V(0) = 4CR \overline{v_c^2} = 4kTR$ .

Если бы шум был представлен среднеквадратичным током  $[S_I(0) \Delta f]^{1/2}$  эквивалентного генератора, включенного параллельно схеме (рис. 5.2, б), то

$$S_I(0) = \frac{S_V(0)}{R^2} = \frac{4kT}{R} = 4kTg, \quad (5.29)$$

где  $g = 1/R$ .

Равенства (5.27) и (5.29) справедливы вплоть до частот инфракрасного диапазона. Если  $hf/kT$  становится сравнимым с единицей, то можно внести квантовую поправку, в соответствии с которой

$$S_V(f) = 4R \frac{hf}{\exp(hf/kT) - 1}, \quad (5.30)$$

где  $h$  — постоянная Планка. Обычно  $hf/kT \ll 1$ , и тогда выражение (5.30) сводится к выражению (5.27). Условие  $hf_0 = kT$ , или  $f_0 = kT/h$ , при  $T = 300$  К дает

$$f_0 = \frac{1,4 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{6,6 \cdot 10^{-34}} = 6 \cdot 10^{12} \text{ Гц},$$

т. е. частоту инфракрасного диапазона. При криогенных температурах частота  $f_0$  составляет около 100 ГГц.

Причина квантовой поправки состоит в том, что колебательная цепь, настроенная на частоту  $f$ , может рассматриваться как гармонический осциллятор с частотой  $f$ . Для низких частот  $f$  средняя энергия гармонического осциллятора равна  $kT$ , а на более высоких частотах, где произведение  $hf$  сравнимо с  $kT$  или больше, средняя энергия равна

$$\bar{E} = \frac{hf}{\exp(hf/kT) - 1} = kT \frac{hf/kT}{\exp(hf/kT) - 1}, \quad (5.31)$$

так как гармонический осциллятор может принимать лишь определенные значения энергии  $E_\nu = (\nu +$

+  $1/2$ )  $hf$  ( $v = 0, 1, 2, \dots$ ). Таким образом, средняя энергия шума, рассчитанная на низких частотах, должна умножаться на коэффициент

$$\frac{hf/kT}{\exp(hf/kT) - 1},$$

и следовательно, на такой же коэффициент необходимо умножить выражение (5.27). Это сразу дает выражение (5.30). Более подробное доказательство см. в работе [6].

#### 5.2.4. РАСЧЕТ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ $S_x(f)$ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРЕМЫ КАРСОНА

Теорему Карсона можно сформулировать следующим образом.

Пусть стационарная случайная переменная  $Y(t)$  определяется суммой влияний большого числа независимых событий, происходящих в случайные моменты времени  $t_i$  со средней частотой  $\lambda$ , так что

$$Y(t) = \sum_i F(t - t_i), \quad (5.32)$$

где  $t_i$  — моменты начала событий, т. е.  $F(t - t_i) = 0$  при  $t < t_i$ , а  $F(t - t_i)$  — функция влияния  $i$ -го события при  $t > t_i$ . Если преобразование Фурье  $\psi(f)$  от функции  $F(u)$  определить выражением

$$\psi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \exp(-j\omega u) du \quad (5.33)$$

(где функция  $F(u)$  предполагается абсолютно интегрируемой), то спектральная плотность  $S_y(f)$  переменной  $Y(t)$  имеет вид

$$S_y(f) = 2\lambda |\psi(f)|^2. \quad (5.34)$$

Подробное доказательство см. в работе [6].

Упрощенное доказательство можно дать следующим образом.

Поскольку события происходят в случайные моменты времени, достаточно рассчитать спектральную

плотность  $S_i(f)$  одного события, происшедшего в момент времени  $t_i$  в интервале  $0 \leq t \leq T$ . Тогда для большого  $T$  и  $t_i \cong 1/2 T$  имеем

$$\begin{aligned} \bar{a}_n &= \frac{1}{T} \int_0^T F(t - t_i) \exp(-j\omega_n t) dt = \frac{\exp(-j\omega_n t_i)}{T} \times \\ &\times \int_{-t_i}^{T-t_i} F(u) \exp(-j\omega_n u) du \cong \frac{\exp(-j\omega_n t_i)}{T} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \exp(-j\omega_n u) du = \frac{\exp(-j\omega_n t_i)}{T} \psi(f_n). \end{aligned}$$

Следовательно, для одного события

$$S_i(f_n) = 2a_n a_n^* T = \frac{2|\psi(f_n)|^2}{T}.$$

Однако в среднем на отрезке  $0 \leq t \leq T$  происходит  $\lambda T$  событий, и поэтому

$$S_y(f) = \lambda T S_i(f_n) = 2\lambda |\psi(f_n)|^2,$$

что и требовалось доказать.

В качестве примера рассмотрим движение электрона в плоском вакуумном диоде в режиме насыщения при потенциале анода  $V_a$ . Легко показать, что время пролета  $\tau$  электрона, движущегося от анода к катоду, равно

$$\tau = \frac{2d}{v_a} = \frac{2d}{(2eV_a/m)^{1/2}}, \quad (5.35)$$

где  $v_a$  — скорость электронов у анода. Это следует непосредственно из того факта, что электроны движутся равноускоренно, так что их средняя скорость равна  $v_a/2$ .

Легко также показать, что ток  $i(t)$ , вызванный электроном, излученным в момент времени  $t_i$ , определяется выражением

$$i(t) = \frac{2e(t - t_i)}{\tau^2} \quad \text{при } t_i \leq t \leq t_i + \tau \quad (5.36)$$

и равен нулю при других значениях  $t$ . Доказательство см. в работе [1]. Точность выражения (5.36) подтверждается тем, что

$$\int_{t_i}^{t_i+\tau} i(t) dt = e,$$

т. е. в течение времени пролета  $\tau$  переносится полный заряд электрона. Следовательно,

$$\psi(f) = \int_0^{\tau} \frac{2eu}{\tau^2} \exp(-j\omega u) du = e\varphi_3(j\omega\tau), \quad (5.37)$$

где

$$\varphi_3(j\omega\tau) = \frac{2}{(j\omega\tau)^2} [1 - \exp(-j\omega\tau) - j\omega\tau \exp(-j\omega\tau)]. \quad (5.37a)$$

Отсюда, поскольку  $\lambda = \bar{I}/e$ ,

$$S_I(f) = \frac{2\bar{I}}{\rho} |\psi(f)|^2 = 2e\bar{I} |\varphi_3(j\omega\tau)|^2. \quad (5.38)$$

Обычно величина  $\tau$  составляет порядка  $10^{-9}$  с, так что множитель  $|\varphi_3(j\omega\tau)|^2$  близок к единице при  $\omega\tau < \pi$ , и спектр  $S_I(f)$  является белым до частот порядка нескольких сотен мегагерц.

### 5.2.5. РАСЧЕТ ФУНКЦИИ $S_x(f)$ МЕТОДОМ ЛАНЖЕВЕНА

В методе Ланжевена записывается макроскопическое уравнение исследуемой системы, а затем в левую часть его вводится «белая» функция случайных источников, описывающая действие шума. Затем уравнение решается методом Фурье, определяются коэффициенты Фурье и через них спектр. Для расчета спектральной плотности функции случайных источников обычно имеется достаточно информации.

Проиллюстрируем этот метод несколькими примерами.

1.  $RC$  — цепь, возбуждаемая тепловым шумом (рис. 5.2, а). Уравнение этой цепи имеет вид

$$Ri + \int \frac{i dt}{C} = E(t), \quad (5.39)$$

где  $E(t)$  — э. д. с. белого шума, включенная последовательно с сопротивлением  $R$ . Для  $0 < t < T$  введем ряды Фурье

$$E(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(j\omega_n t), \quad i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \exp(j\omega_n t).$$

Подстановка их в выражение (5.39) и приравнивание коэффициентов при  $\exp(j\omega_n t)$  дают

$$b_n \left( R + \frac{1}{j\omega_n C} \right) = a_n$$

или

$$b_n = a_n \frac{j\omega_n C}{1 + j\omega_n CR}.$$

Следовательно,

$$S_i(f) = \frac{S_E(f) \omega_n^2 C^2}{1 + \omega_n^2 C^2 R^2} = \frac{4kTR}{R^2 + 1/\omega_n^2 C^2}, \quad (5.40)$$

так как функция  $S_E(f)$  известна из теоремы Найквиста.

2. Спонтанные флуктуации температуры малого тела. Пусть малое тело имеет теплоемкость  $C_H$  и теплопроводность  $g_H$  к окружающей среде, и пусть  $\theta$  — флуктуация температуры. Уравнение Ланжевена температуры имеет вид

$$C_H \frac{d\theta}{dt} + g_H \theta = H(t), \quad (5.41)$$

где  $H(t)$  — неизвестная функция случайных источников.

Проведем разложения Фурье на отрезке  $0 < t < T$ :

$$H(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(j\omega_n t), \quad \theta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \exp(j\omega_n t).$$

Подставляя их в выражение (5.41) и приравнявая коэффициенты при  $\exp(j\omega_n t)$ , получим

$$b_n(j\omega_n C_H + g_H) = a_n, \quad b_n = \frac{a_n}{j\omega_n C_H + g_H},$$

так что

$$S_\theta(f) = \frac{S_H(f)}{\omega_n^2 C_H^2 + g_H^2}. \quad (5.42)$$

Сразу после этой выкладки докажем, что

$$\bar{\theta}^2 = \frac{kT^2}{C_H}. \quad (5.43)$$

Это соотношение дает достаточную информацию для расчета функции  $S_H(f)$ . Поскольку функция  $S_H(f)$  описывает белый спектр, то

$$\bar{\theta}^2 = \int_0^\infty S_\theta(f) df = S_H(0) \int_0^\infty \frac{df}{\omega^2 C_H^2 + g_H^2} = \frac{S_H(0)}{4g_H C_H}.$$

Следовательно,

$$S_H(0) = 4g_H C_H \bar{\theta}^2 = 4kT^2 g_H \quad (5.44)$$

и

$$S_\theta(f) = \frac{4kT^2 g_H}{\omega^2 C_H^2 + g_H^2}. \quad (5.44a)$$

Теперь вернемся к доказательству выражения (5.43). Возьмем большое число идентичных малых тел и будем поддерживать их в состоянии теплового равновесия с термостатом, поддерживаемым при температуре  $T$ . Пусть каждое из тел может иметь энергию  $E_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ). Поскольку вероятность того, что система обладает энергией  $E_i$ , равна  $A \exp(-E_i/kT)$  и это распределение должно быть нормировано, имеем

$$\sum_i A \exp\left(-\frac{E_i}{kT}\right) = 1 \quad \text{или} \quad A = \frac{1}{\sum_i \exp(-E_i/kT)}.$$



Таким образом, средняя энергия равна

$$\bar{E}_i = \sum_i E_i A \exp\left(-\frac{E_i}{kT}\right) = \frac{\sum_i E_i \exp(-E_i/kT)}{\sum_i \exp(-E_i/kT)}.$$

Поэтому выражение для теплоемкости можно записать в виде

$$C_H = \frac{\partial \bar{E}_i}{\partial T} = \frac{1}{kT^2} \left\{ \frac{\sum_i E_i^2 \exp(-E_i/kT)}{\sum_i \exp(-E_i/kT)} - \left[ \frac{\sum_i E_i \exp(-E_i/kT)}{\sum_i \exp(-E_i/kT)} \right]^2 \right\} = \frac{\bar{E}_i^2 - (\bar{E}_i)^2}{kT^2},$$

или

$$\bar{E}_i^2 - (\bar{E}_i)^2 = C_H kT^2.$$

Однако

$$E_i - \bar{E}_i = C_H \theta, \text{ т. е. } \bar{E}_i^2 - (\bar{E}_i)^2 = C_H^2 \bar{\theta}^2$$

откуда

$$\bar{\theta}^2 = \frac{kT^2}{C_H},$$

что и требовалось доказать.

## 5.2.6. ГЕНЕРАЦИОННО-РЕКОМБИНАЦИОННЫЙ ШУМ

В полупроводниках часто сталкиваются с шумом, вызванным генерацией и рекомбинацией носителей заряда. Мы уже рассмотрели частный пример в разд. 5.2.1. Обобщенное уравнение для числа носителей  $N$  в полупроводниковом образце имеет вид

$$\frac{dN}{dt} = g(N) - r(N), \quad (5.45)$$

где функции  $g(N)$  и  $r(N)$ , характеризующие соответственно скорости генерации и рекомбинации носителей, являются известными функциями  $N$ . Равновесное зна-

чение  $N_0$  числа носителей  $N$  находится из условия  $dN/dt = 0$  при  $N = N_0$  или

$$g(N_0) = r(N_0). \quad (5.45a)$$

Рассмотрим теперь малые флуктуации  $N$  в окрестности равновесного значения  $N_0$ . Положим  $N = N_0 + \Delta N$  и произведем разложение функций  $g(N)$  и  $r(N)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $N_0$ . Это дает

$$\begin{aligned} \frac{d \Delta N}{dt} &= \left( \frac{dr}{dN} - \frac{dg}{dN} \right) \Big|_{N_0} \Delta N + \Delta g(t) - \Delta r(t) = \\ &= -\frac{\Delta N}{\tau} + \Delta g(t) - \Delta r(t), \end{aligned} \quad (5.46)$$

где

$$\frac{1}{\tau} = \left( \frac{dr}{dN} - \frac{dg}{dN} \right) \Big|_{N_0}, \quad (5.46a)$$

т. е.  $\tau$  — постоянная времени системы, а  $\Delta g(t)$  и  $\Delta r(t)$  — белые функции случайных источников, описывающие дробовой шум скоростей  $g[N(t)]$  и  $r[N(t)]$ .

Выполняя разложения Фурье на отрезке  $0 \leq t < T$

$$\Delta N(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(j\omega_n t), \quad \Delta g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \exp(j\omega_n t),$$

$$\Delta r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(j\omega_n t),$$

подставим их в выражение (5.46). Приравнивание коэффициентов при  $\exp(j\omega_n t)$  дает

$$\left( j\omega_n + \frac{1}{\tau} \right) a_n = b_n - c_n, \quad a_n = \frac{\tau}{1 + j\omega_n \tau} (b_n - c_n)$$

или

$$S_N(f) = \frac{\tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} [S_g(f) + S_r(f)] = \frac{4g(N_0)\tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2}, \quad (5.47)$$

так как  $S_g(f) = S_r(f) = 2g(N_0) = 2r(N_0)$  в силу того, что они характеризуют источники дробового шума.

Однако по аналогии с выражением (5.19) мы можем также записать

$$S_N(f) = 4 \overline{\Delta N^2} \frac{\tau}{1 + \omega^2 \tau^2}. \quad (5.48)$$

Приравнивание его к выражению (5.47) дает

$$\overline{\Delta N^2} = g(N_0) \tau = \frac{g(N_0)}{(dr/dN - dg/dN)|_{N_0}}. \quad (5.49)$$

Этот результат может быть также получен из основного уравнения <sup>1</sup>.

В качестве примера рассмотрим слабо легированный материал  $n$ -типа. В данном случае

$$g(N) = g_0 = \text{const}, \quad r(N) = \rho NP = \rho N(N - N_d), \quad (5.50)$$

где  $g_0$  и  $\rho$  — постоянные, а  $N_d$  — концентрация доноров. Условие равновесия имеет вид

$$g_0 = \rho N_0 P_0 = \rho N_0(N_0 - N_d). \quad (5.50a)$$

Кроме того,

$$\frac{1}{\tau} = \left( \frac{dr}{dN} - \frac{dg}{dN} \right)_{N_0} = \rho(2N_0 - N_d) = \rho(N_0 + P_0) \quad (5.50б)$$

и, следовательно,

$$\overline{\Delta N^2} = g_0 \tau = \frac{g_0}{\rho(N_0 + P_0)} = \frac{N_0 P_0}{N_0 + P_0}. \quad (5.50в)$$

Эти флуктуации числа носителей можно обнаружить, если через образец пропустить ток  $I_0$  или приложить к нему напряжение  $V$ . Если образец содержит лишь электроны с концентрацией  $n$ , то его проводимость

$$g = e\mu_n n \frac{A}{L} = \frac{e\mu_n N}{L^2},$$

где  $N = nAL$  — полное число носителей,  $A$  — поперечное сечение образца,  $L$  — его длина и  $\mu_n$  — подвижность электронов. Следовательно,

$$I_0 = gV = \frac{e\mu_n N_0 V}{L^2}, \quad \Delta I = \frac{e\mu_n V}{L^2} \Delta N = \frac{I_0}{N_0} \Delta N,$$

<sup>1</sup> Ср., например, с работой [6].

так что

$$S_I(f) = \left(\frac{e\mu_n V}{L^2}\right)^2 S_N(f) = 4 \left(\frac{e\mu_n V}{L^2}\right)^2 \overline{\Delta N^2} \frac{\tau}{1 + \omega^2 \tau^2}, \quad (5.51)$$

или

$$S_I(f) = \frac{I_0^2}{N_0^2} S_N(f) = 4 \frac{I_0^2}{N_0^2} \overline{\Delta N^2} \frac{\tau}{1 + \omega^2 \tau^2}. \quad (5.51a)$$

Если в образце присутствуют как электроны, так и дырки в количествах  $N_0$  и  $P_0$  с флуктуациями  $\Delta N$  и  $\Delta P$ , то

$$I = e(\mu_n N_0 + \mu_p P_0) \frac{V}{L^2} = \left(\frac{e\mu_n V}{L^2}\right) \left(N_0 + \frac{\mu_p}{\mu_n} P_0\right),$$

$$\Delta I = \left(\frac{e\mu_n V}{L^2}\right) \left(\Delta N + \frac{\mu_p}{\mu_n} \Delta P\right).$$

Следовательно, если  $S_{N, N}(f)$ ,  $S_{N, P}(f)$  и  $S_{P, P}(f)$  являются спектрами, то

$$S_I(f) = \left(\frac{e\mu_n V}{L^2}\right)^2 \left[ S_{N, N}(f) + \left(\frac{\mu_p}{\mu_n}\right)^2 S_{P, P}(f) + 2 \left(\frac{\mu_p}{\mu_n}\right) \operatorname{Re} S_{N, P}(f) \right], \quad (5.52)$$

где символ  $\operatorname{Re}$  обозначает вещественную часть выражения. Если  $\Delta N = \Delta P$ , то  $S_{N, N} = S_{P, P} = S_{N, P}$  и

$$S_I(f) = 4 \left(\frac{e\mu_n V}{L^2}\right)^2 \left(\frac{\mu_n + \mu_p}{\mu_n}\right)^2 \overline{\Delta N^2} \frac{\tau}{1 + \omega^2 \tau^2}. \quad (5.52a)$$

## ОПИСАНИЕ ШУМОВ ПРИБОРОВ И УСИЛИТЕЛЕЙ

В этой главе обсуждаются способы описания шумов в пассивных и активных цепях с помощью понятий эквивалентного шумового сопротивления, эквивалентной шумовой проводимости, эквивалентной шумовой температуры и коэффициента шума четырехполюсника применительно к полевым транзисторам (ПТ) и обычным (биполярным) транзисторам (разд. 6.1). В разд. 6.2 и 6.3 рассматривается коэффициент шума некоторых простых схем на ПТ и обычных транзисторах.

### 6.1. ОПИСАНИЕ ШУМОВ

#### 6.1.1. ДВУХПОЛЮСНИКИ

Шум любого пассивного или активного двухполюсника, находящегося при температуре  $T$ , может быть представлен в виде э. д. с.  $e_n$ , включенной последовательно с полным сопротивлением  $Z = R + jX$  цепи (рис. 6.1, а). Составим равенство

$$\overline{e_n^2} = 4kTR_n \Delta f. \quad (6.1)$$

где  $\Delta f$  — интервал частот, для которого определяется э. д. с.  $e_n$ , а  $R_n$  — эквивалентное шумовое сопротивление цепи.

Если цепь является линейной и пассивной и включает в себя лишь источники теплового шума при температуре  $T$ , то

$$R_n = R. \quad (6.1a)$$

Если имеются другие шумовые источники, величина  $R_n$  может отличаться от  $R$ . То же самое справедливо для приборов, в которых нет теплового шума или которые проявляют тепловой шум, но являются нелинейными.

Шум любого пассивного или активного двухполюсника, находящегося при температуре  $T$ , также может

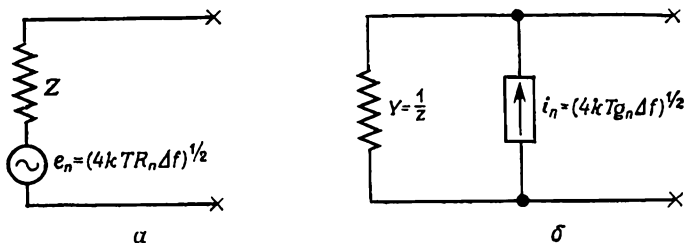


Рис. 6.1.

а — шум пассивного или активного полного сопротивления  $Z$ , представленный э. д. с.  $(4kTR_n \Delta f)^{1/2}$ , включенной последовательно с  $Z$ ; б — шум пассивной или активной полной проводимости  $Y = 1/Z$ , представленный генератором тока  $(4kTg_n \Delta f)^{1/2}$ , включенным параллельно  $Y$

быть представлен генератором тока  $i_n$ , включенным параллельно с полной проводимостью  $Y = 1/Z = (g + jb)$  (рис. 6.1, б). Запишем равенство

$$\bar{i}_n^2 = 4kTg_n \Delta f, \quad (6.2)$$

где  $g_n$  — эквивалентная шумовая проводимость прибора.

Если цепь является линейной и пассивной, а все источники шума тепловые и имеют температуру  $T$ , то

$$g_n = g. \quad (6.2a)$$

Если присутствуют другие источники шума или если система нелинейна, то величина  $g_n$  может отличаться от величины  $g$ .

Можно также записать равенство

$$\bar{i}_n^2 = 2eI_{\text{экр}} \Delta f, \quad (6.3)$$

где  $I_{\text{экр}}$  — эквивалентный ток насыщенного диода данной цепи. Оно особенно уместно, когда все шумовые

источники представляют собой источники дробового шума, например в диоде с термокатодом, имеющим в режиме насыщения ток  $I_d$ ,

$$I_{\text{экв}} = I_d. \quad (6.3a)$$

В режиме ограничения термоэмиссии пространственным зарядом флуктуации тока диода сглаживаются пространственным зарядом. Это выражается уравнением

$$\bar{i}_n^2 = 2e\Gamma^2 I_d \Delta f,$$

где  $\Gamma^2$  — коэффициент подавления шума пространственным зарядом. Отсюда

$$I_{\text{экв}} = \Gamma^2 I_d, \text{ или } \Gamma^2 = I_{\text{экв}}/I_d, \quad (6.3b)$$

так что величину  $\Gamma^2$  можно легко определить.

Наконец, можно ввести эквивалентную шумовую температуру  $T_n$ , представив выражения (6.1) и (6.2) в виде

$$\bar{e}_n^2 = 4kT_n R \Delta f, \text{ или } T_n = (R_n/R)T, \quad (6.4)$$

$$\bar{i}_n^2 = 4kT_n g \Delta f, \text{ или } T_n = (g_n/g)T. \quad (6.5)$$

Это представление относится к приборам, в которых носители тока имеют эквивалентную температуру, отличную от температуры окружающей среды, примером чего может служить шум горячих электронов в твердых телах или в газовой плазме.

Поскольку заранее может быть не известно, какое представление наиболее соответствует теоретическому объяснению, необходимо знать переходы от одного представления к другому. Эти вопросы, а также измерение величин  $R_n$ ,  $g_n$ ,  $I_{\text{экв}}$  и  $T_n$  обсуждаются в работе [6].

### 6.1.2. ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ

Приборы-четыреполосники, подобные обычным транзисторам и ПТ, как правило, имеют источники шума на выходе и входе. Поэтому шум должен быть представлен генератором выходного тока  $i_0$  и генератором входного тока  $i_i$ , которые частично коррелированы (рис. 6.2, а).

Обозначим полную входную проводимость прибора (при коротком замыкании на выходе) через  $Y_i$ , а проходную проводимость (при тех же условиях) через  $Y_m$ . Тогда эквивалентную схему прибора можно предста-

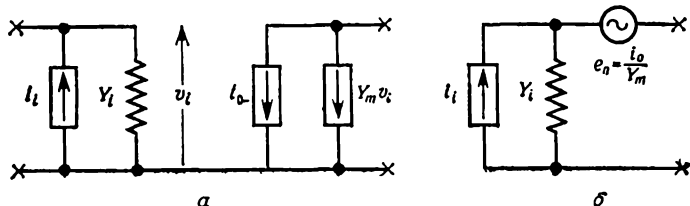


Рис. 6.2.

*a* — активный четырехполюсник, в котором шум представлен генератором тока  $i_i$ , включенным параллельно входной проводимости  $Y_i$ , и генератором тока  $i_o$ , включенным параллельно выходу, а передача сигнала описывается генератором тока  $Y_m v_i$ ; *б* — та же самая цепь, но генератор тока  $i_o$  заменен э. д. с.  $e_n = i_o / Y_m$ , включенной последовательно со входом.

вить в виде, показанном на рис. 6.2, *б*, где шумовая э. д. с.  $e_n = i_o / Y_m$ . Рассмотрим равенство

$$\overline{e_n^2} = \frac{\overline{i_o^2}}{|Y_m|^2} = 4kTR_n \Delta f, \quad (6.6)$$

где величина  $R_n$  — эквивалентное шумовое сопротивление прибора. Можно также составить равенство

$$\overline{i_i^2} = 4kTg_{ni} \Delta f, \quad (6.7)$$

где величина  $g_{ni}$  — эквивалентная входная шумовая проводимость прибора.

Иногда необходимо учитывать корреляцию между токами  $i_o$  и  $i_i$ . Применим это к ПТ, работающему в режиме насыщения. В полевом транзисторе с плоскостным затвором (ПТПЗ) низкочастотный шум представляет собой генерационно-рекомбинационный шум и шумовое сопротивление имеет вид

$$R_n = \frac{A}{1 + \omega^2 \tau^2}. \quad (6.8)$$

Обычно у ПТПЗ при комнатной температуре величина  $A$  имеет порядок  $10^4$  Ом, а величина  $\tau$  — порядок  $10^{-3}$  с.



В полевом транзисторе со структурой металл—окисел—полупроводник (МОП-транзистор) низкочастотный шум является фликер-шумом; при этом сопротивление  $R_n$  имеет вид

$$R_n = B/f. \quad (6.8a)$$

Обычно величина  $B$  имеет порядок  $10^8$  Ом·Гц, однако у менее качественных образцов она может быть гораздо больше.

На более высоких частотах шум является тепловым шумом проводящего канала. Расчеты показывают, что для режима насыщения справедливо равенство

$$\overline{i_0^2} = \overline{i_d^2} = \alpha \cdot 4kTg_m \Delta f, \quad (6.9)$$

где  $g_m$  — проходная проводимость при насыщении. Подставляя равенство (6.9) в выражение (6.6) и полагая  $Y_m = g_m$ , имеем

$$R_n = \alpha/g_m. \quad (6.9a)$$

У МОП-транзисторов параметр  $\alpha$  принимает значение  $2/3$ , а у ПТПЗ — значения  $1/2$ — $2/3$  (в зависимости от смещения). Величина  $\alpha$  должна несколько возрастать, если канал вблизи истока обладает заметным последовательным сопротивлением  $r_s$ . Однако параметр  $\alpha$  никогда не превосходит единицы до тех пор, пока не проявятся эффекты горячих электронов, подобные тем, которые наблюдаются в очень коротких каналах.

В ПТПЗ существует постоянный ток затвора  $I_g$  порядка  $10^{-9}$ — $10^{-12}$  А, который на низких частотах порождает дробовой шум, поскольку прибор функционирует как обратный смещенный диод. В данном случае использовать шумовую проводимость  $g_{nl}$  не очень удобно; лучше записать

$$\overline{i_i^2} = \overline{i_g^2} = 2eI_g \Delta f. \quad (6.10)$$

Единственное исключение возникает в случае с «плавающим» потенциалом затвора. Тогда имеются два равных и противоположно направленных тока  $I_{g0}$ , протекающих через переход затвора, и, следовательно,

$$\overline{i_i^2} = 4eI_{g0} \Delta f. \quad (6.10a)$$

Поскольку затвор ПТ действует как свободный диод, входная проводимость равна

$$g_i = \frac{1}{R_g} = \frac{eI_{g0}}{kT} \quad (6.106)$$

и поэтому

$$\bar{i}_g^2 = 4kTg_i \Delta f \text{ или } g_{ni} = g_i. \quad (6.10в)$$

У МОП-транзисторов ток утечки практически равен нулю, так что проблем не возникает.

На высоких частотах благодаря емкостной связи между каналом и затвором существует шум затвора как в ПТПЗ, так и в МОП-транзисторе. Расчет показывает, что в режиме насыщения выполняется равенство

$$\bar{i}_i^2 = \bar{i}_g^2 = \beta \cdot 4kTg_{gs} \Delta f, \quad (6.11)$$

где для ПТПЗ величина  $\beta$  заключена между 1 и  $4/3$  (в зависимости от смещения), а для МОП-транзистора  $\beta = 4/3$ . В данном случае  $g_{gs}$  — входная проводимость прибора при короткозамкнутом выходе; следовательно,  $g_{ni} = \beta g_{gs}$ . Дальнейшие расчеты показывают, что для МОП-транзисторов в режиме насыщения

$$g_{gs} = \frac{1}{5} \frac{\omega^2 C_{gs}^2}{g_m}, \quad (6.11а)$$

где  $C_{gs}$  — емкость затвор—исток.

При некоторых расчетах шума необходимо принимать во внимание, что токи  $i_g$  и  $i_d$  частично коррелированы. Расчеты показывают, что коэффициент корреляции

$$c = \frac{\overline{i_g i_d^*}}{(\bar{i}_g^2 \bar{i}_d^2)^{1/2}} \quad (6.12)$$

представляет собой мнимую величину, исключая случай самых высоких частот, и что  $|c| \approx 0,40$  (точнее,  $|c| = 0,395$  для МОП-транзистора).

Большинство формул приведено здесь без их вывода. Более подробно это изложено в работе [6]. Эквивалентная схема представлена на рис. 6.3.

Обратимся теперь к транзистору, включенному по схеме с общим эмиттером (база — вход, коллектор — выход). На низких частотах имеет место фликер-шум со спектром типа  $1/f$ ; его можно представить генератором тока  $i_i = i_{bf}$ , включенным между базой и эмиттером, у которого

$$\bar{i}_i^2 = \bar{i}_{bf}^2 = \frac{BI_B^\gamma}{f} \Delta f. \quad (6.13)$$

Здесь  $B$  — константа,  $I_B$  — ток базы, а  $\gamma$  — величина порядка единицы. Эта задача обсуждается в гл. 7.

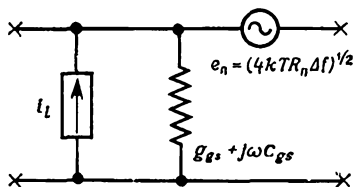


Рис. 6.3. Высокочастотная эквивалентная шумовая схема ПТПЗ или МОП-транзистора, в которой входной шум представлен генератором тока  $i_i$ , включенным параллельно входной проводимости  $Y_{gs} = g_{gs} + j\omega C_{gs}$ , а выходной шум представлен э. д. с.  $e_n = (4kTR_n \Delta f)^{1/2}$ , включенной последовательно со входом.

На более высоких частотах шум является дробовым. Если  $I_C$  — ток коллектора, то  $g_m = eI_C/kT$  является крутизной. Кроме того, мы видели, что выражение

$$\bar{i}_0^2 = \bar{i}_c^2 = 2eI_C \Delta f = 2kTg_m \Delta f \quad (6.14)$$

описывает шум в цепи коллектора. Отсюда

$$\bar{e}_n^2 = \frac{\bar{i}_c^2}{g_m^2} = \frac{2kT \Delta f}{g_m}, \quad (6.14a)$$

поэтому шумовое сопротивление  $R_n$  прибора

$$R_n = 1/2g_m, \quad (6.14b)$$

Ток базы  $I_B$  создает полный дробовой шум. Входная проводимость  $g_{be}$  при коротком замыкании на выходе равна  $eI_B/kT$ , а отсюда

$$\bar{i}_i^2 = \bar{i}_b^2 = 2eI_B \Delta f = 2kTg_{be} \Delta f. \quad (6.15)$$

Следовательно, входная шумовая проводимость имеет вид

$$g_{nt} = g_{be}/2. \quad (6.15a)$$

Эквивалентная схема показана на рис. 6.4. С целью приближенного описания области высоких частот была

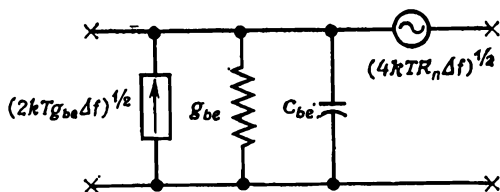


Рис. 6.4. Высокочастотная эквивалентная шумовая схема биполярного транзистора в которой входной шум представлен генератором тока  $(2kTg_{be}\Delta f)^{1/2}$ , включенным параллельно входной полной проводимости  $g_{be} + j\omega C_{be}$ , а выходной шум представлен э. д. с.  $(4kTR_n\Delta f)^{1/2}$ , включенной последовательно со входом.

добавлена входная емкость  $C_{be}$ . Более подробное обсуждение схемы можно найти в работе [6].

### 6.1.3. КОЭФФИЦИЕНТ ШУМА

Коэффициент шума  $F$  усилителя определяется как

$$F = \frac{\text{Мощность шума на выходе усилителя}}{\text{Вклад сопротивления генератора } R_s}. \quad (6.16)$$

Отнесем теперь все источники шума ко входу (рис. 6.5, а и б) и представим их генератором тока  $(\overline{i_{\text{ЭКВ}}^2})^{1/2}$ , включенным параллельно проводимости  $g_s$ , или источником шумовой э. д. с.  $(\overline{e_{\text{ЭКВ}}^2})^{1/2}$ , включенным последовательно с сопротивлением  $R_s$ . Тогда

$$F = \frac{\overline{i_{\text{ЭКВ}}^2}}{4kT\Delta f g_s} = \frac{\overline{e_{\text{ЭКВ}}^2}}{4kTR_s\Delta f}. \quad (6.16a)$$

Это предполагает следующую простую методику измерения коэффициента шума. Параллельно сопро-

тивлению  $R_s$ , подсоединяется вакуумный диод  $D$ , работающий в режиме насыщения, и через него пропускается ток  $I_d$  такой величины, чтобы шумовая мощность на выходе усилителя удвоилась. Тогда, если  $X_s = 0$ ,

$$\overline{i_{\text{эКВ}}^2} = 2eI_d\Delta f,$$

и, следовательно,

$$F = \frac{e}{2kT} I_d R_s \quad (6.17)$$

Рассчитаем теперь коэффициент шума усилительного каскада на ПТ для тех частот, на которых шум затвора пренебрежимо мал. Схема представлена на

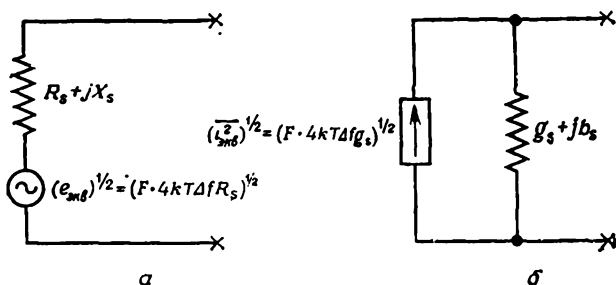


Рис. 6.5. Определение коэффициента шума  $F$ .

$a$  — шум усилителя представлен э. д. с.  $(\overline{i_{\text{эКВ}}^2})^{1/2} = (F \cdot 4kT \Delta f R_s)^{1/2}$  включенной последовательно с полным сопротивлением источника  $Z_s = R_s + jX_s$ ;  $b$  — шум усилителя представлен генератором тока  $(\overline{i_{\text{эКВ}}^2})^{1/2} = (F \cdot 4kT \Delta f g_s)^{1/2}$ , включенным параллельно полной проводимости источника  $Y_s = g_s + jb_s$ .

рис. 6.6,  $a$ . Здесь  $R_s$  — сопротивление генератора, имеющего тепловой шум, а шум прибора характеризуется шумовым сопротивлением  $R_n$ . Отсюда

$$F = \frac{4kTR_s\Delta f + 4kTR_n\Delta f}{4kTR_s\Delta f} = 1 + \frac{R_n}{R_s}. \quad (6.18)$$

На практике желательно, чтобы величина  $F$  была по возможности близка к единице. Это означает, что

$R_s \gg R_n$ . В некоторых случаях этого нельзя достичь, поскольку входная цепь должна удовлетворять требованию обеспечения заданной ширины полосы.

В ПТПЗ имеется другая причина, по которой величина  $R_s$  не может быть слишком большой; она заключается в том, что тогда становится существенным влияние тока утечки затвора  $I_g$ . Это иллюстрируется

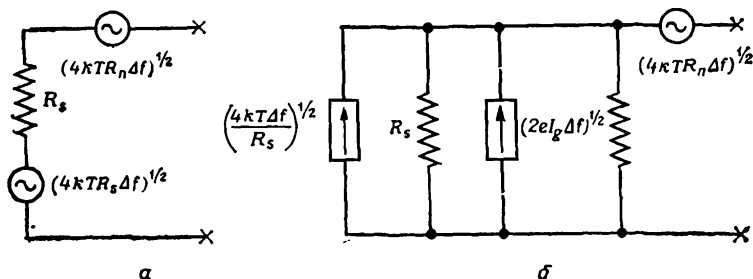


Рис. 6.6. Эквивалентная шумовая схема ПТПЗ.

*a* — при низкоомных сопротивлениях источника шум прибора представлен э. д. с.  $(4kTR_n \Delta f)^{1/2}$ , включенной последовательно со входом; *б* — при высокоомных сопротивлениях шум прибора представлен генератором тока  $(2eI_g \Delta f)^{1/2}$ , включенным параллельно дифференциальному входному сопротивлению  $R_g$ , и э. д. с.  $(4kTR_n \Delta f)^{1/2}$ , включенной последовательно со входом

рис. 6.6, б. В данном случае величина  $R_g$  определяется соотношением  $1/R_g = dI_g/dV_g$ . Для больших значений  $R_s$  и  $R_g$  (порядка  $10^8$ — $10^{12}$  Ом) э. д. с.  $(4kTR_n \Delta f)^{1/2}$  дает пренебрежимо малый вклад в коэффициент шума, и поэтому ею можно пренебречь. Тогда коэффициент шума  $F$  можно записать в виде

$$F = \frac{4kT\Delta f/R_s + 2eI_g\Delta f}{4kT\Delta f/R_s} = 1 + \frac{e}{2kT} I_g R_s \approx 1 + 20I_g R_s. \quad (6.19)$$

Для значений  $I_g = 10^{-10}$  А и  $R_s = 10^{10}$  Ом коэффициент шума  $F = 21$ . Это означает, что в таком случае значения  $R_s$  необходимо выбрать меньше  $10^8$  Ом, если желательно сделать величину  $F$  близкой к единице.

В многокаскадных усилителях необходимо также учитывать шум последующих каскадов. Часто наиболее

существенный вклад дает шум сопротивления нагрузки  $R_L$  на выходе первого каскада. Укажем, что его влияние легко учесть с помощью схемы рис. 6.7. В ней шум на выходе прибора представлен генератором тока  $(4kTR_n\Delta f g_m^2)^{1/2}$ , а шум сопротивления  $R_L$  — генера-

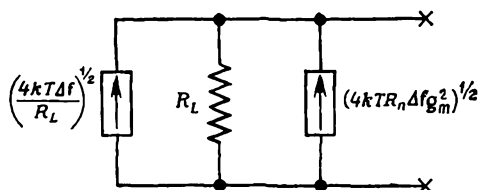


Рис. 6.7. Оценка влияния теплового шума сопротивления нагрузки  $R_L$  на выходе каскада усилителя на ПТ с шумовым сопротивлением  $R_n$ .

тором тока  $(4kT \Delta f/R_L)^{1/2}$ . Теперь введем новое шумовое сопротивление  $R'_n$  с помощью равенства

$$4kTR'_n\Delta f g_m^2 = 4kTR_n\Delta f g_m^2 + \frac{4kT\Delta f}{R_L}, \quad (6.20)$$

т. е.

$$R'_n = R_n + 1/g_m^2 R_L. \quad (6.20a)$$

Теперь при расчете коэффициента шума следует использовать выражение (6.20а), т. е. формулу (6.18) заменить выражением

$$F = 1 + \frac{R'_n}{R_s} = 1 + \frac{R_n}{R_s} + \frac{1}{g_m^2 R_s R_L}. \quad (6.21)$$

Например, если величины  $R_n = 100$  Ом,  $R_s = 1000$  Ом,  $R_L = 2000$  Ом,  $g_m = 5,0$  мСм, то коэффициент  $F = 1,12$ , причем его часть, равная 0,02, обусловлена вкладом последнего члена выражения (6.21).

#### 6.1.4. ФОРМУЛА ФРИИССА

Если хотят рассчитать коэффициент шума нескольких каскадов, включенных друг за другом (каскадное соединение), необходимо установить правила, которые учитывали бы нагрузочное сопротивление  $R_L$  между-

скадной цепи. Общий принцип заключается в том, чтобы относить шум сопротивления  $R_L$  к следующему каскаду. Этому правилу следовали при выводе уравнения (6.18)

Мы должны определить достижимое значение коэффициента усиления по мощности  $G_{\text{дос}}$  усилительного каскада. Для этого определим величину располагаемой мощности  $P_{s, \text{рас}}$  источника сигнала, состоящего из э. д. с.  $v_s$ , включенной последовательно с внутренним сопротивлением  $R_s$ , как мощность, которая может быть передана в согласованную нагрузку. Тогда

$$P_{s, \text{рас}} = \frac{1}{8} \frac{|v_s|^2}{R_s}. \quad (6.22)$$

Коэффициент усиления каскада по мощности  $G$  определится теперь отношением

$$G = \frac{\text{Выходная мощность, передаваемая в нагрузку}}{\text{Располагаемая мощность источника}}. \quad (6.23)$$

Если нагрузка согласована с выходом усилителя, то коэффициент усиления по мощности называется *достижимым коэффициентом усиления по мощности*

$$G_{\text{дос}} = \frac{\text{Выходная мощность, передаваемая в согласованную нагрузку}}{\text{Располагаемая мощность источника}} \quad (6.23a)$$

Теперь можно говорить о выражении для полного коэффициента шума  $F$  многокаскадного усилителя, которое справедливо при выполнении следующих условий:

1. Сопротивление нагрузки  $R_L$  каждой промежуточной цепи условно относится к следующему каскаду.

2. Выходная проводимость  $g_0$ , проявляющаяся со стороны любой промежуточной цепи (т. е. связанная с предыдущим каскадом), является положительной.

3.  $i$ -й каскад при выбранной связи с предыдущим каскадом имеет коэффициент шума  $F_i$  и достижимый коэффициент усиления  $G_{i, \text{дос}}$ .



При выполнении этих трех условий коэффициент шума  $F$  всего усилителя равен

$$F = 1 + (F_1 - 1) + \frac{F_2 - 1}{G_{1, \text{дос}}} + \frac{F_3 - 1}{G_{1, \text{дос}} G_{2, \text{дос}}}. \quad (6.24)$$

Это выражение известно как *формула Фриисса*. Мы не будем его использовать по следующим соображениям:

1. Сним очень неудобно работать, когда величина  $g_0$  близка к нулю.

2. Схемы, подлежащие обсуждению, достаточно просты для непосредственного расчета.

## 6.2 ПРИМЕНЕНИЕ К СХЕМАМ С ПОЛЕВЫМИ ТРАНЗИСТОРАМИ

### 6.2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ В ПТ ВЕЛИЧИН $R_n$ и $I_g$

Обратимся к обсуждению методов определения шумового сопротивления  $R_n$  и тока затвора ПТПЗ. Соответствующая схема показана на рис. 6.8. Заземление

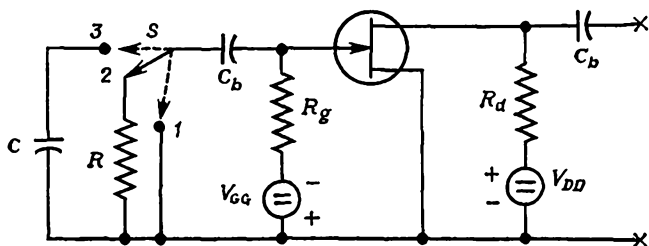


Рис. 6.8. Измерение шумового сопротивления  $R_n$  и тока затвора  $I_g$  ПТПЗ.

$a$  — сравнивая выходной шум при установке переключателя  $S$  в положения 1 и 2 можно вычислить величину  $R_n$ ;  $b$  — сравнивая выходной шум при установке переключателя  $S$  в положения 1 и 3 и сопоставляя с результатами предыдущего измерения, можно определить величину  $I_g$

затвора осуществляется через большое сопротивление смещения  $R_g$ . При помощи разделительного конденсатора  $C_b$  с достаточно низким сопротивлением затвор

подсоединяется к переключателю  $S$ . Он имеет три положения:

**Положение 1.** Подключение к земле.

**Положение 2.** Подсоединение к подходящим образом выбранному сопротивлению  $R$ .

**Положение 3.** Подсоединение к подходящим образом выбранному конденсатору  $C$ .

Выход ПТ подключается к усилителю с большим коэффициентом усиления, который связывается с усилителем мощности.

Обсудим сначала измерение шумового сопротивления  $R_n$ . Здесь величина  $R_g$  выбирается так, чтобы  $R_g > > 100R$ . В положении 1 затвор закорочен, и отсчет  $M_1$  измерителя мощности соответствует шуму сопротивления  $R_n$ , средний квадрат которого равен  $4kTR_n\Delta f$ . В положении 2 переключатель соединен с сопротивлением  $R$ , и, следовательно, эквивалентный входной шум теперь имеет средний квадрат  $4kT(R + R_n)\Delta f$ . Если в этом случае показания измерителя мощности соответствуют  $M_2$ , то

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{4kT(R + R_n)\Delta f}{4kTR_n\Delta f} = 1 + \frac{R}{R_n},$$

так что

$$R_n = \frac{M_1}{M_2 - M_1} R. \quad (6.25)$$

Для качественного измерения значения  $M_1$  и  $M_2 - M_1$  должны быть сравнимы.

Результаты этих измерений хорошо согласуются с теорией для сравнительно высоких частот, однако на более низких частотах шум увеличивается с понижением частоты вследствие фликер-шума в МОП-транзисторах или генерационно-рекомбинационного шума в ПТПЗ.

Для измерения тока затвора  $I_g$  берется сопротивление  $R_g$  гораздо большей величины, например  $R_g = = 10^{10} - 10^{12}$  Ом. Наличие тока затвора  $I_g$  ведет к появлению генератора шумового тока затвора  $(2eI_g\Delta f)^{1/2}$ , включенного параллельно входу ПТ. Если теперь поставить переключатель в положение 3, то шумовое на-

пряжение, появляющееся на конденсаторе  $C$ , будет иметь средний квадрат  $\bar{v}^2$

$$\bar{v}^2 = \frac{2eI_g \Delta f}{\omega^2 C^2} = 4kTR'_n \Delta f, \quad R'_n = \frac{e}{2kT} \frac{I_g}{\omega^2 C^2}. \quad (6.26)$$

Если отсчет измерителя мощности соответствует  $M_3$ , то

$$\frac{R'_n + R_n}{R_n} = \frac{M_3}{M_1}, \quad \frac{R'_n}{R_n} = \frac{M_3 - M_1}{M_1}. \quad (6.26a)$$

Подставляя выражение для  $R_n$ , имеем

$$R'_n = \frac{M_3 - M_1}{M_2 - M_1} R. \quad (6.26b)$$

Это выражение очень удобно для расчета, если величины  $M_3$  и  $M_2$  сопоставимы, а величина  $M_1$  мала по сравнению с величинами  $M_3$  и  $M_2$ . В этом случае

$$\bar{I}_g = \frac{2kT}{e} \omega^2 C^2 R'_n \approx \frac{2kT}{e} \omega^2 C^2 \frac{M_3}{M_2} R. \quad (6.26b)$$

Чтобы пользоваться таким простым методом, должны быть выполнены несколько условий:

1. Шум проводимости  $1/R$  должен быть велик по сравнению с шумом тока  $I_g$ , или

$$\frac{4kT}{R} \gg 2eI_g. \quad (6.27)$$

2. Шум проводимости  $1/R_g$  должен быть мал по сравнению с шумом тока  $I_g$ , или

$$\frac{4kT}{R_g} \ll 2eI_g. \quad (6.27a)$$

3. Емкость  $C$  необходимо выбрать так, чтобы сопротивления  $R'_n$  и  $R$  были соизмеримы.

Пр и м е р.  $I_g = 10^{-11}$  А. Тогда левая часть неравенства (6.27) в 100 раз больше правой при  $R \approx 5 \cdot 10^7$  Ом, а левая часть неравенства (6.27a) в 100 раз меньше правой при  $R_g = 5 \cdot 10^{11}$  Ом. Если частота измерений составляет 10 Гц, то  $C = 30$  пФ. Если выбирается меньшее значение  $R$ , то величину  $C$  можно увеличить.

### 6.2.2. ИСТОКОВЫЙ ПОВТОРИТЕЛЬ И СХЕМА С ОБЩИМ ЗАТВОРОМ НА ПТ

Разберем сначала истоковый повторитель. Его схема показана на рис. 6.9, а. Сопротивление нагрузки  $R_L$  разбито на две части ( $R_{L1}$  и  $R_{L2}$ ), чтобы обеспечить надлежащее смещение на затворе; резистор  $R_g$  подво-

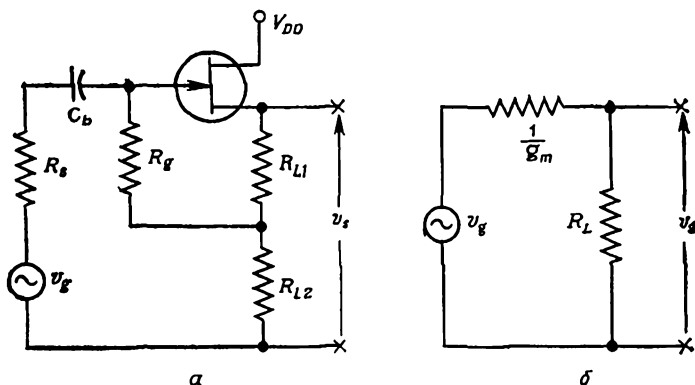


Рис. 6.9.

а — принципиальная схема истокового повторителя; б — эквивалентная схема для сигнала.

дит это напряжение к затвору. На рис. 6.9, б показана эквивалентная схема. Из нее видно, что коэффициент усиления по напряжению  $g_v$  меньше единицы

$$g_v = \frac{v_s}{v_g} = \frac{R_L}{1/g_m + R_L} = \frac{g_m R_L}{1 + g_m R_L}. \quad (6.28)$$

Здесь  $R_L = R_{L1} + R_{L2}$ .

Если пренебречь шумом сопротивления  $R_g$  и учесть, что  $R_n$  — шумовое сопротивление ПТ, эквивалентная схема выходной цепи примет вид, показанный на рис. 6.7. Следовательно, шумовое сопротивление  $R'_n$  всего устройства определяется из выражения (6.20а)

$$R'_n = R_n + \frac{1}{g_m^2 R_L}, \quad (6.29)$$

а коэффициент шума этого устройства имеет вид

$$F = 1 + \frac{R'_n}{R_s} = 1 + \frac{R_n}{R_s} + \frac{1}{g_m^2 R_s R_d}, \quad (6.30)$$

совпадающий с выражением (6.21).

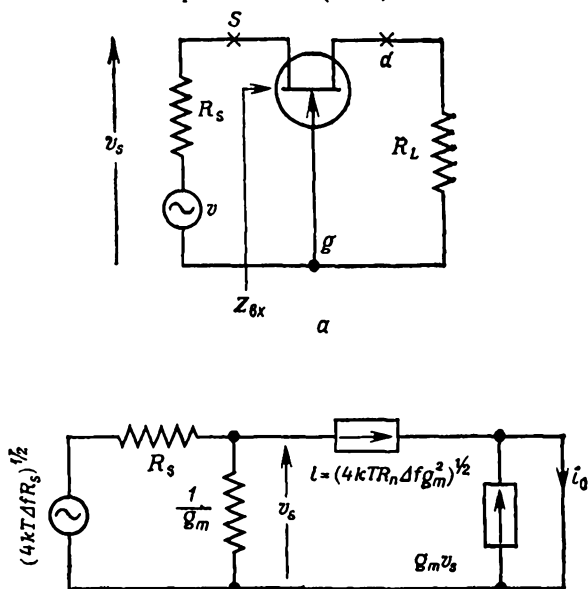


Рис. 6.10.

*a* — принципиальная схема каскада с общим затвором; *b* — эквивалентная схема каскада с общим затвором

Хотя истоковый повторитель имеет коэффициент усиления по напряжению несколько меньше единицы, он выполняет полезную функцию преобразования высокоомного сопротивления в низкоомное с малыми потерями сигнала.

Обратимся далее к схеме с общим затвором (рис. 6.10, *a*). В ней исток — входной электрод, а сток — выходной. Источник сигнала нагружен на входное сопротивление  $Z_{вх} = 1/g_m$ , и передачу сигнала можно охарактеризовать генератором тока  $g_m v_s$ , где  $v_s$  — переменное напряжение на истоке.

Для упрощения рассуждений закоротим выход; это допустимо, поскольку шум сопротивления нагрузки  $R_L$  отнесен к следующему каскаду. Сначала рассмотрим только шумовой ток  $i$  прибора. Он порождает входное напряжение

$$v_s = -i \frac{R_s (1/g_m)}{R_s + 1/g_m} = -\frac{i R_s}{1 + g_m R_s}, \quad (6.31)$$

и поэтому выходной ток короткого замыкания имеет вид

$$i'_0 = i + g_m v_s = i \left( 1 - \frac{g_m R_s}{1 + g_m R_s} \right) = \frac{i}{1 + g_m R_s}. \quad (6.31a)$$

Рассмотрим теперь шум сопротивления  $R_s$ . Он дает входное напряжение

$$v'_s = (4kTR_s \Delta f)^{1/2} \frac{1/g_m}{1/g_m + R_s} = \frac{(4kTR_s \Delta f)^{1/2}}{1 + g_m R_s}, \quad (6.32)$$

и поэтому выходной ток короткого замыкания равен

$$i''_0 = (4kTR_s \Delta f)^{1/2} g_m / (1 + g_m R_s).$$

Отсюда, суммируя квадраты шумовых токов

$$\overline{i_0^2} = (4kTR_s \Delta f + 4kTR_n \Delta f) \frac{g_m^2}{(1 + g_m R_s)^2}, \quad (6.33)$$

находим коэффициент шума

$$F = 1 + R_n/R_s, \quad (6.33a)$$

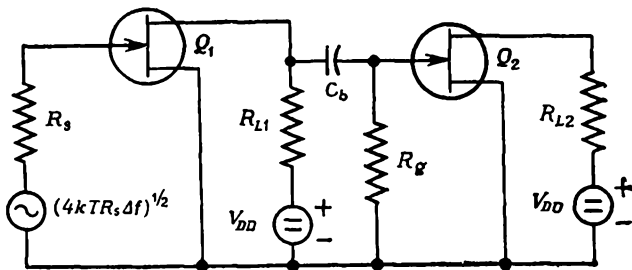
т. е. он оказывается таким же, как и для схемы с общим истоком.

Отметим, что воздействие генератора тока  $i$  уменьшено в  $(1 + g_m R_s)$  раз. Это важно для понимания работы ПТ с двойным затвором, обсуждаемой в разд. 6.2.4.

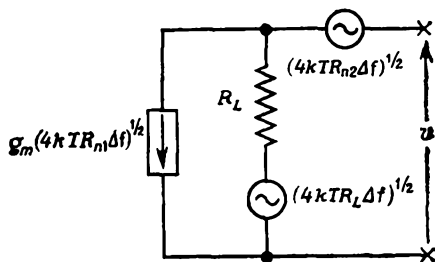
### 6.2.3. ШУМ ДВУХКАСКАДНОГО УСИЛИТЕЛЯ НА ПТ

Схема двухкаскадного усилителя на ПТ показана на рис. 6.11, а. Предположим, что  $R_{L1} = R_{L2} = R_L$ ; для упрощения выкладок примем, что выход второго каскада закоротен. Рассчитаем теперь шумовое со-

противление двух каскадов  $Q_1 + Q_2$ . Межкаскадную цепь с полевыми транзисторами можно представить эквивалентной схемой, показанной на рис. 6.11, б. Используем эту схему для расчета шумового сопротивления



а



б

Рис. 6.11.

а — принципиальная схема двухкаскадного усилителя на ПТ; б — шумовая эквивалентная схема, на которой все шумовые источники отнесены к межкаскадной цепи

ления  $R'_n$  всего устройства. Можно убедиться, что, согласно определению  $R'_n$ , имеем

$$\begin{aligned} \overline{v^2} &= 4kTR_{n1}\Delta f g_m^2 R_L^2 + 4kTR_L\Delta f + 4kTR_{n2}\Delta f = \\ &= 4kTR'_n\Delta f g_m^2 R_L^2. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Отсюда

$$R'_n = R_{n1} + \frac{R_L + R_{n2}}{g_m^2 R_L^2}. \quad (6.34a)$$

Если  $R_{n2} \ll R_L$ , это выражение сводится к

$$R'_n \simeq R_{n1} + 1/(g_m^2 R_L), \quad (6.346)$$

так что становится существенным лишь влияние сопротивления нагрузки  $R_L$ . Поэтому коэффициент шума  $F$  имеет вид

$$F = 1 + \frac{R'_n}{R_s} = 1 + \frac{1}{R_s} \left( R_{n1} + \frac{1}{g_m^2 R_L} + \frac{R_{n2}}{g_m^2 R_L^2} \right) \quad (6.35)$$

Это выражение не так просто получить из формулы Фрисса.

#### 6.2.4. ДВУХЗАТВОРНЫЙ ПТ

Двухзатворный ПТ состоит из двух ПТ  $Q_1$  и  $Q_2$ , расположенных в одном корпусе, причем сток  $d_1$  подсоединен к истоку  $s_2$  внутри, так что внешние выводы имеют лишь электроды  $g_1$ ,  $s_1$ ,  $g_2$  и  $d_2$ . По этой причине двухзатворный ПТ называют также *полевым тетродом*. Схема показана на рис. 6.12, а. Предположим, что  $Q_1$  и  $Q_2$  работают в режиме насыщения и идентичны друг другу.

Закоротим теперь выход и рассмотрим шум  $Q_1 + Q_2$ . Введем дифференциальное сопротивление  $r_d$ , относящееся к ПТ  $Q_1$ ; обычно оно очень велико, однако потребуется нам при проведении выкладок. В итоге приходим к эквивалентной схеме рис. 6.12, б, которую используем для расчета общего шумового сопротивления. Легко заметить, что

$$\begin{aligned} \overline{i_0^2} &= 4kTR_{n1} \Delta f g_{m1}^2 \left( \frac{r_d}{1 + g_{m2} r_d} \right)^2 g_{m2}^2 + \\ &+ \frac{4kTR_{n2} \Delta f g_{m2}^2}{(1 + g_{m2} r_d)^2} = 4kTR'_n \Delta f g_{m1}^2 \left( \frac{r_d}{1 + g_{m2} r_d} \right)^2 g_{m2}^2, \end{aligned} \quad (6.36)$$

где  $R_{n1} = R_{n2} = R_n$  — шумовые сопротивления, а  $g_{m1} = g_{m2} = g_m$  — проходные проводимости. Отсюда следует, что

$$R'_n = R_n [1 + 1/(g_m^2 r_d^2)] \simeq R_n, \quad (6.36a)$$



если  $g_m^2 r_d^2 \gg 1$ , что обычно имеет место. Поэтому двухзатворный ПТ имеет то же шумовое сопротивление, что и однозатворный ПТ, однако емкость обратной связи

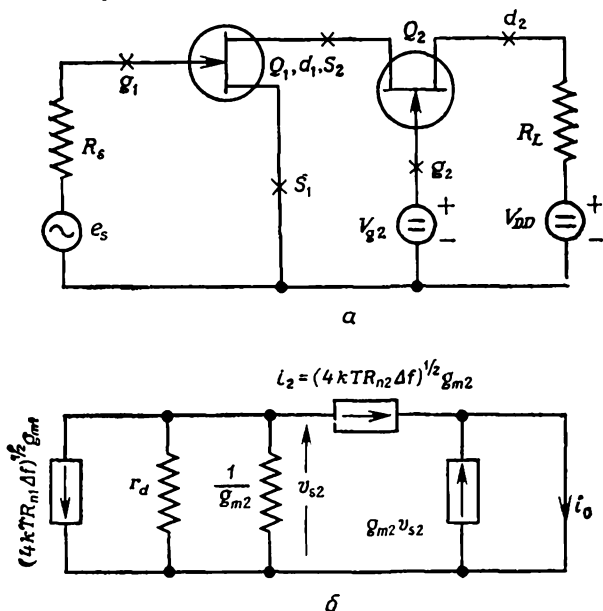


Рис. 6.12.

*a* — структурная схема усилителя на двухзатворном ПТ; *b* — шумовая эквивалентная схема, на которой шум первой половины схемы отнесен к выходу этого ПТ

между выходным стоком и входным затвором у него гораздо меньше, чем у однозатворного ПТ. Соответственно он обеспечивает гораздо лучшую стабильность в усилителях высоких частот.

### 6.2.5. ПИРОЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ДЕТЕКТОР С УСИЛИТЕЛЕМ НА ПТПЗ

Пироэлектрическим детектором является конденсатор  $C$ , выполненный из поляризованного сегнетоэлектрика, характеризующегося тангенсом угла потерь  $\text{tg } \delta$ . Если на детектор воздействует излучение,

модулированное частотой  $\omega$ , на конденсаторе возникает переменное напряжение частоты модуляции  $\omega$  (пироэлектрический эффект). Поскольку такой детектор является очень высокоомным прибором, напряжение должно усиливаться усилителем на ПТПЗ, обладающим высокоомным входным сопротивлением. Для улучшения стабильности рекомендуется использовать

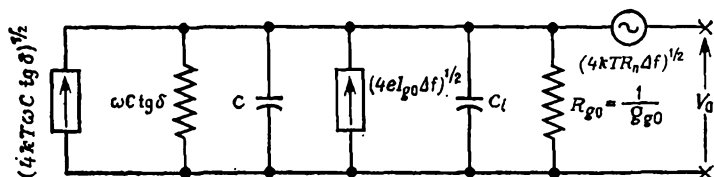


Рис. 6.13. Пироэлектрический детектор, имеющий эквивалентную схему, состоящую из емкости  $C$  и проводимости  $g = \omega C \operatorname{tg} \delta$ , которые подключены параллельно входу ПТПЗ с плавающим затвором.

ПТПЗ в режиме с плавающим затвором ( $I_g = 0$ , поскольку через затвор протекают два равных по величине, но противоположных по направлению тока  $I_{g0}$ ).

Таким образом, пироэлектрический детектор можно использовать как детектор излучения. Его шум соответствует тепловому шуму проводимости потерь диэлектрика,

$$g = \omega C \operatorname{tg} \delta. \quad (6.37)$$

Эквивалентная схема детектора с усилителем показана на рис. 6.13; в ней  $C_i$  является входной емкостью ПТПЗ при закороченном выходе, а  $g_{g0} = eI_{g0}/kT$  — входной проводимостью ПТПЗ с плавающим затвором. Положим, что  $\omega^2 (C + C_i)^2 \gg (g + g_{g0})^2$ ; это условие обычно выполняется, так как  $\operatorname{tg}^2 \delta \ll 1$  и  $g_{g0} \ll g$ , за исключением, быть может, случая самых низких частот. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \overline{v_0^2} &= \frac{4kT\omega C \operatorname{tg} \delta \Delta f + 4eI_{g0}\Delta f}{\omega^2 (C + C_i)^2} + 4kTR_n\Delta f = \\ &= \frac{4kT\omega C \operatorname{tg} \delta \Delta f}{\omega^2 (C + C_i)^2} F, \end{aligned} \quad (6.38)$$

где  $F$  — коэффициент шума детектора. Это определение имеет смысл, поскольку член

$$\frac{4kT\omega C \operatorname{tg} \delta \Delta f}{\omega^2(C + C_i)^2}$$

обусловлен источником сигнала. Отсюда

$$F = 1 + \frac{e}{kT} \frac{I_{g0}}{\omega C \operatorname{tg} \delta} + R_n \frac{\omega C}{\operatorname{tg} \delta} \left( \frac{C + C_i}{C} \right)^2. \quad (6.38a)$$

Если взять  $R_n = 10^5$  Ом,  $\omega = 60$  с<sup>-1</sup>,  $C = 20$  пФ,  $\operatorname{tg} \delta = 0,01$ ,  $C_i = 5$  пФ,  $I_{g0} = 10^{-12}$  А, тогда  $F = 4,35$ ; основной вклад в эту величину дает второй член, и она может быть значительно уменьшена охлаждением прибора на основе эффекта Пельтье.

Для МОП-транзистора  $I_{g0} \equiv 0$ , но  $R_n$  обычно намного больше из-за фликер-эффекта. Например, если  $R_n = 10^7$  Ом,  $\omega = 60$  с<sup>-1</sup>,  $C = 20$  пФ,  $C_i = 5$  пФ,  $\operatorname{tg} \delta = 0,01$ , тогда  $F = 2,88$ .

В случае ПТПЗ емкость  $C$  можно выбрать так, чтобы коэффициент  $F$  был минимален. Этого можно достичь выбором пироэлектрического детектора с надлежащей диэлектрической проницаемостью или площадью электродов.

## 6.2.6. ШУМ ПОЛЕВОГО ТРАНЗИСТОРА НА ВЫСОКИХ ЧАСТОТАХ

На высоких частотах необходимо учитывать как шум затвора, так и шум стока. В результате оказывается, что существуют оптимальная настройка входной цепи и оптимальная проводимость источника сигнала, обеспечивающие минимальный коэффициент шума  $F_{\min}$ . Согласно работе [6]<sup>1</sup>,

$$F_{\min} = 1 + 2R_n g_g + 2(1,12R_n g_g + R_n^2 g_g^2)^{1/2}. \quad (6.39)$$

Поскольку величина  $g_g$  в широком диапазоне частот изменяется как  $\omega^2$ , а сопротивление  $R_n$  в этом диапа-

<sup>1</sup> В ней не учитывается влияние корреляционной проводимости  $g_{\text{коррел}}$  и проводимости резонансного контура  $g_c$ .

зоне практически не зависит от частоты, разность  $F_{\text{мин}} - 1$  изменяется как  $\omega$  на более низких частотах и как  $\omega^2$  на более высоких. Кроме того,  $g_n = = (4/3) g_g (1 - |c|^2) = 1,12g_g$ , так как  $|c| = 0,395$ .

## 6.3. ШУМ ТРАНЗИСТОРНЫХ УСТРОЙСТВ

### 6.3.1. ОДИНОЧНЫЙ НИЗКОЧАСТОТНЫЙ КАСКАД

Чтобы найти коэффициент шума одиночного низкочастотного каскада, модифицируем эквивалентную схему рис. 6.4 и предположим, что можно пренебречь фликер-шумом. Изменения касаются исключения емкости  $C_{be}$ , добавления сопротивления базы  $r_b$  и его теплового шума, а также введения в схему сопротивления источника  $R_s$  с его тепловым шумом. Тогда получаем эквивалентную схему рис. 6.14, а. Ее в свою очередь можно заменить эквивалентной схемой рис. 6.14, б.

Можно отметить, что

$$\overline{v_0^2} = 4kTR_s\Delta f \left( \frac{r_{be}}{R_s + r_b + r_{be}} \right)^2 + 4kTr_b\Delta f \left( \frac{r_{be}}{R_s + r_b + r_{be}} \right)^2 + 2kTr_{be}\Delta f \frac{(R_s + r_b)^2}{(R_s + r_b + r_{be})^2} + \frac{2kT\Delta f}{q_m}, \quad (6.40)$$

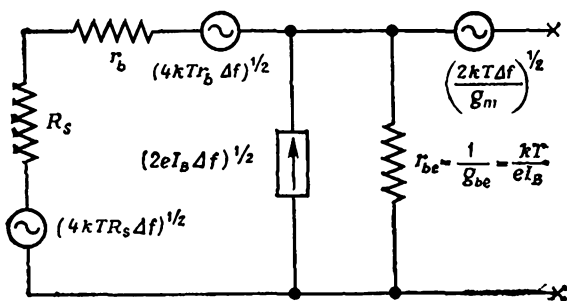
так что коэффициент шума цепи равен

$$F = 1 + \frac{r_b}{R_s} + \frac{1}{2} \frac{(R_s + r_b)^2}{R_s r_{be}} + \frac{1}{2g_m R_s} \left( \frac{R_s + r_b + r_{be}}{r_{be}} \right)^2. \quad (6.40a)$$

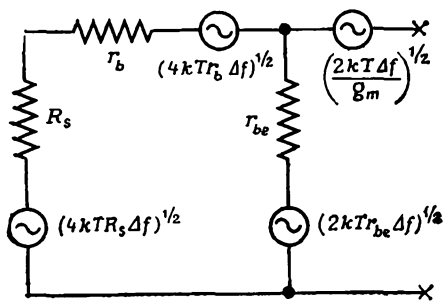
Обычно  $r_b \ll R_s$  и  $(R_s + r_b) \ll r_{be}$ , поэтому приближенно можно считать, что

$$\begin{aligned} F &\approx 1 + \frac{r_b}{R_s} + \frac{1}{2} \frac{R_s}{r_{be}} + \frac{1}{2g_m R_s} = \\ &= 1 + \frac{1 + 2g_m r_b}{2g_m R_s} + \frac{g_m}{2\beta_F} R_s, \end{aligned} \quad (6.41)$$

где  $g_m r_{be} = \beta_F$  — коэффициент усиления по току, или  $r_{be} = \beta_F / g_m$ .



a



b

Рис. 6.14.

a — эквивалентная шумовая схема транзистора, включенного по схеме с общим эмиттером; б — другой вариант эквивалентной схемы, в котором генератор тока  $(2eI_B \Delta f)^{1/2}$  включенный параллельно сопротивлению  $r_{be}$ , заменен шумовой э. д. с.  $(2kTr_{be} \Delta f)^{1/2}$ , включенной последовательно с сопротивлением  $r_{be}$

Коэффициент шума имеет минимальную величину

$$F_{\text{мин}} = 1 + 2 \left( \frac{1 + 2g_m r_b}{2g_m} \frac{g_m}{2\beta_F} \right)^{1/2} = 1 + \left( \frac{1 + 2g_m r_b}{\beta_F} \right)^{1/2} \quad (6.41a)$$

при

$$R_s = (R_s)_{\text{опт}} = \left( \frac{1 + 2g_m r_{be}}{2g_m} \frac{2\beta_F}{g_m} \right)^{1/2} = \frac{1}{g_m} |\beta_F (1 + 2g_m r_b)|^{1/2}. \quad (6.41b)$$

Точный расчет, основанный на использовании выражения (6.40а), приводит к

$$F_{\text{мин}} = 1 + \frac{1+x}{\beta_F} + \left[ \frac{1+2x}{\beta_F} + \left( \frac{1+x}{\beta_F} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (6.42)$$

где

$$x = g_m r_b (1 + 1/\beta_F). \quad (6.42a)$$

При больших значениях  $\beta_F$  это выражение сводится к выражению (6.41а).

**Пример.** При  $g_m = 40$  мСм,  $r_b = 50$  Ом,  $\beta_F = 100$  найти величины  $F_{\text{мин}}$  и  $(R_s)_{\text{опт}}$ , исходя из выражений (6.41а) и (6.41б), и вычислить разницу между значениями  $F_{\text{мин}}$ , полученными на основе выражений (6.42) и (6.41а).

**Ответ.**  $F_{\text{мин}} = 1 + 0,05^{1/2} = 1,22$ , так как  $g_m r_b = 2,0$ ;

$$(R_s)_{\text{опт}} = \frac{1}{40 \cdot 10^{-3}} 500^{1/2} = 560 \text{ Ом.}$$

Из выражения (6.42) величина  $F_{\text{мин}} = 1,03 + 0,0509^{1/2} = 1,26$ , что достаточно близко к величине 1,22.

Перечислим теперь некоторые выводы:

1. Шумовое сопротивление каскада при нулевом сопротивлении источника равно

$$R_{n0} = \lim_{R_s \rightarrow 0} R_s F = r_b + 0,5/g_m \quad (6.43)$$

в соответствии с выражением (6.41). Таким образом, если хотят измерить шумовое напряжение, развиваемое на малом сопротивлении, следует использовать транзисторы с очень низким сопротивлением базы  $r_b$  и относительно большой крутизной  $g_m$  (т. е. с большими токами). Таким способом можно получить низкие шумовые сопротивления  $R_{n0}$  до 50 Ом.

2. Шум можно представить генератором входного тока  $(i_{\text{экв}}^2)^{1/2}$ , причем

$$i_{\text{экв}}^2 = \frac{4kT\Delta f}{R_s} F. \quad (6.44)$$

Это выражение нужно нам для вывода коэффициента шума двухкаскадного транзисторного усилителя.

3. Мы можем использовать соображение, основанное на рис. 6.7, для расчета шумового сопротивления  $R'_n$  с учетом вклада сопротивления нагрузки  $R_L$ . При  $R_L = 0$  шумовое сопротивление равно  $0,5/g_m$ , и, согласно формуле (6.29),

$$R'_n = R_n + \frac{1}{g_m^2 R_L} = \frac{1}{2g_m} \left( 1 + \frac{2}{g_m R_L} \right). \quad (6.45)$$

Поэтому необходимо в выражении (6.40) заменить величину  $g_m$  на  $g_m/[1 + 2/(g_m R_L)]$ ; вместо выражения (6.41) получим

$$F \approx 1 + \frac{1 + 2/(g_m R_L) + 2g_m r_b}{2g_m R_s} + \frac{g_m R_s}{2\beta_F}, \quad (6.45a)$$

так что

$$F_{\text{мин}} = 1 + \left( \frac{1 + 2/(g_m R_L) + 2g_m r_b}{\beta_F} \right)^{1/2}. \quad (6.45b)$$

Часто влияние сопротивления нагрузки  $R_L$  крайне мало, и поэтому можно опустить член  $2/(g_m R_L)$ .

### 6.3.2. ДВУХКАСКАДНЫЙ НИЗКОЧАСТОТНЫЙ ТРАНЗИСТОРНЫЙ УСИЛИТЕЛЬ

Схема, на которой для простоты закорочен выход второго каскада и отсутствуют цепи смещения, показана на рис. 6.15.

Согласно предыдущему разделу, шум второго каскада задается эквивалентным генератором тока  $[F_2 (4kT\Delta f)/R_L]^{1/2}$ , где

$$F_2 \approx 1 + \frac{R_L}{2r_{be}} + \frac{1 + 2g_m r_b}{2g_m R_L}. \quad (6.46)$$

Поэтому в выражении (6.40) мы должны умножить последний член на множитель

$$1 + 2F_2/(g_m R_L), \quad (6.46a)$$

откуда в выражении (6.41) получится

$$F = 1 + \frac{1 + 2F_2/(g_m R_L) + 2g_m r_b}{2g_m R_s} + \frac{g_m R_s}{2\beta_F}, \quad (6.47)$$

так что

$$F_{\min} = 1 + \left( \frac{1 + 2F_2/(g_m R_L) + 2g_m r_b}{\beta_F} \right)^{1/2}. \quad (6.47a)$$

Обычно вклад второго каскада крайне мал, и поэтому им можно пренебречь.

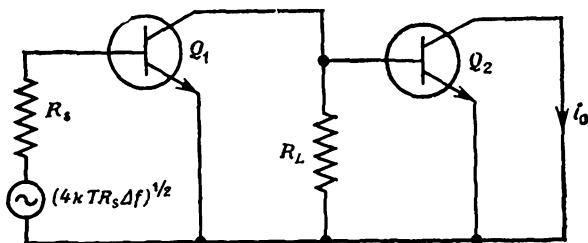


Рис. 6.15. Структурная схема двухкаскадного транзисторного усилителя.

Мы здесь пренебрегли конечным выходным сопротивлением транзистора  $R_0$  ( $1/R_0 = \partial I_C / \partial V_{CE}$ ). Это допустимо, если  $R_0 \gg R_L$ ; в противном случае необходимо ввести небольшую коррекцию.

### 6.3.3. ЭМИТТЕРНЫЙ ПОВТОРИТЕЛЬ

На рис. 6.16 показана схема эмиттерного повторителя. Он имеет коэффициент усиления по напряжению порядка единицы, но достаточно большой коэффициент усиления по мощности. На рисунке цепи смещения опущены.



Чтобы вычислить коэффициент шума устройства с обратной связью, подобного эмиттерному повторителю, закоротим его выход и отнесем шум  $R_L$  к следующему каскаду. При закороченном выходе справедливо отношение

$$F = \frac{\text{Квадрат шумового напряжения}}{\text{Часть напряжения, обусловленная сопротивлением } R_s} = \frac{\text{Квадрат шумового тока}}{\text{Часть тока, обусловленная сопротивлением } R_s}$$

Если теперь мы пересчитаем шум коллектора обратно к входу, как на рис. 6.14, б, то увидим, что эквивалентные схемы одинаковы. Следовательно, коэффициенты шума тоже одинаковы.

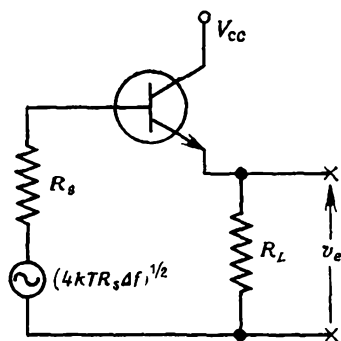


Рис. 6.16. Схема эмиттерного повторителя.

Учет вклада шума сопротивления нагрузки  $R_L$  в коэффициент шума выполняется точно так же, как и для схемы с общим эмиттером; он приводит к тем же результатам.

На высоких частотах сопротивление  $r_{be}$  шунтируется емкостью транзистора  $C_{be}$ . Расчет показывает, что это приводит к значительному снижению коэффициента усиления по мощности  $G$  с увеличением частоты. В результате схема перестает быть полезной.

## 6.3.4. ШУМ КАСКАДА С ОБЩЕЙ БАЗОЙ

Легко видеть, что каскады с общей базой и общим эмиттером имеют одинаковые коэффициенты шума. Чтобы прийти к этому заключению, устанавливают режим холостого хода на выходе, а эквивалентную схему

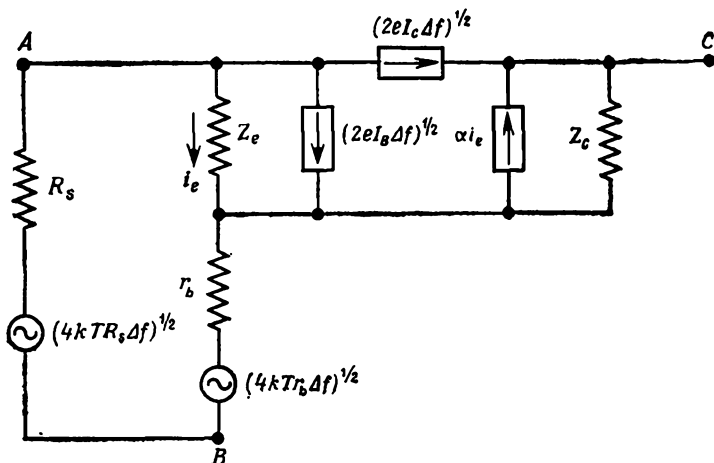


Рис. 6.17. Эквивалентная схема транзисторного усилителя с общей базой.

В случае каскада с общей базой цепь заземляется в точке *B*, в случае каскада с общим эмиттером — в точке *A* (ни то, ни другое заземление не меняют величины коэффициента шума *F*).

слегка видоизменяют. Изменение заключается в том, что теперь описание усилительных свойств производится с помощью коэффициента усиления по току  $\alpha$  и генератора тока  $\alpha i_e$ , где  $i_e$  — ток, протекающий через полное сопротивление эмиттерного перехода  $Z_e$ ; кроме того, вводится полное сопротивление коллекторного перехода  $Z_c$  (рис. 6.17).

Различие между схемами с общим эмиттером и общей базой состоит в том, что первая заземляется в точке *A*, а вторая — в точке *B*. До тех пор пока шум, появляющийся на полном сопротивлении  $Z_c$ , велик по сравнению с шумом, появляющимся в других частях схемы, различия в коэффициентах шума нет. Следова-

тельно, коэффициент шума снова задается равенством (6.40а), и можно непосредственно применить анализ, изложенный в разд. 6.3.1.

### 6.3.5. ШУМ НА ВЫСОКИХ ЧАСТОТАХ

На высоких частотах емкость  $C_{be}$  шунтирует  $r_{be}$ ; это ухудшает передачу сигнала от входа к выходу и, следовательно, увеличивает коэффициент шума. В этом случае с достаточной точностью<sup>1</sup>

$$F_{\text{мин}} = 1 + x + (2x + x^2)^{1/2}, \quad (6.48)$$

где

$$x = g_m r_b \left( \frac{1}{\beta_F} + \frac{f^2}{f_T^2} \right),$$

а  $f_T$  — частота, на которой  $|\beta| = 1$ .

### 6.3.6. СХЕМА ДАРЛИНГТОНА

Транзистор является по существу низкоомным прибором. Однако, используя двух- или трехступенчатый эмиттерный повторитель, можно получить устройство с высокоомным входным сопротивлением. Основанием для этого служит то, что эмиттерный повторитель увеличивает величину сопротивления эмиттерной нагрузки  $R_E$  в  $1 + \beta_F$  раз. Следовательно, входное сопротивление двухступенчатого коллекторного повторителя, изображенного на рис. 6.18, равно

$$Z_{\text{вх}} = (1 + \beta_{F1})(1 + \beta_{F2}) R_E, \quad (6.49)$$

и его коэффициент усиления по напряжению близок к единице. Эта схема известна как *схема Дарлингтона*.

<sup>1</sup> Для дальнейшего обсуждения см., например, работу [7]. Несколько более точное выражение получается при замене  $g_m r_b$  на  $G_1(f) + g_m r_b$ , где значения функции  $G_1(f)$  сведены авторами в таблицу и определены как  $G_1(f) = (R_e + R_{\text{коррел}})/R_{e0}$ . В данном случае  $R_e$  — сопротивление эмиттера на высоких частотах,  $R_{e0} = kT/eI_E$  — его значение на низкой частоте, а корреляционное сопротивление  $R_{\text{коррел}}$  определено в указанной работе.

При  $\beta_{F1} = \beta_{F2} = 100$  и  $R_E = 1000$  Ом входное сопротивление  $Z_{вх} = 10$  МОм (входное сопротивление самого транзистора  $Q_1$  составляет лишь  $r_{be,1} = = kT/eI_{E1} = 260$  кОм при  $I_{E2} = 1$  мА).

Если используется источник с большим сопротивлением  $R_s$ , можно упростить расчет шума, поскольку

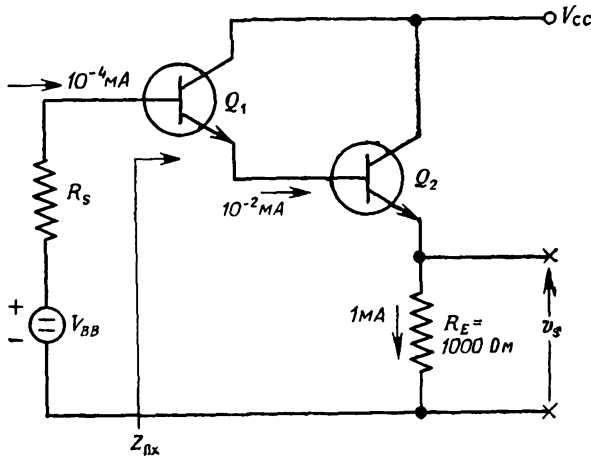


Рис. 6.18. Схема Дарлингтона.

в этом случае  $R_s \gg r_{be,1}$  и  $R_s \gg r_{b1}$ . Более того, основной шум создается первым каскадом, а шум второго каскада пренебрежимо мал. Поэтому выражение (6.40а) принимает вид

$$\begin{aligned}
 F &= 1 + \frac{1}{2} \frac{R_s}{r_{be,1}} + \frac{1}{2g_m R_s} \left( \frac{R_s}{r_{be,1}} \right)^2 = \\
 &= 1 + \frac{1}{2} \frac{R_s}{r_{be,1}} \left( 1 + \frac{1}{\beta_F} \right) \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{R_s}{r_{be,1}}. \quad (6.50)
 \end{aligned}$$

При токе  $I_{E2} = 1$  мА сопротивление  $r_{be,1} = 260$  кОм; поэтому при сопротивлении  $R_s = 10^7$  Ом коэффициент  $F \approx 20$ . Таким образом, при работе от высокоомного источника схема Дарлингтона имеет большой коэффициент шума. Это следует учитывать при использовании схемы.

---

## ФЛИКЕР-ШУМ И ГЕНЕРАЦИОННО-РЕКОМБИНАЦИОННЫЙ ШУМ

Хотя точная причина возникновения фликер-шума для *всех* приборов, в которых он наблюдается, не известна, обычно предполагается, что фликер-шум в полупроводниковых резисторах, МОП-транзисторах и биполярных транзисторах обусловлен генерационно-рекомбинационным шумом с некоторым распределением постоянных времени. Существование такого распределения объясняют взаимодействием носителей тока с ловушками, расположенными в поверхностном оксидном слое. Мы обсудим это объяснение в разд. 7.1. В разд. 7.2 мы применим его к МОП-транзисторам, а в разд. 7.3 — к биполярным транзисторам. В разд. 7.4 мы обсудим фликер-шум в угольных резисторах.

В разд. 7.5 мы рассмотрим генерационно-рекомбинационный шум в ПТПЗ. Мы увидим, что у него есть две составляющие: а) шум, связанный с генерационно-рекомбинационными центрами в области пространственного заряда  $p$ — $n$ -переходов (доминирующий при комнатной и близких к ней температурах), и б) шум, связанный с ловушками или примесными центрами в проводящем канале. Последний преобладает при низких температурах.

## 7.1. ВЫВОД ФОРМУЛЫ ДЛЯ ФЛИКЕР-ШУМА ИЗ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СПЕКТРА ГЕНЕРАЦИОННО-РЕКОМБИНАЦИОННОГО ШУМА

Если к полупроводниковому образцу с флуктуирующим числом носителей  $N$  приложено напряжение  $V$  и протекающий через него ток имеет величину  $I_0$ , то спектральная плотность флуктуационной составляющей тока в соответствии с уравнением (5.51а) имеет вид

$$S_I(f) = 4 \frac{I_0^2}{N_0^2} \overline{\Delta N^2} \frac{\tau}{1 + \omega^2 \tau^2}. \quad (7.1)$$

Здесь  $N_0$  — равновесное число носителей,  $\Delta N = N - N_0$ ,  $\overline{\Delta N^2}$  — усредненная величина квадрата  $\Delta N$ , а  $\tau$  — время жизни носителей. Она представляет собой хорошо известную формулу для генерационно-рекомбинационного шума, приведенную ранее.

Для некоторого объема полупроводника можно считать, что

$$\overline{\Delta N^2} = \beta N_0, \quad (7.1a)$$

где  $\beta$  — постоянная, слабо зависящая от  $N_0$ , но зависящая от статистики носителей в образце. Поэтому получим

$$S_I(f) = \frac{4\beta I_0^2}{N_0} \frac{\tau}{1 + \omega^2 \tau^2}. \quad (7.2)$$

Это уравнение имеет общий характер. Оно справедливо независимо от того, какие процессы определяют флуктуации плотности, а постоянная  $\beta$  зависит от этих процессов.

Применим теперь эти результаты к случаю, когда электроны полупроводникового образца взаимодействуют с ловушками из поверхностного оксидного слоя за счет туннельного прохождения от поверхности к рассматриваемой ловушке. В этом случае вопрос о

применимости формулы (7.1а) не столь ясен. Необходимо принять во внимание, что величина  $\overline{\Delta N^2}$  также соответствует среднему квадрату числа захваченных носителей; и ниоткуда не следует, что в этих условиях величина  $\overline{\Delta N^2}$  пропорциональна числу  $N_0$ . В предельном случае эта величина может зависеть не от числа  $N_0$ , а только от плотности ловушек. Мы можем учесть различие между этими случаями, определив зависимость функции  $S_1(f)$  от числа  $N_0$ . Если величина  $\overline{\Delta N^2}$  не зависит от числа  $N_0$ , то функция  $S_1(f)$  изменяется как  $1/N_0^2$ , а если выполняется равенство (7.1а), то она изменяется как  $1/N_0$ .

Предположим, что равенство (7.1а) справедливо в случае взаимодействия электронов полупроводника с ловушками из поверхностного оксидного слоя. Тогда постоянная  $\beta$  является мерой интенсивности этого взаимодействия. Можно ожидать, что постоянная  $\beta$  будет пропорциональна плотности ловушек. Сама же плотность ловушек пропорциональна плотности поверхностных состояний. Поверхностные состояния являются центрами, которые могут захватывать электроны, но могут также при определенных условиях генерировать электронно-дырочные пары. Таким образом, постоянная  $\beta$  будет пропорциональна плотности поверхностных состояний.

Покажем теперь, что спектр типа  $1/f$  можно получить при определенном распределении постоянных времени  $\tau$ . Объяснение величин постоянных времени  $\tau$  связано с туннельным прохождением носителей сквозь слой оксида толщиной  $y$ , находящийся между поверхностью и рассматриваемой ловушкой. Величина  $\tau$  очень быстро возрастает с увеличением расстояния  $y$ . Расчеты показывают, что ее можно представить в виде

$$\tau = \tau_0 \exp(\alpha y), \quad (7.3)$$

где  $\tau_0$  — постоянная времени, характеризующая поверхностную ловушку;  $\exp(-\alpha y)$  — вероятность туннельного прохождения;  $\alpha$  — величина порядка  $10^8 \text{ см}^{-1}$ .

Чтобы получить функцию распределения постоянных времени  $\tau$ , разделим площадь поверхности на

малые участки  $\Delta S$ . Тогда каждый участок имеет свою доминирующую ловушку, расположенную в оксиде на расстоянии  $y$  от поверхности. Ловушки, расположенные дальше от поверхности, имеют настолько большие постоянные времена, что их влиянием можно пренебречь. Таким образом, каждый элемент поверхности имеет свое характеристическое время жизни  $\tau$ . Если доминирующие ловушки распределены случайно, то их распределение по  $y$  можно записать следующим образом:

$$g(y)\Delta y = \begin{cases} \Delta y/y_1 & \text{при } 0 < y < y_1, \\ 0 & \text{при } y < 0, y > y_1. \end{cases} \quad (7.4)$$

Здесь величина  $y_1$  соответствует наибольшему расстоянию между доминирующей ловушкой и поверхностью. Эта величина не бесконечна, а имеет тот же порядок, что и среднее расстояние до ловушки. Соответствующее распределение для  $\tau$  имеет вид

$$g(\tau)\Delta\tau = \begin{cases} \frac{\Delta\tau/\tau}{\ln(\tau_1/\tau_0)} & \text{при } \tau_0 < \tau < \tau_1, \\ 0 & \text{при } \tau < \tau_0, \tau > \tau_1, \end{cases} \quad (7.4a)$$

где

$$\tau_1 = \tau_0 \exp(\alpha y_1). \quad (7.4b)$$

Таким образом, мы нашли распределение постоянных времени.

Теперь проведем усреднение по всем элементам поверхности, что соответствует усреднению по всем значениям  $\tau$ . Выполняя его, вместо уравнения (7.2) получим при  $x = \omega\tau$  следующее выражение:

$$\begin{aligned} S_I(f) &= 4 \frac{\beta I_0^2}{N_0} \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{\tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \frac{d\tau/\tau}{\ln(\tau_1/\tau_0)} = \\ &= \frac{4\beta I_0^2}{\omega N_0 \ln(\tau_1/\tau_0)} \int_{\omega\tau_0}^{\omega\tau_1} \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{4\beta I_0^2}{\omega N_0 \ln(\tau_1/\tau_0)} \times \\ &\times (\arctg \omega\tau_1 - \arctg \omega\tau_0). \end{aligned} \quad (7.5)$$



Следовательно, при  $1/\tau_1 < \omega < 1/\tau_0$

$$S_I(f) = \frac{\beta I_0^2}{f N_0 \ln(\tau_1/\tau_0)} = \frac{\alpha I_0^2}{f N_0}, \quad (7.5a)$$

где

$$\alpha = \frac{\beta}{\ln(\tau_1/\tau_0)}. \quad (7.5b)$$

Таким образом, в указанном частотном диапазоне получается результирующий спектр типа  $1/f$ .

Из уравнения (7.5a) видно, что спектральная плотность  $S_I(f)$  обратно пропорциональна числу носителей в образце. Это согласуется с экспериментальными данными [8]. В каждом случае, когда наблюдается такое согласие, подтверждается справедливость равенства (7.1a).

## 7.2. ФЛИКЕР-ШУМ В МОП-ТРАНЗИСТОРАХ

Чтобы рассчитать фликер-шум в МОП-транзисторах, возьмем в качестве отправной точки уравнение Ланжевена для флуктуаций тока в полевых транзисторах. Оно может быть записано в виде [6]

$$\Delta I = \frac{d}{dx} [g(V_0) \Delta V] + h(x, t). \quad (7.6)$$

Здесь  $g(V_0)$  — проводимость истока, рассчитанная на единицу длины;  $V_0$  — постоянная составляющая потенциала в точке  $x$ ;  $\Delta V(x)$  — распределение шумового напряжения вдоль проводящего канала;  $\Delta I$  — результирующий шумовой ток короткого замыкания;  $h(x, t)$  — распределенный источник шума в образце. Если вход и выход транзистора закорочены по высокой частоте, то  $\Delta V = 0$  при  $x = 0$  и  $x = L$ , где  $L$  — длина проводящего канала. Интегрируя уравнение (7.6), получим

$$\int_0^L \Delta I dx = \int_0^L h(x, t) dx,$$

или

$$\Delta I = \frac{1}{L} \int_0^L h(x, t) dx. \quad (7.7)$$

Произведя преобразование Фурье, получим

$$S_{I_0}(f) = \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L S_h(x, x', f) dx dx'. \quad (7.8)$$

Флуктуации в точках  $x$  и  $x'$  в момент  $t$  некоррелированы, т. е. функция  $S_h(x, x', f)$  является  $\delta$ -функцией от  $x' - x$ , или

$$S_h(x, x', f) = F(x', f) \delta(x' - x). \quad (7.9)$$

Следовательно, заменяя  $x$  на  $u$ , получим

$$S_{I_0}(f) = \frac{1}{L^2} \int_0^L F(u, f) du. \quad (7.10)$$

Величину  $S_I(x, f)$  для участка, заключенного между  $x$  и  $x + \Delta x$ , часто можно рассчитать из соображений общего характера. Если закоротить участок канала длиной  $\Delta x$ , то для него имеем

$$S_I(x, f) = \frac{1}{(\Delta x)^2} \int_x^{x+\Delta x} F(u, f) du = \frac{F(x, f)}{\Delta x},$$

или

$$F(x, f) = S_I(x, f) \Delta x. \quad (7.11)$$

Таким образом, если известна функция  $S_I(x, f)$  для участка  $\Delta x$ , то можно рассчитать функцию  $F(u, f)$ , а следовательно, и  $S_{I_0}(f)$ . Это соображение лежит в основе расчетов фликер-шума и генерационно-рекомбинационного шума.

### 7.2.1. РАСЧЕТ ШУМОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ МОП-ТРАНЗИСТОРА

Применим соотношение (7.5а) к участку канала длиной  $\Delta x$  и поперечным сечением  $S(x)$ . Тогда  $N_0 = n_0(x) S(x) \Delta x$ . Следовательно,

$$S_I(x, f) = \frac{\alpha I_0^2}{f N_0} = \frac{\alpha I_0^2}{f n_0(x) S(x)} \frac{1}{\Delta x}$$

или

$$F(x, f) = \frac{\alpha I_0^2}{f n_0(x) S(x)} = \frac{e \alpha \mu I_0}{f} \frac{dV_0}{dx},$$

поскольку

$$I_0 = e\mu n_0(x) S(x) (dV_0/dx). \quad (7.12)$$

Отсюда следует, что

$$S_{I_0}(f) = \frac{e\mu\bar{\alpha}I_0}{L^2f} \int_0^L \frac{dV_0}{dx} dx = \frac{e\mu\bar{\alpha}I_0V_d}{L^2f}. \quad (7.13)$$

Мы заменили коэффициент  $\alpha$  его средним значением  $\bar{\alpha}$ . Этим учитывается то, что коэффициент  $\alpha$  может быть медленно меняющейся функцией  $x$ .

Уравнение (7.13) справедливо, если напряжение стока  $V_d < (V_g - V_T)$ , где  $V_g$  — напряжение затвора, а  $V_T$  — напряжение отпираания канала. Если  $V_d > (V_g - V_T)$ , то следует заменить  $V_d$  на  $V_g - V_T$ .

Теперь введем э. д. с.  $[S_V(f) \Delta f]^{1/2}$ , включенную последовательно в цепь затвора, и положим, что  $S_V(f) = 4kTR_{nf}$ , где  $R_{nf}$  — фликер-шумовое сопротивление рассматриваемого прибора. Тогда

$$S_V(f) = 4kTR_{nf} = \frac{S_{I_0}(f)}{g_m^2} = \frac{e\mu\bar{\alpha}}{L^2f} \frac{I_0V_d}{g_m^2}. \quad (7.14)$$

В любом учебнике по твердотельным приборам можно найти доказательство того, что при отсутствии насыщения в МОП-транзисторе с шириной канала  $\omega$  и емкостью оксидного слоя на единицу площади  $C_{окс}$

$$g_m = \frac{\mu C_{окс} \omega}{L} V_d, \quad I_0 = \frac{\mu C_{окс} \omega}{L} \left[ (V_g - V_T) V_d - \frac{1}{2} V_d^2 \right]. \quad (7.15)$$

Следовательно,

$$S_V(f) = 4kTR_n = \frac{e\bar{\alpha}}{C_g f} \left( V_g - V_T - \frac{1}{2} V_d \right), \quad (7.16)$$

где  $C_g = C_{окс} \omega L$  — емкость затвора при нулевом смещении на стоке.

Это уравнение справедливо для МОП-транзисторов в отсутствии насыщения. В области насыщения следует сделать подстановку  $V_d = V_g - V_T$ , так что

$$S_V(f) = 4kTR_n = \frac{e\bar{\alpha}}{2C_g f} (V_g - V_T). \quad (7.16a)$$

Это выражение было экспериментально проверено Клаассеном [9], который нашел, что функция  $S_V(f)$  в области насыщения, изменяясь как  $V_g - V_T$ , пропорциональна плотности поверхностных состояний и обратно пропорциональна емкости прибора  $C_g$  при нулевом смещении. Это не обязательно означает, что равенство (7.16a) справедливо *всегда*, так как могут существовать иные механизмы возникновения фликер-шума, которые не могут быть описаны данной моделью.

### 7.2.2. ШУМ В ИНТЕГРАЛЬНЫХ РЕЗИСТОРАХ

Интегральные резисторы — это резисторы, получаемые методом диффузии в полупроводниковую подложку. Предположим, что в подложке  $p$ -типа методом диффузии получена область  $n$ -типа. Если указанная область снабжена двумя контактами, то мы имеем интегральный резистор, изолированный от подложки  $p$ -типа.

В соответствии с выражением (7.5a) шум интегрального резистора определяется следующим образом:

$$S_I(f) = \frac{\alpha I_0^2}{f N_0}, \quad (7.17)$$

где  $N_0$  — полное число носителей в этом резисторе.

### 7.3. ФЛИКЕР-ШУМ В ТРАНЗИСТОРАХ

В транзисторах большая часть тока базы вызвана носителями, инжектируемыми в базу и рекомбинирующими у поверхности базы или у поверхности области пространственного заряда. Флуктуации заполнения ловушек в оксиде модулируют скорость (поверхностной) рекомбинации у поверхности базы и слоя про-

странственного заряда, и поэтому не удивительно, что большая часть фликер-шума генерируется в переходе база—эмиттер. На эквивалентной схеме это должно быть отображено так, как показано на рис. 7.1.

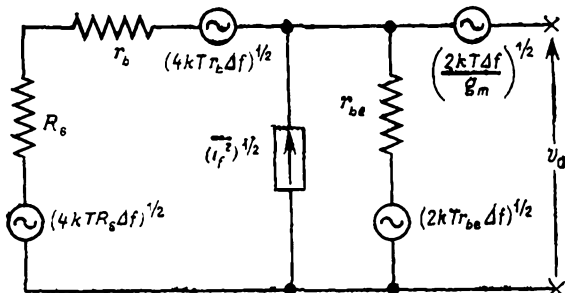


Рис. 7.1. Эквивалентная шумовая схема транзистора с общим эмиттером, в которой учтен фликер-шум, представленный генератором тока  $(\overline{i_f^2})^{1/2}$ , включенным параллельно входу.

Расчеты [10] и эксперименты показывают, что генератор фликер-шумового тока имеет в элементарной полосе  $\Delta f$  средний квадрат

$$\overline{i_f^2} = B \frac{I_B^\beta}{f} \Delta f, \quad (7.18)$$

где  $B$  — постоянный множитель, а  $\beta$  — показатель порядка единицы.

Поскольку шум на  $R_s$  дает вклад, равный

$$4kTR_s \Delta f \left( \frac{r_{be}}{R_s + r_b + r_{be}} \right)^2, \quad (7.19)$$

а  $\overline{i_f^2}$  — вклад, равный

$$\overline{i_f^2} (R_s + r_b)^2 \left( \frac{r_{be}}{R_s + r_b + r_{be}} \right)^2, \quad (7.20)$$

то вклад фликер-шума в коэффициент шума  $F$  равен

$$\frac{\overline{i_f^2}}{4kT \Delta f} \frac{(R_s + r_b)^2}{R_s}. \quad (7.21)$$

Следовательно,

$$F = 1 + \frac{r_b}{R_s} + \frac{1}{2} \frac{(R_s + r_b)^2}{R_s r_{be}} + \frac{1}{2g_m R_s} \left( \frac{R_s + r_b + r_{be}}{r_{be}} \right)^2 + \frac{B I_B^{\beta}}{4kTf} \frac{(R_s + r_b)^2}{R_s}. \quad (7.22)$$

На низких частотах доминирует последний член выражения (7.22); в этом случае коэффициент шума  $F$  имеет минимум при  $R_s = r_b$ . Поскольку  $r_{be} \gg (R_s + r_b)$ , коэффициент шума принимает вид

$$F_{\text{мин}} = 2 + \frac{1}{2g_m r_b} + \frac{B I_B^{\beta} r_b}{fkT}. \quad (7.22a)$$

Получив в процессе измерений зависимость коэффициента шума  $F$  от сопротивления источника сигнала, можно определить величину  $r_b$ .

Классическая статья по этому вопросу написана Пламбом и Шенеттом [11]<sup>1</sup>.

## 7.4. ФЛИКЕР-ШУМ В УГОЛЬНЫХ РЕЗИСТОРАХ

Угольные резисторы состоят из большого числа проводящих зерен, каждое из которых имеет плохой контакт с остальными. Сопротивление определяется этими контактами; такое контактное сопротивление флуктуирует со временем. Пропуская ток  $I$  через резистор, можно обнаружить эти флуктуации  $\delta R$ , поскольку они вызывают флуктуационную э. д. с.  $\delta V = I\delta R$ , так что

$$S_V(f) = I^2 S_R(f). \quad (7.23)$$

Поскольку  $S_R(f)$  имеет шумовой спектр типа  $1/f$ , можно записать

$$S_V(f) = \frac{A I^2}{f}, \quad (7.23a)$$

где  $A$  — некоторый постоянный множитель.

<sup>1</sup> Теоретический анализ зависимости фликер-шума от тока можно найти в работе [10].

Следовательно, для усилителя с коэффициентом усиления  $G$ , полосой  $B$ , нижней границей полосы пропускания  $f_2$  и верхней границей  $f_1 = f_2 + B$  имеем

$$\overline{V_{\text{тепл}}^2} = 4kTRG^2B, \quad (7.24)$$

$$\overline{V_{\text{флик}}^2} = AI^2G^2 \ln \left( 1 + \frac{B}{f_2} \right). \quad (7.24a)$$

Отсюда видно, что частоту  $f_2$  следует брать не слишком низкой. Например, если  $B = 100$  кГц,  $f_2 = 100$  Гц,  $f_1 = 100\,000$  Гц, то  $\ln(1 + B/f_2) = 6,9$ , в то время как при  $f_2 = 50$  кГц и  $f_1 = 150$  кГц  $\ln(1 + B/f_2) = 1,08$ . Таким образом, в последнем случае полный фликер-шум значительно меньше.

Чтобы разработать резисторы  $R$  с уменьшенным шумом типа  $1/f$ , соединим последовательно  $n$  резисторов  $R$  и включим параллельно  $n$  таких цепочек. Тогда результирующее сопротивление будет равно  $R$ , а фликер-шум будет уменьшен в  $n^2$  раз.

*Доказательство.* Если полный ток равен  $I$ , то ток через каждую из цепочек равен  $I/n$ , так что спектральная плотность  $S_V(f)$  для каждого резистора отличается от аналогичной спектральной плотности для такого же резистора с током  $I$  множителем  $1/n^2$ . Поскольку шумы резисторов в цепочке независимы, спектральная плотность  $S_V(f)$  для каждой цепочки отличается от  $S_V(f)$  для одного резистора с током  $I$  множителем  $1/n$ . Но сопротивление цепочки равно  $nR$ , и поэтому спектральная плотность  $S_I(f)$  для одной цепочки равна  $S_I(f)$  для одного сопротивления со средним током  $I$ , умноженной на  $1/n^3$ . Однако таких цепочек  $n$ . Следовательно,  $S_I(f)$  для совокупности соединенных параллельно цепочек в  $n^2$  раз меньше, чем для одного резистора. То же самое справедливо и для  $S_V(f)$ .

Чтобы предотвратить появление фликер-шума, следует избегать использования угольных резисторов во всех токнесущих цепях. Вместо них следует во всех местах, определяющих чувствительность схемы, применять проволочные резисторы. Однако эти резисторы имеют значительную индуктивность. Если она недопустима, необходимо использовать хорошие металли-

зированные (пленочные) резисторы. Фликер-шум последних нужно контролировать при помощи схемы рис. 7.2. Если  $R$  — испытываемый резистор, то его

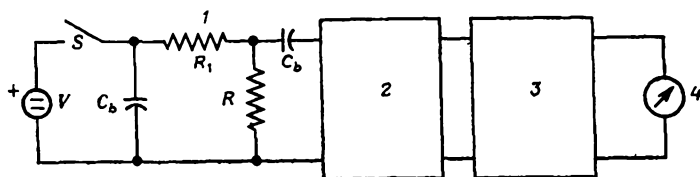


Рис. 7.2. Схема для проверки фликер-шума резистора  $R$ .

1 — проволочный резистор; 2 — усилитель; 3 — квадратичный детектор; 4 — измерительный прибор; если резистор  $R$  имеет фликер-шум, то при замыкании ключа  $S$  измерительный прибор дает увеличение отклонений.

фликер-шум имеет допустимую величину при условии, что показание измерительного прибора  $M$  не меняется при замыкании или размыкании ключа. Любое изменение показания измерительного прибора  $M$  связано с влиянием фликер-шума в резисторе  $R$ .

## 7.5. ГЕНЕРАЦИОННО-РЕКОМБИНАЦИОННЫЙ ШУМ В ПОЛЕВЫХ ТРАНЗИСТОРАХ С ПЛОСКИМ ЗАТВОРОМ

### 7.5.1. ГЕНЕРАЦИОННО-РЕКОМБИНАЦИОННЫЙ ШУМ, СВЯЗАННЫЙ С ЛОВУШКАМИ ИЛИ ПРИМЕСНЫМИ ЦЕНТРАМИ В КАНАЛЕ

Если в канале имеются ловушки для электронов или атомы доноров и температура выбрана так, что не все эти центры либо заняты, либо свободны, то число носителей в образце будет флуктуировать из-за процессов вида

Электрон + Пустая ловушка  $\rightleftharpoons$  Заполненная ловушка или

Электрон + Ионизированный донор  $\rightleftharpoons$  Нейтральный донор.



Такова причина генерационно-рекомбинационного шума в ПТПЗ. Подобный подход справедлив и для каналов  $p$ -типа.

Пусть на участке  $\Delta x$  на расстоянии  $x$  от начала канала имеется  $\Delta N$  носителей, и пусть  $\delta\Delta N$  — флуктуация  $\Delta N$ . Тогда соответствующая флуктуация  $\delta I$  тока  $I_0$  определяется выражением

$$\delta I = -I_0 \frac{\delta \Delta N}{\Delta N}, \text{ или } S_I(f) = \frac{I_0^2}{\Delta N^2} S_{\Delta N}(f). \quad (7.25)$$

Теперь

$$S_{\Delta N}(f) = 4\overline{\delta\Delta N^2} \frac{\tau}{1+\omega^2\tau^2} = 4\beta\Delta N \frac{\tau}{1+\omega^2\tau^2}, \quad (7.26)$$

где, как в разд. 7.1, величина  $\overline{(\delta\Delta N)^2}$  заменена на  $\beta\Delta N$ ;  $\tau$  — постоянная времени процесса генерации — рекомбинации. Кроме того,

$$I_0 = g(V_0) \frac{dV_0}{dx}, \quad (7.27)$$

где  $g(V_0)$  — проводимость канала на единицу длины, а  $V_0$  — напряжение смещения между каналом и затвором.

Здесь

$$g(V_0) = e\mu \Delta N/\Delta x,$$

поэтому

$$S_I(f) = e\mu\beta \frac{I_0^2}{e\mu \Delta N/\Delta x} \frac{1}{\Delta x} \frac{\tau}{1+\omega^2\tau^2}. \quad (7.28)$$

Следовательно, подставляя выражения для  $I_0$  и  $g(V_0)$ , получим

$$F(x, f) = e\mu\beta I_0 \frac{dV_0}{dx} \frac{\tau}{1+\omega^2\tau^2}. \quad (7.29)$$

Подстановка выражения (7.29) в (7.10) дает

$$S_{I_0}(f) = \frac{e\mu\bar{\beta}I_0V_d}{L^2} \frac{\tau}{1+\omega^2\tau^2} = \frac{4kTR_{ng\tau}}{g_m^2}, \quad (7.30)$$

поскольку  $\int_0^L dV_0 = V_d$ . Мы заменили величину  $\beta$  ее средним значением  $\bar{\beta}$ , чтобы учесть то, что  $\beta$  может

быть медленно меняющейся функцией  $x$ . В данном случае  $R_{ngr}$  — эквивалентное сопротивление генерационно-рекомбинационного шума, а  $g_m$  — взаимная проводимость. Уравнение (7.30) справедливо для полевого транзистора с плоскостным затвором, не находящегося в области насыщения. В области насыщения при напряжении  $V_d$  следует заменить напряжением  $V_g - V_T$ , при котором ток  $I_0$  достигает насыщения. Постоянная времени  $\tau$  часто сильно зависит от температуры. Во многих простых случаях

$$\varphi = \tau_0 \exp\left(\frac{eE_a}{kT}\right), \quad (7.30a)$$

где  $\tau_0$  — очень малая величина, а  $E_a$  — энергия активации ловушки или донора. Обычно  $E_a = 0,05$  —  $0,20$  эВ в зависимости от вида ловушки или донора.

### 7.5.2. ГЕНЕРАЦИОННО-РЕКОМБИНАЦИОННЫЙ ШУМ ИЗ-ЗА ЦЕНТРОВ, РАСПОЛОЖЕННЫХ В ОБЛАСТИ ОБЪЕМНОГО ЗАРЯДА

В рассматриваемых ПТПЗ переходы находятся в режиме обратного смещения. Вследствие этого рекомбинационный центр в области объемного заряда будет попеременно генерировать электрон и дырку, которые будут быстро выходить из этой области. Так возникает флуктуирующий заряд на этом центре, который вызывает локальную флуктуацию ширины области объемного заряда, что в свою очередь соответствует локальной флуктуации ширины канала. В конечном счете это приводит к флуктуационному току во внешней цепи, которая может быть представлена шумовым сопротивлением.

Лоритцен [12] рассчитал влияние этого процесса. Он нашел, что при одномерном анализе в значении  $S_I(f)$  обнаруживается логарифмическая расходимость с приближением к насыщению, а при двумерном анализе  $S_I(f)$  остается ограниченной, так что шумовое

сопротивление  $R_n = S_1(f)/4kTg_m^2$  можно определить при насыщении. Это шумовое сопротивление имеет вид

$$R_n = A(V_g) \frac{\tau}{1 + \omega^2 \tau^2}, \quad (7.31)$$

где  $\tau$  — постоянная времени центров. Эксперименты показывают, что функция  $A(V_g)$  возрастает с ростом отрицательного напряжения  $V_g$  [13]. Это может оказаться полезным при построении теоретических моделей, позволяющих лучше понять функцию  $A(V_g)$ .

Постоянная времени  $\tau$  при комнатной температуре обычно представляет собой величину порядка  $10^{-3}$  с, с понижением температуры  $T$  она резко возрастает в соответствии с формулой

$$\tau = \tau_0 \exp\left(\frac{eE'_a}{kT}\right), \quad (7.31a)$$

где  $\tau_0$  — малая постоянная, а  $E'_a$  — энергия активации рассматриваемого центра. Обычно величина  $E'_a$  приближенно равна половине ширины запрещенной зоны полупроводника  $E_g$  и для кремния соответствует величине 0,55 эВ.

## ИЗМЕРЕНИЕ МАЛЫХ ТОКОВ, НАПРЯЖЕНИЙ И ЗАРЯДОВ

### 8.1. ИЗМЕРЕНИЕ ТОКОВ

В данной главе мы исследуем, как ПТПЗ, обладающие дифференциальным входным сопротивлением  $R_g$ , могут использоваться для измерения очень малых токов. С этой целью подключим к плавающему затвору ток  $I_0$ , подлежащий измерению (рис. 8.1, а); это приводит к изменению напряжения затвора на величину  $\Delta V_g = I_0 R_g$  и, следовательно, к изменению потребляемого тока на величину  $\Delta I_d = g_m \Delta V_g = g_m R_g I_0$ , где  $g_m$  — крутизна прибора, так что коэффициент усиления схемы по току равен  $g_m R_g$ . Данное изменение тока измеряется гальванометром с критическим затуханием.

В разд. 3.1.2 мы видели, что минимально различимый ток гальванометра с критическим затуханием и постоянной времени  $\tau_0$ , определяемый как постоянный ток, вызывающий отклонение, равное среднеквадратичному отклонению гальванометра под воздействием теплового шума, дается выражением

$$I_{\text{мин}} = (\pi k T / r \tau_0)^{1/2}, \quad (8.1)$$

где  $r$  — сопротивление цепи гальванометра.

Покажем теперь, что наша схема на ПТПЗ, соединенная с критически демпфированным гальванометром, имеющим постоянную времени  $\tau_0$ , обеспечивает минимально различимый ток

$$I_{\text{мин}} = (\pi k T / R_g \tau_0)^{1/2}. \quad (8.2)$$

Поскольку  $R_g \gg r$ , схема на ПТПЗ гораздо чувствительнее гальванометра.

Чтобы доказать это, отметим, что дифференциальное сопротивление затвора  $R_g$  проявляет тепловой шум, так что средний квадрат шумового тока затвора равен  $4kT\Delta f/R_g$  (рис. 8.1, б).

Поскольку произведение  $g_m R_g$  является коэффициентом усиления схемы по току, среднеквадратичный

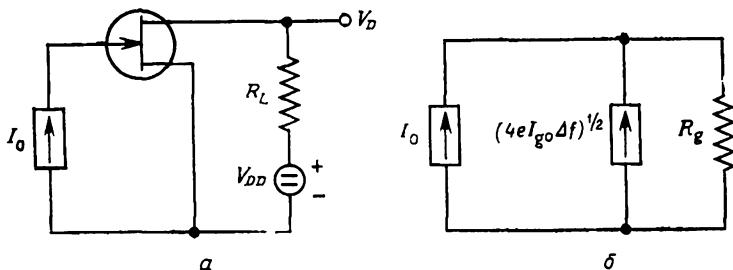


Рис. 8.1.

а — генератор тока  $I_0$ , подключенный к ПТПЗ с плавающим затвором, б — эквивалентная схема

потребляемый ток, обусловленный шумом затвора, составляет  $g_m R_g (4kT\Delta f/R_g)^{1/2}$ .

С самим гальванометром связан генератор входного тока  $(4kT\Delta f/r)^{1/2}$ , и результирующее среднеквадратичное шумовое отклонение соответствует эквивалентному входному току гальванометра величиной  $(\pi kT/r\tau_0)^{1/2}$ . Поскольку шумовой ток  $g_m R_g (4kT\Delta f/R_g)^{1/2}$  в  $g_m R_g (r/R_g)^{1/2}$  раз больше, ему соответствует эквивалентный входной ток гальванометра

$$g_m R_g \left( \frac{r}{R_g} \right)^{1/2} \left( \frac{\pi kT}{r\tau_0} \right)^{1/2} = g_m R_g \left( \frac{\pi kT}{R_g \tau_0} \right)^{1/2}.$$

Далее, постоянный ток  $I_{\text{мин}}$ , питающий затвор, способен вызвать изменение тока стока на  $g_m R_g I_{\text{мин}}$ . Приравнявая это изменение шумовому отклонению, приходим к выражению (8.2).

Если напряжение на затворе  $V_g$  лишь слегка отличается от нуля, то

$$I_g = I_{g0} \exp(eV_g/kT) - I_{g0};$$

следовательно, сопротивление

$$R_g = \left( \frac{\partial I_g}{\partial V_g} \right)^{-1} \Big|_{V_g=0} = \frac{kT}{eI_{g0}}.$$

Подставляя это значение в уравнение (8.2), получим

$$I_{\text{мин}} = (\pi e I_{g0} / \tau_0)^{1/2}. \quad (8.3)$$

Насколько малым по величине можно сделать этот ток? Для качественного ПТПЗ ток  $I_{g0}$  может иметь величину до  $10^{-12}$  А; подставляя  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл и выбирая постоянную времени гальванометра равной 5 с, приходим к значению  $I_{\text{мин}} = 3,2 \cdot 10^{-16}$  А, которое на несколько порядков меньше, чем у гальванометра.

При  $I_{g0} = 10^{-12}$  А и  $T = 300$  К сопротивление  $R_g = 2,6 \cdot 10^{10}$  Ом. Полагая, что ПТПЗ имеет входную емкость  $C_g = 5$  пФ, получаем величину постоянной времени  $\tau_g$  входной цепи, равную 0,13 с. Эта величина мала по сравнению с постоянной времени  $\tau_0$  гальванометра.

Мы здесь пренебрегли шумовым сопротивлением  $R_n$  ПТПЗ. В силу большой величины  $R_g$  это вполне оправданно.

## 8.2. ИЗМЕРЕНИЕ ПОСТОЯННОГО НАПРЯЖЕНИЯ

### 8.2.1. МЕТОД ПРЕРЫВАНИЯ

Если необходимо измерить малое постоянное напряжение  $V_0$ , проще всего преобразовать его в меандр при помощи механического прерывателя, который закорачивает напряжение в течение половины периода. Затем меандр преобразуется повышающим трансформатором, усиливается усилителем переменного напряжения, настроенным строго на частоту прерывания  $f_i$ , и, наконец, детектируется фазовым детектором, управляемым сигналом с частотой  $f_i$  (рис 8.2). Если  $T$  — период прерывателя, то  $f_i = 1/T$ . Надлежащим выбором постоянной времени  $\tau$  выходной цепи фазового детек-

тора эффективная полоса пропускания  $B_{эфф}$  системы может быть сделана очень малой, и, следовательно, можно получить очень низкий шумовой порог для напряжения  $V_0$ .

Пусть внутреннее сопротивление  $R$  источника напряжения  $V_0$ , подлежащего измерению, относительно мало. Тогда тепловой шум, поступающий на трансформатор

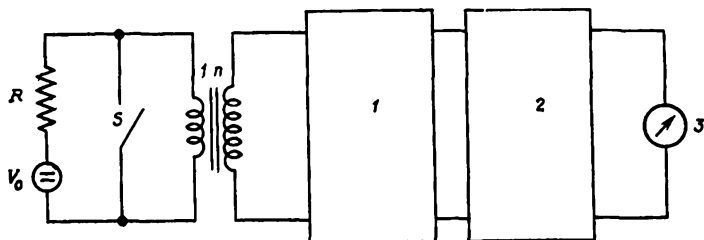


Рис 8.2. Малое постоянное напряжение  $V_0$  преобразуется периодическим замыканием и размыканием ключа  $S$  в меандр, который усиливается и детектируется фазовым детектором

1 — усилитель 2 — фазовый детектор 3 — измерительный прибор

матор, равен  $(4kTRB_{эфф})^{1/2}$  для первого полупериода и нулю для второго; таким образом, эффективная величина шума составляет  $(2kTRB_{эфф})^{1/2}$ . Переменный сигнал, вырабатываемый прерывателем, имеет амплитуду  $2V_0/\pi$  на частоте  $f_i$ . Коэффициент трансформации  $n$  повышающего трансформатора выбирается так, чтобы

$$n^2(2kTRB_{эфф}) \gg 4kTR_nB_{эфф},$$

или

$$R_n \ll \frac{1}{2} n^2 R,$$

где  $R_n$  — шумовое сопротивление усилителя переменного напряжения; в таком случае шумом усилителя можно пренебречь. Так как фазовый детектор измеряет переменное напряжение амплитудой  $2V_0/\pi$ , шумовой порог достигается, когда

$$2V_0/\pi = (2kTRB_{эфф})^{1/2},$$

или

$$V_0 = \frac{\pi}{2} (2kTRB_{эфф})^{1/2}. \quad (8.4)$$

Как будет показано в следующем разделе,

$$B_{\text{эфф}} \simeq \frac{1}{4\tau}, \quad (8.5)$$

где  $\tau$  — постоянная времени выходной цепи фазового детектора. При  $\tau = 5$  с эффективная полоса  $B_{\text{эфф}} = 0,050$  Гц.

Чтобы выяснить, чему равен шумовой порог системы, возьмем сопротивление  $R = 10$  Ом, эффективную полосу  $B_{\text{эфф}} = 0,050$  Гц и температуру  $T = 300$  К; отсюда получаем напряжение  $V_0 = 10^{-10}$  В, что крайне мало.

В продаже имеются фазовые детекторы хорошего качества.

### 8.2.2. ФАЗОВЫЙ ДЕТЕКТОР

Разберемся теперь в работе фазового детектора и покажем, что если на фазовый детектор, управляемый сигналом с частотой  $f_i$ , подается полосовой шум, имеющий прямоугольную огибающую со спектральной плотностью  $S_0$  и центральной частотой  $f_i$ , то минимально различимый сигнал равен  $(S_0 B_{\text{эфф}})^{1/2}$ , где  $B_{\text{эфф}} = 1/4\tau$ , а  $\tau$  — постоянная времени индикатора на выходе фазового детектора, в качестве которого используется гальванометр с критическим затуханием.

Сначала покажем, что фазовый детектор реагирует на амплитуду входного сигнала. Фазовый детектор представляет собой смеситель, у которого частота гетеродина равна входной частоте  $f_i$ . Поэтому зависящую от времени крутизну смесителя можно записать в виде

$$g_m(t) = g_{m0} + 2g_{m1} \cos \omega_i t + \text{Гармоники}, \quad (8.6)$$

где  $g_{m0}$  — средняя крутизна, а  $g_{m1}$  — крутизна преобразования.

Пусть теперь к входу приложено малое переменное напряжение  $V_i \cos(\omega_i t + \varphi_i)$  с несущей частотой  $\omega_i$ , тогда низкочастотный выходной ток имеет вид

$$\langle V_i \cos(\omega_i t + \varphi_i) g_m(t) \rangle_{\text{ср}}$$



где усреднение выполняется по периоду колебаний гетеродина. Отсюда приходим к выражению

$$g_{m1}V_i \langle 2 \cos(\omega_i t + \varphi_i) \cos \omega_i t \rangle_{cp} = g_{m1}V_i \cos \varphi_i, \quad (8.7)$$

модуль которого достигает максимума при  $\varphi_i = 0$  и  $\varphi_i = \pm\pi$ . Таким образом, выходной сигнал чувствителен к фазе (отсюда и название детектора), но установка фазы не критична. Таким образом, мы видим, что детектор точно измеряет амплитуду  $V_i$ , как и утверждалось ранее.

Чтобы доказать справедливость утверждения относительно минимально различимого сигнала, рассмотрим реакцию фазового детектора на шумовой сигнал  $X(t)$  с прямоугольной огибающей, занимающий полосу  $B$ , имеющий центральную частоту  $f_i$  и спектральную плотность  $S_0$ . Как показано в следующем разделе, мы можем записать

$$X(t) = X_C(t) \cos \omega_i t - X_S(t) \sin \omega_i t, \quad (8.8)$$

где

$$\begin{aligned} \overline{X^2(t)} &= \overline{X_S^2(t)} = \overline{X_C^2(t)} = S_0 B, \\ \overline{X_C(t)X_C(t+s)} &= \overline{X^2} \frac{\sin \pi B s}{\pi B s}. \end{aligned} \quad (8.8a)$$

Таким образом, к детектору приложены сигнал несущей  $V_i$  с частотой  $f_i$  и две боковые шумовые полосы шириной  $B/2$ . В процессе детектирования несущая образует биения с двумя боковыми шумовыми полосами: поскольку они независимы, их мощности складываются. Процесс детектирования состоит в умножении каждой из боковых полос на  $g_{m1}^2$ ; отсюда спектральная плотность выходного шума равна

$$S'(f) = 2g_{m1}^2 S_0 \quad \text{при } f < \frac{B}{2}; \quad (8.9)$$

$$S'(f) = 0 \quad \text{в остальных случаях.}$$

Чтобы нормировать отклик, будем полагать далее, что  $g_{m1} = 1$  См.

Пропустим теперь этот сигнал через устройство с частотной характеристикой  $h(f)$ ; чтобы упростить

выкладки, будем полагать характеристику нормированной, т. е.  $h(0) = 1$ . Тогда отклонение  $A_0$ , обусловленное сигналом, равно  $V_i$ , а отклонение, обусловленное шумом, имеет средний квадрат

$$\overline{\Delta A^2} = \int_0^{B/2} S'(f) h^2(f) df = 2S_0 \int_0^\infty h^2(f) df, \quad (8.10)$$

если  $\pi B\tau \gg 1$ .

Учтем теперь, что индикатором является гальванометр с критическим затуханием и постоянной времени  $\tau$ . Его нормированная частотная характеристика имеет вид  $h(f) = 1/(1 + \omega^2\tau^2)$ , так что

$$\overline{\Delta A^2} \simeq 2S_0 \int_0^\infty h^2(f) df = \frac{S_0}{4\tau} = S_0 B_{\text{эфф}}. \quad (8.11)$$

Следовательно,  $B_{\text{эфф}} = 1/4\tau$  (как и утверждалось выше), а минимально различимый сигнал равен

$$(V_i)_{\text{мин}} = (\overline{\Delta A^2})^{1/2} = (S_0 B_{\text{эфф}})^{1/2}, \quad (8.11a)$$

как упоминалось ранее.

### 8.2.3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СООТНОШЕНИЙ (8.8), (8.8a) И (8.9)

Пусть для  $0 < t < T$

$$X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(\omega_n t - \varphi_n),$$

где  $\omega_n = 2\pi n/T$ .

Запишем  $\cos(\omega_n t - \varphi_n) = \cos[(\omega_n - \omega_i)t - \varphi_n + \omega_i t]$  и разложим в ряд. Тогда

$$X(t) = X_G(t) \cos \omega_i t - X_S(t) \sin \omega_i t,$$

причем

$$X_G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos[(\omega_n - \omega_i)t - \varphi_n];$$

$$X_S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin[(\omega_n - \omega_i)t - \varphi_n].$$

Это доказывает справедливость формулы (8.8).

Поскольку элементы рассматриваемого ансамбля имеют случайные фазы,  $\overline{\cos^2 [(\omega_n - \omega_l) t - \varphi_n]} = 1/2$  и т. д., поэтому

$$\overline{X_C^2(t)} = \overline{X_S^2(t)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \overline{c_n^2} = \overline{X^2(t)} = S_0 B.$$

Чтобы доказать справедливость второй части формулы 8.8а), предположим, что

$$\begin{aligned} & \overline{X_C(t) X_C(t+s)} = \\ &= \overline{\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_j \cos [(\omega_j - \omega_l) t - \varphi_j] c_k \cos [(\omega_k - \omega_l) (t+s) - \varphi_k]} = \\ &= \overline{\sum_{j=1}^{\infty} c_j^2 \cos [(\omega_j - \omega_l) t - \varphi_j] \cos [(\omega_j - \omega_l) (t+s) - \varphi_j]} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \overline{c_j^2} \cos (\omega_j - \omega_l) s = \int_0^{\infty} S_x(t) \cos (\omega - \omega_l) s df = \\ &= \frac{S_0}{2\pi s} \int_{-B/2}^{B/2} \cos (\omega - \omega_l) s d [(\omega - \omega_l) s] = S_0 B \frac{\sin \pi B s}{\pi B s}. \end{aligned}$$

То же самое выражение справедливо для произведения  $\overline{X_S(t) X_S(t+s)}$ .

В заключение приведем строгое доказательство справедливости формулы (8.9). Шумовой ток низкой частоты на выходе имеет вид

$I(t) = \langle g_m(t) X(t) \rangle_{\text{ср}} = 2g_{m1} \langle X_C(t) \cos^2 \omega_i t \rangle_{\text{ср}} = g_{m1} X_C(t)$ , так как  $\langle \cos^2 \omega_i t \rangle_{\text{ср}} = 1/2$ , когда усреднение выполняется по полному периоду колебания гетеродина.

Применим теперь к этому случайному сигналу теорему Винера—Хинчина. Тогда спектральная плотность  $S'(f)$  запишется в виде

$$\begin{aligned} S'(f) &= 4g_{m1}^2 \int_0^{\infty} \overline{X_C(t) X_C(t+s)} \cos 2\pi f s ds = \\ &= 4g_{m1}^2 S_0 B \int_0^{\infty} \frac{\sin \pi B s}{\pi B s} \cos 2\pi f s ds = 2g_{m1}^2 S_0 \end{aligned}$$

при  $f < B/2$  и нуль в остальных случаях.

### 8.3. ИЗМЕРЕНИЕ МАЛЫХ ЗАРЯДОВ

Предположим, что каким-либо образом конденсатору  $C$  сообщен небольшой заряд  $Q$ ; тогда на конденсаторе возникает напряжение  $V_C(t)$ . Подсоединим теперь конденсатор к усилителю, имеющему в первом каскаде малощумящий ПТПЗ. Усиленный сигнал фильтруется

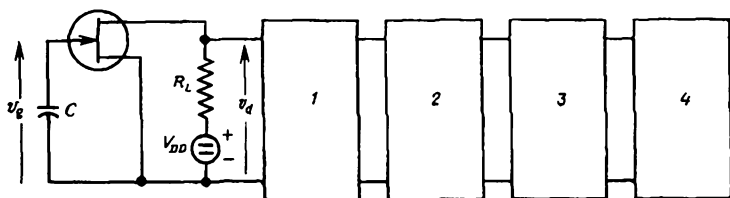


Рис. 8.3. Заряд  $Q$ , накапливаемый на конденсаторе  $C$  в течение интервала времени  $\tau$ .

Он порождает линейно возрастающее напряжение на зажимах конденсатора  $C$  которое усиливается усилителем 1, дифференцируется дифференцирующим устройством 2, проходит через фильтр нижних частот 3 и обнаруживается индикатором 4

фильтром верхних частот с нижней частотой отсечки  $f_1$  и фильтром нижних частот с верхней частотой отсечки  $f_2$ , причем  $f_2 > f_1$ ; это позволяет преобразовать напряжение  $V_C(t)$  в импульс. Надлежащим выбором частот  $f_1$  и  $f_2$  можно оптимизировать отношение сигнал/шум, а шум выразить через минимальное число  $N_{\text{мин}}$  электронов, заряд которых можно различить. Мы увидим, что при комнатной температуре число  $N_{\text{мин}}$  составляет  $\sim 50$  электронов.

Чтобы упростить выкладки, будем полагать, что напряжение  $V_C(t)$  изменяется по линейному закону

$$\frac{Q}{C_{\text{п}}} \left( \frac{t - t_0}{\tau} \right) \quad (8.12)$$

на отрезке  $0 \leq t - t_0 \leq \tau$ , а далее очень медленно затухает. Здесь  $C_{\text{п}}$  — полная емкость входной цепи. Заменим теперь фильтр верхних частот дифференцирующей цепью, которая преобразует область линейного нарастания в импульс, и используем фильтр нижних частот, имеющий частотную характеристику  $(1 +$

+  $jf/f_0$ )<sup>-2</sup>, полученную каскадным соединением двух RC-фильтров; это позволяет отфильтровать высокочастотный шум. Теперь единственным неизвестным параметром является частота  $f_0$ ; вычисляя отношение сигнал/шум на выходе системы и дифференцируя его по  $f_0$ , можно получить оптимальное отношение сигнала к шуму и выразить его через заряд электронов (рис. 8.3).

### 8.3.1. РАССМОТРЕНИЕ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ СИГНАЛА

Если первым каскадом усилителя является ПТПЗ с плавающим затвором, причем  $C_{gs}$  — емкость затвор — исток,  $C_{gd}$  — емкость затвор — сток,  $g_m$  — крутизна и  $R_L$  — сопротивление нагрузки в цепи стока, то

$$C_n = C + C_{gs} + C_{gd}(1 + g_m R_L), \quad (8.12a)$$

где  $C_{gd}g_m R_L$  — емкость Миллер-эффекта.

Далее сигнал, описываемый формулой (8.12), усиливается широкополосным усилителем с коэффициентом усиления  $G$  и дифференцируется для получения импульса высотой

$$\frac{GQ}{C_n \tau} \quad (8.12b)$$

и длительностью  $\tau$ , начинающегося в момент времени  $t = t_0$ .

Этот импульс подается на фильтр с частотной характеристикой  $(1 + jf/f_0)^{-2}$ , что вызывает переходный процесс

$$\frac{GQ}{C_n \tau} \left\{ 1 + \omega_0(t - t_0 - \tau) - [1 + \omega_0(t - t_0)] \exp(-\omega_0 \tau) \right\} \times \\ \times \exp[-\omega_0(t - t_0 - \tau)], \quad (8.13)$$

где  $\omega_0 = 2\pi f_0$ . Максимум этого импульса достигается при

$$\omega_0(t - t_0 - \tau) = \omega_0 \tau \frac{\exp(-\omega_0 \tau)}{1 - \exp(-\omega_0 \tau)}. \quad (8.13a)$$

Если  $\omega_0\tau \ll 1$ , правая часть выражения (8.13а) равна единице; для простоты предположим, что это неравенство выполняется.

Тогда максимум выходной характеристики достигается при  $\omega_0(t - t_0 - \tau) = 1$ . Подстановка в выражение (8.13) и учет неравенства  $\omega_0\tau \ll 1$  приводят к высоте импульса, равной

$$\frac{GQ}{C_n} \frac{2\pi f_0}{e}, \quad (8.14)$$

где  $e$  — основание натуральных логарифмов.

### 8.3.2. ОТНОШЕНИЕ СИГНАЛ/ШУМ

Для расчета шума обратим внимание, что имеются два шумовых тока:  $i_g$  в цепи затвора и  $i_n$  в цепи стока. При плавающем затворе будем иметь

$$\overline{i_g^2} = 4eI_{g0} \Delta f, \quad \overline{i_n^2} = 4kTR_n \Delta f g_m^2. \quad (8.15)$$

Теперь для тока стока имеем

$$i_d = g_m v_g + i_n, \quad (8.16)$$

$$i_g + (v_d - v_g) j\omega C_{dg} = v_g j\omega (G + C_{gs}), \quad (8.17)$$

$$v_d = -i_d R_L = -g_m R_L v_g - i_n R_L. \quad (8.18)$$

Решая систему уравнений относительно  $v_d$ , после некоторых преобразований находим

$$v_d = \frac{[g_m i_g + i_n j\omega (C + C_{gs} + C_{gd})] R_L}{j\omega (C + C_{gs} + C_{gd} g_m R_L)}. \quad (8.19)$$

Вводя эквивалентный генератор входного тока  $i_{\text{экр}}$  при помощи равенства

$$v_d = \frac{g_m i_{\text{экр}} R_L}{j\omega (C + C_{gs} + C_{gc} + C_{gd} g_m R_L)}, \quad (8.20)$$

получим

$$i_{\text{экр}} = i_g + \frac{i_n}{g_m} j\omega (C + C_{gs} + C_{gd}). \quad (8.20a)$$

Таким образом, видно, что емкость Миллер-эффекта не влияет на величину  $i_{\text{экв}}$ . Введение эквивалентного тока насыщенного диода  $I_{\text{экв}}$  посредством равенства  $\overline{i_{\text{экв}}^2} = 2eI_{\text{экв}}\Delta f$  и подстановка вместо  $\overline{i_g^2}$  и  $\overline{i_n^2}$  их выражений из (8.15) приводят к

$$I_{\text{экв}} = 2I_{g0} + \frac{2kT}{e} R_n \omega^2 (C + C_{gs} + C_{gd})^2. \quad (8.21)$$

Теперь  $I_{g0}$  — константа, а  $R_n = R_{n0} + A/f$ , где  $R_{n0}$  представляет тепловой шум прибора, а  $A/f$  — возможный фликер-шум. Таким образом, можно записать

$$I_{\text{экв}} = a + bf + cf^2, \quad (8.22)$$

где

$$a = 2I_{g0}, \quad b = \frac{2kT}{e} (2\pi)^2 A (C + C_{gs} + C_{gd})^2, \quad (8.22a)$$

$$c = \frac{2kT}{e} (2\pi)^2 R_{n0} (C + C_{gs} + C_{gd})^2.$$

Этот шум в частотном интервале  $df$  порождает эквивалентное входное напряжение со средним квадратом

$$2edf \frac{(a + bf + cf^2)}{\omega^2 C_n^2}. \quad (8.23)$$

Он усиливается (т. е. умножается на  $G^2$ ), дифференцируется (т. е. умножается на  $\omega^2$ ) и фильтруется [т. е. умножается на  $(1 + f^2/f_0^2)^{-2}$ ]. Поэтому полный средний квадрат шумового напряжения имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{2eG^2}{C_n^2} \int_0^{\infty} \frac{a + bf + cf^2}{(1 + f^2/f_0^2)^2} df = \\ & = \frac{2eG^2}{C_n^2} \left[ \frac{\pi}{4} af_0 + \frac{1}{2} bf_0^2 + \frac{\pi}{4} cf_0^3 \right]. \end{aligned} \quad (8.23a)$$

Деление на квадрат величины (8.14) дает отношение шум/сигнал по мощности в виде

$$e \frac{2e^2}{4\pi^2 Q^2} \left( \frac{\pi}{4} \frac{a}{f_0} + \frac{1}{2} b + \frac{\pi}{4} cf_0 \right). \quad (8.24)$$

Оно имеет минимум при  $f_0 = (a/c)^{1/2}$ , равный

$$\frac{e^2 e^2}{4\pi^2 Q^2} \frac{b + \pi (ac)^{1/2}}{e}. \quad (8.24a)$$

Минимальное значение  $Q$  находится приравнованием этого выражения единице

$$Q_{\min} = eN_{\min} = \frac{ee}{2\pi} \left[ \frac{b + \pi (ac)^{1/2}}{e} \right]^{1/2}. \quad (8.24б)$$

Чтобы найти величину  $N_{\min}$ , предположим, что имеется небольшой ПТПЗ с параметрами  $I_{g0} = 0,50 \times 10^{-12}$  А,  $C + C_{gs} + C_{gd} = 5$  пФ,  $R_{n0} = 10^4$  Ом и  $A = 0$  (ПТПЗ практически не имеет фликер-шума). Тогда  $a = 10^{-12}$ ,  $b = 0$  и  $c = 5 \cdot 10^{-19}$ ; следовательно,

$$f_0 = 1400 \text{ Гц}, \quad N_{\min} = 51.$$

Поскольку член  $\pi (ac)^{1/2}$  является существенным членом, улучшения можно достичь только уменьшением величин  $I_{g0}$  и  $R_{n0}$  в результате охлаждения прибора. Таким способом были получены значения  $N_{\min}$  менее 10. Этот факт очень важен для детекторов ядерных частиц.

Детали практической реализации рассмотренных идей выходят за рамки настоящего обсуждения. По данному вопросу читателю следует обратиться к коммерческим справочникам.

Об измерении малых токов, напряжений и зарядов см. также работы [14, 15].



---

## ТЕПЛОВЫЕ ДЕТЕКТОРЫ ИЗЛУЧЕНИЯ

В этой главе мы рассмотрим детекторы излучения, в которых излучение переходит в тепло, тепло изменяет параметр изучаемого прибора, и этот параметр регистрируется. В частности, мы рассмотрим термопару (разд. 9.2) и резистивный болометр (разд. 9.3). Пироэлектрический детектор и емкостной болометр, которые также принадлежат к этому классу приборов, рассмотрены в гл. 12.

Для обсуждения детекторов излучения вводятся понятия технической чувствительности, эквивалентной шумовой мощности (ЭШМ) и способности к обнаружению (разд. 9.1.1). Эти понятия имеют гораздо более общий характер и относятся к детекторам излучения, которые не принадлежат к классу тепловых детекторов.

Лимитирующим источником шума в тепловых детекторах излучения являются самопроизвольные флуктуации температуры детектора (разд. 9.1.2). Однако этот предел не всегда достигается.

Другой источник шума представляет собой шум самого излучения. Здесь необходимо различать случаи теплового (разд. 9.1.3) и лазерного излучения (разд. 9.1.4).

## 9.1. ОБЩИЙ АНАЛИЗ

### 9.1.1. ТЕХНИЧЕСКАЯ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ, ЭКВИВАЛЕНТНАЯ МОЩНОСТЬ ШУМА И СПОСОБНОСТЬ К ОБНАРУЖЕНИЮ

Определим сначала техническую чувствительность. Пусть детектор излучения принимает модулированное (например, прерывистое) излучение. Пусть излучение мощностью  $P$  вызывает отклонение  $R$  прибора. Назовем тогда величину

$$C = \frac{R}{P} \quad (9.1)$$

*технической чувствительностью* детектора. Например, детектор вырабатывает напряжение  $V$ , в этом случае величина

$$C = C_V = \frac{V}{P} \quad (9.1a)$$

имеет размерность В/Вт. Если детектор вырабатывает ток  $I$ , тогда величина

$$C = C_I = \frac{I}{P} \quad (9.1b)$$

имеет размерность А/Вт.

Теперь дадим определение эквивалентной шумовой мощности (ЭШМ). Пусть шум детектора вместе с индикатором имеет спектральную плотность  $S_R(f)$ . Тогда ЭШМ  $P_{\text{экр}}$  определяется как

$$CP_{\text{экр}} = [S_R(f)]^{1/2}, \text{ или } P_{\text{экр}} = \frac{[S_R(f)]^{1/2}}{C}. \quad (9.2)$$

Она имеет размерность Вт/Гц<sup>1/2</sup> и представляет собой мощность, которая дает тот же самый отсчет, что и шум в единичной полосе. Последнее всегда может быть определено; хороший детектор — это тот, который имеет наименьшую величину  $P_{\text{экр}}$ . Например, если детектор вырабатывает напряжение, характеризующееся спектральной плотностью  $S_V(f)$ , то

$$P_{\text{экр}} = \frac{[S_V(f)]^{1/2}}{C_V}. \quad (9.2a)$$

Если детектор вырабатывает ток, характеризующийся спектральной плотностью  $S_I(f)$ , то

$$P_{\text{экв}} = \frac{[S_I(f)]^{1/2}}{C_I}. \quad (9.26)$$

Обычно величина  $P_{\text{экв}}$  пропорциональна корню квадратному из площади детектора  $A$ . Если площадь детектора  $A$  можно выбирать произвольно, допустимо нормирование величины  $P_{\text{экв}}$  к единице площади, полагая

$$P_{\text{экв}}^* = \frac{P_{\text{экв}}}{A^{1/2}}. \quad (9.3)$$

Размерность здесь Вт/Гц<sup>1/2</sup>·см.

Наилучший тип детектора — тот, который обладает наименьшей величиной  $P_{\text{экв}}^*$ . Поскольку хочется приписать хорошему детектору большое число, вводится *детектирующая способность*  $D^*$  в виде

$$D^* = \frac{1}{P_{\text{экв}}^*} = \frac{A^{1/2}}{P_{\text{экв}}}. \quad (9.3a)$$

Она имеет размерность см·Гц<sup>1/2</sup>/Вт и служит мерой внутренних свойств детектирующей системы.

У некоторых детекторов площадь  $A$  нельзя выбирать произвольно, она определяется конструктивными соображениями. В таком случае величины  $D^*$  и  $P_{\text{экв}}^*$  не имеют смысла, а значащим параметром является величина  $P_{\text{экв}}$ .

### 9.1.2. ШУМ ФЛУКТУАЦИЙ ТЕМПЕРАТУРЫ

Во многих случаях шумовой порог детектора определяется самопроизвольными флуктуациями температуры детектора. Это имеет место в любом детекторе, который преобразует модулированное излучение мощностью  $P$  в изменение температуры  $\Delta T$ . В этом случае полагаем, что

$$\Delta T = C_T P \quad (9.4)$$

и называем величину  $C_T$  технической чувствительностью детектора.

Теперь следует сравнить эту величину с самопроизвольными флуктуациями температуры прибора. Предполагаем, что прибор имеет эффективную площадь  $A$ , теплоемкость  $C_H$  и проводимость тепловых потерь  $g_H$  и  $g'_H$  спереди и сзади соответственно, тогда

$$S_{\Delta T}(f) = \frac{4kT^2(g_H + g'_H)}{(g_H + g'_H)^2 + \omega^2 C_H^2} \quad (9.5)$$

[ср. с уравнением (5.44а)].

Вычислим теперь  $C_T$ . Уравнение для теплового потока в системе имеет вид

$$C_H \frac{d\Delta T}{dt} + (g_H + g'_H) \Delta T = \eta P_1 \exp(j\omega t), \quad (9.6)$$

где  $\eta$  — коэффициент излучения передней грани. Подставляя величину  $\Delta T = \Delta T_0 \exp(j\omega t)$ , получим

$$(j\omega C_H + g_H + g'_H) \Delta T_0 = \eta P_1. \quad (9.6a)$$

Следовательно,

$$(\text{var } \Delta T_0)^{1/2} = \frac{\eta (\text{var } P_1)^{1/2}}{[(g_H + g'_H)^2 + \omega^2 C_H^2]^{1/2}}, \quad (9.7)$$

откуда можно найти  $C_T$ .

Определим теперь величину  $P_{\text{экв}}$ , приравнявая

$$(\text{var } \Delta T_0)^{1/2} = [S_{\Delta T}(f)]^{1/2},$$

откуда получим

$$P_{\text{экв}} = \frac{[4kT^2(g_H + g'_H)]^{1/2}}{\eta}. \quad (9.8)$$

Теперь, если все тепловые потери обусловлены излучением, а  $\eta'$  — коэффициент излучения задней грани,

$$g_H = \eta \cdot 4\sigma T^3 A, \quad g'_H = \eta' \cdot 4\sigma T^3 A, \quad (9.8a)$$

где  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-12} \text{ Вт} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{град}^{-4}$  — постоянная Стефана—Больцмана. Доказательство простое. Если окружающая среда имеет температуру  $T$ , а детектор имеет

температуру  $T + \Delta T$ , то потери тепла за счет излучения даются законом Стефана—Больцмана в виде

$$\eta\sigma(T + \Delta T)^4 A - \eta\sigma T^4 A = 4\eta\sigma T^3 A \Delta T = g_H \Delta T,$$

откуда следует равенство (9.8а). Поэтому

$$P_{\text{экв}} = \frac{[16A\sigma k T^5 (\eta + \eta')]^{1/2}}{\eta}. \quad (9.9)$$

В идеальном случае  $\eta = 1$  и  $\eta' = 0$ , т. е.

$$P_{\text{экв}} = (16A\sigma k T^5)^{1/2}, \quad (9.9a)$$

тогда как и в случае  $\eta = \eta' = 1$  величина  $P_{\text{экв}}$  больше в  $2^{1/2}$  раза. Следовательно,

$$D^* = \frac{A^{1/2}}{P_{\text{экв}}} = \frac{\eta}{[16\sigma k T^5 (\eta + \eta')]^{1/2}}. \quad (9.9b)$$

**Пример.**  $A = 1 \text{ мм}^2$ ,  $T = 300 \text{ К}$ . Подстановка значений  $\sigma$  и  $k$  приводит к величинам  $P_{\text{экв}} = 5,5 \times 10^{-12} \text{ Вт/Гц}^{1/2}$  (при  $\eta = 1$  и  $\eta' = 0$ ) и  $P_{\text{экв}} = 7,8 \cdot 10^{-12} \text{ Вт/Гц}^{1/2}$  (при  $\eta = \eta' = 1$ ), так что значения  $D^*$  равны соответственно  $1,8 \cdot 10^{10}$  и  $1,3 \times 10^{10} \text{ см} \cdot \text{Гц}^{1/2}/\text{Вт}$ .

Если детектор поддерживается при температуре  $T_1$ , а окружающая среда имеет температуру  $T_0$ , то по аналогии с (9.9)

$$P_{\text{экв}} = \frac{[8A\sigma k T_1^5 (\eta + \eta') + 8A\sigma k T_0^5 (\eta + \eta')]^{1/2}}{\eta}. \quad (9.10)$$

Это означает, что, охлаждая детектор, можно получить несколько лучшие результаты. Еще лучших результатов можно достичь защитой детектора тепловым экраном, который устраняет основную часть фонового излучения комнатной температуры. В этом случае можно записать выражение (9.10) в виде

$$P_{\text{экв}} = \frac{[8A\sigma k T_1^5 (\eta + \eta') + S \cdot 8A\sigma k T_0^5 (\eta + \eta')]^{1/2}}{\eta}, \quad (9.10a)$$

где  $S$  — коэффициент, определяющий степень экранировки.

В предельном случае тепловые потери определяются утечкой тепла через выводы (разд. 9.2).

### 9.1.3. ФЛУКТУАЦИИ ИЗЛУЧЕНИЯ ЧЕРНОГО ТЕЛА

Покажем теперь, что если за секунду принимается  $n$  квантов излучения черного тела, то

$$\text{var } n = \frac{\bar{n}}{1 - \exp(-hv/kT)}, \quad (9.11)$$

где  $T$  — абсолютная температура черного тела, а  $hv$  — энергия излучаемых квантов. Другими словами,  $\text{var } n$  может быть больше  $\bar{n}$  (сверхпуассоновский шум).

Исследуем сначала отдельную моду излучения черного тела. Оптический резонатор имеет набор стоячих волн частотой  $\nu$ , а каждая из стоячих волн может иметь два независимых перпендикулярных направления поляризации. Стоячая волна с определенным направлением поляризации называется *модой черного тела*. Такая мода черного тела может рассматриваться как гармонический осциллятор частоты  $\nu$ , и, согласно квантовой теории, его энергия  $E$  квантована

$$E_\nu = h\nu \left( \nu + \frac{1}{2} \right) \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots),$$

где  $h$  — постоянная Планка, а  $1/2 h\nu$  называется нулевой энергией. Эта нулевая энергия образует аддитивную постоянную, которой мы пренебрежем. Если квантовое число  $\nu$  больше нуля, говорят, что мода содержит  $\nu$  квантов.

Согласно теореме Больцмана, вероятность того, что в моде имеется  $\nu$  квантов, пропорциональна  $\exp(-\nu hv/kT)$ , и, следовательно, ее можно представить в виде

$$C \exp\left(-\nu \frac{hv}{kT}\right),$$

где нормирующая константа  $C$  должна выбираться так, чтобы

$$C \sum_{\nu} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) = 1, \text{ или } C = \frac{1}{\sum_{\nu} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)}.$$

Определим теперь

$$\bar{\nu} = C \sum_{\nu} \nu \exp\left(-\nu \frac{h\nu}{kT}\right),$$

$$\bar{\nu}^2 = C \sum_{\nu} \nu^2 \exp\left(-\nu \frac{h\nu}{kT}\right).$$

С этой целью положим  $(h\nu/kT) = x$  и запишем

$$\sum_{\nu} \exp(-\nu x) = \frac{1}{1 - \exp(-x)}.$$

Дифференцируя далее обе части по  $x$ , получим

$$\sum_{\nu} -\nu \exp(-\nu x) = -\frac{\exp(-x)}{[1 - \exp(-x)]^2},$$

или

$$\sum_{\nu} \nu \exp(-\nu x) = \frac{\exp(-x)}{[1 - \exp(-x)]^2}.$$

Еще раз дифференцируя обе части по  $x$ , получим

$$\begin{aligned} \sum_{\nu} \nu^2 \exp(-\nu x) &= \frac{\exp(-x)}{[1 - \exp(-x)]^2} + 2 \frac{[\exp(-x)]^2}{[1 - \exp(-x)]^3} = \\ &= \frac{\exp(-x) + [\exp(-x)]^2}{[1 - \exp(-x)]^3}. \end{aligned}$$

Следовательно, умножая на  $C$ , находим

$$\bar{\nu} = \frac{\exp(-x)}{1 - \exp(-x)}, \quad \bar{\nu}^2 = \frac{\exp(-x) + [\exp(-x)]^2}{[1 - \exp(-x)]^2},$$

$$\text{var } \nu = \bar{\nu}^2 - (\bar{\nu})^2 = \frac{\exp(-x)}{[1 - \exp(-x)]^2} = \frac{\bar{\nu}}{1 - \exp(-h\nu/kT)},$$

(9.11a)

что и требовалось доказать.

Таким образом, выражение (9.11) справедливо для отдельной моды. Если имеется большое число мод с  $n = \sum_i v_i$  квантов  $h\nu$  в этих модах, то  $\bar{n} = \sum_i \bar{v}_i$  и

$$\text{var } n = \frac{\sum_i \bar{v}_i}{1 - \exp(-h\nu/kT)} = \frac{\bar{n}}{1 - \exp(-h\nu/kT)}.$$

Поэтому выражение (9.11) справедливо для множества мод вокруг частоты  $\nu$ .

Поскольку мода с энергией  $h\nu$  испускает  $\nu$  фотонов практически одновременно, число *излученных* квантов удовлетворяет той же самой формуле. Число принимаемых квантов также удовлетворяет выражению (9.11), если только часть излучения не перехватывается<sup>1</sup>.

#### 9.1.4. ФЛУКТУАЦИИ ИЗЛУЧЕНИЯ ЛАЗЕРА

Если регенерация существенно превышает пороговую, лазер можно рассматривать как генератор сигнала постоянной амплитуды. Можно показать, что испускаемое излучение подчиняется распределению Пуассона, а именно  $\text{var } n = \bar{n}$ .

Чтобы объяснить этот факт, рассмотрим идеальный лазер с нулевыми оптическими потерями. Тогда интенсивность  $n$  *испускания* фотонов равна интенсивности *накачки*  $W$  (как оптической, так и любой другой), посредством чего атомы переводятся с более низкого на более высокий энергетический уровень. Далее, накачка состоит из серии независимых случайных событий, так что  $\text{var } W = \bar{W}$ ; поскольку  $n=W$ , то  $\text{var } n = \bar{n}$ .

Учтем теперь наличие потерь. Если  $n$  — интенсивность потока *выработанных* квантов, то, как и прежде,  $\text{var } N = \bar{N}$ . Если теперь на самом деле испускается

<sup>1</sup> Экспериментальное подтверждение справедливости выражения (9.11) имеется в работе [16].



$\lambda$ -я часть выработанных квантов, то из теоремы о дисперсии для интенсивности излучения  $n$  имеем

$$\bar{n} = \bar{N}\lambda, \quad \text{var } n = \lambda^2 \text{var } N + \bar{N}\lambda(1 - \lambda) = \bar{N}\lambda = \bar{n},$$

так что *излученные* кванты проявляют также полный дробовой шум.

Можно также использовать следующее рассуждение. Произвольная спектральная линия дает *по крайней мере* дробовой шум квантов, содержащихся в этой линии. Кроме того, между частотами в пределах линии имеют место *биения*. Это явление называется *шумом интерференции* и дает дополнительный вклад в выражение для  $\text{var } n$ . Однако одномодовый лазер, далекий от порога самовозбуждения, представляет собой моночастотный генератор, который не вырабатывает биений, и, следовательно, шума интерференции нет. Отсюда  $\text{var } n = \bar{n}$ .

Вблизи порога самовозбуждения имеется некоторый избыточный шум за счет самопроизвольного излучения  $f$  квантов. Генератор вырабатывает сигнал несущей; шум спонтанного излучения ответвлен за две боковых (по одной с каждой стороны несущей частоты лазера  $\nu$ ). При детектировании биения несущей с двумя шумовыми боковыми порождают дополнительную слабую шумовую компоненту. Вблизи порога самовозбуждения этот эффект весьма заметен, однако он тонет в дробовом шуме при существенном превышении порога <sup>1</sup>.

## 9.2. ДЕТЕКТОР НА ТЕРМОПАРЕ

Излучение принимается тонкой зачерненной пластинкой площадью  $A$ , к которой подсоединены два вывода терморпары 1 и 2 из различного материала. Изменение температуры  $\Delta T$ , вызванное излучением, приводит к выработке терморпарой термо-э. д. с.  $s\Delta T$ . Эта э. д. с. измеряется измерительным прибором с внутренним сопротивлением  $R_i$  (рис. 9.1).

<sup>1</sup> За ссылками следует обратиться к обзорной статье [17].

Начнем с того, что выпишем основные уравнения системы. Пусть выводы 1 и 2 имеют удельные сопротивления  $\rho_1$  и  $\rho_2$ , тепловые проводимости  $k_1$  и  $k_2$ , и пусть  $a_1 = A_1/L_1$  и  $a_2 = A_2/L_2$  являются отношениями пло-

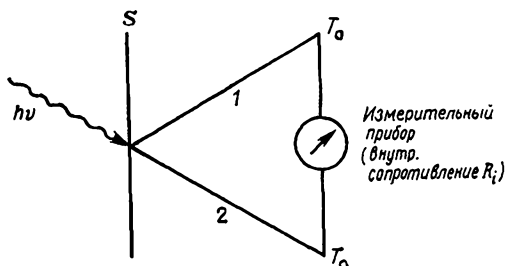


Рис. 9.1. Термопара с принимающей пластинкой  $S$ .

Термопара получает кванты, которые нагревают пластинку и порождают термо-э. д. с. между выводами 1 и 2, которые подсоединены к измерительному прибору с внутренним сопротивлением  $R_i$  (окончания выводов поддерживаются при температуре  $T_0$ )

щади поперечного сечения  $A$  к длине  $L$  каждого вывода. Тогда полное сопротивление цепи  $r$  равно

$$r = \frac{\rho_1}{a_1} + \frac{\rho_2}{a_2} + R_i, \quad (9.12)$$

а полная проводимость тепловых потерь

$$g_H = 4\eta A\sigma T^3 + k_1 a_1 + k_2 a_2, \quad (9.13)$$

где первый член описывает тепловые потери, обусловленные излучением. Будем полагать в наших рассуждениях, что  $\eta = 1$ .

Основной набор уравнений, описывающих систему, имеет вид

$$C_H \frac{d\Delta T}{dt} + g_H \Delta T + sTi = P_1 \exp(j\omega t) + H(t), \quad (9.14)$$

$$ir - s\Delta T = e_0 \exp(j\omega t) + E(t). \quad (9.15)$$

Здесь  $H(t)$  — случайная функция, описывающая шумовые флуктуации температуры, а  $E(t)$  — случайная функция, описывающая тепловой шум электрической цепи, тогда как  $P_1 \exp(j\omega t)$  и  $e_0 \exp(j\omega t)$  — соответ-

ственно сигнал излучения и электрический сигнал, необходимые для определения технической чувствительности и полного сопротивления прибора. Наконец,  $i$  — ток, а  $sTi$  — скорость тепловых потерь вследствие эффекта Пельтье, где  $s$  — коэффициент Зеебека.

### 9.2.1. ТЕХНИЧЕСКАЯ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ И ПОЛНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ПРИБОРА

Рассчитаем сначала техническую чувствительность. Чтобы сделать это, пренебрежем функциями  $H(t)$  и  $E(t)$  и положим  $e_0 = 0$ . Видно, что в этом случае  $i = s\Delta T/r$ , и, следовательно, потери тепла вследствие эффекта Пельтье составляют  $sTi = s^2T\Delta T/r$ . Подстановка  $\Delta T = \Delta T_0 \exp(j\omega t)$  дает при  $\eta = 1$

$$\left(j\omega C_H + g_H + \frac{s^2T}{r}\right)\Delta T_0 = P_1, \quad \Delta T_0 = \frac{P_1}{j\omega C_H + g_H + s^2T/r}, \quad (9.16)$$

или

$$i_0 = \frac{s\Delta T}{r} = \frac{s/r}{j\omega C_H + g_H + s^2T/r} P_1, \quad (9.16a)$$

поэтому техническая чувствительность детектора равна

$$\frac{s/r}{[\omega^2 C_H^2 + (g_H + s^2T/r)^2]^{1/2}}. \quad (9.17)$$

При  $\omega^2 C_H^2 \ll (g_H + s^2T/r)^2$  она равна

$$\frac{s/r}{g_H + s^2T/r}, \quad (9.17a)$$

так что в данном случае техническая чувствительность не зависит от частоты. При  $\omega^2 C_H^2 \gg (g_H + s^2T/r)^2$  выражение (9.17) можно записать в виде соотношения

$$\frac{s/r}{\omega C_H}, \quad (9.17b)$$

которое обратно пропорционально частоте.

Рассчитаем далее полное сопротивление  $Z_{вх}$  относительно  $e_0 \exp(j\omega t)$ . С этой целью примем  $P_1 = 0$ , прене-

брежем функциями  $H(t)$  и  $E(t)$ , а также положим  $\Delta T = \Delta T_0 \exp(j\omega t)$  и  $i = i_0 \exp(j\omega t)$ . Тогда

$$(j\omega C_H + g_H) \Delta T_0 + sT i_0 = 0, \quad i_0 r - s \Delta T_0 = e_0, \quad (9.18)$$

или

$$\Delta T_0 = - \frac{sT}{j\omega C_H + g_H} i_0. \quad (9.18a)$$

Отсюда полное входное сопротивление

$$Z_{\text{вх}} = \frac{e_0}{i_0} = r - \frac{s \Delta T_0}{i_0} = r + \frac{s^2 T}{j\omega C_H + g_H}. \quad (9.19)$$

Это соответствует

$$Z_{\text{вх}} = r + \frac{s^2 T}{g_H} \quad (9.19a)$$

на низких частотах ( $\omega^2 C_H^2 \ll g_H^2$ ), где сопротивление чисто резистивно. При  $\omega^2 C_H^2 \gg g_H^2$  (высокие частоты) полное входное сопротивление имеет вид

$$Z_{\text{вх}} = r + \frac{s^2 T}{j\omega C_H}, \quad (9.19b)$$

т. е. оно состоит из сопротивления  $r$  и последовательно включенной емкостной компоненты.

### 9.2.2. ШУМ И ВЕЛИЧИНА $P_{\text{экв}}$

Теперь рассчитаем шум. Чтобы сделать это, положим  $P_1 = 0$ ,  $e_0 = 0$  и получим

$$C_H \frac{d \Delta T}{dt} + g_H \Delta T + sT i = H(t),$$

$$i r - s \Delta T = E(t), \quad \text{или} \quad i = \frac{s \Delta T}{r} + \frac{E(t)}{r}.$$

Отсюда получаем уравнение Ланжевена

$$C_H \frac{d \Delta T}{dt} + \left( g_H + \frac{s^2 T}{r} \right) \Delta T = H(t) - \frac{sT}{r} E(t). \quad (9.20)$$

Подставляя

$$\Delta T = \sum_n \Delta T_n \exp(j\omega_n t), \quad H(t) = \sum_n h_n \exp(j\omega_n t),$$

$$E(t) = \sum_n e_n \exp(j\omega_n t),$$

получим

$$\left(j\omega_n C_H + g_H + \frac{s^2 T}{r}\right) \Delta T_n = h_n - \frac{sT}{r} e_n,$$

$$\Delta T_n = \frac{h_n - (sT/r) e_n}{j\omega_n C_H + g_H + s^2 T/r}, \quad (9.20a)$$

или

$$i_n = \frac{s}{r} \Delta T_n + \frac{e_n}{r} = \frac{(s/r) h_n + (j\omega_n C_H + g_H) e_n / r}{j\omega_n C_H + g_H + s^2 T/r}. \quad (9.21)$$

Поскольку  $S_H(f) = 4 kT^2 g_H$  и  $S_E(f) = 4 kTr$ , то

$$S_I(f) = \frac{(s^2/r^2) 4kT^2 g_H + (4kT/r) (\omega^2 C_H^2 + g_H^2)}{\omega^2 C_H^2 + (g_H + s^2 T/r)^2}. \quad (9.22)$$

Следовательно, э. д. с. цепи имеет спектральную плотность  $S_V(f) = S_I(f) |Z_{вх}|^2$ . Однако величина  $Z_{вх}$  задана выражением (9.19), и поэтому

$$S_V(f) = \frac{(s^2/r^2) 4kT^2 g_H + (4kT/r) (\omega^2 C_H^2 + g_H^2)}{\omega^2 C_H^2 + (g_H + s^2 T/r)^2} \times$$

$$\times r^2 \frac{(g_H + s^2 T/r)^2 + \omega^2 C_H^2}{\omega^2 C_H^2 + g_H^2} =$$

$$= 4kT \left[ r + \frac{s^2 T g_H}{\omega^2 C_H^2 + g_H^2} \right] = 4kT \operatorname{Re}(Z_{вх}), \quad (9.23)$$

что соответствует тепловому шуму вещественной части полного входного сопротивления. Этого можно было ожидать, так как мы здесь имеем дело с прибором, находящимся в равновесии при температуре  $T$ ; следовательно, схема действительно должна бы проявлять тепловой шум.

Вычислим теперь величину  $P_{\text{экв}}$ , приравнявая величины

$$(\text{var } i_0)^{1/2} = [S_I(f)]^{1/2}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} & \frac{sP_{\text{экв}}/r}{[\omega^2 C_H^2 + (g_H + s^2 T/r)^2]^{1/2}} = \\ & = \frac{[(s^2/r^2) 4kT^2 g_H + (4kT/r)(\omega^2 C_H^2 + g_H^2)]^{1/2}}{[\omega^2 C_H^2 + (g_H + s^2 T/r)^2]^{1/2}}, \end{aligned}$$

или

$$P_{\text{экв}} = \left[ 4kT^2 g_H + \frac{4kTr}{s^2} (\omega^2 C_H^2 + g_H^2) \right]^{1/2}. \quad (9.24)$$

Уже на низких частотах обычно преобладает второй член, так что он, конечно, является преобладающим на высоких частотах. Таким образом, на высоких частотах ( $\omega^2 C_H^2 \gg g_H^2$ ) имеем

$$P_{\text{экв}} = (4kTr)^{1/2} \frac{\omega C_H}{s}. \quad (9.24a)$$

Оптимизация достигается всемерным уменьшением  $r$ . Кроме того, величина  $P_{\text{экв}}$  пропорциональна частоте модуляции  $\omega$ , так что  $\omega$  следует сохранять небольшой.

Однако на низких частотах ( $\omega^2 C_H^2 \ll g_H^2$ ) имеем

$$P_{\text{экв}} = (4kT^2)^{1/2} \left[ g_H + \frac{r}{s^2 T} g_H^2 \right]^{1/2}. \quad (9.24b)$$

Оптимизация этого выражения более утомительна. Прежде всего сопротивление  $R_i$  выбирается так, чтобы согласовать измерительный прибор с терморпарой для обеспечения максимального преобразования мощности. Это означает, что

$$R_i = \frac{\rho_1}{a_1} + \frac{\rho_2}{a_2} \quad \text{или} \quad r = 2 \left( \frac{\rho_1}{a_1} + \frac{\rho_2}{a_2} \right). \quad (9.25)$$

Отметим, что величина  $g_H$  задана выражением (9.13). Далее  $a_1$  и  $a_2$  выбираются так, чтобы свести к мини-

муму  $P_{\text{экв}}$ . После элементарного, но длительного расчета получаем

$$P_{\text{экв}} = (16A\sigma kT^3)^{1/2} [y + (1 + y^2)^{1/2}], \quad (9.26)$$

где

$$y = \left( \frac{2k_0\rho_0}{s^2T} \right)^{1/2}, \quad k_0 = k_1 + k_2 \left( \frac{k_1\rho_2}{k_2\rho_1} \right)^{1/2},$$

$$\rho_0 = \rho_1 + \rho_2 \left( \frac{k_2\rho_1}{k_1\rho_2} \right)^{1/2}. \quad (9.26a)$$

Первый сомножитель соответствует пределу, определяемому тепловым шумом<sup>1</sup>, в то время как множитель  $y + (1 + y^2)^{1/2}$  показывает, сколь мы далеки от этого предела.

Приведенная ниже таблица показывает величину этого множителя для различных материалов термопары:

Термопара	$y + (1 + y^2)^{1/2}$
Константан—манганин	50
Висмут—сурьма	25
Сурьма—висмут—сплав сурьмы	9

Стивенс [18] приводит перечень термопар, выполненных напылением. Результаты представлены в следующей таблице:

Характеристика	1 × 1 мм	0,25 × 0,25 мм	Диаметр 2 мм	0,12 × 0,12 мм
Чувствительность (В/Вт, вакуум)	50	220	160	280
Постоянная времени $\tau_d$ (мкс, вакуум)	100	75	150	13
Полное сопротивление $Z$ (кОм)	6,3	10	47	5
$P_{\text{экв}}$ (Вт/Гц <sup>1/2</sup> )	$2,1 \cdot 10^{-10}$	$5,9 \cdot 10^{-11}$	$1,7 \cdot 10^{-10}$	$3,3 \cdot 10^{-11}$
$D^*$ (см Гц <sup>1/2</sup> /Вт)	$5,0 \cdot 10^8$	$4,2 \cdot 10^9$	$1,0 \cdot 10^9$	$3,6 \cdot 10^9$

<sup>1</sup> Строго говоря, площадь  $A$  является *полной* поверхностью принимающей пластинки, г. е. поверхностью передней и задней кромок.

Иногда в качестве критерия качества используется величина  $D^*/\tau_d^{1/2}$ . Для более детального ознакомления следует обратиться к работам Стивенса [18] и Крузе с сотр. [19].

### 9.3. РЕЗИСТИВНЫЙ БОЛОМЕТР

Схема резистивного болометра показана на рис. 9.2. В нее входит терморезистор  $R$ , к которому подсоединена зачерненная пластинка площадью  $A$ . Падающее излучение нагревает эту принимающую пластинку,

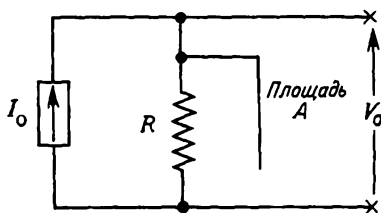


Рис. 9.2. Схема болометра.

Постоянный ток источника  $I_0$  пропускается через болометр с сопротивлением  $R$ , которое нагревается излучением, падающим на приемную пластинку площадью  $A$ , и таким образом вырабатывается выходное напряжение  $V_0$ .

что приводит к изменению сопротивления  $R$ . Это изменение сопротивления обнаруживается путем пропускания через резистор постоянного тока и измерения напряжения на его зажимах.

Начнем с того, что запишем основное уравнение системы. Температурный коэффициент  $\alpha$  сопротивления  $R$  определяется выражением

$$\alpha = \frac{1}{R} \frac{dR}{dT}. \quad (9.27)$$

Для металлических резисторов  $R = \text{const } T$  и, следовательно,

$$\alpha \cong \frac{1}{T}. \quad (9.27a)$$



Для полупроводников с примесной проводимостью  $R = \text{const } T^\gamma$ , где  $\gamma \cong 3/2$ , поэтому

$$\alpha \cong \frac{\gamma}{T}. \quad (9.276)$$

Для полупроводников с собственной проводимостью, имеющих ширину запрещенной зоны  $E_g$ , сопротивление

$$R = \text{const} \exp\left(\frac{eE_g}{2kT}\right)$$

и, следовательно,

$$\alpha = -\frac{eE_g}{2kT^2}. \quad (9.27в)$$

Эта величина отрицательна и гораздо больше, чем в предыдущих случаях. Например, для германия с собственной проводимостью ( $E_g \cong 0,70$  В) при  $T = 300$  К имеем  $\alpha \cong -0,045$ .

Резистор  $R$  нагревается постоянным током  $I_0$  до температуры  $T_1$ , при которой его сопротивление равно  $R_0$ . Если окружающая температура равна  $T_0$ , то принятое излучение составляет  $\eta\sigma AT_0^4$ , а излучение в окружающее пространство —  $\eta\sigma AT_1^4$  (закон Стефана—Больцмана), так что

$$P_0^- = I_0^2 R_0 = \frac{V_0^2}{R_0} = \eta\sigma A(T_1^4 - T_0^4). \quad (9.28)$$

Проводимость тепловых потерь  $g_H$  детектора задается формулой (9.8а)

$$g_H = 4\eta\sigma AT_1^3, \quad (9.29)$$

где  $\eta$  — эмиссионная способность поверхности,  $\sigma$  — постоянная Стефана—Больцмана,  $V_0 = I_0 R_0$  — постоянное напряжение, развиваемое на сопротивлении  $R_0$ , а  $P_0^-$  — электрическая мощность, подведенная к резистору. Надлежащим конструированием устройства потери тепла на теплопроводность можно сделать достаточно малыми. В последующих рассуждениях будем полагать, что  $\eta = 1$ .

### 9.3.1. ТЕХНИЧЕСКАЯ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ

Рассчитаем теперь техническую чувствительность, полагая величину тока  $I_0$  постоянной, а сопротивление  $R$  изменяющимся под воздействием падающего излучения. При  $\eta = 1$  уравнения системы принимают вид

$$C_H \frac{d\Delta T}{dt} + g_H \Delta T = \Delta(I_0^2 R) + P_1 \exp(j\omega t), \quad (9.30)$$

$$\Delta V = I_0 \Delta R = I_0 R_0 \alpha \Delta T = \alpha V_0 \Delta T. \quad (9.31)$$

Теперь

$$\Delta(I_0^2 R) = I_0^2 \Delta R = I_0^2 R_0 \alpha \Delta T = \alpha P_0 \Delta T.$$

Подстановка в выражение (9.30) дает

$$C_H \frac{d\Delta T}{dt} + (g_H - \alpha P_0) \Delta T = P_1 \exp(j\omega t). \quad (9.32)$$

Подставляя  $\Delta T = \Delta T_0 \exp(j\omega t)$  и решая относительно  $\Delta T_0$ , получим

$$\Delta T_0 = \frac{P_1}{j\omega C_H + g_H - \alpha P_0}; \quad \Delta V_0 = \frac{\alpha V_0 P_1}{j\omega C_H + g_H - \alpha P_0}. \quad (9.33)$$

Поэтому при  $\omega^2 C_H^2 \ll (g_H - \alpha P_0)^2$  (низкие частоты) величина

$$\Delta V_0 = \frac{\alpha V_0}{g_H - \alpha P_0} P_1 \quad (9.33a)$$

не зависит от частоты; при  $\omega^2 C_H^2 \gg (g_H - \alpha P_0)^2$  (высокие частоты) величина

$$\Delta V_0 = \frac{\alpha V_0}{\omega C_H} P_1 \quad (9.33b)$$

обратно пропорциональна  $\omega$ .

### 9.3.2. ПОЛНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ПРИБОРА Z

Рассчитаем далее полное сопротивление прибора Z. С этой целью введем параллельно току  $I_0$  генератор тока  $i_0 \exp(j\omega t)$ , вычислим выходное напряжение  $v_0 \exp(j\omega t)$  и определим величину Z как отношение  $v_0/i_0$ .

Прежде всего запишем полные уравнения

$$C_H \frac{dT}{dt} + \sigma A (T^4 - T_0^4) = I^2 R, \quad (9.34)$$

$$V = IR, \quad (9.35)$$

где  $I$  — полный ток, а  $V$  — полное напряжение. Затем подставим

$$I = I_0 + \Delta I, \quad T = T_1 + \Delta T, \quad V = V_0 + \Delta V,$$

чтобы найти уравнения для малых возмущений. В этом случае

$$R = R_0 + \Delta R = R_0 + \alpha R_0 \Delta T.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \Delta(I^2 R) &= (I_0 + \Delta I)^2 (R_0 + \alpha R_0 \Delta T) - I_0^2 R_0 = \\ &= 2I_0 R_0 \Delta I + \alpha I_0^2 R_0 \Delta T = 2V_0 \Delta I + \alpha P_0 \Delta T. \end{aligned}$$

Подстановка в выражение (9.34) дает

$$C_H \frac{d\Delta T}{dt} + (g_H - \alpha P_0) \Delta T = 2V_0 \Delta I, \quad (9.34a)$$

$$\Delta V = I_0 \Delta R + R_0 \Delta I = \alpha V_0 \Delta T + R_0 \Delta I. \quad (9.35a)$$

Подставляя

$$\begin{aligned} \Delta T &= \Delta T_0 \exp(j\omega t), \quad \Delta I = i_0 \exp(j\omega t), \\ \Delta V &= v_0 \exp(j\omega t) \end{aligned}$$

и решая относительно  $\Delta T_0$ , находим

$$\Delta T_0 = \frac{2V_0}{j\omega C_H + g_H - \alpha P_0} i_0 \quad (9.36)$$

и, поскольку  $V_0^2 = P_0 R_0$ ,

$$v_0 = \alpha V_0 \Delta T_0 + R_0 i_0 = \left[ R_0 + \frac{2\alpha P_0 R_0}{j\omega C_H + g_H - \alpha P_0} \right] i_0.$$

Поэтому

$$Z = \frac{v_0}{i_0} = R_0 + \frac{2\alpha P_0 R_0}{j\omega C_H + g_H - \alpha P_0}. \quad (9.37)$$

Для низких частот  $[\omega^2 C_H^2 \ll (g_H - \alpha P_0)^2]$  выражение (9.37) принимает вид

$$Z = R_0 + \frac{2\alpha P_0 R_0}{g_H - \alpha P_0} = R_0 \frac{g_H + \alpha P_0}{g_H - \alpha P_0}, \quad (9.37a)$$

так что величина  $Z$  вещественна и больше  $R_0$  при  $\alpha > 0$  за счет тепловой обратной связи. На высоких частотах, т. е. при  $\omega^2 C_H^2 \gg (g_H - \alpha P_0)^2$ ,  $Z = R_0$ , что соответствует сопротивлению для постоянного тока. Заметим, что прибор находится на пределе тепловой стабильности на низких частотах, если  $g_H - \alpha P_0 = 0$  или  $g_H + \alpha P_0 = 0$ .

### 9.3.3. ШУМ И ЭКВИВАЛЕНТНАЯ МОЩНОСТЬ $P_{\text{экв}}$

В заключение рассчитаем ЭШМ прибора. Поскольку шум эмиссии соответствует теперь температуре  $T_1$ , а шум принимаемого излучения — температуре  $T_0$ , то спектральная плотность тепловых флуктуаций при  $\eta = 1$  равна

$$S_H(f) = 8\sigma A k T_1^5 + 8\sigma A k T_0^5. \quad (9.38)$$

Шумовые уравнения имеют вид

$$C_H \frac{d\Delta T}{dt} + g_H \Delta T = I_0^2 \Delta R + H(t) = \alpha P_0 \Delta T + H(t), \quad (9.39)$$

или

$$C_H \frac{d\Delta T}{dt} + (g_H - \alpha P_0) \Delta T = H(t) \quad (9.39a)$$

и

$$\Delta V = I_0 \Delta R + E(t) = \alpha V_0 \Delta T + E(t), \quad (9.40)$$

где  $H(t)$  представляет источник шума, определяемого флуктуациями температуры, а  $E(t)$  — тепловой шум электрической цепи.

Подставляя

$$\Delta T = \sum_n a_n \exp(j\omega_n t), \quad H(t) = \sum_n b_n \exp(j\omega_n t),$$

$$E(t) = \sum_n c_n \exp(j\omega_n t), \quad \Delta V = \sum_n d_n \exp(j\omega_n t),$$

приходим к

$$(j\omega_n C_H + g_H - \alpha P_0) a_n = b_n, \quad a_n = \frac{b_n}{j\omega_n C_H + g_H - \alpha P_0}, \quad (9.41)$$

$$d_n = \alpha V_0 a_n + c_n = \frac{\alpha V_0}{j\omega_n C_H + g_H - \alpha P_0} b_n + c_n. \quad (9.42)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} S_V(f) &= \frac{\alpha^2 V_0^2}{\omega^2 C_H^2 + (g_H - \alpha P_0)^2} S_H(f) + S_E(f) = \\ &= \frac{\alpha^2 P_0 R_0 (8kT_1^5 \sigma A + 8kT_0^5 \sigma A)}{\omega^2 C_H^2 + (g_H - \alpha P_0)^2} + 4kT_1 R_0, \end{aligned} \quad (9.43)$$

так как  $S_E(f) = 4kT_1 R_0$ . Эта величина равна тепловому шуму сопротивления  $R_0$  для высоких частот  $[\omega^2 C_H^2 \gg (g_H - \alpha P_0)^2]$ , однако на низких частотах выражение (9.43) не соответствует тепловому шуму; это не удивительно, поскольку мы имеем неравновесную ситуацию, включающую тепловую обратную связь.

Вычислим теперь величину  $P_{\text{экв}}$ , полагая, что

$$\frac{\alpha V_0 P_{\text{экв}}}{[\omega^2 C_H^2 + (g_H - \alpha P_0)^2]^{1/2}} = [S_V(f)]^{1/2},$$

что дает

$$\begin{aligned} P_{\text{экв}} &= \\ &= \left[ 4kT_1 R_0 \frac{\omega^2 C_H^2 + (g_H - \alpha P_0)^2}{\alpha^2 V_0^2} + 8kT_1^5 \sigma A + 8kT_0^5 \sigma A \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (9.44)$$

На высоких частотах  $[\omega^2 C_H^2 \gg (g_H - \alpha P_0)^2]$  преобладает первый член выражения (9.44), и, так как  $V_0^2 R_0 = P_0$ , уравнение принимает вид

$$P_{\text{экв}} = \frac{\omega C_H}{|\alpha|} \left( \frac{4kT_1}{P_0} \right)^{1/2}. \quad (9.44a)$$

Это выражение убывает с увеличением  $P_0$ , так как  $T_1$  возрастает с увеличением  $P_0$ , но медленнее, чем  $P_0$ .

На низких частотах  $[\omega^2 C_H^2 \ll (g_H - \alpha P_0)^2]$  выражение (9.44) принимает вид

$$P_{\text{экв}} = \left[ \frac{4kT_1 (g_H - \alpha P_0)^2}{\alpha^2 P_0} + 8kT_1^5 \sigma A + 8kT_0^5 \sigma A \right]^{1/2}. \quad (9.446)$$

Здесь необходимо рассмотреть два случая.

1. Величина  $\alpha$  положительна, т. е.  $\alpha = \gamma/T$ , где  $\gamma = 1$  или  $\gamma = 3/2$ . Тогда преобладает первый член, потому что величина  $\alpha^2$  очень мала.

Может ли разность  $g_H - \alpha P_0$  обратиться в нуль, что приведет прибор на границу устойчивости? Нет, так как уравнение  $P_0 = g_H/\alpha$  не имеет решения для  $T_1$ . Поскольку  $P_0 = \sigma A (T_1^4 - T_0^4)$  и  $g_H/\alpha = 4\sigma A T_1^4/\gamma$ , уравнение можно записать в виде

$$\sigma A (T_1^4 - T_0^4) = \frac{4\sigma A T_1^4}{\gamma}, \quad (9.44в)$$

и оно не имеет решения при величине  $\gamma < 4$ , которую нельзя достичь в обычных условиях. Следовательно, схема термостабильна.

Согласно работе [19], величина  $D^*$  может равняться  $2 \cdot 10^8$  для металлических болометров данного типа.

2. Величина  $\alpha$  отрицательна. Это дает особенно хорошие результаты для материала с собственной проводимостью, поскольку в этом случае величина  $\alpha$  достаточно велика. Так как величина  $\alpha$  отрицательна, то при условии  $g_H + \alpha P_0 = 0$  достигается граница тепловой стабильности.

Теперь следует так выбрать величину  $P_0$ , чтобы величина  $P_{\text{экв}}$  имела минимум. Это достигается при значении  $T_1$ , несколько превышающем  $T_0$ . Поэтому можно записать

$$P_{\text{экв}} = \left[ 4kT_0 \frac{(g_H - \alpha P_0)^2}{\alpha^2 P_0} + 16kT_0^5 \sigma A \right]^{1/2}, \quad (9.45)$$

так что необходимо оптимизировать отношение  $(g_H - \alpha P_0)^2/\alpha^2 P_0$ . В этом случае имеем

$$P_0 = \sigma A (T_1^4 - T_0^4) = 4\sigma A T_0^3 \Delta T, \quad (9.46)$$

где  $\Delta T = T_1 - T_0$ . Отсюда следует

$$\frac{(g_H - \alpha P_0)^2}{\alpha^2 P_0} = \frac{4\sigma AT_0^3}{|\alpha|} \frac{(1 + |\alpha| \Delta T)^2}{|\alpha| \Delta T}. \quad (9.47)$$

Это выражение имеет минимум при  $|\alpha| \Delta T = 1$ , или

$$\Delta T = \frac{1}{|\alpha|}, \quad (9.48)$$

а величина этого минимума равна

$$\frac{(g_H - \alpha P_0)^2}{\alpha^2 P_0} = 4\sigma AT_0^3 \cdot \frac{4}{|\alpha|}. \quad (9.49)$$

Следовательно,

$$P_{\text{экв}} = (16kT_0^5 \sigma A)^{1/2} \left[ \frac{4}{|\alpha| T_0} + 1 \right]^{1/2}, \quad (9.50)$$

где первый множитель представляет собой вклад теплового шума. При значениях  $\alpha \cong 0,05$  и  $T_0 = 300$  К этот член меньше единицы. В этом случае величина  $P_{\text{экв}}$  близка к пределу, определяемому шумом температурных флуктуаций, если не вносит поправок фликер-шум резистора, через который протекает ток.

К сожалению, условие  $|\alpha| \Delta T = 1$  физически нереализуемо. Поскольку величина  $\alpha$  отрицательна, выражение (9.46) показывает, что

$$\alpha P_0 = 4\sigma AT_0^3 \alpha \Delta T = g_H \alpha \Delta T = -g_H, \text{ или } g_H + \alpha P_0 = 0.$$

Другими словами, прибор находится на границе тепловой стабильности; при  $|\alpha| \Delta T > 1$  прибор выгорает.

Таким образом, для стабильной работы следует оставаться существенно ниже пороговой величины  $|\alpha| \Delta T = 1$ . Это затруднение практически несущественно, так как величина отношения  $\frac{1}{4}(1 + |\alpha| \Delta T)^2 / (|\alpha| \Delta T)$  равна  $\frac{9}{8}$  при  $|\alpha| \Delta T = \frac{1}{2}$  и  $\frac{25}{16}$  при  $|\alpha| \Delta T = \frac{1}{4}$ . Более того, в выражении (9.45) преобладает второй член, так что выбор рабочей точки существенно ниже порога тепловой стабильности не приводит к заметному ухудшению величины  $P_{\text{экв}}$ . Это также способствует уменьшению фликер-шума. О тепловых детекторах излучения см. также работы [20, 21].

---

## ФОТОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ И КЛАССИЧЕСКИЕ ДЕТЕКТОРЫ

Фотоэлектрические детекторы основаны на использовании приборов трех типов: а) фотоэмиссионных диодов, б) фотодиодов и в) фотоэлементов. Общим для всех является тот факт, что фотоны падающего излучения возбуждают носители, однако различаются они дальнейшим поведением этих носителей (разд. 10.1).

На высоких частотах емкость прибора и входная емкость связанного с ним усилителя шунтируют выход прибора и таким образом ограничивают частотную характеристику системы. Схемы, предназначенные для частичного преодоления этого влияния, обсуждаются в разд. 10.2.

Другой способ увеличения сигнала, поступающего от рассматриваемых приборов, заключается в использовании методов умножения, которые обсуждаются в разд. 10.3 (для фотодиодов) и в разд. 10.4 (для фотоэмиссионных диодов).

Классические детекторы представляют собой приборы, работающие не на квантовых эффектах, а реагирующие непосредственно на квадрат приложенного входного напряжения. Хорошими примерами таких детекторов являются диоды с барьером Шоттки (с плоскостным или точечным контактами) и диоды со структурой металл—окисел—металл. При тщательном проектировании их частотная характеристика может простираться до частот инфракрасного диапазона. Этот вопрос обсуждается в разд. 10.5.

Для передачи информации луч света должен быть модулирован. Модуляцию можно получить непосред-



ственным воздействием на источники света. В некоторых методиках измерений используется прерыватель света, преобразующий постоянный сигнал в переменный, который легче усилить и можно точнее обработать с применением фазовых методов.

## 10.1. ФОТОЭМИССИОННЫЕ ДИОДЫ, ФОТОДИОДЫ И ФОТОЭЛЕМЕНТЫ

В фотоэмиссионных диодах носителями, возбуждаемыми падающим светом, являются электроны. Они возбуждаются в фоточувствительном материале катода до достаточно больших энергий, при которых они могут испускаться катодом и попасть на анод, находящийся под положительным потенциалом. В результате протекает фототок, который можно обработать обычными электронными устройствами.

Фотодиоды представляют собой плоскостные диоды с переходом, расположенным вблизи поверхности. Под действием падающего света генерируются электронно-дырочные пары в слое пространственного заряда  $p-n$ -перехода или вблизи него. Если к переходу приложено обратное смещение, то дырки направляются в  $p$ -область, а электроны — в  $n$ -область, т. е. протекает фототок, который может обрабатываться обычными методами электроники.

Фотоэлемент представляет собой фотодиод, включенный в цепь, разомкнутую по постоянному току. Электронно-дырочные пары, генерируемые падающим светом, вызывают появление напряжения на разомкнутой цепи так называемого *фотонапряжения*, которое может обрабатываться обычными электронными средствами.

### 10.1.1. ФОТОЭМИССИОННЫЕ ДИОДЫ И ФОТОДИОДЫ

Оба типа приборов можно рассматривать одновременно. Предположим, что на прибор падает модулированный луч света мощностью  $P_1 \exp(j\omega t)$ . Тогда

в каждом случае генерируется переменный фототок

$$I_p = \frac{e(1-R)\eta P_1}{h\nu} = (1-R)\eta \frac{P_1}{V_{ph}}, \quad (10.1)$$

где  $\eta$  — квантовая эффективность,  $V_{ph} = h\nu/e$  — энергия фотона в электрон-вольтах, а  $R$  — коэффициент отражения мощности падающего излучения от поверхности. Для фотоэмиссионных диодов величина  $\eta$  составляет лишь несколько процентов и в лучших образцах она чуть больше 20%. Для хороших твердотельных диодов эта величина может быть значительно больше, например  $\eta \approx 0,8-0,9$ .

Чтобы доказать справедливость формулы (10.1), заметим, что произведение  $(1-R)P_1$  представляет собой активную часть падающей мощности. Следовательно, число используемых в секунду квантов равно  $(1-R)P_1/h\nu$ , а число фотоэлектронов или электронно-дырочных пар, образуемых за секунду, равно  $\eta(1-R)P_1/h\nu$ . Умножение этой величины на заряд электрона  $e$  дает ток  $I_p$ .

Выражая энергию  $V_{ph}$  через длину волны, получим

$$V_{ph} = \frac{h\nu}{e} = \frac{hc}{\lambda e} = \frac{1,24}{\lambda} \text{ эВ}, \quad (10.2)$$

где  $\lambda$  измеряется в микрометрах. Таким образом, квант энергии излучения с длиной волны 10 мкм равен 0,124 эВ.

Для твердотельных диодов должно выполняться требование  $V_{ph} > E_g$ , где  $E_g$  — ширина запрещенной зоны материала фотодиода в электрон-вольтах. Достижимы значения ширины до 0,10 эВ, однако в этом случае необходимо сильное охлаждение фотодиода для уменьшения его темнового тока.

Для фотоэмиссионных катодов, в которых энергия сродства электронов  $\chi$  отрицательна, необходимо также выполнение требования  $V_{ph} > E_g$ , поскольку все электроны, попадающие в зону проводимости, потенциально могут выйти из катода. Однако если  $\chi > 0$ , то должно выполняться требование  $V_{ph} > E_g + \chi$ . В настоящее время предельная длина волны  $\lambda \cong 1,4$  мкм; в этом случае термоэмиссионный ток уже весьма велик, и

для улучшения фотокатода необходимо его охлаждать. Эмиссионный катод на основе GaAs — O—Cs является хорошим примером фотоэмиссионного катода с отрицательной величиной  $\chi$ . Такая величина получается благодаря наличию на поверхности катода почти монокристаллического слоя O—Cs.

Оба типа диодов подвержены вредному воздействию темнового тока  $I_0$ . Для твердотельного диода величина  $I_0$  представляет собой просто тепловой ток обратносмещенного диода, а в фотокатоде ток вызывается термоэлектронной эмиссией. В обоих случаях величину  $I_0$  можно уменьшить, охлаждая прибор. Если предположить, что ток  $I_0$  сопровождается полным дробовым шумом (что не совсем верно для твердотельного диода на высоких частотах), то этот шум характеризуется выражением

$$S_I(f) = 2eI_0. \quad (10.3)$$

Расчет эквивалентной шумовой мощности  $P_{\text{экв}}$  на основе равенства

$$(\bar{I}_p^2)^{1/2} = (2eI_0)^{1/2}$$

приводит к следующему выражению:

$$P_{\text{экв}} = \frac{V_{ph}}{(1-R)\eta} (2eI_0)^{1/2}. \quad (10.4)$$

Следовательно, величина  $D^*$  определяется выражением

$$D^* = \frac{A^{1/2}}{P_{\text{экт}}} = \frac{(1-R)\eta}{V_{ph}} \frac{1}{(2eJ_0)^{1/2}}, \quad (10.4a)$$

где  $J_0$  — плотность темнового тока. Для твердотельных диодов характеристику  $D^*$  необходимо использовать с некоторой осторожностью, поскольку ток  $I_0$  может не быть пропорциональным площади прибора, и поэтому плотность  $J_0$  также будет зависеть от площади прибора (разд. 10.1.3.).

Например, в твердотельном фотодиоде с характеристиками  $R = 0$ ,  $\eta = 0,80$ ,  $V_{ph} = 1,0$  эВ,  $I_0 = 10^{-6}$  А имеем  $P_{\text{экв}} = 7,1 \cdot 10^{-13}$  Вт/Гц<sup>1/2</sup>, а в фото-

эмиссионном диоде с характеристиками  $R = 0$ ,  $\eta = 10^{-2}$ ,  $V_{ph} = 1,0$  эВ,  $I_0 = 10^{-9}$  А имеем  $P_{э\kappa\text{в}} = 1,8 \cdot 10^{-12}$  Вт/Гц<sup>1/2</sup>. Худшие характеристики последнего устройства связаны с меньшей квантовой эффективностью, несмотря на наличие меньшего темнового тока.

Сигнал, образующийся на выходе твердотельного фотодиода или фотоэмиссионного диода, нужно усилить

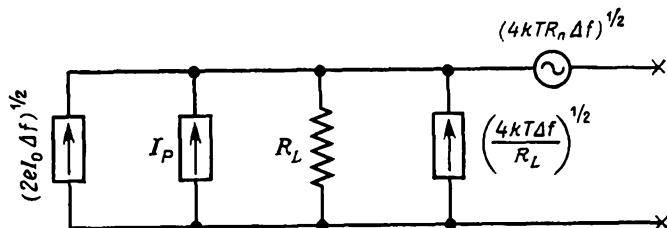


Рис. 10.1. Фотодиод, подключенный к сопротивлению нагрузки  $R_L$  и усилителю с шумовым сопротивлением  $R_n$ .

и обработать. Для этого необходимо в цепь диода включить сопротивление нагрузки  $R_L$ , после чего потребовать, чтобы его шум был малым по сравнению с шумом темнового тока  $I_0$ . Это означает (рис. 10.1), что

$$2eI_0 > \frac{4kT}{R_L}, \text{ или } R_L > \frac{2kT}{eI_0} = \frac{1}{20I_0} \quad (10.5)$$

при  $T = 300$  К. Для тока  $I_0 = 10^{-6}$  А необходимо выбрать величину  $R_L > 50\,000$  Ом. Это требование легко реализовать, если только  $R_L$  не должно удовлетворять определенным ограничениям, связанным с требованиями к полосе. Этот случай обсуждается в разд. 10.2.

На данном этапе необходимо несколько подробнее обсудить темновой ток  $I_0$ . Для фотоэмиссионного диода

$$I_0 = AT^2 \exp\left(-\frac{e\varphi}{kT}\right) S, \quad (10.6)$$

где  $S$  — площадь катода,  $\varphi$  — работа выхода в электрон-вольтах,  $A = 120 \text{ А} \cdot \text{см}^{-2} \text{ К}^{-2}$ .

Для твердотельного фотодиода с  $p^+n$ -структурой (сильнолегированный поверхностный слой  $p$ -типа) имеем

$$I_0 = e \left( \frac{D_p}{\tau_p} \right)^{1/2} \frac{n_i^2}{N_d} S, \quad (10.7)$$

если рекомбинация происходит в  $n$ -области. Здесь  $D_p$  — коэффициент диффузии дырок,  $\tau_p$  — время жизни дырок в  $n$ -области,  $n_i$  — концентрация носителей в собственном полупроводнике, а  $N_d$  — концентрация доноров в  $n$ -области. Для кремния коэффициент  $D_p = 12,5 \text{ см}^2/\text{с}$ ,  $n_i = 10^{10} \text{ см}^{-3}$ , и если  $\tau_p = 10^{-6} \text{ с}$  и  $N_d = 10^{16} \text{ см}^{-3}$ , то плотность темнового тока равна  $5,7 \cdot 10^{-12} \text{ А/см}^2$ . В действительности плотность темнового тока в кремниевых и германиевых приборах на несколько порядков больше, поскольку рекомбинация в основном обусловлена рекомбинацией внутри объема области пространственного заряда или у поверхности указанной области. Мы вернемся к этому вопросу в разд. 10.1.3.

### 10.1.2. ФОТОЭЛЕМЕНТ

Фотоэлемент представляет собой фотодиод, включенный в разомкнутую по постоянному току цепь, так что  $I = 0$ . В отсутствие падающего света характеристика диода вблизи  $I = 0$  имела бы вид

$$I = I_g(V) \left[ \exp \left( \frac{eV}{kT} \right) - 1 \right], \quad (10.8)$$

где  $I_g(V)$  — генерационный ток<sup>1</sup>. Следовательно,

$$g_0 = \left( \frac{dI}{dV} \right)_0 = \left\{ \frac{dI_g}{dV} \left[ \exp \left( \frac{eV}{kT} \right) - 1 \right] + \frac{eI_g(V)}{kT} \exp \left( \frac{eV}{kT} \right) \right\}_{V=0} = \frac{eI'_0}{kT}, \quad (10.8a)$$

где  $I'_0 = I_g(0)$ . Отсюда находим дифференциальное сопротивление

$$R_0 = \frac{1}{g_0} = \frac{kT}{eI'_0}. \quad (10.8b)$$

<sup>1</sup> Это уравнение вытекает из формулы (10.12), если сделать подстановку  $pn = n_i^2 \exp(eV/kT)$  и проинтегрировать формулу (10.12) по области пространственного заряда.

При действии света имеем

$$I = I_g(V) \exp\left(\frac{eV}{kT}\right) - I_g(V) - I_p = 0,$$

$$V = \frac{kT}{e} \ln\left[1 + \frac{I_p}{I_g(V)}\right], \quad (10.9)$$

где  $I_p$  — фототок. Если  $I_p \ll I'_0$ , то  $I_g(V) = I'_0$  и

$$V \approx \frac{kT}{e} \frac{I_p}{I'_0} = I_p R_0. \quad (10.9a)$$

Следовательно, по аналогии со случаем фотодиода получим

$$P_{\text{экв}} = \frac{(4kT/R_0)^{1/2} V_{ph}}{(1-R)\eta}, \quad (10.10)$$

где произведение  $2eI_0$  просто заменено на  $4kT/R_0$ . Для  $R = 0$ ,  $\eta = 0,80$ ,  $V_{ph} = 1$  эВ при  $I'_0 = 10^{-8}$  А,  $R_0 = 25\,000$  Ом имеем  $P_{\text{экв}} = 1,0 \cdot 10^{-12}$  Вт/Гц<sup>1/2</sup>. Это в  $\sqrt{2}$  раз больше, чем в рассмотренном ранее случае фотодиода.

Из того факта, что этот шум вызван двумя равными токами, протекающими в противоположных направлениях и имеющими спектр  $S_i(f)$ , следует

$$2S_i(f) = \frac{4kT}{R_0} = 4eI'_0 \quad \text{или} \quad S_i(f) = 2eI'_0. \quad (10.11)$$

Это соответствует полному дробовому шуму тока  $I'_0$ .

Фотоэлемент из InSb работает до длины волны 5,5 мкм, а ячейки из соответствующего состава CdHgTe и CdSnTe работают в диапазоне длин волн порядка 10 мкм. Конечно, эти диоды необходимо охлаждать по крайней мере до температуры жидкого азота с целью достаточного уменьшения темнового тока  $I'_0$  и тем самым увеличения дифференциального сопротивления прибора  $R_0$ .

### 10.1.3. ТЕМНОВОЙ ТОК В $p$ - $n$ -ДИОДАХ

Мы упоминали ранее, что темновой ток  $I_0$  в  $p$ - $n$ -диодах вызывается главным образом рекомбинацией в области пространственного заряда. Чтобы найти в этом

случае ток  $I_0$ , необходимо воспользоваться теорией рекомбинации Шокли—Рида—Холла. Согласно этой теории, результирующая скорость рекомбинации  $R$  определяется выражением

$$R = \frac{pn - n_i^2}{(n + n_1)\tau_{p0} + (p + p_1)\tau_{n0}}, \quad (10.12)$$

где  $n_i$  — концентрация носителей в собственном полупроводнике,  $p$  и  $n$  — соответственно концентрации дырок и электронов,  $p_1$  и  $n_1$  — концентрации дырок и электронов в случае, когда уровень Ферми совпадает с уровнем ловушек,  $\tau_{p0}$  — время жизни дырки в материале  $n$ -типа, а  $\tau_{n0}$  — время жизни электрона в материале  $p$ -типа.

Первый член в выражении (10.12) представляет истинную скорость рекомбинации, а второй — скорость генерации. Поскольку последний член вызывает появление тока  $I_g(V)$ , имеем

$$I_g(V) = eS \int_0^d \frac{n_i^2 dx}{(n + n_1)\tau_{p0} + (p + p_1)\tau_{n0}}, \quad (10.13)$$

где  $S$  — площадь перехода, а  $d$  — ширина области пространственного заряда. Теперь ток  $I_g(V)$  зависит от расположения центров рекомбинации и пропорционален площади прибора  $S$ . Более того, ток  $I_g(V)$  не достигает насыщения, а возрастает с увеличением обратного смещения.

Для большого обратного смещения  $n \cong 0$  и  $p \cong 0$ , так что

$$I_g(V) = I_0 = eS \frac{n_i^2}{n_1\tau_{p0} + p_1\tau_{n0}} d. \quad (10.13a)$$

Однако в соответствии с теорией для  $p^+ - n$ -диода справедливо выражение

$$d = \left[ \frac{2e\epsilon_0 (V_{\text{дифф}} - V)}{eN_d} \right]^{1/2}, \quad (10.13b)$$

где  $e$  — заряд электрона,  $\epsilon$  — относительная диэлектрическая проницаемость материала,  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м,

$V_{\text{дифф}}$  — диффузионная разность потенциалов,  $V$  — обратное смещение, а  $N_d$  — концентрация доноров в  $n$ -области. Следовательно, ток  $I_0$  изменяется как  $(V_{\text{дифф}} - V)^{1/2}$  и не достигает насыщения.

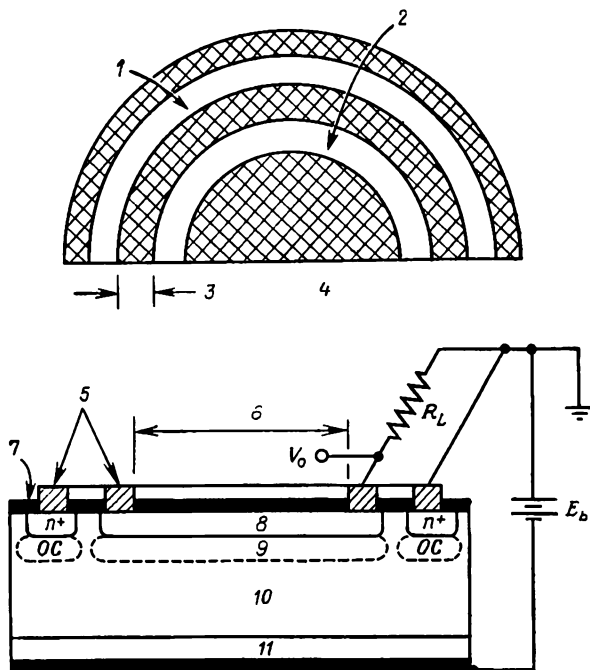


Рис. 10.2а. Планарный кремниевый диффузионный фотодиод с охранным кольцом.

1 — охранный кольцо; 2 — контактное кольцо активной части дна; 3 — канал; 4 — активная область; 5 — металлизированные контакты; 6 — диаметр активной области; 7 — пассивирующее оксидное покрытие; 8 —  $n$ -область; 9 — обедненный слой (ОС); 10 — кремний  $p$ -типа; 11 —  $p^+$ -область

Получаемые таким образом величины тока  $I_0$  значительно больше, чем величины, получаемые из выражения для  $I_0'$ , однако значительно ниже величин, получаемых экспериментально. Более того, экспериментально обнаруживается, что для зоны перехода круглой формы ток  $I_0$  пропорционален  $S^{1/2}$ . Очевидно, что большая



часть рекомбинационного тока пропорциональна периметру зоны перехода, а не ее площади  $S$ . Это получается из-за влияния рекомбинации на поверхности области пространственного заряда. Она вызывает ток, пропорциональный  $2\pi r$ , где  $r$  — радиус перехода. По-

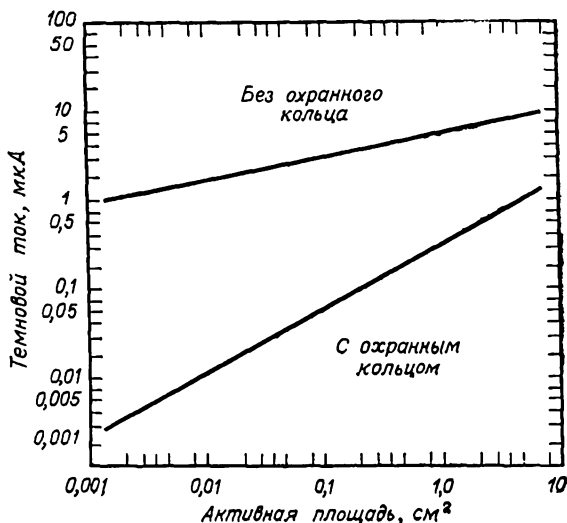


Рис. 10.26. Зависимость темнового тока фотодиода от активной площади.

скольку  $S = \pi r^2$ , то этот ток, в самом деле, пропорционален  $S^{1/2}$ , как было обнаружено экспериментально.

Этот эффект можно устранить, используя охранный кольцо, показанное на рис. 10.2а. Здесь методом диффузии получены круговая и кольцевая  $n^+$ -области. Омические кольцевые контакты нанесены по краю круговой и кольцевой области, а поверхность пассивирована окислением. Если теперь к контактам приложить одинаковое напряжение, то объемный темновой ток потечет к внутреннему контакту, а поверхностный — к внешнему контакту. В результате получается значительное уменьшение темнового тока, которое показано на рис. 10.26.

Возьмем в качестве примера диод SHS-100 фирмы EEG<sup>1</sup>. Он имеет  $\eta = 0,85$  при  $\lambda = 0,92$  мкм. Типичное значение темнового тока составляет  $10^{-8}$  А при площади  $5,1$  мм<sup>2</sup>. Применение формулы (10.4) при  $R = 0$  дает

$$P_{\text{экв}} = \frac{1,35}{0,85} (2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-8})^{1/2} = 9,0 \cdot 10^{-14} \text{ Вт/Гц}^{1/2},$$

$$D^* = \frac{A^{1/2}}{P_{\text{экв}}} = \frac{2,26 \cdot 10^{-1}}{9,0 \cdot 10^{-14}} = 2,5 \cdot 10^{12} \text{ см} \cdot \text{Гц}^{1/2} / \text{Вт}.$$

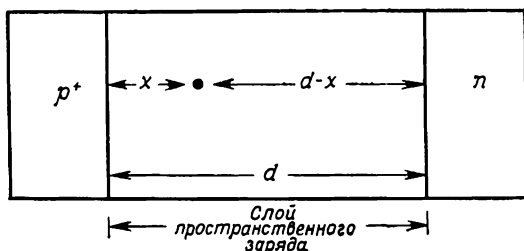


Рис. 10.3.  $p^+ - n$ -диод со слоем пространственного заряда шириной  $d$  и генерационным центром, расположенным на расстоянии  $x$  от  $p^+$ -области.

Чтобы понять, почему на высоких частотах шум темнового тока  $I_0$  меньше полного дробового шума, рассмотрим генерационный центр, расположенный на расстоянии  $x$  от  $p^+$ -области (рис. 10.3). Он поочередно генерирует то электрон, то дырку. Если генерируется электрон, то он попадает в  $n$ -область, а переносимый заряд равен  $Q_n(x)$ . Если генерируется дырка, попадающая в  $p$ -область, то переносимый заряд равен  $Q_p(x)$ . Результирующий заряд, переносимый в результате генерации электронно-дырочной пары, равен  $Q_n(x) + Q_p(x) = e$ , где  $e$  — заряд электрона. На низких частотах акты генерации электронов и дырок можно считать полностью коррелированными, и соответствующий им шум является полным дробовым шумом.

<sup>1</sup> Сокращение EEG означает Edgerton, Germershausen, and Giese Company.

На высоких частотах электроны и дырки можно рассматривать как генерируемые независимо и случайно, а их влияние рассчитывается отдельно. Пусть  $C_0 dx$  — средняя скорость генерации на участке  $dx$ . Тогда

$$I_0 = \int_0^d eC_0 dx = eC_0 d.$$

Однако скорости генерации электронов и дырок  $C_0 dx$  флуктуируют независимо и содержат полный дробовой шум, т. е. они имеют спектр  $2C_0 dx$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} S_I(0) &= \int_0^d 2C_0 dx [Q_n^2(x) + Q_p^2(x)] = \\ &= 2e^2 C_0 \int_0^d \left[ 1 - 2 \frac{Q_n(x)}{e} + 2 \frac{Q_n^2(x)}{e^2} \right] dx \leq 2e^2 C_0 d, \end{aligned}$$

поскольку значение  $Q_n(x)/e$  заключено между 0 и 1. Поэтому

$$S_I(0) < 2eI_0.$$

Лоритцен [22] рассчитал влияние этих эффектов для случая однородного распределения поля в слое пространственного заряда и нашел, что

$$S_I(0) = \frac{2}{3} \cdot 2eI_0.$$

Ван дер Зил [23], используя линейное распределение поля, получил для  $p^+ - n^-$  и  $n^+ - p^-$  диодов формулу

$$S_I(0) = \frac{11}{15} \cdot 2eI_0.$$

При нулевом смещении и в области низких частот этот шум является полным дробовым шумом двух равных и противоположно направленных токов, как упоминалось выше. На высоких частотах генерируемые и рекомбинирующие электроны и дырки можно рассматривать как независимые. При использовании тех же

рассуждений, как и раньше, это приводит к снижению шума по сравнению с полным дробовым, сопровождающимся соответствующим увеличением сопротивления  $R_0$ .

#### 10.1.4. ВРЕМЯ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА

Емкость  $C$  фотодиода с резким переходом изменяется как  $1/|V|^{1/2}$ , где  $V$  — обратное смещение. Объемное сопротивление диода равно  $r$  и на высоких частотах его можно представить эквивалентной схемой, показанной

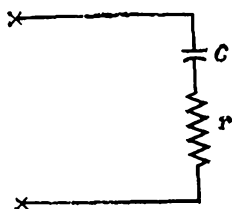


Рис. 10.4. Эквивалентная схема фотодиода.

на рис. 10.4. Видно, что время переходного процесса  $\tau$ , рассчитываемое как время изменения выходной координаты между уровнями, составляющими соответственно 10 и 90% от изменения в установившемся режиме, равно

$$\tau = 2,2Cr. \quad (10.14)$$

Здесь сопротивление  $r$  обычно порядка нескольких сотен Ом, а емкость  $C$  может быть сделана малой при использовании большого обратного смещения. Например, диод SHS-100 фирмы EEG имеет  $C = 4$  пФ и  $\tau = 4 \cdot 10^{-9}$  с при величине обратного смещения 125 В. Следовательно,

$$r = \frac{\tau}{2,2C} = \frac{10^9}{2,2} = 450 \text{ Ом.}$$

Таким образом, чтобы ускорить переходный процесс, важно использовать большое обратное смещение.

Кроме того, выгодно до определенной степени увеличивать легирование объемной части диода или использовать диоды, изготовленные при помощи эпитаксиальной технологии, чтобы уменьшить последовательное сопротивление  $r$ .

### 10.1.5. ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

Наиболее важными материалами для фотоэммиттеров являются GaAs (наибольшая длина волны 0,91 мкм), AgOCs (наибольшая длина волны 1,2 мкм), Si (наибольшая длина волны 1,12 мкм) и  $Ga_{1-x}In_xAs$  (наибольшая длина волны 1,4 мкм при надлежащем выборе  $x$ ). Все эти материалы должны покрываться монослоем —O—Cs, чтобы сделать энергию сродства электрона отрицательной.

На основе тех же материалов можно также изготовить  $p$ — $n$ -переходы и, следовательно, фотодиоды и фотоэлементы. Наибольшие длины волн у них те же самые. Кроме того, полезны  $p$ — $n$ -переходы на основе Ge (наибольшая длина волны 1,76 мкм), InSb (наибольшая длина волны  $\cong 5,5$  мкм) и других сплавов. Освоено производство фотоэлементов на основе  $Hg_{1-x}Cd_xTe$  и  $Pb_{1-x}Sn_xTe$ . При надлежащем выборе  $x$  они имеют хорошую чувствительность при длине волны 10,6 мкм.

Корпорация «Эльтэк»<sup>1</sup> выпускает в продажу фотоэлементы на основе  $Hg_{1-x}Cd_xTe$ , у которых величина  $D^*$  составляет несколько единиц на  $10^{10}$  см·Гц<sup>1/2</sup>/Вт при температуре жидкого азота, причем в отдельных экземплярах достижимы верхние граничные частоты  $f_c$  порядка нескольких сотен мегагерц. Здесь частота  $f_c$  определена уравнением

$$2\pi f_c RC = 1, \quad (10.15)$$

где  $R$  — сопротивление, а  $C$  — емкость параллельной эквивалентной схемы  $p$ — $n$ -перехода. Квантовые эффективности достигают величин порядка 30% и более<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> Eltek Corporation, Larchmont, N. Y., распределяет заказы для французской фирмы SAT (Société Anonyme de Télécommunications).

<sup>2</sup> Соединение  $Pb_{1-x}Sn_xTe$  дает сравнимые результаты.

Фотоэлементы, работающие в диапазоне волн 10—12 мкм, очень чувствительны к фоновым (мешающим) излучениям. Чтобы устранить большую часть этого фонового излучения, принимаемое излучение можно отфильтровать при помощи материала с шириной запрещенной зоны  $E'_g$ , близкой к энергии фотонов принимаемого излучения  $V_{ph}$ . Если  $E_g$  — ширина запрещенной зоны фотоэлемента, то только часть фонового излучения с энергией фотонов  $V'_{ph}$ , удовлетворяющей неравенству  $E_g < V'_{ph} < E'_g$ , проходит через фильтр и вызывает появление электронно-дырочных пар в фотоэлементе. При надлежащем выборе разности  $E'_g - E_g$  уровень этого излучения может быть сделан весьма малым и вследствие этого можно существенно уменьшить эквивалентную шумовую мощность.

## 10.2. РАСЧЕТЫ ШИРИНЫ ПОЛОСЫ

На высоких частотах необходимо принимать во внимание емкость перехода  $C$ . Если сигнал усиливается усилителем на ПТПЗ, то необходимо также принять во

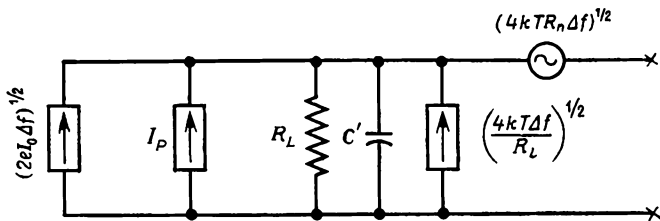


Рис. 10.5. Эквивалентная шумовая схема фотодиодного детектора с усилителем ( $C' = C + C_i$ ).

внимание входную емкость усилителя  $C_i$ . Таким образом, полная емкость на входе равна  $C + C_i$ , эквивалентная схема показана на рис. 10.5.

Если сопротивление  $R_L$  относительно велико, то на низких частотах можно пренебречь влиянием шумового сопротивления усилителя  $R_n$ , поскольку шум нагрузки, сложенный с шумом усилителя, равен

$$4kTR_L \Delta f + 4kTR_n \Delta f = 4kTR_L \Delta f \left( 1 + \frac{R_n}{R_L} \right)$$

и для хороших полевых транзисторов отношение  $R_n/R_L$  оказывается малым. Однако на высоких частотах сопротивление  $R_L$  шунтируется емкостью  $C + C_i$ , и поэтому влияние сопротивления  $R_n$  может стать существенным.

Один из возможных способов улучшения шумовой характеристики состоит в уменьшении величины сопротивления  $R_L$  ради удовлетворения требований к полосе. Но тогда шум сопротивления  $R_L$  преобладает над шумом, обусловленным током насыщения  $I_0$ . Например, если сумма  $C + C_i = 20$  пФ и требуется, чтобы верхняя частота среза  $f_1$  составляла 4 МГц (т. е. чтобы частотная характеристика спадала до уровня 0,707 от ее значения на низких частотах при  $f = 4$  МГц), то

$$2\pi f_1 (C + C_i) R_L = 1. \quad (10.16)$$

Подстановка численных значений дает величину сопротивления  $R_L = 2000$  Ом. Пренебрегая вкладом шума, обусловленного током  $I_0$ , в этом случае имеем<sup>1</sup>

$$P_{\text{экр}} = \frac{(4kT/R_L)^{1/2} V_{ph}}{(1 - R) \eta}. \quad (10.17)$$

Подставляя значения  $V_{ph} = 1,0$  эВ,  $R = 0$ ,  $\eta = 0,80$ ,  $T = 300$  К и  $R_L = 2000$  Ом, получаем  $P_{\text{экр}} = 3,6 \cdot 10^{-12}$  Вт/Гц<sup>1/2</sup>. Это значение примерно в 5 раз меньше величины, полученной в разд. 10.1.1. Таким образом, в полосе 4 МГц мощность шума составляет  $P_n = P_{\text{экр}} f_1^{1/2} = 7,2 \cdot 10^{-9}$  Вт.

Чтобы уменьшить шум, необходимо уменьшить емкость  $C$  диода за счет увеличения величины обратного смещения и разработки таких диодов, которые могут выдерживать большие значения обратного смещения. Для фотозлементов это, конечно, невозможно. Дальнейшее улучшение возможно за счет увеличения величины  $R_L$  до существенно больших значений с соответствующим ухудшением частотной характеристики входной

<sup>1</sup> Мы пренебрегли здесь влиянием сопротивления  $R_n$ . Его можно учесть, умножив выражение (10.17) на коэффициент  $[1 + (R_n/R_L)]^{1/2}$ .

цепи и последующей ее компенсацией как за счет применения обратной связи, так и за счет соответствующего выбора частотных характеристик последующих каскадов. Эти методы широко применяются в телевизионных передающих трубках и обсуждаются в следующем разделе.

### 10.2.1. ФОТОДИОДНЫЕ СХЕМЫ С УЛУЧШЕННЫМИ ШУМОВЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Эквивалентная схема фотодиода с усилителем показана на рис. 10.6а. Мы положили, что  $C + C_i = C'$ . Этой схеме в свою очередь эквивалентна схема

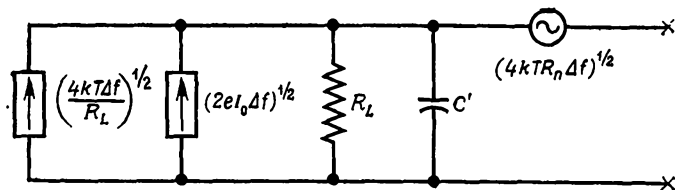


Рис. 10.6а. Эквивалентная шумовая схема фотодиода, в которой учитывается влияние емкости схемы  $C'$ .

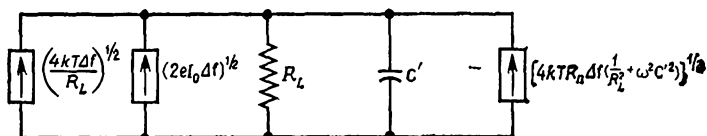


Рис. 10.6б. Другой вариант эквивалентной схемы, в котором шумовая э. д. с.  $(4kTR_nΔf)^{1/2}$  заменена эквивалентным генератором тока.

рис. 10.6б<sup>1</sup>. Из нее видно, что средний квадрат входного шумового тока на частоте  $f$  равен

$$\frac{4kTΔf}{R_L} + 2eI_0Δf + \frac{4kTR_nΔf}{R_L^2} + 4kTR_nΔfω^2C'^2. \quad (10.18)$$

<sup>1</sup> Здесь мы пренебрегли относительно малым вкладом высокочастотного шума затвора полевого транзистора.



Интегрирование этого выражения в полосе  $0 \ll f \ll f_1$  позволяет найти среднеквадратичное значение входного шумового тока эквивалентного генератора

$$(\overline{i^2})^{1/2} = (4kTf_1)^{1/2} \left[ \frac{1}{R_L} + \frac{eI_0}{2kT} + \frac{1}{3} R_n (2\pi f_1 C')^2 \right]^{1/2}, \quad (10.19)$$

где мы пренебрегли в скобках членом, содержащим  $R_n/R_L^2$ . Если теперь положить  $T = 300$  К,  $f_1 = 4,0$  МГц,  $R_L = 50\,000$  Ом,  $I_0 = 1$  мкА,  $R_n = 100$  Ом и  $C' = 20$  пФ, то получим  $1/R_L = 2,0 \cdot 10^{-5}$  См,  $(eI_0/2kT) = 2,0 \cdot 10^{-5}$  См и  $\frac{1}{3} R_n (2\pi f_1 C')^2 = 0,8 \cdot 10^{-5}$  См, так что здесь преобладает влияние величин  $R_L$  и  $I_0$ .

Определим теперь эквивалентную шумовую мощность  $P_n$  выражением

$$\frac{(1-R)\eta}{V_{ph}} P_n = (\overline{i^2})^{1/2}. \quad (10.20)$$

Подстановка  $R = 0$ ,  $\eta = 0,80$  и  $V_{ph} = 1,0$  эВ дает

$$P_n = \frac{(\overline{i^2})^{1/2}}{0,80} = 2,2 \cdot 10^{-9} \text{ Вт.}$$

Она примерно в 3 раза меньше, чем в случае входной цепи с низким импедансом.

При охлаждении детектора член  $eI_0/2kT$  уменьшается до пренебрежимо малой величины, что позволяет снизить величину  $P_n$  еще на 30%. Возможно, что такое улучшение не стоит затрачиваемых усилий.

## 10.2.2. СХЕМА ФОТОЭЛЕМЕНТОВ С УЛУЧШЕННЫМИ ШУМОВЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

В схеме, включающей фотоэлемент, мы можем полностью исключить сопротивление  $R_L$ , а плохую частотную характеристику входной цепи скорректировать либо введением обратной связи, либо применением компенсации в следующем каскаде. Тогда эквивалентная схема, аналогичная схеме рис. 10.6б, имеет вид, показанный на рис. 10.7. Следовательно, соответствующее средне-

квадратичное значение входного шумового тока эквивалентного генератора имеет вид

$$(\bar{i}^2)^{1/2} = (4kTf_1)^{1/2} \left[ \frac{1}{R_0} + \frac{1}{3} R_n (2\pi f_1 C')^2 \right]^{1/2}, \quad (10.21)$$

где мы пренебрегли членом  $R_n/R_0^2$ , стоящим в скобках. Если теперь принять  $C' = 20$  пФ,  $R_n = 100$  Ом,  $f_1 = = 4$  МГц,  $I_0 = 10^{-6}$  А, то  $1/R_0 = 4 \cdot 10^{-5}$  См,  $1/3 R_n \times$

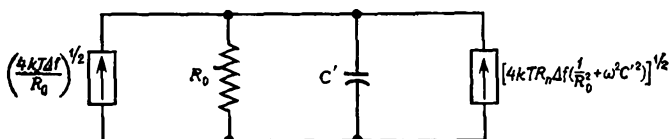


Рис. 10.7. Эквивалентная шумовая схема фотозлемента.

$\times (2\pi f_1 C')^2 = 0,8 \cdot 10^{-5}$  См. Расчет величины  $P_n$  для  $R = 0$ ,  $\eta = 0,80$  и  $V_{ph} = 1,0$  эВ дает  $P_n = 2,2 \cdot 10^{-9}$  Вт, как и в предыдущем случае. Охлаждением можно исключить член  $1/R_0$  и уменьшить значение  $P_n$  в  $\sqrt{6} = = 2,45$  раз, что заслуживает внимания.

Приведенный здесь пример, вероятно, является слишком обнадеживающим для фотозлемента. Что касается емкости  $C'$ , то ее величина во много раз больше, чем в случае фотодиода, поскольку величина емкости  $C$  плоскостного полупроводникового диода при нулевом смещении во много раз больше, чем при большом обратном смещении.

### 10.3. МЕТОДЫ УМНОЖЕНИЯ В ПЛОСКОСТНЫХ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ДИОДАХ

Как было показано выше, величина переменного сигнала в твердотельных фотодиодах или фотозлементах часто довольно мала, особенно если мала мощность падающего излучения. В этом случае шум усилителя может быть довольно значительным. Было бы очень

удобно, если бы сигнал до обработки его в усилителе можно было усилить внутри прибора. Обсудим здесь два способа такого усиления.

### 10.3.1. ФОТОТРАНЗИСТОР

Один из способов усиления состоит в использовании транзистора с «плавающей» базой. Его работу можно понять следующим образом. Уравнения Эберса—Молла

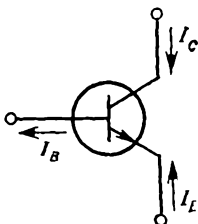


Рис. 10.8. Направления токов в  $n-p-n$ -транзисторе.

для  $n-p-n$ -транзистора с прямосмещенным эмиттерным и обратносмещенным коллекторным переходами можно записать в виде (рис. 10.8)

$$I_E = -I_{Es} \left[ \exp \left( \frac{eV_{BE}}{kT} \right) - 1 \right] - \alpha_R I_{Cs}, \quad (10.22)$$

$$I_G = \alpha_F I_{Es} \left[ \exp \left( \frac{eV_{BE}}{kT} \right) - 1 \right] + I_{Cs}, \quad (10.23)$$

где  $I_{Es}$  и  $I_{Cs}$  — токи насыщения,  $\alpha_F$  и  $\alpha_R$  — прямой и обратный коэффициенты усиления по току, а  $V_{BE}$  — напряжение база—эмиттер. Выражая величину тока  $I_G$  через  $I_E$ , получим

$$I_G = -\alpha_F I_E + I_{G0}, \quad I_{G0} = (1 - \alpha_R \alpha_F) I_{Cs}, \quad (10.24)$$

где ток  $I_{G0}$  называется *коллекторным током насыщения*. Следовательно, при отсутствии воздействия света (рис. 10.8) ток базы равен

$$I_B = I_G + I_E = (1 - \alpha_F) I_E + I_{G0}. \quad (10.25)$$

При воздействии света ток базы равен

$$I_B = (1 - \alpha_F) I_P + I_{C0} + I_{ph}, \quad I_{ph} = \frac{(1 - R) \eta P_1}{V_{ph}}, \quad (10.26)$$

где  $I_{ph}$  — фототок,  $R$  — коэффициент отражения падающего света,  $\eta$  — квантовая эффективность,  $V_{ph}$  — энергия фотона и  $P_1$  — мощность падающего (модулированного) излучения. Но для «плавающей» базы величина  $I_B$  равна нулю, и, следовательно,

$$\begin{aligned} -I_E = I_G &= \frac{I_{C0}}{1 - \alpha_F} + \frac{I_{ph}}{1 - \alpha_F} \approx \\ &\approx h_{FE} I_{C0} + h_{FF} I_{ph} = I_{CE0} + h_{FE} I_{ph}, \end{aligned} \quad (10.27)$$

где  $I_{CE0} = h_{FE} I_{C0}$ , а  $h_{FE} = \alpha_F / (1 - \alpha_F)$  — коэффициент усиления всей цепи по постоянному току. Здесь предполагается, что величина  $h_{FE} \gg 1$ ; в хороших фототранзисторах величина  $h_{FE} > 100$ .

На высоких частотах переменный сигнал принимает вид

$$\frac{h_{fe}}{1 + jf/f_\beta} I_{ph}, \quad (10.28)$$

где  $h_{fe}$  — коэффициент усиления по переменному току, а  $f_\beta$  — граничная частота по коэффициенту усиления  $\beta$  транзистора. Обычно величина  $h_{fe}$  несколько больше величины  $h_{FE}$ . Причину этого мы здесь объяснять не будем.

Теперь о шуме. Ток «плавающей» базы состоит из двух равных по величине и противоположных по направлению токов  $I_{C0}$ , каждый из которых содержит полный дробовой шум. Следовательно, шум тока базы необходимо записать в виде

$$\overline{i_b^2} = 4eI_{C0} \Delta f. \quad (10.29)$$

Умножая его на коэффициент

$$\frac{h_{fe}^2}{1 + f^2/f_\beta^2}, \quad (10.30)$$

получим вклад тока  $\bar{i}_\beta^2$  в коллекторный шум  $\bar{i}_c^2$ . Кроме того, коллекторный ток  $I_{CE0} = h_{FE} I_{C0}$  всегда содержит полный дробовой шум. Следовательно,

$$\bar{i}_c^2 = 4eI_{C0} \frac{h_{fe}^2}{1 + f^2/f_\beta^2} \Delta f + 2eh_{FE}I_{C0} \Delta f. \quad (10.31)$$

Теперь оценим величину  $P_{\text{экв}}$ , приравнявая выражения

$$\frac{(1-R)\eta}{V_{ph}} P_{\text{экв}} \frac{h_{fe}}{(1 + f^2/f_\beta^2)^{1/2}} = \left( \frac{\bar{i}_c^2}{\Delta f} \right)^{1/2},$$

и из уравнения получим

$$P_{\text{экв}} = \frac{V_{ph}}{(1-R)\eta} \left[ 4eI_{C0} + 2eI_{C0} h_{FE} \frac{(1 + f^2/f_\beta^2)^{1/2}}{h_{fe}^2} \right]^{1/2}. \quad (10.32)$$

Для низких частот, поскольку  $h_{FE}/h_{fe} \ll 1$ ,

$$P_{\text{экв}} = \frac{V_{ph}}{(1-R)\eta} (4eI_{C0})^{1/2}, \quad (10.33)$$

т. е. результат, которого следовало бы ожидать, если бы база использовалась в качестве выходного электрода фотоэлемента. Следовательно, усиление в  $h_{fe}$  раз достигается практически без увеличения шума.

На высоких частотах начинает доминировать последний член выражения (10.32), и шум тока  $I_{CF0}$  становится существенным. Поэтому можно определить верхнюю граничную частоту  $f_1$ , на которой полный шум удваивается. На этой частоте

$$4eI_{C0} = 2eI_{C0} h_{FE} \frac{1 + f_1^2/f_\beta^2}{h_{fe}^2}, \quad \text{или} \quad f_1 \cong f_\beta \left( \frac{2h_{fe}^2}{h_{FE}} \right)^{1/2}. \quad (10.34)$$

Принимая  $f_\beta = 20$  кГц (токи здесь весьма малы) и  $h_{fe} = h_{FE} = 100$ , получим  $f_1 = 300$  кГц. Это достаточно хорошо для сигналов диапазона звуковых частот, но недостаточно для видеосигналов. Полосу частотной характеристики можно увеличить, увеличивая величину  $f_\beta$ .

## 10.3.2. ЛАВИННОЕ УМНОЖЕНИЕ

Другой способ умножения сигнала, образуемого в диоде, заключается в использовании лавинного умножения. Можно изготовить лавинные диоды, в которых пробой и ток умножения при напряжении ниже пробивного будут одинаковыми для всех точек площади  $p$ - $n$ -перехода. Покажем, как это приводит к улучшению отношения сигнал/шум.

Расчет сигнала совсем прост, если электроны и дырки имеют равные коэффициенты ионизации. Пусть  $I_0$  — темновой ток в отсутствие умножения, и пусть для фототока выполняется неравенство  $I_{ph} \ll I_0$ . Если при пересечении слоя пространственного заряда одной электронно-дырочной парой генерируется  $p$  электронно-дырочных пар ( $p < 1$ ), то умноженный фототок равен

$$I_{ph}(1 + p + p^2 + \dots) = \frac{I_{ph}}{1-p} = MI_{ph}, \quad (10.35)$$

где  $M = 1/(1-p)$  — коэффициент умножения тока. Выбирая величину  $p$ , близкую к единице, можно получить большое умножение.

Теперь о шуме. Спектральная плотность первичного тока равна  $2eI_0$ . Поскольку электронно-дырочные пары генерируются независимо и случайно, ток, обусловленный отдельным пересечением перехода электронно-дырочной парой, содержит полный дробовой шум, т. е. токи  $pI_0$ ,  $p^2I_0$ , ... содержат полный дробовой шум. Вклады всех этих частичных шумовых токов необходимо просуммировать и умножить на величину  $M^2$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} S_I(f) &= 2e(I_0 + pI_0 + p^2I_0 + \dots) M^2 = \\ &= \frac{2eI_0}{1-p} M^2 = 2eI_0 M^3. \end{aligned} \quad (10.36)$$

Макинтайр [25] рассчитал шум для случая, когда электроны и дырки имеют различные коэффициенты ионизации  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно. Оказалось, что отношение  $k = \beta/\alpha$  практически не зависит от величины приложенного напряжения. Для спектров шумовых токов

Макинтайр получил следующие выражения через величины  $k$  и  $M$ :

1) для  $p^+ - n$ -диола (весь ток переносится дырками)

$$S_I(f) = 2eI_0 M^3 \left[ 1 + \left( \frac{1-k}{k} \right) \left( \frac{M-1}{M} \right)^2 \right]; \quad (10.37)$$

2) для  $n^+ - p$ -диола (весь ток переносится электронами)

$$S_I(f) = 2eI_0 M^3 \left[ 1 - (1-k) \left( \frac{M-1}{M} \right)^2 \right]. \quad (10.38)$$

Первое выражение дает весьма большую величину при  $k \ll 1$  и малую при  $k \gg 1$ , так что наименьший шум получается, если дырки имеют наибольший коэффициент ионизации. Второе выражение дает очень большую величину, когда  $k \gg 1$ , и малую, тогда  $k \ll 1$ , так что наименьший шум достигается, если электроны имеют наибольший коэффициент ионизации. Эти выводы были хорошо подтверждены экспериментально. В германии дырки имеют больший коэффициент ионизации ( $k > 1$ ), в то время как в кремнии намного большую ионизирующую способность имеют электроны. Для GaAs и GaP  $k \cong 1$ .

С первого взгляда может показаться, что такое умножение окажет вредное действие, поскольку сигнал умножается на величину  $M$ , а шум — на величину  $M^{1/2}$ . Однако обычно преобладающими оказываются шумы усилителя и тогда оказывается возможным значительное улучшение отношения сигнал/шум.

Чтобы показать это, предположим, что усилитель построен так, что он имеет очень большое полное сопротивление входной цепи и обеспечивает компенсацию частотных искажений при помощи обратной связи или следующего каскада, для того чтобы получить верхнюю граничную частоту  $f_1$ . Тогда шум можно представить шумовым током  $(2eI_{\text{эв}}f_1)^{1/2}$  эквивалентного генератора, включенного параллельно входу усилителя. Если, преобладает шум усилителя, то (в соответствии с результатами разд. 10.2) имеем

$$2eI_{\text{эв}}f_1 = 4kTf_1 \cdot \frac{1}{3} R_n (2\pi f_1 C')^2$$

или

$$I_{\text{экв}} = \frac{2kT}{e} \cdot \frac{1}{3} R_n (2\pi f_1 C')^2. \quad (10.39)$$

Используя значения  $f_1 = 4$  МГц,  $T = 300$  К,  $R_n = 100$  Ом,  $C' = 20$  пФ и  $R_L = \infty$ , получим  $I_{\text{экв}} = 0,4$  мкА. Поскольку у хорошего кремниевого диода с охраным кольцом величина тока  $I_0 = 10^{-9}$  А, сильно преобладает шум усилителя.

Таким образом, без умножения имеем отношение сигнал/шум

$$\frac{S}{N} = \frac{I_{ph}^2}{2e(I_0 + I_{\text{экв}})f_1} = \frac{I_{ph}^2}{2eI_0f_1(1 + I_{\text{экв}}/I_0)}, \quad (10.40)$$

где  $I_{ph}$  представляет собой среднеквадратичное значение фототока, а  $I_{\text{экв}} \gg I_0$ . При наличии умножения имеем

$$\begin{aligned} \frac{S}{N} &= \frac{M^2 I_{ph}^2}{2e(I_0 M^2 + I_{\text{экв}})f_1} = \\ &= \frac{I_{ph}^2}{2eI_0f_1 [M + (I_{\text{экв}}/I_0)/M^2]}. \end{aligned} \quad (10.41)$$

Это выражение при  $M = (2I_{\text{экв}}/I_0)^{1/2}$  имеет максимум

$$\frac{S}{N} = \frac{I_{ph}^2}{2eI_0f_1} \left[ \frac{2}{3} \left( \frac{I_0}{2I_{\text{экв}}} \right)^{1/2} \right]. \quad (10.41a)$$

Этот результат гораздо лучше, чем без умножения. Если токи  $I_{\text{экв}} = 0,4$  мкА и  $I_0 = 10^{-9}$  мкА, то

$$1 + \frac{I_{\text{экв}}}{I_0} \cong 400 \quad \text{и} \quad \frac{3}{2} \left( \frac{2I_{\text{экв}}}{I_0} \right)^{1/2} \cong 14,$$

т. е. достигнуто увеличение отношения сигнал/шум в 29 раз. Во столько же раз уменьшена величина эквивалентной шумовой мощности  $P_n$ .



## 10.4. УМНОЖЕНИЕ В ФОТОЭМИССИОННЫХ ПРИБОРАХ

Преимущество фотоэмиссионных приборов состоит в том, что эмиттированные электроны движутся в вакууме. Таким образом, их можно умножить с помощью вторично-эмиссионного умножения и тем самым превысить шум усилителя системы обработки фотозлектрических сигналов. В составе фотоумножителя используются дискретные диоды, а в канальном умножителе используется распределенное умножение.

### 10.4.1. ФОТОУМНОЖИТЕЛЬ

В соответствии с выражением (4.24) спектральная плотность шума, поступающего от диода, выполняющего умножение первичного тока  $I_{\text{перв}}$ , на коэффициент  $\delta$ , равна

$$S_I(f) = 2eI_{\text{перв}}\delta^2 + 2eI_{\text{перв}}\delta(\kappa - \delta), \quad (10.42)$$

где первый член представляет собой умноженный первичный шум, а второй — шум вторичной эмиссии. Параметр шума  $\kappa$  часто очень близок к величине  $\delta + 1$ , так что  $\kappa - \delta \cong 1$ .

Поставим теперь один за другим  $n$  диодов с одинаковыми параметрами  $\kappa$  и  $\delta$ . Тогда усиление равно  $\delta^n$ , а величина выходного шума равна сумме шума умноженного первичного тока и усиленного шума вторичной эмиссии от каждого диода, т. е.

$$\begin{aligned} S_i(f) &= 2eI_{\text{перв}}\delta^{2n} + 2eI_{\text{перв}}[\delta(\kappa - \delta)]\delta^{2n-2} + \\ &+ 2eI_{\text{перв}}\delta[\delta(\kappa - \delta)]\delta^{2n-4} + \dots + 2eI_{\text{перв}}\delta^{n-1}[\delta(\kappa - \delta)] = \\ &= 2eI_{\text{перв}}\delta^{2n} \left[ 1 + \frac{\kappa - \delta}{\delta} \left( 1 + \frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta^2} + \dots + \frac{1}{\delta^{n-1}} \right) \right] \approx \\ &\approx 2eI_{\text{перв}}\delta^{2n} \left[ 1 + \frac{\kappa - \delta}{\delta(1 - 1/\delta)} \right] = \left( \frac{\kappa - 1}{\delta - 1} \right) 2eI_{\text{перв}}\delta^{2n}. \end{aligned} \quad (10.43)$$

Множитель  $(\kappa - 1)/(\delta - 1)$  называется коэффициентом возрастания шума множителя

$$\Gamma = \frac{\kappa - 1}{\delta - 1} \cong \frac{\delta}{\delta - 1}. \quad (10.43a)$$

Следовательно, при  $\delta = 4$  имеем  $\Gamma = 4/3$ , т. е. множитель обеспечивает усиление практически без увеличения шума.

#### 10.4.2. КАНАЛЬНЫЙ УМНОЖИТЕЛЬ

Канальный множитель состоит из тонкой, слабо проводящей полый трубки, внутренняя поверхность которой может испускать вторичные электроны. Если теперь первичный электронный луч сфокусировать на умножителе и между концами трубки приложить напряжение 1500—2000 В, то число вторичных электронов увеличится за счет *распределенного* умножения, при котором можно легко достичь величины коэффициента суммарного умножения  $\sim 10^6$  и больше.

Чтобы описать процесс распределенного умножения, введем коэффициент умножения на единицу длины  $\rho$  и запишем

$$dI(x) = I(x) \rho dx, \quad \frac{dI(x)}{I(x)} = d \ln [I(x)] = \rho dx,$$

$$\frac{I(x)}{I_{\text{перв}}} = \exp(\rho x), \quad G = \frac{I(L)}{I_{\text{перв}}} = \exp(\rho L), \quad (10.44)$$

где  $dI(x)$  — электронный ток, генерируемый на участке  $dx$ , а  $G$  — коэффициент усиления тока в канальном умножителе.

Теперь рассмотрим шум. Поскольку первичный ток  $I_{\text{перв}}$  и ток  $dI(x)$  содержат полные дробовые шумы и шум в точке  $x$  оказывается умноженным на  $\exp[\rho(L - x)]$ , то

$$S_I(f) = 2eI_{\text{перв}} \exp(2\rho L) +$$

$$+ \int_0^L 2e [I_{\text{перв}} \exp(\rho x) d(\rho x)] \exp[2\rho(L - x)] =$$

$$\begin{aligned}
 &= 2eI_{\text{перв}} \exp(2\rho L) \left[ 1 + \int_0^L \exp(-\rho x) d(\rho x) \right] = \\
 &= 2eI_{\text{перв}} \exp(2\rho L) [2 - \exp(-\rho L)] = \\
 &= 2eI_{\text{перв}} \exp(2\rho L) \Gamma, \quad (10.45)
 \end{aligned}$$

т. е. при большом усилении получается коэффициент возрастания шума  $\Gamma = 2$ .

Измерения Тимма и Ван дер Зила [26] в основном согласуются с таким предсказанием. Однако здесь есть одно осложнение, состоящее в том, что коэффициент усиления  $G$  зависит от первичного тока (по крайней мере при использовании больших первичных токов). Тогда коэффициент усиления  $G$  равен не  $I_s/I_{\text{перв}}$  (где  $I_s$  — вторичный ток), а  $(\partial I_s/\partial I_{\text{перв}})$ . Подробности, связанные с этим вопросом, изложены в упомянутой работе.

Коэффициент  $\Gamma$  можно сделать меньше 2,0, обеспечив на входном конце канала значительно большую величину  $\delta$  и направляя на вход (фото) электроны с большей энергией. В этом случае большая часть шума получается при первом умножении и  $\Gamma \cong (\delta + 2)/\delta$ , как следует из повторения вывода выражения (10.45).

## 10.5. КЛАССИЧЕСКИЕ ДЕТЕКТОРЫ

Классическими детекторами являются детекторы, принцип действия которых таков, что они реагируют непосредственно на квадрат входного переменного напряжения. Примерами таких детекторов являются диоды с барьером Шоттки и диоды со структурой металл—окисел—металл.

Принцип их действия состоит в следующем. Пусть  $I = I(V)$  — характеристика прибора,  $V_0$ ,  $I_d$  — напряжение и ток в статическом режиме. Тогда, если  $V = V_0 + \Delta V$ , новый ток равен

$$I = I_d + \left. \frac{dI}{dV} \right|_{V_0} \Delta V + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2I}{dV^2} \right|_{V_0} \Delta V^2 + \dots, \quad (10.46)$$

т. е. для изменения напряжения  $\Delta V$  данный прибор представляет входную проводимость

$$g = \left( \frac{dI}{dV} \right)_{V_0}. \quad (10.47)$$

Если  $\Delta V = v_0 \cos \omega t$ , то изменение постоянной составляющей тока равно

$$\Delta I_d = \frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dV^2} \Big|_{V_0} v_0^2 \langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{4} \frac{d^2 I}{dV^2} \Big|_{V_0} v_0^2, \quad (10.48)$$

где угловые скобки означают усреднение за полный период. Таким образом, изменение тока  $\Delta I_d$  пропорционально квадрату амплитуды переменного напряжения  $v_0$ , как и было отмечено выше.

Если источник сигнала согласован с детектором, то достижимая мощность  $P_a$  источника сигнала рассеивается на детекторе, т. е.  $P_a = 1/2 v_0^2 g_0$ , или  $v_0^2 = 2P_a/g_0$ . Следовательно,

$$\Delta I_d = \frac{1}{2} \frac{(d^2 I/dV^2)_{V_0}}{(dI/dV)_{V_0}} P_a. \quad (10.49)$$

Таким образом, чувствительность детектора к мощности падающего излучения определяется множителем

$$\frac{(d^2 I/dV^2)_{V_0}}{(dI/dV)_{V_0}}. \quad (10.49a)$$

Этот множитель следует делать по возможности большим.

Чтобы найти эффективную шумовую мощность  $P_{\text{экр}}$  такого детектора, приравняем величину  $\Delta I_d$  квадратному корню из спектральной плотности  $S_I(f)$  тока короткого замыкания прибора в рабочем режиме. Это дает

$$P_{\text{экр}} = 2 \frac{(dI/dV)_{V_0}}{(d^2 I/dV^2)_{V_0}} [S_I(f)]^{1/2}. \quad (10.50)$$

При нулевом смещении шум детектора является тепловым шумом проводимости  $g$ ; при смещении, отличном от

нуля, существующие приборы дают дробовой шум тока  $I_d$ . Иначе говоря,

$$S_I(f) = 4kT \frac{dI}{dV} \Big|_{V_0} \quad \text{для } V = 0 \quad (10.51)$$

и

$$S_I(f) \approx 2eI_d \quad \text{для } V \neq 0. \quad (10.51a)$$

В разд. 10.5.1 такой подход применен к анализу диодов с барьером Шоттки, а в разд. 10.5.2 он применен к диодам типа металл—окисел—металл. Преимущество этих приборов состоит в том, что они не требуют охлаждения (в противоположность фотоэлементам, работающим в диапазоне длин волн порядка 10 мкм).

### 10.5.1. ДИОДЫ С БАРЬЕРОМ ШОТТКИ

Диод с барьером Шоттки состоит из выпрямляющего металлического контакта, выполненного на участке полупроводника. Выпрямляющие свойства достигаются благодаря такому подбору металла и полупроводника, при котором между ними образуется физический барьер, препятствующий протеканию тока.

Такой диод имеет характеристику

$$I = I_0 \left[ \exp \left( \frac{eV}{kT} \right) - 1 \right], \quad (10.52)$$

т. е.

$$g_0 = \frac{dI}{dV} \Big|_{V_0} = \frac{e(I + I_0)}{kT}, \quad \frac{d^2I}{dV^2} \Big|_{V_0} = \frac{e^2(I + I_0)}{(kT)^2}.$$

Следовательно,

$$P_{\text{экв}} = \frac{2kT}{e} (4eI_0)^{1/2} \quad (10.52a)$$

при нулевом смещении и

$$P_{\text{экв}} = \frac{2kT}{e} (2eI_d)^{1/2} \quad (10.52b)$$

при большом прямом смещении ( $I_d \gg I_0$ ). Большой ток иногда необходим для облегчения согласования с источником сигнала.

Теперь нам нужно применить этот подход к диодам Шоттки с точечным контактом, работающим на частотах инфракрасного диапазона. В этом случае необходимо принять во внимание емкость  $C$  слоя пространственного заряда, которая включена параллельно высокочастот-

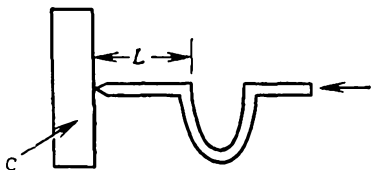


Рис. 10.9а. Точечный полупроводниковый диод с барьером Шоттки. Здесь острове контактной пружины прижато к полупроводниковому кристаллу  $C$ ; в диоде типа металл—окисел—металл кристалл заменяется металлической пластиной, покрытой слоем окисла толщиной в 10—20 Å.

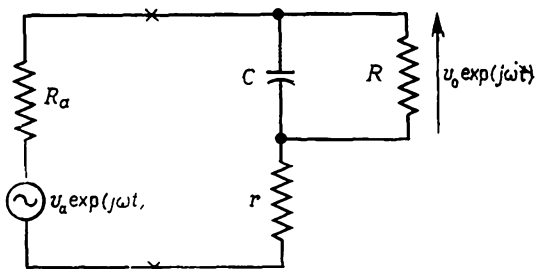


Рис. 10.9б. Эквивалентная схема точечного диода с барьером Шоттки,  $R = l/g_l$ ; контактная пружина работает как антенна с сопротивлением излучения  $R_a \approx 100$  Ом.

ной проводимости  $g_l$  данного слоя. Проводимость  $g_l$  может отличаться от низкочастотной проводимости  $g_0 = (dI/dV)_V$  в рабочей точке из-за влияния времени пролета электронов. Наконец, необходимо принять во внимание, что выпрямляющие свойства на очень высоких частотах ухудшаются из-за влияния времени пролета электронов в слое пространственного заряда.

На рис. 10.9а показан диод с точечным контактом, состоящий из металлической контактной пружины с очень тщательно сделанным острием, прижатым к сильно легированному полупроводниковому кри-

сталлу. Часть контактной пружины между изгибом и полупроводником (длиною  $L$ ) служит антенной с сопротивлением излучения  $R_a \sim 100$  Ом. Эквивалентная схема показана на рис. 10.96. На ней:  $v_a \exp(j\omega t)$  — э. д. с. антенны,  $v_0 \exp(j\omega t)$  — падение напряжения в области пространственного заряда. Объемная часть диода<sup>1</sup> представлена включенным последовательно сопротивлением  $r$ , а слой пространственного заряда — параллельным соединением  $C$  и  $g_i$ . Как известно,

$$r = \frac{\rho}{4a}, \quad C = \frac{\epsilon\epsilon_0 A}{d}, \quad d = \left[ \frac{2\epsilon\epsilon_0}{eN_d} (V_{\text{дифф}} - V_0) \right]^{1/2}, \quad (10.53)$$

где  $\rho$  — удельное сопротивление материала объемной области,  $a$  — радиус контакта,  $A$  — площадь контакта,  $d$  — ширина области пространственного заряда,  $\epsilon$  — относительная диэлектрическая проницаемость полупроводникового материала, а  $V_{\text{дифф}} - V_0$  — высота барьера.

Если теперь определить величину  $v_0$  из эквивалентной схемы рис. 10.96, получим

$$v_0 = \frac{v_a}{1 + (g_i + j\omega C)(R_a + r)}.$$

Поскольку величина  $P_a = |v_a|^2/8R_a$  представляет собой достижимую мощность антенны, можно записать

$$|v_0|^2 = \frac{8P_a R_a}{[1 + g_i(R_a + r)]^2 + \omega^2 C^2 (R_a + r)^2}. \quad (10.54)$$

Влияние времени пролета на эффективность выпрямления можно представить коэффициентом ухудшения за счет времени пролета  $|g(j\omega)|^2$ , величина которого равна единице на низких частотах и убывает (с ростом частоты) на очень высоких частотах [27]. Тогда вместо выражения (10.49) получим

$$\Delta I_d = \frac{1}{2} \left( \frac{d^2 I / dV^2}{dI/dV} \right) v_0 P_a \frac{4g_0 R_a |g(j\omega)|^2}{[1 + g_i(R_a + r)]^2 + \omega^2 C^2 (R_a + r)^2}, \quad (10.55)$$

<sup>1</sup> Более близким к реальности было бы представление объемной части последовательным соединением сопротивления  $r$  и индуктивности  $L$ , включенным параллельно объемной емкости  $C_b$ . Тогда в объемной части могут проявиться резонансные эффекты. Индуктивность возникает из-за столкновений носителей с решеткой.

и, следовательно, уравнение (10.50) можно записать в виде

$$P_{\text{экв}} = 2 \left( \frac{dI/dV}{d^2I/dV^2} \right)_{V_0} (2eI_{d0})^{1/2} \times \\ \times \frac{[1 + g_i (R_a + r)]^2 + \omega^2 C^2 (R_a + r)^2}{4g_0 R_a |g(j\omega)|^2}, \quad (10.56)$$

где  $I_{d0}$  — ток в статическом режиме.

Заметим, что величины  $C$ ,  $g_i$ ,  $g_0$  и  $I_{d0}$  пропорциональны площади контакта  $A$ , а сопротивление  $r$  пропорционально  $A^{-1/2}$ , так что наилучшие результаты получаются для относительно малых площадей  $A$ . Поскольку при этом возрастает влияние последовательного сопротивления  $r$ , удельное сопротивление материала объемной части должно делаться минимально возможным за счет сильного легирования. В полупроводнике GaAs  $n$ -типа, который является наилучшим материалом для этой цели, можно получить высокие уровни легирования порядка  $10^{19}$  см $^{-3}$ . Технически возможно реализовать малые площади контакта  $A$  величиной  $10^{-11}$  см $^2$ , однако не очень выгодно делать величину  $A$  настолько малой, что  $r > R_a$ .

Расчет [28] показывает, что при протекании тока за счет «эмиссии через барьер»  $|g(j\omega)|^2 = 0,25$  на частоте

$$f = \frac{3}{2\pi} \left( \frac{e^2 N_d}{m^* e e_0} \right)^{1/2}, \quad (10.56a)$$

где  $e$  — заряд электрона,  $N_d$  — концентрация доноров, а  $m^*$  — эффективная масса электрона. После подстановки численных значений для полупроводника GaAs, равных  $e = 11$  и  $m^* = 0,068 m$ , где  $m$  — масса свободного электрона, находим, что частота, определяемая из выражения (10.56a), соответствует длине волны 3 мкм при  $N_d = 10^{19}$  см $^{-3}$ .

При таких высоких уровнях легирования ток протекает за счет туннельного прохождения сквозь потенциальный барьер слоя пространственного заряда, что делает величину  $|g(j\omega)|^2$  более близкой к единице. Таким образом, практически нормальное выпрямление должно быть возможно при длине волны 10 мкм. По-



этому точечные диоды с малой площадью контакта  $A$  на основе сильнолегированного полупроводника  $n$ -типа GaAs представляются наиболее перспективными детекторами при использовании в упомянутом диапазоне длин волн.

### 10.5.2. ДИОДЫ СО СТРУКТУРОЙ МЕТАЛЛ—ОКИСЕЛ—МЕТАЛЛ

Диод типа металл—окисел—металл состоит из металлической пластинки со слоем оксида толщиной  $\sim 10 \text{ \AA}$  ( $10^{-7} \text{ см}$ ), к которому прижата контактная пружина с очень тщательно сделанным острием. Геометри-

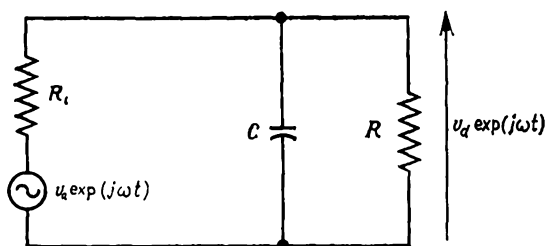


Рис. 10.10. Эквивалентная схема диода типа металл — окисел — металл.

ческие параметры диода показаны на рис. 10.9а с заменой полупроводникового кристалла металлической пластинкой, а эквивалентная схема представлена на рис. 10.10. Здесь  $R_a$  — сопротивление излучения антенны, а детектор заменен параллельной  $RC$ -цепью, в которой  $I/R = (dI/dV)_{V_0}$ .

На очень высоких частотах емкость  $C$  шунтирует сопротивление  $R$ . Поэтому площадь контакта выбирается такой, чтобы на рабочей частоте  $\omega$  выполнялось неравенство  $\omega CR_a < 1$ . Поскольку емкость  $C = \epsilon\epsilon_0 A/d$ , где  $\epsilon$  — относительная диэлектрическая проницаемость оксида,  $A$  — площадь контакта, а  $d$  — толщина оксида, оказывается, что при длине волны  $10 \text{ мкм}$  площадь  $A \cong (200 \text{ \AA})^2$ . Это в настоящее время технически достижимо. В этом случае  $v_d \cong v_a$ .

Если металлическая пластинка и металлический контакт выполнены из одинакового материала, то такой прибор имеет антисимметричную характеристику, и, следовательно, при нулевом смещении никакого выпрямления не получится. Однако в диоде с прямым смещением выпрямительный эффект весьма значителен. Другой недостаток этого прибора состоит в том, что из-за малой площади он обладает значительным фликер-шумом, поскольку при заданном токе фликер-шум обратно пропорционален площади прибора.

### 10.5.3. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КЛАССИЧЕСКИХ ДЕТЕКТОРОВ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ С ЧАСТОТОЙ БИЕНИЙ ДВУХ ОПТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

Диоды с барьером Шоттки и диоды типа металл—окисел—металл находят широкое применение при получении биений между двумя оптическими сигналами различной частоты. Таким образом, можно распространить методы измерения частоты на оптический диапазон. Принцип состоит в том, что при действии двух больших сигналов с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  из-за нелинейности характеристики этих устройств появляются токи с частотами биений  $\omega_3 = |n_1\omega_1 - n_2\omega_2|$ . В частности, если  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 10$  и  $\omega_1 \cong 10\omega_2$ , то можно получить низкочастотное биение, частоту которого можно либо измерить стандартными методами, либо с использованием еще одного преобразования свести к еще более низкой частоте  $\omega_4$ . Если значения частот  $\omega_3$  и  $\omega_2$  известны, можно определить частоту  $\omega_1$ .

Таким образом были получены частоты биений между сигналами более низких частот и лазерными сигналами длиной волны 5—10 мкм. Для более детального рассмотрения этого вопроса рекомендуем обратиться к статье д-ра Джейвана и группы его сотрудников из Массачусетского технологического института [29]. О фотоэлектрических и классических детекторах см. также работу [28].

---

## ДЕТЕКТОРЫ, ОСНОВАННЫЕ НА ЭФФЕКТЕ ФОТОПРОВОДИМОСТИ

В детекторе, основанном на эффекте фотопроводимости, падающие кванты порождают электронно-дырочные пары, если энергия фотона  $V_{ph} = hv/e$  больше ширины запрещенной зоны  $E_g$  между валентной зоной и зоной проводимости. Эти электронно-дырочные пары увеличивают проводимость полупроводника, используемого как фотопроводник, а увеличение проводимости регистрируется путем подачи на детектор  $D$  постоянного напряжения  $V_0$  и съема сигнала с нагрузочного резистора  $R$ . На рис. 11.1, *а* показана схема экспериментального устройства, а на рис. 11.1, *б* — схема, используемая совместно с детектором, основанном на эффекте фотопроводимости.

В разд. 11.1 обсуждаются характеристики фотопроводимости, шумовые характеристики и условия максимального преобразования сигнала. Разд. 11.2 посвящен различным типам фотопроводников — двум с межзонным возбуждением и различными типами рекомбинации и двум с возбуждением через донорные или акцепторные уровни при наличии или отсутствии компенсирующего легирования. В разд. 11.3 рассматриваются влияния теплового шума, шума усилителя и фликершума. Практическим схемам посвящен разд. 11.4. Примеры фотопроводников, применяемых на практике, обсуждаются в разд. 11.5.

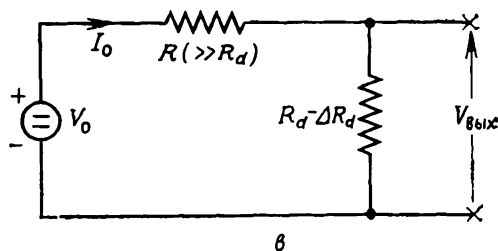
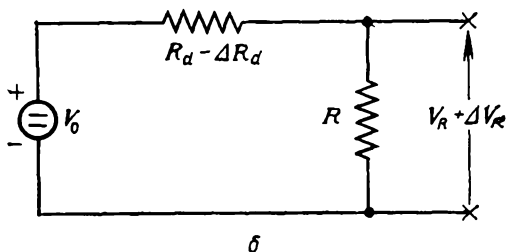
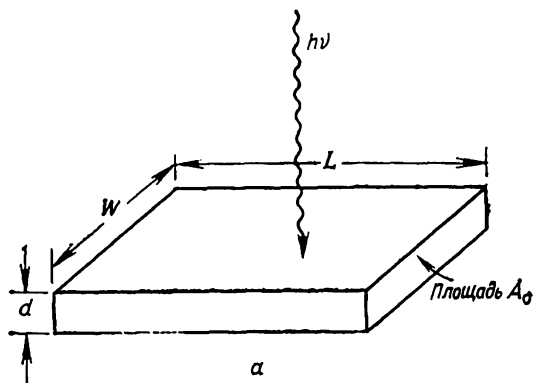


Рис. 11.1. Детектор, основанный на эффекте фотопроводимости.

$a$  — кванты  $h\nu$  падают на полупроводниковый брусок с принимающей поверхностью  $A = wL$  и площадью поперечного сечения  $A_0 = wd$ , где  $L$ ,  $w$  и  $d$  — размеры полупроводникового бруска,  $b$  — одна из возможных схем, в которой напряжение снимается с сопротивления нагрузки  $R$ ;  $в$  — другой вариант схемы, в которой напряжение снимается с фотопроводника.

## 11.1. ХАРАКТЕРИСТИКИ ФОТОПРОВОДИМОСТИ

### 11.1.1. СИГНАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Пусть падающее излучение  $P$  имеет частоту  $\nu$ , т. е. энергию фотонов  $V_{ph} = h\nu/e$ . Тогда скорость генерации электронно-дырочных пар в фотопроводнике равна

$$Q = \frac{\eta P (1 - R)}{eV_{ph}}. \quad (11.1)$$

Если возникающие электроны и дырки обладают временем жизни  $\tau_n$  и  $\tau_p$  соответственно, дополнительные количества электронов  $\Delta N$  и дырок  $\Delta P$  составят

$$\Delta N = Q\tau_n, \quad \Delta P = Q\tau_p. \quad (11.2)$$

Темновая проводимость образца описывается выражением (рис. 11.1, а)

$$g_0 = e(\mu_n n_0 + \mu_p p_0) \frac{A_0}{L} = e \left[ \frac{N_0}{A_0 L} \mu_n + \frac{P_0}{A_0 L} \mu_p \right] \frac{A_0}{L} = \frac{e(N_0 \mu_n + P_0 \mu_p)}{L^2}, \quad (11.3)$$

где  $L$  — длина,  $A_0$  — площадь поперечного сечения образца;  $n_0$  и  $p_0$  — равновесные концентрации,  $N_0$  и  $P_0$  — равновесные количества (электронов и дырок). Изменение проводимости под воздействием света равно

$$\Delta g = \frac{e(\Delta N \mu_n + \Delta P \mu_p)}{L^2} = \frac{eQ(\mu_n \tau_n + \mu_p \tau_p)}{L^2}. \quad (11.4)$$

Если к фотодетектору приложено напряжение  $V$ , то изменение тока  $\Delta I$  при освещении составляет

$$\Delta I = V \Delta g = \frac{eV}{L^2} (\mu_n \tau_n + \mu_p \tau_p) Q. \quad (11.5)$$

Это уравнение справедливо в общем случае; для электронного фотопроводника положим  $\mu_p = 0$ , для дырочного  $\mu_n = 0$ .

Если источник света модулирован, величина  $Q$  также модулирована. Она отслеживает модуляцию мгновенно, поскольку генерация пары электрон — дырка представляет собой исключительно быстрый процесс, однако к величинам  $\Delta N$  и  $\Delta P$  это не относится, поскольку носители обладают определенным временем жизни.

Для электронного фотопроводника имеем уравнение

$$\frac{d \Delta N}{dt} + \frac{\Delta N}{\tau_n} = Q_0 \exp(j\omega t), \quad (11.6)$$

где  $Q_0 \exp(j\omega t)$  — модулированное возбуждение. Задавая решение в виде  $\Delta N = \Delta N_0 \exp(j\omega t)$ , получим

$$\left(j\omega + \frac{1}{\tau_n}\right) \Delta N_0 = Q_0, \quad \Delta N_0 = \frac{Q_0 \tau_n}{1 + j\omega \tau_n}. \quad (11.7)$$

Аналогичное выражение существует и для дырочных фотопроводников. Таким образом, в общем случае имеем

$$\Delta I = \frac{eV}{L^2} \left[ \frac{\mu_n \tau_n}{1 + j\omega \tau_n} + \frac{\mu_p \tau_p}{1 + j\omega \tau_p} \right] Q_0 \exp(j\omega t). \quad (11.8)$$

При  $\omega \tau_n \ll 1$  и  $\omega \tau_p \ll 1$  это выражение сводится к выражению (11.5); при  $\omega \tau_n \gg 1$  и  $\omega \tau_p \gg 1$  имеем

$$\Delta I = \frac{eV}{L^2} \left( \frac{\mu_p + \mu_n}{j\omega} \right) Q_0 \exp(j\omega t), \quad (11.8a)$$

так что чувствительность убывает с ростом частоты. Для электронного фотопроводника необходимо снова положить  $\mu_p = 0$ , а для дырочного  $\mu_n = 0$ .

Чтобы проиллюстрировать связь между чувствительностью фотопроводимости и временем жизни, обратимся к электронному фотопроводнику. Для него

$$\Delta I = \frac{e \mu_n V \tau_n}{L^2} Q. \quad (11.9)$$

Однако, поскольку

$$\tau_d = \frac{L}{u_d} = \frac{L}{\mu_n |E|} = \frac{L^2}{\mu_n V} \quad (11.9a)$$

является временем полета носителей ( $E$  — напряженность поля, а  $u_d = \mu_n |E|$  — скорость дрейфа носителей), можно записать

$$I = eQ \frac{\tau_n}{\tau_d}. \quad (11.96)$$

Это выражение имеет следующее простое объяснение. Если бы все носители генерировались катодом и собирались анодом ток равнялся бы  $eQ$ . Поэтому коэффициент  $G = \tau_n / \tau_d$  называют коэффициентом усиления; он изменяется от значений, много больших единицы для очень чувствительных фотопроводников ( $\tau_n \gg \tau_d$ ), до значений, существенно меньших единицы для очень нечувствительных фотопроводников ( $\tau_n \ll \tau_d$ ).

Причина, по которой коэффициент  $G$  может быть больше единицы, заключается в следующем. Носитель заряда не исчезает, когда он поглощается анодом, так как другой носитель должен поступить через катод для поддержания электронейтральности. Явление фотопроводимости, которое начинается с генерацией носителя, не останавливается, когда носитель достигает анода; оно прекращается лишь тогда, когда носитель удаляется за счет рекомбинации или захвата ловушкой. Это не означает, что чувствительные фотопроводники непременно лучше малочувствительных. Для исследования этого вопроса необходимо вычислить величину  $P_{\text{экв}}$ .

### 11.1.2. ШУМОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Для электронного фотопроводника мы имели, что флуктуация числа  $N$  носителей обладает спектральной плотностью

$$S_N(f) = \frac{4g(N_0)}{1/\tau_n^2 + \omega^2}, \quad (11.10)$$

тогда как, согласно выражению (11.7),

$$|\Delta N_0| = \frac{Q_0}{(1/\tau_n^2 + \omega^2)^{1/2}} = \frac{\eta(1-R)/eV_{ph}}{(1/\tau_n^2 + \omega^2)^{1/2}} P.$$

Приравнивая величины

$$|\Delta N_0| = [S_N(f)]^{1/2},$$

чтобы найти величину  $P_{\text{экв}}$ , получим

$$P_{\text{экв}} = \frac{eV_{ph}}{\eta(1-R)} [4g(N_0)]^{1/2}. \quad (11.11)$$

Мы видим, что это выражение не зависит от частоты и коэффициента  $G$ . Следовательно, чувствительные фотопроводники имеют не лучшую величину  $P_{\text{экв}}$  по сравнению с малочувствительными фотопроводниками; определяющим фактором является скорость генерации  $g(N_0)$ .

Сказанное не означает, что нет никакой разницы между чувствительными и малочувствительными фотопроводниками. *Более чувствительный фотопроводник дает больший сигнал, и поэтому шум усилителя, через который проходит этот сигнал, не так критичен. Менее чувствительный фотопроводник является одновременно более быстросдействующим и поэтому может пропускать больше информации.* Какой фотопроводник является наилучшим, зависит от ситуации.

Чтобы подробнее исследовать величину  $g(N_0)$ , запишем

$$g(N_0) = g(n_0) A_0 L, \quad (11.12)$$

где  $g(n_0)$  — скорость генерации на единицу объема. Поэтому важно выбирать фотопроводники с малым объемом  $A_0 L$ . Итак,  $A_0 = \omega d$ , где  $d$  — толщина, а  $\omega$  — ширина образца (рис. 11.1, а). Следовательно,

$$g(N_0) = g(n_0) A d, \quad (11.12a)$$

где  $A = L\omega$  — облучаемая поверхность фотопроводника. Следовательно,

$$D^* = \frac{A^{1/2}}{P_{\text{экв}}} = \frac{\eta(1-R)}{eV_{ph}} \frac{1}{[4g(n_0) d]^{1/2}}, \quad (11.13)$$

поэтому важно использовать тонкие образцы.

Конечно, величина  $d$  должна быть настолько велика, чтобы поглощался практически весь свет, но ее



не следует делать заметно превышающей данную величину. Это особенно важно, если фотопроводимость обусловлена переходом электронов на донорные уровни. Для прямого поглощения величина  $d$  имеет порядок  $10^{-6}$  см, для возбуждения за счет донорных уровней величина  $d$  может иметь порядок до  $10^{-2}$  см в зависимости от уровня легирования.

Величина  $D^*$  обратно пропорциональна  $[g(n_0)]^{1/2}$ . Таким образом, важно уменьшать величину  $g(n_0)$  посредством охлаждения. Это особенно существенно для детекторов, работающих в далекой инфракрасной области, изготовленных из таких материалов, как германий, легированный медью, или на основе компаунда  $Hg_{1-x}Cd_xTe$ .

### 11.1.3. СИГНАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РАЗЛИЧНЫХ СХЕМ

Одна из схем детектора показана на рис. 11.1, б. В данном случае сопротивление фотопроводника обозначается через  $R_d$  (без облучения) и  $R_d - \Delta R_d$  (при наличии падающего света); при слабом облучении величина  $\Delta R_d$  пропорциональна мощности падающего излучения. Поэтому на основании рис. 11.1, б можно записать

$$V_R = V_0 \frac{R}{R + R_d}, \quad V_R + \Delta V_R = V_0 \frac{R}{R + R_d - \Delta R_d},$$

так что

$$\begin{aligned} \Delta V_R &= V_0 \left[ \frac{R}{R_d + R - \Delta R_d} - \frac{R}{R_d + R} \right] \approx \\ &\approx V_0 \frac{R}{(R_d + R)^2} \Delta R_d, \end{aligned} \quad (11.14)$$

если  $\Delta R_d \ll (R + R_d)$ . Максимальный сигнал получается при  $R = R_d$ ; в этом случае

$$\Delta V_R = \frac{1}{4} \frac{V_0}{R_d} \Delta R_d. \quad (11.14a)$$

Другая возможность показана на рис. 11.1, в. Здесь большое постоянное напряжение приложено через

большое сопротивление  $R \gg R_d$ . В этом случае схема вырабатывает постоянный ток  $I_0 = V_0/R$ ; выходное напряжение в *отсутствии* света равно  $I_0 R_d$ , а *при наличии* света равно  $I_0 (R_d - \Delta R_d)$ . Таким образом, мощность падающего излучения порождает выходной сигнал величиной  $-I_0 \Delta R_d$ , и этот сигнал увеличивается, если сделать  $I_0$  больше.

В обоих случаях полезный выходной сигнал пропорционален величине  $\Delta R_d$ . Чтобы ввести различие между сигналом и шумом, предположим, что сигнал описывается изменением сопротивления  $\Delta R_{ds}$ , а шум — флуктуацией сопротивления  $\Delta R_{dn}$ . Обе величины умножаются на один и тот же коэффициент, и поэтому отношение сигнал/шум, взятое по мощности, имеет вид

$$\frac{S}{N} = \frac{\overline{\Delta R_{ds}^2}}{\overline{\Delta R_{dn}^2}} \quad (11.146)$$

и не зависит от типа схемы. Однако тип схемы оказывает влияние, когда учитывается шум усилителя (разд. 11.3).

## 11.2. ПРИМЕРЫ

Обсудим теперь различные типы фотопроводников.

### 11.2.1. СЛАБОЛЕГИРОВАННЫЙ МАТЕРИАЛ; ПРЯМАЯ РЕКОМБИНАЦИЯ

В этом случае имеем  $p = n - N_d$ , где  $N_d$  — концентрация доноров, а также

$$g(n) = g_0, \quad r(n) = \rho n p = \rho n (n - N_d); \quad (11.15)$$

время жизни носителей получается из выражения

$$\tau = \frac{1}{[dr/dn - dg/dn]_{n_0}} = \frac{1}{\rho (2n_0 - N_d)}. \quad (11.16)$$

Поэтому величина

$$D^* = \frac{\eta(1-R)}{eV_{ph}} \left( \frac{1}{4g_0 d} \right)^{1/2}. \quad (11.16a)$$

Поскольку величина  $g_0$  изменяется как  $\exp(-eE_g/kT)$ , где  $E_g$  — ширина зоны, в электрон-вольтах, а величина  $D^*$  изменяется как  $\exp(eE_g/2kT)$ , очень важно охлаждать фотопроводник.

Прямая рекомбинация запрещена (правилами отбора) в Ge и Si, но она возможна в компаундах с узкими зонами, подобных InSb и  $Cd_xHg_{1-x}Te$ . В случае InSb время жизни порядка  $10^{-6}$  с.

### 11.2.2. СЛАБОЛЕГИРОВАННЫЙ МАТЕРИАЛ; РЕКОМБИНАЦИЯ ЧЕРЕЗ ЦЕНТРЫ ШОКЛИ—РИДА—ХОЛЛА

В Ge и Si рекомбинация идет через центры рекомбинации Шокли—Рида—Холла. К чему это приводит в слаболегированных фотопроводниках, сделанных из таких материалов? Время жизни теперь соответствует постоянной времени  $\tau_{шр}$ . В этом случае скорость генерации имеет вид

$$g(n_0) = \frac{n_i^2}{(n_0 + n_i)\tau_{p0} + (p_0 + p_i)\tau_{n0}}. \quad (11.17)$$

Возьмем теперь в качестве простого примера материал с собственной проводимостью, в котором уровень ловушек лежит в середине зоны. Тогда  $n = p = n_i = p_i = n_i$

и

$$g(n_0) = \frac{n_i}{2(\tau_{p0} + \tau_{n0})}. \quad (11.17a)$$

В таком случае время жизни  $\tau_{шр}$  равно  $\tau_{p0} + \tau_{n0}$ , скорость  $g(n_0)$  меняется как  $n_i$ , т. е. как  $\exp(-eE_g/2kT)$ , а отсюда  $D^*$  меняется как  $\exp(eE_g/4kT)$ . Поэтому температурная зависимость величины  $D^*$  менее заметна, чем в предыдущем случае, но все равно важно охлаждать образец.

Рассмотрим в качестве примера детектор из кремния с собственной проводимостью (полагая, что его можно сделать), который при комнатной температуре имеет величину  $n_i = 10^{10}$  см<sup>-3</sup> и время жизни  $\tau$  избыточных носителей, равное  $10^{-5}$  с. Положим далее,

что толщина детектора 0,10 мм и что принимаемые кванты имеют энергию 1,5 эВ. Возьмем  $\eta = 1,0$  и  $R = 0$ . Чему равна в этом случае величина  $D^*$ ?

Время жизни избыточных носителей получается на основе скорости рекомбинации через центры Шокли—Рида—Холла.

$$R = \frac{np - n_i^2}{(n + n_1)\tau_{p0} + (p + p_1)\tau_{n0}} = \frac{\Delta n}{\tau}, \quad (11.17a)$$

где  $n_1 = p_1 = n_i$ ,  $n = p = n_i + \Delta n$  и  $\Delta n \ll n_i$ . Тогда

$$R = \frac{2n_i \Delta n}{2n_i (\tau_{p0} + \tau_{n0})}, \quad \text{или } \tau = \tau_{p0} + \tau_{n0} = \tau_{\text{ШР}}. \quad (11.17b)$$

Отсюда, согласно выражению (11.17 а),  $g(n_0) = 1/2 n_i / \tau = 0,5 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$  и  $D^* = 0,9 \cdot 10^{12} \text{ см} \cdot \text{Гц}^{1/2} / \text{Вт}$ .

Мы видим из этого примера, что величины  $g(n_0)$  и  $\tau$  не независимы, а связаны, несмотря на то что  $\tau$  не входит в выражение (11.13) в явном виде.

### 11.2.3. ВОЗБУЖДЕНИЕ С ДОНОРНЫХ УРОВНЕЙ

В этом случае, если величина  $N_d$  по-прежнему является концентрацией доноров, то

$$g(n) = \gamma_0 (N_d - n), \quad r(n) = \rho n^2. \quad (11.18)$$

Равновесная концентрация  $n_0$  следует из выражения

$$\gamma_0 (N_d - n_0) = \rho n_0^2, \quad (11.18a)$$

а время жизни  $\tau$  получается в виде

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{[dr/dn - dg/dn]_{n_0}} = \\ &= \frac{1}{\gamma_0 + 2\rho n_0} \left( \cong \frac{1}{\gamma_0} \text{ при } 2\rho n_0 \ll \gamma_0 \right) \end{aligned} \quad (11.18b)$$

и может сильно зависеть от температуры. Окончательно

$$g(n_0) = \gamma_0 (N_d - n_0) \cong \gamma_0 N_d \text{ при } n_0 \ll N_d. \quad (11.18b)$$

Поскольку величина  $\gamma_0$  изменяется как  $\exp(-eE_0/kT)$ , где  $E_0$  — разность энергий в электрон-вольтах между дном зоны проводимости и донорным уровнем, то по-прежнему важно охлаждать образец. Особенно важно иметь  $n_0 \ll N_d$ ; однако в таком случае время жизни  $\tau$  становится сильно зависящим от температуры. Так как

$$D^* = \frac{\eta(1-R)}{eV_{ph}} \frac{1}{[4\gamma_0 N_d d]^{1/2}}, \quad (11.19)$$

то видим, что произведение  $N_d d$  необходимо сделать настолько большим, чтобы поглощался практически весь свет, но не больше.

#### 11.2.4. ВОЗБУЖДЕНИЕ С ДОНОРНЫХ УРОВНЕЙ ПРИ КОМПЕНСИРУЮЩЕМ ЛЕГИРОВАНИИ

Здесь имеется  $N_d$  доноров/см<sup>3</sup> и  $N_a$  акцепторов/см<sup>3</sup>, причем  $N_a < N_d$ . Поэтому  $N_a$  доноров постоянно ионизированы и по крайней мере  $N_d - N_a$  доноров могут поглощать энергию. Так как имеется  $N_d - N_a - n$  неионизированных доноров и  $N_a + n$  ионизированных, то

$$g(n) = \gamma_0(N_d - N_a - n), \quad r(n) = \rho(N_a + n)n. \quad (11.20)$$

Поэтому равновесная концентрация вытекает из соотношений

$$\gamma_0(N_d - N_a - n_0) = \rho(N_a + n_0)n_0, \quad (11.20a)$$

$$\tau = \frac{1}{(dr/dn - dg/dn)_{n_0}} = \frac{1}{\gamma_0 + \rho(N_a + 2n_0)} \left( \cong \frac{1}{\rho N_a} \right). \quad (11.20b)$$

Если  $2n_0 \ll N_a$  и  $\gamma_0 \ll \rho N_a$ , то

$$g_0 = \gamma_0(N_d - N_a - n_0) \cong \gamma_0(N_d - N_a), \quad (11.20b)$$

так что

$$D^* \cong \frac{\eta(1-R)}{eV_{ph}} \frac{1}{[4\gamma_0(N_d - N_a)d]^{1/2}}. \quad (11.21)$$

Таким образом можно резко увеличить быстродействие, если величину  $N$  сделать настолько большой, что  $n_0 \ll N_s$  и  $\rho N_s \gg \gamma_0$ . Тогда величина  $D^*$  сильно зависит от температуры, потому что  $\gamma_0$  снова изменяется как  $\exp(-eE_0/kT)$ , но  $\tau$  зависит от температуры лишь постольку, поскольку от температуры зависит  $\rho$ . Это может быть удобно, когда желательны быстродействующие детекторы.

### 11.3. ТЕПЛОВОЙ ШУМ, ФЛИКЕР-ШУМ И ШУМ УСИЛИТЕЛЯ

До сих пор мы полагали, что лимитирующий шум в детекторе, основанном на эффекте фотопроводимости, является генерационно-рекомбинационным шумом. Однако имеется еще и тепловой шум. Можем ли мы быть вполне уверены, что в этом случае преобладает генерационно-рекомбинационный шум и что шум усилителя пренебрежимо мал?

Ответ на этот вопрос дается схемой рис. 11.1, в, содержащей нелегированный полупроводник с межзонными переходами. Пусть  $I_0$  — постоянный ток, протекающий через фотопроводник, и пусть

$$g_0 = \frac{e(\mu_p + \mu_n) N_i}{L^2} = \frac{1}{R_d}, \quad (11.22)$$

поскольку  $N_0 = P_0 = N_i$ , где  $N_i$  — число собственных носителей. Поэтому постоянное напряжение, возникающее на детекторе в темноте, имеет вид  $V_d = I_0 R_d$ . Тепловой шум порождает напряжение холостого хода со спектром

$$S_{v_{th}}(f) = 4kTR_d. \quad (11.22a)$$

Пусть теперь фотопроводник освещается светом, в результате чего проводимость изменяется на  $\Delta g$ , тогда

$$R_d = \frac{1}{g_0}, \quad R_d - \Delta R_d = \frac{1}{g_0 + \Delta g}, \quad \text{откуда}$$

$$\Delta R_d = \frac{\Delta g}{g_0^2} = \Delta g R_d^2.$$

Тогда изменение напряжения холостого хода

$$\Delta V_d = I_0 \Delta R_d = I_0 R_d^2 \Delta g = V_d R_d \Delta g. \quad (11.23)$$

Однако, поскольку  $\Delta N = \Delta P$ , в этом случае

$$\Delta g = \frac{e(\mu_p + \mu_n)}{L^2} \Delta N, \quad \Delta V_d = \left[ \frac{e(\mu_p + \mu_n) V_d}{L^2} \right] R_d \Delta N \quad (11.24)$$

и, следовательно, генерационно-рекомбинационный шум имеет напряжение холостого хода со спектром

$$\begin{aligned} S_{V_{gr}}(f) &= \left[ \frac{e(\mu_p + \mu_n) V_d}{L^2} \right]^2 R_d^2 S_N(f) = \\ &= \left[ \frac{e(\mu_p + \mu_n) V_d}{L^2} \right]^2 R_d^2 2N_i \frac{\tau}{1 + \omega^2 \tau^2}; \end{aligned} \quad (11.25)$$

откуда, согласно выражению (5.48), имеем

$$S_N(f) = 4 \overline{\Delta N^2} \frac{\tau}{1 + \omega^2 \tau^2},$$

а согласно выражению (5.50в),  $\overline{\Delta N^2} = 1/2 N_i$  (для материала с собственной проводимостью). Надлежащим выбором напряжения  $V_d$  всегда можно сделать генерационно-рекомбинационный шум преобладающим над тепловым шумом, но это становится труднее, если величина  $\tau$  очень мала.

Чтобы учесть влияние фликер-шума на характеристики фотопроводников, применим выражение (7.5а). Если к фотопроводнику приложено напряжение  $V_d$ , то фликерная компонента флуктуаций тока  $I_0$  имеет спектр

$$S_I(f) = \frac{\alpha I_0^2}{N_0 f}. \quad (11.26)$$

Однако

$$\Delta I = \frac{I_0}{N_0} \Delta N \quad \text{или} \quad S_I(f) = \frac{I_0^2}{N_0^2} S_N(f). \quad (11.27)$$

Решая относительно  $S_N(f)$ , находим

$$[S_N(f)]_{\text{флик}} = \frac{\alpha N_0}{f}. \quad (11.28)$$

Этот результат нужно теперь сравнить с величиной  $S_N(f)$  для генерационно-рекомбинационного шума. Для материала с почти собственной проводимостью мы имели

$$[S_N(f)]_{gr} = \frac{4P_0N_0}{N_0 + P_0} \frac{\tau}{1 + \omega^2\tau^2}, \quad (11.29)$$

где  $\tau$  — время жизни, определяемое процессом рекомбинации, а  $P_0 \cong N_0$ . Таким образом, видно, что фликер-шум может стать весьма существенным в слаболегированном материале ( $\tau$  мало). Поскольку для получения  $S_V(f)$  оба значения  $S_\lambda(f)$  умножаются на один и тот же коэффициент, относительное влияние фликер-шума адекватно описывается выражениями (11.28) и (11.29).

При наличии фликер-шума всегда можно определить частоту  $f_c$ , так называемую *верхнюю частоту отсечки*, для которой  $[S_N(f)]_{\text{флик}} = [S_N(f)]_{gr}$ ; эта частота не зависит от смещения. При  $f < f_c$  преобладает фликер-шум, а при  $f > f_c$  — генерационно-рекомбинационный шум.

Не следует забывать, что в реальных детекторах величина  $D^*$  зависит от теплового и фликер-шума. При заданном смещении величина  $D^*$  возрастает с увеличением частоты, пока фликер-шум не становится меньше суммарного эффекта теплового и генерационно-рекомбинационного шума. Если теперь увеличивать смещение, относительный вклад теплового шума становится меньше, и величина  $D^*$  увеличивается далее до тех пор, пока генерационно-рекомбинационный шум не начинает преобладать над тепловым шумом при условии, что такая точка достижима без разрушения прибора.

Иследуем теперь влияние шума усилителя. С этой целью введем коэффициент шума  $F_0$  фотопроводника с помощью уравнения

$$S_{V_{gr}}(f) = F_0 S_{V_{th}}(f) \quad \text{или} \\ F_0 = \frac{e}{2kT} \frac{(\mu_p + \mu_n) V_d^2}{l^2} \frac{\tau}{1 + \omega^2\tau^2}, \quad (11.30)$$

которое получается при подстановке выражения для  $R_d$ .



Пусть для источника с сопротивлением  $R_d$  коэффициент шума усилителя равен  $F$ ; тогда суммарный шум детектора и усилителя в полосе  $\Delta f$  имеет среднее-квадратичное значение

$$[(F_0 + F) \cdot 4kTR_d \Delta f]^{1/2} = [F_1 \cdot 4kTR_d \Delta f]^{1/2}, \quad (11.31)$$

так что суммарный коэффициент шума детектора с усилителем равен

$$F_1 = F_0 + F. \quad (11.32)$$

Таким образом, важно, чтобы выполнялось условие  $F < F_0$ ; этого можно достичь, поддерживая достаточно большой величину  $V_d$ .

Однако необходимо следить за тем, чтобы при выбранном напряжении  $V_d$  прибор с таким смещением имел все же линейную характеристику. Характеристика может стать нелинейной вследствие инжекции носителей у контактов. Это может вызвать чрезвычайно большой низкочастотный шум; следовательно, необходимо избегать подобного положения.

## 11.4. МЕТОДЫ УМЕНЬШЕНИЯ ШУМА

В этом разделе будет показано, как уменьшить шум систем с фотодетекторами, использующими эффект фотопроводимости, методами синхронного детектирования.

В разд. 8.2.2 мы видели, что синхронный детектор имеет очень узкую эффективную полосу пропускания  $B_{эфф}$ . В системах с фотодетектором это можно использовать, прерывая световой луч с частотой  $f$  и детектируя модулированный выходной сигнал фазовым детектором, синхронизированным с прерывателем. Если детектор имеет площадь  $A$  и способность к обнаружению  $D^*$ , то эффективная шумовая мощность  $P_{эфф}$  системы имеет вид

$$P_{эфф} = \frac{A^{1/2}}{D^*} B_{эфф}, \quad (11.33)$$

так что меньшие величины  $P_{эфф}$  можно получить, реализуя малые значения  $B_{эфф}$ .

Частоту прерывания  $f$  и смещение прибора следует выбирать такими, чтобы величина  $D^*$  была максимальной. Это означает, что  $f > f_c$ .

Возможно дальнейшее улучшение характеристик при питании фотопроводника от источника постоянного напряжения  $V_d$  и источника переменного напря-

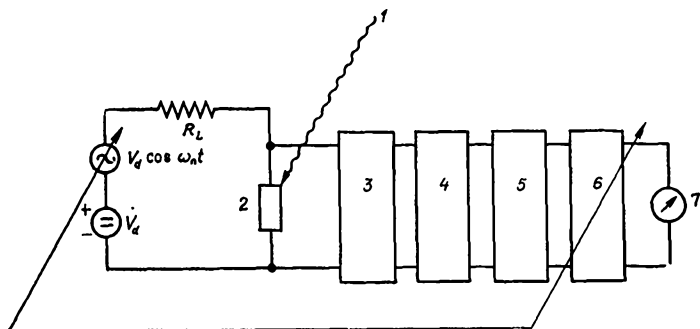


Рис. 11.2. Схема фотодетектора, в которой используются постоянное смещение и переменное смещение с частотой  $\omega_0$ .

1 — свет (частота модуляции  $f$ ); 2 — фотодетектор; 3 — фильтр ВЧ; 4 — усилитель, настроенный на частоту  $f$ ; 5 — детектор; 6 — фазовый детектор; 7 — измерительный прибор; использование фазового детектора, управляемого переменным смещением с частотой  $\omega_0$  для детектирования выходного напряжения фотодиода, позволяет устранить тепловой шум фотопроводника.

жения  $V_d \cos \omega_0 t$ , включенных последовательно, причем частота  $f_0$  выбирается так, чтобы  $f_0 \ll f$ . В этом случае сигнал, генерационно-рекомбинационный шум и фликер-шум модулируются частотой  $f_0$ , тогда как тепловой шум немодулирован. Если сигнал детектируется фазовым детектором, синхронизированным модулирующим напряжением частоты  $f_0$ , тепловой шум исчезает и остаются только фликер-шум и генерационно-рекомбинационный шум. Однако фликер-шум можно уменьшить до пренебрежимо малой величины надлежащим выбором частоты прерывания  $f$ , так что в качестве существенного источника шума сохраняется только генерационно-рекомбинационный шум.

Чтобы осуществить этот метод, выходной сигнал фотопроводника следует пропустить через фильтр

верхних частот, усилить избирательным усилителем, настроенным на частоту  $f$ , продетектировать линейным детектором, а выходной сигнал детектора подать на фазовый детектор, управляемый модулирующим напряжением частоты  $f_0$  (рис. 11.2).

Следует, конечно, понимать, что эти методы имеют ограниченную применимость. Зачастую представляет интерес прием световых сигналов с широкополосной модуляцией. В этом случае для обработки продетектированных сигналов необходимо использовать широкополосные усилители.

## 11.5. ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИМЕРЫ ФОТОПРОВОДНИКОВ

Практически каждый полупроводниковый элемент можно использовать как фотопроводник. В частности, Ge и Si можно использовать в качестве фотопроводников в ближнем инфракрасном диапазоне. Можно также использовать различные соединения типа III-V, например соединение InSb.

Соединение InSb обладает свойствами фотопроводника для волн короче 5,5 мкм при температуре 77 К. Величина  $D^*$  для него находится между  $10^{10}$  и  $10^{11}$  см $\cdot$ Гц $^{1/2}$ /Вт. При более высоких температурах величина  $D^*$ , конечно, меньше, так как собственная проводимость материала увеличивается с повышением температуры.

У таких материалов, как  $Pb_{1-x}Sn_xTe$  и  $Pb_{1-y}Sn_ySe$ , ширина запрещенной зоны зависит от  $x$  и  $y$  соответственно. Надлежащим выбором  $x$  или  $y$  можно получить фотодетекторы, способные работать в диапазоне длин волн 8—15 мкм, где атмосфера прозрачна. Максимальные значения способности к обнаружению  $D^*$  достигают нескольких единиц на  $10^8$  см $\cdot$ Гц $^{1/2}$ /Вт и значительно улучшаются при охлаждении до 4,2 К.

Сходные результаты получены для соединения  $Hg_{1-x}Cd_xTe$ . Для него получены запрещенные зоны шириной 0—0,40 эВ для  $0,17 < x < 0,40$  при 0 К. Приборы на фотопроводимости, сделанные из этого материала, обладают некоторым фликер-шумом на низ-

ких частотах, но во всех других отношениях имеют превосходные характеристики.

Полезны также легированные материалы на основе германия и кремния. Особый интерес представляет германий, легированный медью, имеющий энергетический уровень на 0,04 эВ выше потолка валентной зоны. Этот материал обладает прекрасными характеристиками фотопроводимости в диапазоне 10 мкм.

Приведенные примеры характеризуют лишь некоторые из имеющихся возможностей фотопроводящих материалов.

О фотопроводящих детекторах см. также работу [28].

---

## ПИРОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ДЕТЕКТОРЫ И ЕМКОСТНЫЕ БОЛОМЕТРЫ

Пироэлектрический детектор представляет собой детектор, работа которого основана на *пироэлектрическом эффекте*, т. е. на изменении поляризации поляризованного сегнетоэлектрического конденсатора, вызываемом нагревом за счет облучения. Причина этого заключается в том, что поляризация насыщения  $P_s$  поляризованного сегнетоэлектрика зависит от температуры. Таким образом, изменение температуры приводит к изменению поляризации, которое в свою очередь проявляется в изменении заряда на конденсаторе, сопровождающемся изменением напряжения, что можно обнаружить стандартными методами (разд. 12.1).

Малосигнальная емкость сегнетоэлектрического конденсатора, работающего в пироэлектрической области, также сильно зависит от температуры. Изменение температуры, вызываемое, например, облучением, дает соответственно толчок к изменению емкости; если приложено постоянное смещение, возникает изменение выходного напряжения, которое можно обнаружить обычными способами. Такое устройство называется емкостным болометром постоянного тока. В емкостном болометре переменного тока изменение емкости обнаруживается по изменению переменного напряжения (разд. 12.2). В разд. 12.3 рассматриваются диэлектрические потери как результат флуктуаций поляризации.

## 12.1. ПИРОЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ДЕТЕКТОР

Пироэлектрический детектор принимает модулированное излучение  $P_1 \exp(j\omega t)$ , которое можно получить, например, за счет прерывания светового потока (рис. 12.1) Детектор имеет толщину  $w$  и площадь  $A$ . В процессе работы на его зажимах появляется напря-

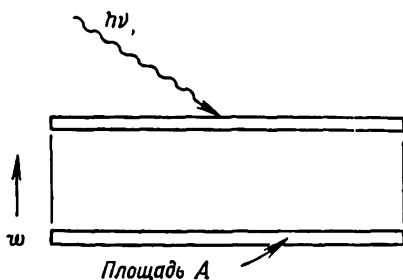


Рис. 12.1. Пироэлектрический детектор площадью  $A$  и толщиной  $w$ , принимающий световой поток, модулированный частотой  $\omega$  и вырабатывающий на зажимах переменное напряжение  $v_{d0} \exp(j\omega t)$ .

жение  $v_{d0} \exp(j\omega t)$ . Передняя пластина конденсатора часто окрашивается в черный цвет для лучшего поглощения излучения.

Для обозначения важных параметров будут использованы следующие символы: Емкость прибора на малом сигнале обозначается через  $C = \epsilon\epsilon_0 A/w$ , где  $\epsilon_0$  — диэлектрическая проницаемость свободного пространства, а  $\epsilon$  — относительная диэлектрическая проницаемость материала на малом сигнале. Прибор имеет тепловую емкость  $C_H = cdA\omega$ , причем  $c$  — удельная теплоемкость на 1 г, а  $d$  — плотность материала. Передняя поверхность имеет проводимость тепловых потерь на излучение  $g_H = \eta 4\sigma T^3 A$ , а задняя — аналогичную величину  $g'_H = \eta' 4\sigma T^3 A$ , где  $\eta$  и  $\eta'$  — коэффициенты излучения передней и задней поверхностей соответственно, а  $\sigma$  — постоянная Стефана—Больцмана.

### 12.1.1. ТЕХНИЧЕСКАЯ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ И ЭШМ $P_{\text{экв}}$

Начнем с расчета технической чувствительности. Изменение температуры детектора под действием облучения  $P_1 \exp(j\omega t)$  дается соотношением

$$C_H \frac{d\Delta T}{dt} + (g_H + g'_H) \Delta T = P_1 \exp(j\omega t). \quad (12.1)$$

Подставляя  $\Delta T = \Delta T_0 \exp(j\omega t)$  и решая относительно  $\Delta T_0$ , находим

$$\Delta T_0 = \frac{\eta P_1}{j\omega C_H + g_H + g'_H}. \quad (12.2)$$

Тепловая постоянная времени  $\tau_H = C_H / (g_H + g'_H)$  обычно порядка 1 с, а  $\omega/2\pi$  обычно порядка 10—100 с<sup>-1</sup>, так что  $\omega^2 \tau_H^2 \gg 1$ . Поэтому  $\omega^2 C_H^2 \gg (g_H + g'_H)^2$  или

$$\Delta T_0 \approx \frac{\eta P_1}{j\omega C_H} = \frac{\eta P_1}{j\omega c d A \omega}. \quad (12.2a)$$

Поляризация  $P_s$  поляризованного сегнетоэлектрика убывает с повышением температуры. Заряд на конденсаторе  $Q = AP_s$ , и, следовательно, ток короткого замыкания имеет вид

$$\begin{aligned} I_d(t) &= \frac{dQ}{dt} = A \frac{dP_s}{dt} = A \frac{dP_s}{dT} \frac{dT}{dt} = \\ &= -A p j \omega \Delta T_0 \exp(j\omega t) = -I_{d0} \exp(j\omega t), \end{aligned} \quad (12.3)$$

где  $p = -dP_s/dT$  называется пирозлектрическим коэффициентом. Поскольку переменный ток пропорционален  $d\Delta T/dt$ , а не  $\Delta T$ , срабатывание детектора очень быстро. Амплитуда тока

$$I_{d0} = A p j \omega \Delta T_0 = p \eta P_1 / c d \omega \quad (12.3a)$$

не зависит от частоты при  $\omega \tau_H \gg 1$ .

Напряжение, появляющееся на конденсаторе  $C$ , имеет амплитуду

$$V_{d0} = \frac{I_{d0}}{\omega C} = \frac{p \eta}{\omega c d \epsilon \epsilon_0 A} P_1. \quad (12.4)$$

Таким образом, чувствительность по напряжению уменьшается с ростом частоты. Уравнение (12.4) дает техническую чувствительность  $V_{до}/P_1$ , которая имеет размерность В/Вт.

Теперь рассчитаем величину  $P_{экв}$ . Лимитирующим шумом прибора обычно является шум потерь в диэлектрике. Его спектральная плотность имеет вид

$$S_i(f) = 4kT\omega C \operatorname{tg} \delta = 4kT\omega \frac{\epsilon\epsilon_0 A}{w} \operatorname{tg} \delta, \quad (12.5)$$

где  $g = \omega C \operatorname{tg} \delta$  является проводимостью потерь конденсатора, а  $\operatorname{tg} \delta$  — коэффициент диэлектрических потерь. Эквивалентная шумовая мощность  $P_{экв}$ , определяемая соотношением

$$I_{до} = [S_i(f)]^{1/2}, \quad (12.6)$$

получается в виде

$$P_{экв} = \frac{[S_i(f)]^{1/2} cdw}{\rho\eta} = \frac{cd}{\rho\eta} (4kT\epsilon\epsilon_0 \operatorname{tg} \delta)^{1/2} (\omega w A)^{1/2}. \quad (12.7)$$

Следовательно, величину  $D^*$  можно представить в виде

$$D^* = \frac{A^{1/2}}{P_{экв}} = \frac{\rho\eta}{cd} \frac{1}{(4kT\epsilon\epsilon_0 \operatorname{tg} \delta)^{1/2} (\omega w)^{1/2}}. \quad (12.7a)$$

Так как величина  $D^*$  пропорциональна  $\omega^{-1/2}$ , выгодно переходить на более тонкие образцы; важно также сохранять частоту  $\omega$  относительно небольшой.

Таким образом, критерием качества детектора является отношение

$$\rho/(\epsilon \operatorname{tg} \delta)^{1/2}. \quad (12.7б)$$

Можно ли улучшить это отношение переходом на другую температуру? Обычно нельзя, поскольку отношение  $\rho/\epsilon^{1/2}$  почти не зависит от температуры, а величина  $\operatorname{tg} \delta$  не проявляет сильной температурной зависимости. Можно ли улучшить величину  $D^*$  переходом к другому материалу? К сожалению, нельзя, так как оказывается, что величина  $\rho/\epsilon^{1/2}$  почти не зависит от характеристик материалов.



Чтобы определить порядки величин  $P_{\text{экв}}$  и  $D^*$ , возьмем триглициновый сульфат при температуре 25 °С. Для него  $\epsilon = 40$ ,  $\text{tg } \delta = 0,01$ ,  $c = 0,97 \text{ Дж} \cdot \text{град}^{-1} \cdot \text{г}^{-1}$ ,  $d = 1,69 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$  и  $\rho = 2,0 \cdot 10^{-8} \text{ Кл} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{град}^{-1}$ . Если далее положить  $\eta = 1$ ,  $\omega/2\pi = 100 \text{ с}^{-1}$ ,  $A = 1 \text{ мм}^2$ ,  $\omega = 10^{-2} \text{ см}$  и  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-14} \text{ Ф} \cdot \text{см}^{-1}$ , то

$$P_{\text{экв}} = 2,0 \cdot 10^{-10} \text{ Вт/Гц}^{1/2},$$

так что

$$D^* = A^{1/2}/P_{\text{экв}} = 5 \cdot 10^8 \text{ см} \cdot \text{Гц}^{1/2}/\text{Вт}.$$

Это значение достаточно хорошее, оно и объясняет, почему пирозлектрические детекторы привлекли такой большой интерес, однако оно гораздо ниже предела, налагаемого шумом спонтанных флуктуаций температуры. Крайне маловероятно, чтобы ферроэлектрики когда-либо заметно приблизились к порогу, определяемому флуктуациями температуры.

### 12.1.2. ОТНОШЕНИЕ $\rho/\epsilon^{1/2}$

Чтобы продемонстрировать, что отношение  $\rho/\epsilon^{1/2}$  не зависит от температуры  $T$ , обратимся к теории сегнетоэлектриков Девошира. Согласно этой теории, поле  $E$  является нелинейной функцией поляризации  $P$  (см. приложение)

$$E = \beta(T - T_c)P + B_0P^3 + C_0P^5 + \dots, \quad (12.8)$$

где  $T_c$  — точка Кюри данного материала, а  $\beta$ ,  $B_0$  и  $C_0$  — константы. Поэтому при  $T < T_c$  имеет место спонтанная поляризация, а именно уравнение  $E = 0$  имеет ненулевое решение для  $P$ . Поэтому, пренебрегая членом с  $P^5$ , имеем

$$\beta(T - T_c)P + B_0P^3 = 0, \quad P = P_s = \left[ \frac{\beta(T_c - T)}{B_0} \right]^{1/2}, \quad (12.9)$$

так что величина  $P_s$  уменьшается с увеличением температуры  $T$ . Отсюда

$$\rho = - \frac{\partial P_s}{\partial T} = \frac{1}{2} \left( \frac{\beta}{B_0} \right)^{1/2} \frac{1}{(T_c - T)^{1/2}}. \quad (12.9a)$$

Дифференциальная чувствительность имеет вид

$$\varepsilon - 1 = \frac{1}{\varepsilon_0 \partial E / \partial P} = \frac{1/\varepsilon_0}{\beta (T - T_c) + 3B_0 P^2} = \frac{1}{2\beta \varepsilon_0 (T_c - T)}, \quad (12.96)$$

так что

$$\frac{P}{(\varepsilon - 1)^{1/2}} \approx \frac{P}{\varepsilon^{1/2}} = \frac{(1/2) (\beta/B_0)^{1/2}}{1/(2\beta \varepsilon_0)^{1/2}} = \frac{\varepsilon_0^{1/2} \beta}{(2B_0)^{1/2}}, \quad (12.10)$$

а это отношение не зависит от температуры. Поскольку для этих материалов  $\varepsilon \gg 1$ , то  $\varepsilon - 1 \approx \varepsilon$ . С учетом члена  $C_0 P^5$  обнаруживается умеренная зависимость отношения  $P/(\varepsilon - 1)^{1/2}$  от  $(T_c - T)$ . Так как ряд (12.8) сходится только для относительно малых значений  $P$ , выражение (12.10) является точным, если разность  $(T_c - T)$  невелика.

Чтобы доказать, что отношение  $P/(\varepsilon - 1)^{1/2}$  практически не зависит от типа материала, рассчитаем величины  $\beta$  и  $B$  с помощью модели молекулярных полей. Предположим, что элементарные ячейки сегнетоэлектрика можно поляризовать параллельно и антипараллельно локальному электрическому полю, и допустим, что они имеют дипольный момент  $\mu$ . Локальное поле  $E_l$ , действующее на этот элементарный диполь  $\mu$ , описывается выражением

$$E_l = E + \lambda P/\varepsilon_0, \quad (12.11)$$

где  $\lambda$  — постоянная Лоренца для материала (см. приложение).

Легко показать, что общая поляризация  $P$  при  $N$  элементарных ячеек на единицу объема имеет вид

$$P = N\mu \operatorname{th} x, \quad x = \frac{\mu E_l}{kT}. \quad (12.12)$$

Доказательство проводится следующим образом. Вероятность параллельной ориентации ячеек равна  $A \exp(\mu E_l/kT)$ , а вероятность антипараллельной ориентации  $A \exp(-\mu E_l/kT)$ . Теперь необходимо так выбирать

величину  $A$ , чтобы сумма двух вероятностей составила единицу, т. е.

$$A = \left[ \exp\left(\frac{\mu E_l}{kT}\right) + \exp\left(-\frac{\mu E_l}{kT}\right) \right]^{-1},$$

тогда как общая поляризация составляет  $N\mu [A \exp(\mu E_l/kT) - A \exp(-\mu E_l/kT)]$ . Объединяя эти выражения, получаем выражение (12.12).

Представим теперь выражение (12.12) в виде

$$x = \frac{\mu E_l}{kT} = \frac{P}{\mu N} + \frac{1}{3} \left( \frac{P}{\mu N} \right)^3 + \dots \quad (12.13)$$

или

$$E + \frac{\lambda P}{\epsilon_0} = \frac{kT}{\mu^2 N} P + \frac{kT}{3\mu^4 N^3} P^3 + \dots \quad (12.13a)$$

Записывая  $E$  в виде ряда (12.8), получим

$$\beta = \frac{k}{\mu^2 N}, \quad B_0 = \frac{kT_c}{3\mu^4 N^3}, \quad T_c = \frac{\lambda}{\epsilon_0} \frac{\mu^2 N}{k}, \quad (12.14)$$

где в выражении для  $B_0$  величина  $T$  заменена на  $T_c$ ; это сделано в силу того, что обратное преобразование (12.13) справедливо только для  $T$ , близких к  $T_c$ . Следовательно, справедливость выражения (12.8) доказана, и

$$\frac{\rho}{(\epsilon - 1)^{1/2}} = \left( \frac{3}{2} \epsilon_0 \frac{Nk}{T_c} \right)^{1/2}. \quad (12.15)$$

Теперь следует подобрать подходящее выражение для плотности элементарных ячеек  $N$ . Легко показать, что

$$N = A_0 \rho / nW, \quad (12.16)$$

где  $A_0$  — число Авогадро,  $\rho$  — плотность,  $W$  — молекулярный вес, а  $n$  — число молекул в единичной ячейке. Отсюда следует

$$\frac{\rho}{(\epsilon - 1)^{1/2}} = 10,5 \cdot 10^{-9} \left[ \frac{\rho}{n(W/100)(T_c/100)} \right]^{1/2} \text{ Кл} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{К}^{-1}. \quad (12.17)$$

Эта величина обычно лежит в пределах  $(3 \div 8) \cdot 10^{-9}$  Кл·см<sup>-2</sup>·К<sup>-1</sup>, тогда как экспериментальные значения получаются порядка  $3 \cdot 10^{-9}$ . Учитывая, что модель довольно грубая, это довольно хорошее совпадение. Таким образом становится понятным, почему величина отношения  $\rho/\varepsilon^{1/2}$  практически не зависит от типа материала.

### 12.1.3. ШУМ ПИРОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ РЕШЕТОК

Если имеется решетка из пирозлектрических детекторов, которые опрашиваются с частотой  $f_1$ , например  $10-30$  с<sup>-1</sup>, необходимо принять во внимание шум, генерируемый в полосе частот. Наименьшей частотой является, конечно,  $f_1$ , так как низкочастотный шум не успевает заметно измениться между двумя последовательными записями результатов опроса. Наивысшей частотой является  $f_2 \approx 1/\tau_s$ , где  $\tau_s$  — время опроса одного элемента, поскольку высокочастотный шум усредняется по времени опроса. Таким образом, имеем для случая  $\text{tg } \delta$ , не зависящего от частоты,

$$S_v(f) = 4kT \int_{f_1}^{f_2} \frac{\text{tg } \delta}{\omega C} df = \frac{2}{\pi} \frac{kT}{C} \text{tg } \delta \ln \left( \frac{f_2}{f_1} \right). \quad (12.18)$$

Так как функция  $S_v(f)$  зависит от  $f_2$  и  $f_1$  только логарифмически, любая ошибка в нашей оценке отношения  $f_2/f_1$  становится несущественной.

Таким образом, видно, что наблюдаемый шум может быть гораздо меньше  $kT/C$ , т. е. величины, ожидаемой согласно закону равного распределения энергии по степеням свободы, особенно если величина  $\text{tg } \delta$  относительно мала. Причина этого двоякая:

1. Закон равного распределения энергии по степеням свободы не выполняется для напряжения, возникающего на диэлектриках с потерями [30].

2. Интегрирование выполняется не по всему диапазону частот  $0 \leq f \leq \infty$ , а только в интервале  $f_1 \leq f \leq f_2$ .

## 12.2. ЕМКОСТНОЙ БОЛОМЕТР

Изменение емкости при нагревании конденсатора можно обнаружить с помощью приложенного постоянного смещения величиной  $V_0$  или посредством переменного напряжения смещения  $V_0 \cos \omega_0 t$ , где частота  $\omega_0$  намного больше частоты модуляции  $\omega$  падающего излучения. Назовем эти устройства соответственно болометрами с постоянным и переменным смещениями. Мы увидим, что последний из них имеет некоторые преимущества в отношении шума.

### 12.2.1. БОЛОМЕТР С ПОСТОЯННЫМ СМЕЩЕНИЕМ

Исследуем работу прибора при  $T > T_c$ . В этом случае материал является параэлектриком, и  $C = \text{const}/(T - T_c)$ . Излучение, модулированное с ча-

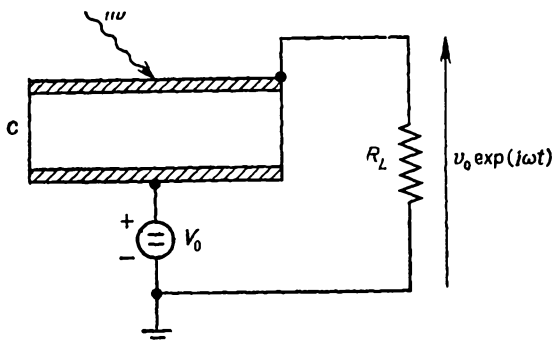


Рис. 12.2. Емкостной болометр, принимающий модулированный световой поток.

Питание осуществляется источником постоянного напряжения  $V_0$ , на сопротивлении нагрузки  $R_L$  появляется напряжение сигнала  $v_0 \exp(j\omega t)$

стотой  $\omega$ , вызывает изменение емкости; это изменение обнаруживается путем приложения последовательно с конденсатором постоянного напряжения  $V_0$  и подсоединения этой цепи к большому сопротивлению нагрузки  $R_L$ , так чтобы  $\omega C_0 R_L \gg 1$ , где  $C_0$  — равновесное значение  $C$  (рис. 12.2).

Если изменение температуры имеет вид  $\Delta T_0 \exp(j\omega t)$ , то емкость можно записать в виде

$$C = C_0 + \frac{\partial C_0}{\partial T} \Delta T_0 \exp(j\omega t). \quad (12.19)$$

Однако, если конденсатор линейный, его заряд  $Q$  равен  $CV_0$ , так что ток короткого замыкания имеет вид

$$I = \frac{dQ}{dt} = V_0 \frac{dC}{dt} = j\omega V_0 \frac{\partial C_0}{\partial T} \Delta T_0 \exp(j\omega t). \quad (12.20)$$

Отсюда выходное напряжение  $v_0 \exp(j\omega t)$  имеет амплитуду

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{j\omega V_0 (\partial C_0 / \partial T) \Delta T_0}{j\omega C_0} = V_0 \frac{1}{C_0} \frac{\partial C_0}{\partial T} \Delta T_0 = \\ &= - \frac{\eta P_1 V_0 / \omega}{j\omega c d A (T - T_c)}, \end{aligned} \quad (12.21)$$

т. е. выходное напряжение пропорционально напряженности постоянного поля  $V_0/\omega$ . Здесь использовано выражение (12.2а) для  $\Delta T_0$ .

Полагая снова, что шум прибора является тепловым шумом диэлектрических потерь, имеем

$$S_v(f) = \frac{4kT \operatorname{tg} \delta}{\omega C_0} = \frac{4kT \omega \operatorname{tg} \delta}{\omega \epsilon \epsilon_0 A}. \quad (12.22)$$

Определяя ЭШМ  $P_{\text{экв}}$  равенством

$$(\operatorname{var} v_0)^{1/2} = [S_v(f)]^{1/2},$$

получаем

$$P_{\text{экв}} = \frac{cd(T - T_c)}{\eta V_0 \omega} \left( \frac{4kT \operatorname{tg} \delta}{\epsilon \epsilon_0} \right)^{1/2} (\omega A \omega)^{1/2}. \quad (12.23)$$

Зависимость от  $\omega$ ,  $A$  и  $\omega$  точно такая же, как для пироэлектрического детектора. Вследствие зависимости от  $\epsilon$  важно использовать материалы с большой относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Кроме того, поскольку величина  $P_{\text{экв}}$  пропорциональна  $(T - T_c)^{1/2}$  (величина  $1/\epsilon$  пропорциональна  $T - T_c$ ), важно поддерживать разность  $T - T_c$  небольшой. Наконец, величина  $P_{\text{экв}}$  обратно пропорциональна отношению  $V_0/\omega$ , по-

этому важно стремиться к использованию сильных полей. Однако особенно далеко продвинуться в этом направлении не удастся вследствие эффектов насыщения в сильных полях (разд. 12.2.2).

В качестве примера рассмотрим теперь емкостной болометр, выполненный на основе триглицинового сульфата, который не является хорошим материалом, поскольку величина  $\epsilon$  относительно мала. Подставляя  $cd = 1,6$  Дж/см<sup>3</sup>,  $T = 320$  К,  $\eta = 1$ ,  $\omega/2\pi = 100$  с<sup>-1</sup>,  $V_0/\omega = 2,5$  кВ/см,  $T - T_c = 1,0^\circ\text{C}$ ,  $\text{tg } \delta = 0,01$ ,  $\epsilon = 800$ ,  $A = 1$  мм<sup>2</sup>  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-14}$  Ф/см,  $\omega = 10^{-2}$  см, получаем  $P_{\text{экр}} = 1,0 \cdot 10^{-10}$  Вт/Гц<sup>1/2</sup>, сравнимую с фактическими результатами, полученными для пирозлектрического детектора из триглицинового сульфата. Материалы с существенно большими значениями  $\epsilon$  были бы значительно лучше триглицинового сульфата.

Эксперименты согласуются с теоретическими предсказаниями в том, что касается порядка величин, однако вблизи точки Кюри величина  $\text{tg } \delta$  может быть несколько больше, и она увеличивается с ростом напряженности приложенного поля [31]. Наконец, шум прибора при постоянном смещении несколько превышает тепловой шум, что не вызывает особого удивления, поскольку прибор работает в неравновесных условиях.

### 12.2.2. ЭФФЕКТЫ НАСЫЩЕНИЯ

Исследуем теперь возможность учета эффектов насыщения. Мы не можем использовать непосредственно малосигнальное значение емкости  $C$  на переменном токе, а заряд  $Q$  уже не равен  $CV_0$ . Вместо этого следует ввести индуцированную поляризацию  $P(V_0, T)$  и положить  $Q = AP(V_0, T)$ . Поэтому ток равен

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = j\omega A \frac{\partial P}{\partial T} \Delta T_0 \exp(j\omega t) = I_{d0} \exp(j\omega t), \quad (12.24)$$

а выходное напряжение имеет амплитуду

$$v_0 = \frac{I_{d0}}{j\omega C_0} = \frac{A}{C_0} \frac{\partial P}{\partial T} \Delta T_0. \quad (12.25)$$

Поскольку емкость  $C_0$  на малом сигнале определяется в виде

$$C_0 = \frac{\partial Q}{\partial V_0} = A \frac{\partial P}{\partial V_0}, \quad (12.26)$$

можно написать

$$v_0 = \frac{\partial P / \partial T}{\partial P / \partial V_0} \Delta T_0. \quad (12.26a)$$

Это выражение для  $v_0$  в точности соответствует случаю пирозлектрического детектора. Таким образом, эффект, на котором основана работа емкостного болометра, может рассматриваться как *индуцированный пирозлектрический эффект*.

Чтобы показать, что выражение (12.25) может интерпретироваться именно как *емкостной* болометрический эффект, введем среднюю емкость

$$C_d = Q/V_0, \text{ т. е. } Q = AP = C_d V_0 \text{ или } P = (C_d V_0 / A).$$

Отсюда следует

$$v_0 = V_0 \frac{1}{C_0} \frac{\partial C_d}{\partial T} \Delta T_0. \quad (12.27)$$

Единственная коррекция, в которой нуждается выражение (12.21), заключается в том, что в качестве температурно-чувствительного элемента следует рассматривать не малосигнальную емкость  $C_0$ , а среднюю емкость  $C_d$ . В линейном случае выражение (12.27) переходит в выражение (12.21), так как  $C_d = C_0$ . Насыщение означает, что при больших напряжениях  $V_0$  произведение  $(V_0/C_0)(dC_d/dT)$  достигает насыщения.

### 12.2.3. ЕМКОСТНОЙ БОЛОМЕТР С ПЕРЕМЕННЫМ СМЕЩЕНИЕМ

В случае болометра с переменным смещением к нему прикладывается переменное напряжение  $V_0 \cos \omega_0 t$  (причем частота  $\omega_0$  гораздо больше частоты модуляции  $\omega$  падающего излучения) и регистрируется выходной сигнал. Оказывается, что величина  $P_{\text{экр}}$  в данном случае меньше в  $(\omega/\omega_0)^{1/2}$  раз.



Чтобы показать это, обратимся к схеме на рис. 12.3, где зависящая от температуры емкость  $C$  включена в контур, настроенный на несущую частоту  $\omega_0$ . Для определения боковых частот положим, что емкость  $C$

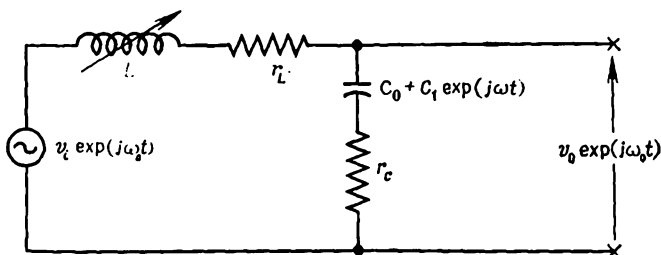


Рис. 12.3. Схема емкостного болометра, питаемого переменным напряжением  $v_i \exp(j\omega_i t)$ .

Вырабатывается модулированный сигнал с частотой  $\omega_0 = \omega_i \pm \omega$ , где  $\omega$  — частота модуляции поступающего излучения.

меняется как  $C_0 + C_1 \exp(\pm j\omega t)$ . Отсюда, если  $\omega_0^2 L C_0 = 1$ ,

$$\begin{aligned} i_0 &= \frac{v_i}{j\omega_0 L + r_L + r_c + 1/\{j\omega_0 [C_0 + C_1 \exp(\pm j\omega t)]\}} \approx \\ &\approx \frac{v_i j\omega_0 C_0}{1 - \omega_0^2 L [C_0 + C_1 \exp(\pm j\omega t)] + (r_L + r_c) j\omega_0 C_0} = \\ &= \frac{v_i j\omega_0 C_0}{j/Q_0 - (C_1/C_0) \exp(\pm j\omega t)} = - \frac{jQ_0 j\omega_0 C_0 v_i}{1 + j(C_1/C_0) Q_0 \exp(\pm j\omega t)}, \end{aligned} \quad (12.28)$$

где  $1/Q_0 = \omega_0 C_0 (r_L + r_c)$ , а  $Q_0$  — добротность резонансного контура. Если далее выбрать такую амплитуду  $v_i$ , что  $Q_0 v_i = V_0$ , то можно записать

$$v_0 = \frac{i_0}{j\omega_0 C_0} = -jV_0 \left[ 1 - jQ_0 \frac{C_1}{C_0} \exp(\pm j\omega t) \right], \quad (12.29)$$

так что сигнал  $v_0 \exp(j\omega_0 t)$  состоит из несущей на частоте  $\omega_0$  и двух боковых на частотах  $\omega_0 + \omega$  и  $\omega_0 - \omega$  соответственно.

После детектирования линейным детектором, полагая, что  $v'_0$ ,  $\Delta T_0$  и  $P_1$  — значения среднеквадратичных отклонений, и учитывая, что  $C_1 = (\partial C_0/\partial T) \Delta T_0$  и  $(\partial C_0/\partial T)/C_0 = 1/(T - T_c)$ , имеем после подстановки выражения для  $\Delta T_0$

$$v'_0 = V_0 Q_0 \frac{\Delta T_0}{T - T_c} = \frac{Q_0 \eta V_0 / \omega}{cdA (T - T_c)} P_1, \quad (12.30)$$

где  $cd$  — удельный нагрев на  $\text{см}^3$ ,  $\omega$  — толщина прибора, а  $A$  — площадь прибора.

Шум на единицу полосы равен

$$\begin{aligned} (\bar{v}_n^2)^{1/2} &= Q_0 [4kT (r_L + r_c)]^{1/2} = \\ &= Q_0 \left( 4kT \frac{\text{tg } \delta_0}{\omega_0 C_0} \right)^{1/2} \left( 1 + \frac{r_L}{r_c} \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (12.31)$$

где  $\text{tg } \delta_0$  — коэффициент потерь при  $\omega = \omega_0$ . Поэтому для величины  $(P_{\text{экр}})_{\text{пер. с}}$  имеем

$$\begin{aligned} (P_{\text{экр}})_{\text{пер. с}} &= \frac{cd(T - T_c)}{V_0/\omega} \left( \frac{4kT \text{tg } \delta_0}{\epsilon \epsilon_0} \right)^{1/2} \times \\ &\times (\omega A \omega)^{1/2} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^{1/2} \left( 1 + \frac{r_L}{r_c} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (12.32)$$

Сравнение этого результата с выражением для величины  $(P_{\text{экр}})_{\text{п. с}}$ , соответствующей болометру с постоянным смещением, при той же величине  $V_0$  даёт с учетом  $\text{tg } \delta_0 \approx \text{tg } \delta$

$$(P_{\text{экр}})_{\text{пер. с}} = (P_{\text{экр}})_{\text{п. с}} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^{1/2} \left( 1 + \frac{r_L}{r_c} \right)^{1/2}. \quad (12.32a)$$

Если использовать тот же пример, что и в предыдущем разделе, положить  $\omega/\omega_0 = 1/1000$  и принять, что  $r_L \ll r_c$ , то получим величину

$$(P_{\text{экр}})_{\text{пер. с}} = \frac{1,2 \cdot 10^{-10}}{31,6} \text{ Вт/Гц}^{1/2} = 4 \cdot 10^{-12} \text{ Вт/Гц}^{1/2},$$

которая сравнима с пределом, устанавливаемым шумовыми флуктуациями температуры. Строго говоря, здесь следовало бы написать

$$(P_{\text{экр}})_{\text{пер.с}} = [(P_{\text{экр}})_{\text{д}}^2 + (P_{\text{экр}})_{\text{т}}^2]^{1/2}, \quad (12.33)$$

где  $(P_{\text{экр}})_{\text{д}}$  и  $(P_{\text{экр}})_{\text{т}}$  являются ЭШМ, обусловленными диэлектрическими потерями и шумовыми флуктуациями температуры соответственно.

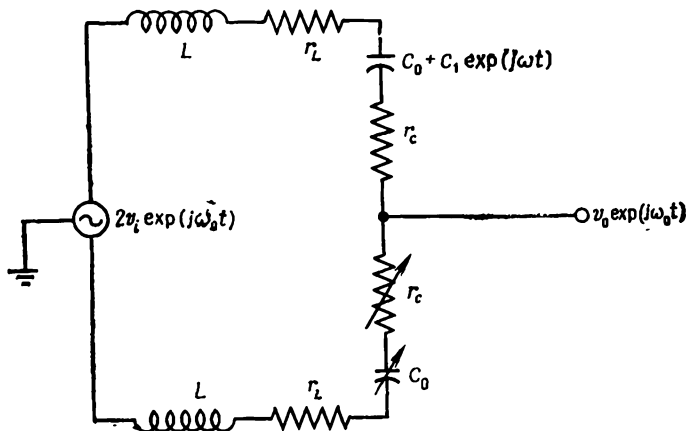


Рис. 12.4. Схема симметричного емкостного болометра с подавлением несущей, питаемого переменным напряжением.

Преимуществом схемы на рис. 12.3 является то, что усиление как сигнала, так и шума пропорционально коэффициенту  $Q_0$ , а ее недостатком — очень большая величина напряжения несущей. Это можно исправить, используя балансную схему на рис. 12.4 и детектируя модулированный сигнал без несущей с помощью фазового детектора.

Поскольку в балансной схеме теряется половина сигнала, а среднеквадратичное значение шума составляет  $2^{-1/2}$  величины, найденной в предыдущем случае, то величина  $P_{\text{экр}}$  в данном случае больше в  $\sqrt{2}$  раз. Ввиду огромного преимущества балансной схемы это увеличение величины  $P_{\text{экр}}$  следует считать приемле-

мым. Для улучшения баланса необходимо использовать емкостной болометр в каждой ветви схемы, но освещать инфракрасным светом только один из них. Это помогает также преодолеть влияние мгновенного напряжения на емкость прибора. Данная проблема еще не решена, но ее остроту можно уменьшить, если поддерживать напряжение  $V_0$  относительно небольшим.

Приведенные здесь рассуждения, вероятно, излишне оптимистичны. Во-первых, следует ожидать, что шум будет несколько превышать тепловой шум диэлектрических потерь, так как мы имеем неравновесное состояние. Во-вторых, это устройство является смесителем, который в принципе способен преобразовывать шум на частоте  $\omega$  в избыточный шум на боковых частотах  $\omega_0 \pm \omega$ . Такой усложненный анализ задачи еще не проведен. И наконец, последнее по порядку, но не по смыслу: имеется шумовой вклад, обусловленный движением границ доменов (шум Баркгаузена); он может поддерживаться малым, если сохранять относительно небольшим напряжение  $V_0$ .

### 12.3. ПРИРОДА ШУМОВ ПРИБОРА

Обсудим теперь природу шумов прибора. С этой целью обратимся к рис. 12.5, на котором изображен сегнетоэлектрический конденсатор с постоянным смещением. Если  $Q$  — заряд на конденсаторе,  $A$  — площадь электрода и  $w$  — расстояние между обкладками, то для диэлектрического смещения  $D$  имеем

$$D = \frac{Q}{A} = \epsilon_0 E + P. \quad (12.34)$$

Так как величина  $E$  поддерживается постоянной, а флуктуации величины  $Q$  вызывают шум прибора, мы видим, что единственным источником шума является флуктуация  $P$ . Поэтому исследуем шум поляризации более детально.

Поскольку  $Q = A(P + \epsilon_0 E)$ , имеем

$$I(t) = \frac{d}{dt}(AP). \quad (12.35)$$

Выполняя анализ Фурье, получим

$$i_n = j\omega AP_n \text{ или } S_I(f) = \omega^2 A^2 S_p(f). \quad (12.35a)$$

Рассмотрим далее задачу при нулевом внешнем поле. Тогда

$$S_I(f) = 4kT(\omega C_0 \operatorname{tg} \delta) \text{ или } S_p(f) = \frac{4kT}{\omega A^2} C_0 \operatorname{tg} \delta. \quad (12.36)$$

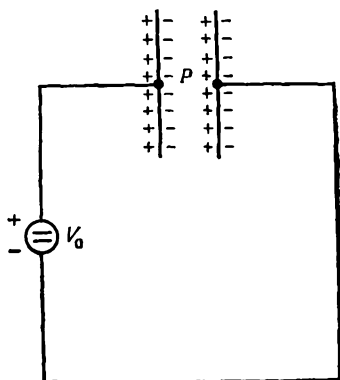


Рис. 12.5. Сегнетоэлектрический конденсатор с постоянным смещением, проявляющий поляризацию  $P$ .

Положим теперь, что  $\epsilon = \epsilon' + j\epsilon''$ , тогда  $C_0 = \epsilon' \epsilon_0 A / \omega$  и  $\operatorname{tg} \delta = \epsilon'' / \epsilon'$ , где  $\epsilon'$  и  $\epsilon''$  — вещественная и мнимая части комплексной диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  соответственно ( $\epsilon''$  в данном случае будет зависеть от частоты). Отсюда

$$S_p(f) = \frac{4kT\epsilon_0\epsilon''(\omega)}{\omega V}, \quad (12.36a)$$

где  $V = A\omega$  — объем диэлектрика. Поэтому результирующая флуктуация поляризации имеет вид

$$\overline{\Delta P^2} = \int_0^\infty S_p(f) df = \frac{4kT\epsilon_0}{V} \int_0^\infty \frac{\epsilon''(\omega) df}{\omega} = \frac{kT\epsilon_0(\epsilon_s - 1)}{V}, \quad (12.37)$$

где  $\epsilon_s$  — статистическая диэлектрическая постоянная в соответствии с соотношением Крамерса—Крёнига для диэлектриков

$$\epsilon_s - 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\epsilon''(\omega) d\omega}{\omega}. \quad (12.37a)$$

Равенство (12.36a) справедливо при равновесии, т. е. при нулевом поле.

В неравновесном случае величина  $\epsilon''$  становится зависимой от электрического поля, и, кроме того, может генерироваться избыточный шум. Эта задача еще не решена теоретически.

О пирозлектрических детекторах и емкостных болометрах см. также работу [32].

---

## ШУМ В ТЕЛЕВИЗИОННЫХ ПЕРЕДАЮЩИХ ТРУБКАХ

В этой главе будут рассмотрены различные варианты телевизионных передающих трубок, такие, как ортикон с переносом изображения (разд. 13.1), видикон (разд. 13.2) и видикон на вторичной электронной проводимости (разд. 13.3). В разд. 13.4 обсуждаются сканируемые датчики изображения типа многорядных решеток фотодиодов и датчиков изображения на приборах с зарядовой связью. Разд. 13.5 посвящен пироэлектрическому видикону.

### 13.1. ОРТИКОН С ПЕРЕНОСОМ ИЗОБРАЖЕНИЯ

Ортикон с переносом изображения показан на рис. 13.1. Он состоит из фотокатода, стеклянной мишени с помещенным перед ней коллекторным электродом, электронного луча, осуществляющего сканирование мишени и восстанавливающего на ней нулевой потенциал, и диодной системы, осуществляющей умножение обратного луча. Фотоэлектроны фокусируются на стеклянной мишени при помощи фокусирующего электрода; устройства фокусировки электронного луча и направления его к диодной системе не показаны.

Фотокатод находится под потенциалом порядка  $-400$  В, а стеклянная мишень — около  $0$  В, так что фотоэлектроны ускоряются по направлению к стеклянной мишени и выбивают из нее вторичные электроны (коэффициент умножения  $\delta_i > 1$ ). Эти вторичные элек-

троны улавливаются сеткой коллектора и тем самым заряжают стеклянную мишень. Если  $I_p$  — первичный ток, тогда зарядный ток стеклянной мишени равен  $I_p(\sigma_t - 1)$ . Следовательно, заряд на мишени представляет собой точную копию распределения света на фотокатод. Сканирующий луч периодически (30 раз в 1 с<sup>1</sup>)

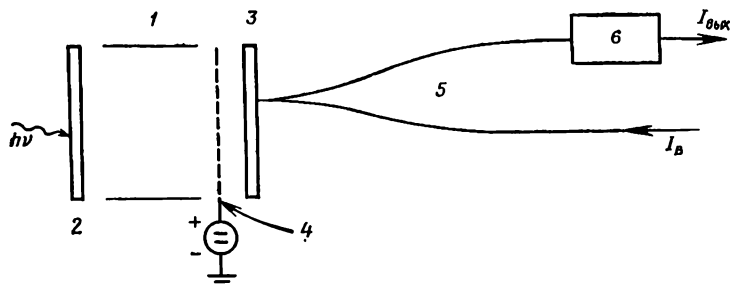


Рис. 13.1. Схема ортиска с переносом изображения (подробности см. в тексте).

1 — фокусирующий электрод; 2 — фотокатод (−400 В); 3 — стеклянная мишень; 4 — сетка коллектора (2В); 5 — сканирующий электронный луч; 6 — динамическая система

возвращает потенциал стеклянной мишени к 0 В, поэтому обратный луч оказывается промодулированным в соответствии с распределением заряда на мишени.

Отношение мощности сигнала к мощности шума на входе равно

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{вх}} = \frac{I_p^2}{2eI_p B} = \frac{I_p}{2eB}, \quad (13.1)$$

так как  $I_p$  проявляет полный дробовой шум. Здесь  $B$  — полоса пропускания.

Стеклянная мишень имеет коэффициент вторичной эмиссии  $\delta_t$  и, следовательно, усиление  $G_t = \delta_t - 1$ . Шум мишени равен

$$\overline{i_t^2} = 2eI_p B G_t^2 + 2eI_p B G_t P_t. \quad (13.2)$$

<sup>1</sup> В соответствии со стандартом, принятым в СССР для телевидения, 25 раз в 1 с. — Прим. ред.



Так как произведение  $(\kappa_i - \delta_i) \delta_i$  является мерой шума вторичной эмиссии, то

$$P_i = (\kappa_i - \delta_i) \delta_i / G(t) = (\kappa_i - \delta_i) \delta_i / (\delta_i - 1). \quad (13.2a)$$

Ток считывающего луча равен  $I_B$ , а обратный ток  $I_R = I_B - G_t I_p$ . Следовательно, шум обратного луча имеет вид

$$\overline{i_r^2} = \overline{i_{r0}^2} + \overline{i_i^2} = 2eI_R B + (G_t + P_i) G_t 2eI_p B, \quad (13.3)$$

поскольку ток  $I_R$  и сам по себе проявляет полный дробовой шум, т. е.

$$\overline{i_{r0}^2} = 2eI_R B.$$

Если диодная система имеет усиление  $G$  и коэффициент шума  $P_m$ , обусловленный шумом вторичной эмиссии<sup>1</sup>, то шум после диодной системы имеет вид

$$\begin{aligned} \overline{i_a^2} &= G^2 (\overline{i_r^2} + 2eI_R P_m B) = \\ &= G^2 [2eI_R B + (G_t + P_i) G_t 2eI_p B + 2eI_R P_m B]. \end{aligned} \quad (13.4)$$

Сигнал содержится в компоненте  $G_t I_p$  тока  $I_R$ ; отсюда ток сигнала равен

$$I_u = G G_t I_p. \quad (13.5)$$

Таким образом, отношение мощности сигнала к мощности шума на выходе составляет

$$\left( \frac{S}{N} \right)_{\text{вых}} = \frac{I_u^2}{\overline{i_a^2}} = \left( \frac{S}{N} \right)_{\text{вх}} \frac{1}{F} = \frac{I_p}{2eB} \frac{1}{F}, \quad (13.6)$$

<sup>1</sup> Так как не все мишени могут иметь те же значения  $\kappa$  и  $\delta$ , коэффициент  $P_m$  необходимо определить в виде

$$P_m = \sum_{j=1}^n \left[ \frac{\kappa_j - \delta_j}{\prod_{k=1}^j \delta_k} \right].$$

где коэффициент шума системы  $F$  имеет вид

$$F = \frac{\bar{i}_a^2}{I_a^2} \frac{I_p}{2eB} = \frac{I_R + G_t(G_t + P_t) I_p + P_m I_R}{G_t^2 I_p}. \quad (13.6a)$$

Подставляя значение  $I_R$ , находим

$$\begin{aligned} F &= \frac{I_B(1 + P_m) + G_t^2 I_p + G_t(P_t - P_m - 1) I_p}{G_t^2 I_p} = \\ &= 1 + \frac{P_t - P_m - 1}{G_t} + \frac{1 + P_m}{M G_t}, \end{aligned} \quad (13.7)$$

где

$$M = \frac{I_B - I_R}{I_B} = \frac{G_t I_p}{I_B} \quad (13.7a)$$

представляет собой глубину модуляции считывающего луча.

Обычно величина  $M$  крайне мала, и в выражении (13.7) преобладает последний член. Это происходит из-за наличия распределения скоростей электронов в сканирующем луче и высокого коэффициента отражения стеклянной мишени для медленных электронов.

## 13.2. ВИДИКОН

В видиконе свет через прозрачный проводящий электрод поступает на фотопроводник, который при этом становится проводящим (рис. 13.2). К коллекторному электроду прикладывается напряжение  $V$  порядка 10—20 В, что вызывает появление заряда на поверхности фотопроводника. Эта поверхность сканируется электронным лучом, который восстанавливает нулевой потенциал поверхности в темпе 30 раз в 1 с.

Пусть свет порождает  $N$  электронов в секунду (мы полагаем, что дырки мгновенно захватываются ловушками), тогда фототок, если  $L$  — толщина фотопроводника, а  $\mu$  — подвижность носителей, равен

$$I = \frac{eV\mu}{L^2} \bar{N}. \quad (13.8)$$

Следовательно, заряд  $Q$ , переносимый за период кадровой развертки  $\tau_f$  ( $= 1/30$  с), описывается формулой

$$Q = I\tau_f = \frac{eV\mu}{L^2} \bar{N}\tau_f. \quad (13.8a)$$

Положим теперь, что сканирующий луч воздействует на мишень в течение интервала времени  $\tau_d$  и что луч

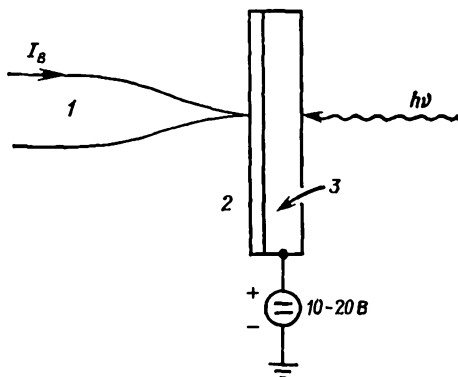


Рис 13.2. Схема видикона.

1 — сканирующий электронный луч; 2 — фотопроводник; 3 — прозрачный электрод

полностью разряжает мишень за время  $\tau'_d < \tau_d$ . Переносимый заряд равен  $I_B\tau'_d$  и, следовательно,

$$I_B\tau'_d = I\tau_f, \text{ или } \tau'_d = \frac{I}{I_B}\tau_f. \quad (13.9)$$

Отсюда ток, протекающий во внешней цепи в течение времени разряда  $\tau'_d$ , имеет вид

$$I_0 = \frac{I\tau_f}{\tau'_d} = I_B. \quad (13.9a)$$

Обратимся далее к шуму. Если число  $N$  случайно изменяется на величину  $\Delta N$ , то изменение тока составляет

$$\Delta I = \frac{eV\mu}{L^2} \Delta N, \quad (13.10)$$

и, следовательно, флуктуация  $\Delta Q_t$  переносимого заряда равна

$$\Delta Q_t = \int_0^{\tau_f} \Delta I(t) dt = \frac{eV\mu}{L^2} \int_0^{\tau_f} \Delta N(t) dt. \quad (13.11)$$

Если фотоэлектроны имеют постоянную времени  $\tau$  ( $\tau \ll \tau_f$ ) и  $s = v - u$ , то

$$\begin{aligned} \overline{\Delta Q_t^2} &= \left( \frac{eV\mu}{L^2} \right)^2 \int_0^{\tau_f} \int_0^{\tau_f} \overline{\Delta N(u) \Delta N(v)} du dv = \\ &= \left( \frac{eV\mu}{L^2} \right)^2 \tau_f \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Delta N^2} e^{-|s|/\tau} ds = 2 \left( \frac{eV\mu}{L^2} \right)^2 \overline{\Delta N^2} \tau_f \tau = \\ &= \left( \frac{eV\mu}{L^2} \right)^2 \tau \bar{N} \tau_f, \end{aligned} \quad (13.12)$$

поскольку  $\overline{\Delta N^2} = 1/2 \bar{N}$ , как показано в конце настоящего раздела. В силу формулы (13.9) это выражение можно переписать в виде

$$\overline{\Delta Q_t^2} = \frac{eV\mu}{L^2} I \tau \tau_f = \frac{eV\mu}{L^2} I_B \tau'_d \tau. \quad (13.12a)$$

Флуктуация заряда, осаждаемого лучом, составляет

$$\Delta Q_B = \int_0^{\tau'_d} \Delta I_B(t) dt = e \int_0^{\tau'_d} \Delta N_B(t) dt, \quad (13.13)$$

где  $\Delta N_B(t)$  — флуктуация скорости прибывающих электронов луча. Отсюда

$$\begin{aligned} \overline{\Delta Q_B^2} &= e^2 \int_0^{\tau'_d} \int_0^{\tau'_d} \overline{\Delta N_B(u) \Delta N_B(v)} du dv = \\ &= e^2 \overline{\Delta N_B^2} \int_0^{\tau'_d} \int_0^{\tau'_d} \delta(u - v) du dv = e^2 \bar{N}_B \tau'_d = e I_B \tau'_d, \end{aligned} \quad (13.14)$$

так как  $\overline{\Delta N_B^2} = \overline{N_B}$ , поскольку шум является дробовым. Поэтому полный шум равен

$$\overline{\Delta Q_{\text{полн}}^2} = \overline{\Delta Q_i^2} + \overline{\Delta Q_B^2} = eI_B \tau_d \left[ 1 + \frac{V\mu\tau}{L^2} \right] = eI_B \tau_d (1+G), \quad (13.15)$$

где  $G = \tau/\tau_{\text{пр}}$  — коэффициент усиления фотопроводника, а  $\tau_{\text{пр}} = L^2/V\mu$  — время пролета электронов.

Таким образом, флуктуация  $\Delta I_i$  выходного тока имеет средний квадрат

$$\overline{\Delta I_i^2} = \frac{\overline{\Delta Q_{\text{полн}}^2}}{\tau_d'^2} = \frac{eI_B}{\tau_d'} (1+G) = \frac{eI_B}{\tau_d'} \Gamma, \quad (13.16)$$

где

$$\Gamma = 1 + G. \quad (13.16a)$$

Читатель может рассматривать отношение  $eI_B/\tau_d'$  как дробовой шум луча на временном интервале  $\tau_d'$ , тогда как коэффициент  $\Gamma$  учитывает влияние шума мишени.

Докажем в заключение соотношение  $\overline{\Delta N^2} = (1/2) \overline{N} = (1/2) N_0$ , где  $N_0$  — равновесное значение  $N$ . Мы знаем, что  $\overline{\Delta N^2} = g(N_0) \tau$ . Однако  $g(N_0) = r(N_0) = \rho N_0^2 = Q$ . Поскольку по определению  $\tau = 1/(2\rho N_0)$ , имеем  $\overline{\Delta N^2} = Q\tau = (1/2) N_0$ .

### 13.3. ВИДИКОН СО ВТОРИЧНОЙ ЭЛЕКТРОННОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ

Схема видикона данного типа показана на рис. 13.3. Он похож на обычный видикон тем, что по-прежнему имеется мишень, которая сканируется электронным лучом, а заряд, осаждаемый лучом, считывается на выходном электроде.

Мишень состоит из тонкого слоя  $Al_2O_3-Al$ , на который осажден пористый слой  $KCl$ . Первичные электроны с энергией около 10 кВ, поступающие с фотокатода, проходят через слои  $Al_2O_3$  и  $Al$  на слой  $KCl$ , где они образуют большое число вторичных электро-

нов, которые собираются выравнивающей сеткой видеиконной пушки. Таким образом, первичный луч умножается слоем КС1 приблизительно в 200 раз. В результате умноженный первичный шум становится основным источником шума.

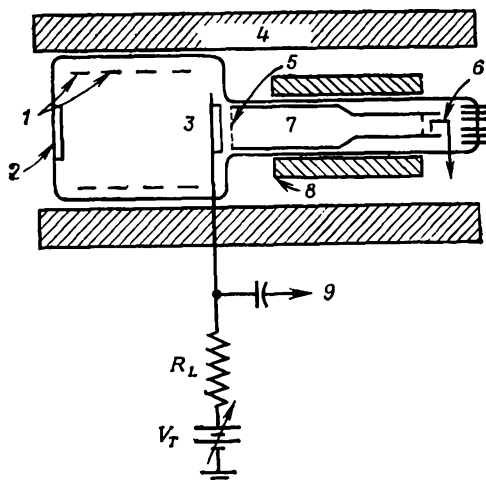


Рис 13.3. Схема устройства видеикона со вторичной электронной проводимостью [4, 33].

1 — фокусирующие электроды; 2 — фотокатод ( $-10$  кВ); 3 — ВЭП-мишень; 4 — фокусирующая катушка; 5 — выравнивающая сетка; 6 — катод; 7 — видеиконная пушка; 8 — отклоняющие катушки; 9 — видеосигнал.

Пусть  $I_{\text{перв}}$  — первичный, а  $I$  — вторичный токи. Согласно теореме о дисперсии, имеем

$$I = I_{\text{перв}} \bar{a}, \quad S_I(f) = 2eI_{\text{перв}} \bar{a}^2, \quad (13.17)$$

где  $\bar{a} = \delta$  является коэффициентом вторичной эмиссии. Так как  $\Gamma = \bar{a}^2 / (\bar{a})^2$  — коэффициент возрастания шума, можно записать

$$S_I(f) = 2eI_{\text{перв}} \delta^2 \Gamma. \quad (13.17a)$$

Это тот шум, который обнаруживается видеиконом.

Теперь следует внести поправку на то, что не все исходные электроны заканчивают свой путь в слое КС1.

Пусть доля теряемых электронов составляет  $1 - \lambda$ . Главным источником потерь является обратное рассеяние. Тогда ток, поступающий в слой KCl, равен  $\lambda I_{\text{перв}}$ , и, следовательно,

$$I = \lambda \bar{\lambda} I_{\text{перв}} = \delta' I_{\text{перв}}, \quad S_I(f) = 2e\lambda I_{\text{перв}} \delta^2 \Gamma = 2eI_{\text{перв}} \delta'^2 \Gamma', \quad (13.18)$$

так что

$$\delta' = \lambda \delta, \quad \Gamma' = \Gamma/\lambda. \quad (13.18a)$$

Здесь  $\delta'$  — измеренный коэффициент умножения, а  $\Gamma'$  — измеренный коэффициент возрастания шума. Для световых мишеней типа Al—Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> коэффициент  $\lambda$  должен быть относительно близок к единице при высоких энергиях.

Тимм [26] обнаружил, что коэффициент  $\Gamma'$  относительно велик при низких первичных энергиях (величины  $\delta'$  и  $\lambda$  малы), убывая приблизительно до 1,5—2 при больших первичных энергиях (где величина  $\delta'$  большая, а величина  $\lambda$  близка к единице). Это примерно то, что следовало ожидать.

## 13.4. ТВЕРДОТЕЛЬНЫЕ ДАТЧИКИ ИЗОБРАЖЕНИЯ

Были предприняты значительные усилия с целью замены мишени на основе фотоэмиссии и фотопроводимости приборами на основе  $p - n$ -перехода. Последние разработки привели к появлению фотодиодных решеток, которые могут опрашиваться последовательно. Обширный обзор достижений в этой области дан в работе Веймера [34].

### 13.4.1. ПРИНЦИП ДЕЙСТВИЯ

На рис. 13.4 изображена мишень на основе кремниевых фотодиодов для камерного видикона со считыванием электронным лучом. Мишень состоит из решетки, содержащей около  $10^6$  элементарных фотодиодов, заполненных диффузией в тонкую кремниевую пластинку,

которая освещается со стороны, противоположной плоскости размещения диодов. В течение времени интегрирования  $p$ -область диода накапливает дырки; эти области впоследствии разряжаются электронным лучом, что обеспечивает появление на выходе видеосиг-

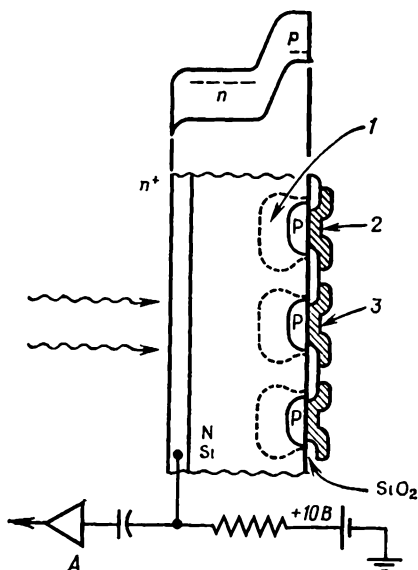


Рис. 13.4. Поперечное сечение типичной мишени из кремниевых фотодиодов для камерного видикона [34].

1 — объединенная область; 2 — площадки, на которые падает луч; 3 — электронный луч.

нала, пригодного для усиления. Спектральная характеристика мишени охватывает как диапазон видимых лучей, так и ближнюю инфракрасную область.

Рис. 13.5 показывает элемент датчика изображения на МОП-фотодиодах. Источковый электрод прибора в данном случае изолирован и действует как фотодиод, накапливающий дырки в течение времени интегрирования. Затвор обычно отключен, однако к нему периодически прикладывается сканирующий импульс, кото-



рый соединяет исток со стоком, а это позволяет заряду дырок, запасенному в истоке, перемещаться к стоку, что приводит к формированию выходного видеоимпульса. Совершенно очевидно, что эти чувствительные элементы можно объединить в решетку и опрашивать один за другим.

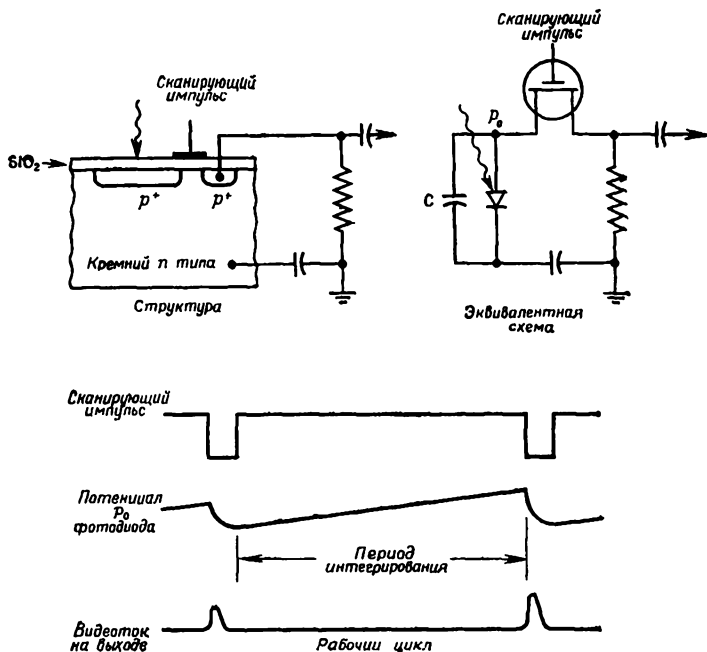


Рис. 13.5. Структура, эквивалентная схема и рабочий цикл элемента датчика изображения на МОП-фотодиоде [34].

На рис. 13.6 приведен третий вариант, использующий решетку МОП-конденсаторов. Его принцип действия основан на том, что МОП-конденсатор, получаемый путем нанесения на кремниевый полупроводящий брусок изолирующего слоя и металлического затвора, может служить в качестве интегрирующего фотоэлемента подобно диффузионному фотодиоду, если подать

на затвор смещение, обеспечивающее обеднение поверхности полупроводника. Освещение этой области приводит к накоплению неосновных носителей на поверхности раздела полупроводник—изолятор. Накопленные заряды могут перемещаться в поперечном направлении за счет переноса заряда к прилегающему элек-

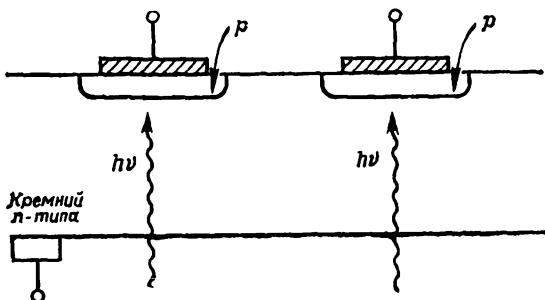


Рис. 13.6. Датчик изображения, использующий МОП-конденсаторы.

троду или за счет инжекции заряда обратно в объем полупроводника. Фотоземента на МОП-конденсаторах размещаются на тонкой кремниевой пластинке и освещаются через кремний для предотвращения перехвата света металлическим затвором

На рис. 13.7 показана схема многоканального опроса однострочного датчика изображения, элементы которого состоят из МОП-фотодетекторов (а) или емкостных фотодиодов с инжекцией заряда (б). Такое решение без труда можно распространить на случай двумерных решеток.

МОП-конденсаторы, использованные в схеме рис. 13.6, известны как приборы с управлением по заряду (ПУЗ). В двумерных решетках из таких приборов заряд переносится от одного электрода к другому путем последовательного опроса. Наиболее серьезные потери сигнала вызываются нарушением переноса всего сигнального пакета от одного каскада к другому в течение одного рабочего цикла. В соответствии с этим

короткий импульс сигнала будет затухать и сдвигаться по фазе, по мере того как остаточные заряды переносятся в течение последующих рабочих циклов. Более длинный входной импульс достиг бы полной амплитуды, но при

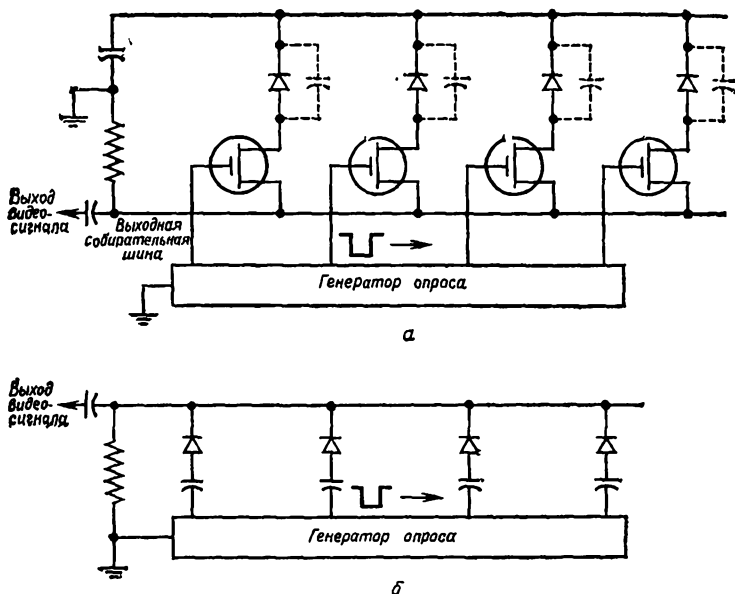


Рис. 13.7. Многоканальный опрос однострочного датчика изображения, элементы которого представляют собой различные устройства [34].

а — МОП-фотодетекторы; б — емкостные фотодиоды с нижечекцией заряда

плохой частотной характеристике. Например, когда должны совершаться тысячи переносов и желательно нормальное телевизионное разрешение, частичные потери на перенос не должны превышать  $10^{-4}$  при частоте опроса 10 МГц.

Наиболее серьезным источником потерь является захват на быстрых поверхностных состояниях ПУЗ. Чтобы справиться с этим, добавляют остаточный заряд к каждому ПУЗ, используя так называемый «пухлый нуль», так что большинство быстрых состояний на гра-

нице раздела постоянно занято. Рис. 13.8 иллюстрирует результирующее улучшение частичных потерь на один затвор при более низких частотах опроса.

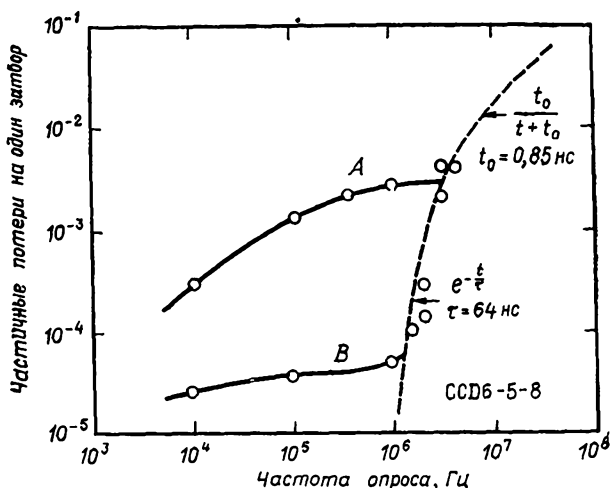


Рис. 13.8 Влияние уровня постоянной составляющей тока («пухлый нуль») на уменьшение потерь переноса в кремниевом управляемом по затвору ПУЗ-регистре с двухфазным поверхностным каналом [34].

Кривая A описывает случай отсутствия тока «пухлого нуля»; кривая B соответствует компенсирующему току, поставляющему 50% полного заряда потенциальной ямы.

### 13.4.2. ШУМ

Обсудим теперь вкратце шумовые свойства этих приборов. Типичная потенциальная яма, возникающая во время заряда приборов, содержит около  $N_j = 10^6$  носителей; дробовой шум, связанный с этим сигналом, должен соответствовать  $N_s^{1/2} = 10^3$  носителей, что вполне допустимо.

Чтобы ввести фон по типу «пухлого нуля», можно использовать входную цепь с МОП-затворами (рис. 13.5 и 13.6). Тепловой шум порождает неустранимую неопределенность в величине компенсирующего заряда в первой потенциальной яме. Полагая, что выполняется

закон равного распределения энергии по степеням свободы, получим неопределенность

$$(\overline{N_n^2})^{1/2} = \frac{1}{e} (kTC)^{1/2} = 400 (C_{пф})^{1/2}, \quad (13.19)$$

где  $C$  — емкость МОП-конденсатора, а  $C_{пф}$  — ее значение в пикофарадах.

Эта оценка, вероятно, излишне пессимистична, ибо в разд. 12.1.3 мы видели, по каким причинам фактический шум может быть несколько ниже. Тем не менее она указывает, что влияние этого источника шума сравнимо со вкладом источника дробового шума.

Другим источником шума является темновый ток утечки. Величина этого эффекта сильно зависит от температуры.

Обзор Веймера [34] содержит много ссылок, касающихся этих и подобных задач.

### 13.5. ПИРОЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ВИДИКОН

В пироэлектрическом видиконе [35] используется закрепленная в опоре пироэлектрическая мишень, освещаемая инфракрасными лучами и сканируемая элек-

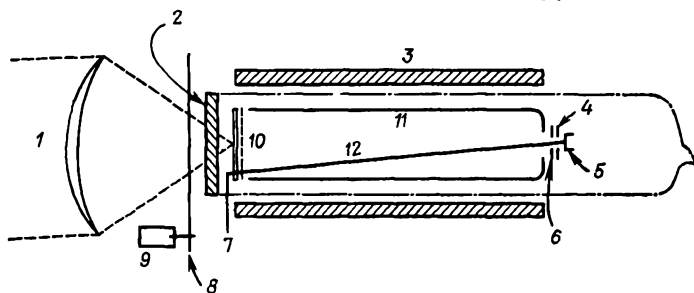


Рис. 13.9. Пироэлектрический видикон [35].

1 — германиевая линза; 2 — мишень; 3 — фокусирующие и отклоняющие катушки; 4 — сетка; 5 — катод; 6 — первый анод; 7 — сигнальный электрод; 8 — германиевое окно; 9 — прерыватель; 10 — выравнивающая сетка; 11 — кольцевой анод; 12 — электронный луч

тронным лучом (рис. 13.9). Существуют два режима работы: а) режим с прерыванием и б) режим вибрации. В режиме с прерыванием падающее излучение периоди-

чески прерывается, а камера неподвижна; прерывание в данном случае ведет к зависящим от времени изменениям температуры, а отсюда и к зависящему от времени напряжению на каждом элементе мишени. В режиме вибрации падающее излучение не прерывается, но камера движется, вызывая тем самым зависящее от времени напряжение на каждом элементе мишени.

Так как мишень непроводящая, результирующий ток, протекающий через нее, в среднем должен равняться нулю. Тем не менее нам хотелось бы обеспечить считывание лучом. Имеются два способа считывания: анодная и катодная стабилизации. При считывании методом катодной стабилизации в трубке содержится некоторое количество остаточного газа, что приводит к накоплению положительных ионов на мишени, сообщаящих ей небольшой положительный потенциал. Электронный луч как раз нейтрализует этот поверхностный заряд мишени, обеспечивая считывание как положительных, так и отрицательных напряжений сигнала. При считывании методом анодной стабилизации поверхность мишени заряжена положительно, так что она эмиттирует вторичных электронов больше, чем получает первичных. Поэтому ее потенциал стабилизируется при напряжении, практически равном напряжению выравнивающей сетки; как и ранее, можно считать как положительные, так и отрицательные сигналы.

Поперечный перенос тепла в мишени уменьшает локальные изменения температуры и «размывает» тепловое изображение. Это явление описывается количественно при помощи *функции модуляционного переноса* (ФМП), которая выражает частичное ослабление тока сигнала вследствие теплопроводности. Для режима прерывания [36]

$$(\text{ФМП})_c = [1 + (2\pi kn^2/f)^2]^{-1/2}, \quad (13.20)$$

а для режима вибрации [37]

$$(\text{ФМП})_p = [1 + (2\pi kn/v)^2]^{-1/2} \frac{\sin \pi nvt/f}{\pi nvt/f}. \quad (13.21)$$

Здесь  $k$  — коэффициент тепловой диффузии (в  $\text{мм}^2/\text{с}$ ),  $n$  — разрешение изображения в размерности пара строк

на 1 мм,  $f$  — частота прерывания (в Гц),  $v$  — скорость (в мм/с), с которой изображение движется поперек мишени, а  $t_f = 16,6$  м/с. Член  $|\sin(\pi n v t_f)| / (\pi n v t_f)$  описывает эффективность вибрации при считывании, которая не зависит от коэффициента тепловой диффузии.

Преимущество пироэлектрического видикона состоит в том, что мишень не нуждается в охлаждении и может работать в диапазоне 10—15 мкм, в котором наблюдается максимальная интенсивность теплового излучения при комнатной температуре. Контрастность достигается либо изменениями коэффициента эмиссии, либо изменениями температуры. Таким образом удастся различить разность температур вплоть до десятых долей градуса.

## ФОТОСМЕШЕНИЕ

Лазеры вырабатывают когерентные световые сигналы. По этой причине методы обработки сигналов, которые ранее использовались на радиочастотах и в диапазоне СВЧ, становятся доступными и в оптическом диапазоне.

Одним из таких методов является оптическое гетеродинирование или фотосмешение. Этот метод обеспечивает большее усиление по сравнению с прямым детектированием, так что шум последующего усилителя гораздо менее существен. Точно так же, как в приемнике прямого усиления или в гетеродинном приемнике (разд. 14.1), ЭШМ в этом случае выражается в Вт/Гц, тогда как при прямом детектировании величина  $P_{\text{экв}}$  выражается в Вт/Гц<sup>1/2</sup> (гл. 10). Более подробно смесители на фотодиодах, фотоэлементах и фотопроводимости обсуждаются в разд. 14.2. В разд. 14.3 рассматривается точечно-контактный смеситель.

### 14.1. ЭКВИВАЛЕНТНАЯ ШУМОВАЯ МОЩНОСТЬ ГЕТЕРОДИННОГО ПРИЕМНИКА

Пусть гетеродинный приемник, работающий в СВЧ-диапазоне, имеет коэффициент шума  $F$ . Тогда шум на частоте  $f$  можно представить эквивалентным генератором входного тока

$$\bar{i}_n^2 = F \frac{4kT \Delta f}{R_s} \quad (14.1)$$



до тех пор, пока отношение  $hf/kT \ll 1$ , и соответствующая эквивалентная располагаемая шумовая мощность

$$P_{\text{рас}} = \frac{1}{4} \bar{i}_n^2 R_s = FkT \Delta f. \quad (14.1a)$$

Следовательно, эквивалентная шумовая мощность имеет вид

$$P_{\text{экв}} = FkT. \quad (14.2)$$

При  $F = 10$ ,  $T = 300$  К величина  $P_{\text{экв}} = 4,1 \times 10^{-20}$  Вт/Гц. Это гораздо лучше, чем при прямом детектировании, при котором было найдено значение  $P_{\text{экв}} = 3 \cdot 10^{-13}$  Вт/Гц<sup>1/2</sup>. Поэтому можно надеяться, что оптическое смещение могло бы обеспечить подобное улучшение.

## 14.2. ФОТОСМЕСИТЕЛЬНЫЕ УСТРОЙСТВА

### 14.2.1. КОЭФФИЦИЕНТ УСИЛЕНИЯ

Предположим, что необходимо обнаружить световое поле  $E_1 \cos \omega_1 t$ . С этой целью соответствующий сигнал и поле накачки  $E_p \cos \omega_p t$  направляются на фотоумножитель, фотодиод, фотоэлемент или элемент на фотопроводимости, а сигнал разностной частоты  $\omega_0 = \omega_1 - \omega_p$  отфильтровывается. Полученный сигнал можно далее усиливать стандартными методами.

Чтобы обеспечить смешение, волновые фронты падающей волны и волны накачки должны быть полностью выровнены, т. е. плоскости постоянной фазы двух волн должны быть строго параллельны. Достижить этого не просто, но возможно при некоторых предосторожностях. Кроме того, необходима система автоподстройки частоты гетеродина, чтобы поддерживать величину  $\omega_0$  постоянной.

Пусть характеристика детектора имеет вид

$$I = AE^2, \quad (14.3)$$

где  $A$  — константа, а  $E = E_1 \cos \omega_1 t + E_p \cos \omega_p t$ ; тогда полный ток равен

$$\begin{aligned} & A(E_1 \cos \omega_1 t + E_p \cos \omega_p t)^2 = \\ & = AE_1^2 \cos^2 \omega_1 t + AE_p^2 \cos^2 \omega_p t + 2AE_1 E_p \cos \omega_1 t \cos \omega_p t = \\ & = \frac{1}{2} AE_1^2 + \frac{1}{2} AE_p^2 + AE_1 E_p \cos(\omega_1 - \omega_p)t + \text{гармоники}. \end{aligned} \quad (14.4)$$

Если бы присутствовал только световой сигнал  $E_1 \cos \omega_1 t$ , то выпрямленный ток был бы равен  $I_1 = (1/2) AE_1^2$ ; если бы присутствовал только сигнал накачки  $E_p \cos \omega_p t$ , то выпрямленный ток был бы равен  $I_p = (1/2) AE_p^2$ . Благодаря тому, что присутствуют оба сигнала, образуются биения с частотой  $\omega_1 - \omega_p$  и амплитудой

$$I_0 = AE_1 E_p = 2(I_1 I_p)^{1/2}. \quad (14.5)$$

Отсюда коэффициент усиления по мощности в процессе смешения имеет вид

$$G = \frac{(1/2) I_0^2}{I_1^2} = 2 \frac{I_p}{I_1}, \quad (14.6)$$

где величина  $(1/2) I_0^2$  представляет собой средний квадрат сигнала биений.

Поступающий сигнал очень низкого уровня тонет в шуме фононов накачки, и выражение (14.6) теряет смысл.

### 14.2.2. ШУМ В ФОТОСМЕСИТЕЛЕ НА ФОТОДИОДЕ ИЛИ ФОТОУМНОЖИТЕЛЕ

Рассмотрим сначала случай фотодиода. Пусть  $n$  — скорость поступления падающих фотонов, а  $N$  — скорость образования фотоэлектронов. Тогда квантовая эффективность  $\eta = N/n$ , а выражение  $I_1 = eN$  харак-

теризует выпрямленный ток. В отсутствие накачки имело бы место выражение

$$\text{var } N = \eta^2 \text{var } n + \bar{n}\eta(1 - \eta). \quad (14.7)$$

Если  $\text{var } n = \bar{n}$ , то это выражение переходит в

$$\text{var } N = \bar{n}\eta = \bar{N}. \quad (14.7a)$$

Пусть теперь  $N'$  — число электронов, образуемых в процессе фотосмещения. Поскольку усиление  $G$  относится лишь к первому члену выражения (14.7), дисперсия  $N'$  при  $G \gg 1$  имеет вид

$$\text{var } N' = G\eta^2 \text{var } n = G\eta^2\bar{n}, \quad (14.8)$$

так что спектральная плотность флуктуаций тока составляет

$$S'_I(f) = 2e^2 \text{var } N' = 2e^2 G\eta^2\bar{n} = 2e\eta G I_1 = 4\eta e I_p. \quad (14.9)$$

К ней необходимо добавить спектральную плотность шума источника накачки

$$S''_I(f) = 2e I_p. \quad (14.10)$$

Таким образом, полный шум имеет спектральную плотность

$$S_I(f) = S'_I(f) + S''_I(f) = 2e I_p (1 + 2\eta). \quad (14.11)$$

Чтобы проследить влияние шума поступающего сигнала, сравним полный шум  $S_I(f)$  с шумом  $S''_I(f)$ , обусловленным одной лишь накачкой. Тогда

$$\frac{S_I(f)}{S''_I(f)} = 1 + 2\eta. \quad (14.11a)$$

Этот закон наблюдали Ли и Ван дер Зил в кремниевом фотодиоде на волне 6328 Å [38].

В заключение рассмотрим отношение мощности сигнала к мощности шума и ЭШМ  $P_{\text{эШМ}}$ . Если бы присутствовал только входной сигнал, шум при прямом

детектировании составил бы  $S_1(f) = 2eI_1$ , а взятое по мощности отношение сигнал/шум имело бы вид

$$\frac{S}{N} = \frac{I_1^2}{S(f)B} = \frac{I_1}{2eB}, \quad (14.12)$$

где  $B$  — полоса пропускания. Для фотосмесителя вместо этого имеем

$$\frac{S}{N} = \frac{(1/2) I_0^2}{S_1(f)B} = \frac{2I_1I_p}{2eI_p(1+2\eta)B} = \frac{2}{1+2\eta} \frac{I_1}{2eB}, \quad (14.13)$$

т. е. отношение сигнал/шум изменяется в  $2/(1+2\eta)$  раза, уменьшаясь от значения 2 при  $\eta \approx 0$  до  $2/3$  при  $\eta = 1$ . Отношение сигнал/шум в процессе смешения никогда не изменяется особенно сильно. Однако преимущество смесителя заключается в том, что он увеличивает сигнал и шум до такой степени, что шум последующего усилителя становится во много раз менее существенным.

Если  $P_1$  — мощность падающего излучения, то  $P_1/eV_{ph}$  — скорость поступления фотонов с частотой  $\nu$ , где  $eV_{ph} = h\nu$ . Поэтому  $I_1 = e\eta P_1/eV_{ph}$  и отношение сигнал/шум в единичной полосе частот равно

$$\frac{S}{N} = \frac{2\eta}{1+2\eta} \frac{P_1}{2eV_{ph}}, \quad \text{или} \quad P_{\text{экв}} = eV_{ph} \frac{1+2\eta}{\eta}. \quad (14.14)$$

Возьмем в качестве примера величины  $V_{ph} = 2,0$  эВ и  $\eta = 0,50$ , тогда величина  $P_{\text{экв}} = 1,3 \cdot 10^{-18}$  Вт/Гц.

Это рассуждение справедливо для твердотельного фотодиода и диода с фотоэмиссией. Для фотоумножителя результат слегка отличается, поскольку шум умножения в известной степени ухудшает отношение сигнал/шум. Выходной шум фотоумножителя с коэффициентом усиления  $\delta^{2n}$  и первичным током  $I_{\text{перв}}$  имеет спектр

$$S_0(f) = 2eI_{\text{перв}}\delta^{2n}\Gamma = 2eI_{\text{перв}}\delta^{2n} + 2eI_{\text{перв}}\delta^{2n}(\Gamma - 1). \quad (14.15)$$

Здесь первый член представляет собой усиленный дробовой шум первичного тока, а второй — шум вторич-

ной эмиссии, в то время как величина  $\Gamma = (\kappa - 1)/(\delta - 1)$  является коэффициентом возрастания шума. Учитывая выражение (14.11) и тот факт, что величина  $I_{\text{перв}}$  равна току накачки  $I_p$ , находим, что для смесителя на фотоумножителе при  $G \gg 1$  справедливо соотношение

$$\begin{aligned} S_I(f) &= 2eI_p(1 + 2\eta)\delta^{2n} + 2eI_p\delta^{2n}(\Gamma - 1) = \\ &= 2eI_p\delta^{2n}(\Gamma + 2\eta). \end{aligned} \quad (14.16)$$

Следовательно, величина

$$P_{\text{экр}} = eV_{ph} \frac{\Gamma + 2\eta}{\eta}. \quad (14.17)$$

При использовании величин  $\delta = 5$  или  $\Gamma = 1,25$ ,  $\eta = 0,10$  и  $V_{ph} = 2,0$  эВ получаем, что  $P_{\text{экр}} = 4,6 \times 10^{-18}$  Вт/Гц.

### 14.2.3. СМЕСИТЕЛЬ НА ФОТОЭЛЕМЕНТЕ

В данном случае выражение для  $S'_I(f)$  остается справедливым, однако, поскольку в фотоэлементе протекают два равных и противоположно направленных тока, причем каждый дает дробовой шум,

$$S''_I(f) = 4eI_p. \quad (14.18)$$

Следовательно, при  $G \gg 1$

$$S_I(f) = S'_I(f) + S''_I(f) = 2eI_p(2 + 2\eta) \quad (14.19)$$

и

$$\frac{S}{N} = \frac{^{(1/2)} I_0^2}{S_I(f) B} = \frac{2}{2 + 2\eta} \frac{I_1}{2eB} \quad (14.20)$$

имеем

$$P_{\text{экр}} = eV_{ph} \frac{2 + 2\eta}{\eta}. \quad (14.21)$$

Величина сомножителя  $2/(2 + 2\eta)$  меняется от 1,0 при  $\eta = 0$  до  $1/2$  при  $\eta = 1$ . Подстановка величин  $V_{ph} = 2,0$  эВ,  $\eta = 0,50$  дает

$$P_{\text{экр}} = 1,9 \cdot 10^{-18} \text{ Вт/Гц.}$$

#### 14.2.4. ФОТОСМЕСИТЕЛЬ НА ФОТОПРОВОДИМОСТИ

Здесь необходимо перейти от токов к скоростям образования. Пусть  $N'$  — скорость, с которой падающий свет образует электронно-дырочные пары, а  $N''$  — скорость образования электронно-дырочных пар светом накачки. Так как скорости генерации и рекомбинации дают равные вклады в шум, можно записать

$$\text{var } N'' = 2\overline{N''}. \quad (14.22)$$

Согласно выражению (14.8), для усиленного фотонного шума при  $G \gg 1$  имеем

$$\text{var } N' = G\eta^2\bar{n} = G\eta\overline{N'_1}, \quad (14.23)$$

где  $\eta = \overline{N'_1}/\bar{n}$ ,  $\bar{n}$  — средняя скорость поступления фотонов, а  $\overline{N'_1}$  — среднее число электронно-дырочных пар, образуемых без смещения. Теперь следует заменить коэффициент  $G$  на

$$G = 2\overline{N''}/\overline{N'_1}, \quad (14.24)$$

поэтому

$$\text{var } N' = 2\eta\overline{N''}. \quad (14.25)$$

Следовательно,

$$\text{var } N = \text{var } N' + \text{var } N'' = (2 + 2\eta)\overline{N''}; \quad (14.26)$$

поэтому отношение полного шума к шуму накачки имеет вид

$$\frac{\text{var } N}{\text{var } N''} = \frac{2 + 2\eta}{2}, \quad (14.26a)$$

т. е. такой же, как в случае фотоэлемента.

Теперь исследуем отношение мощности сигнала к мощности шума. При прямом детектировании среднее число образуемых электронно-дырочных пар равно  $\overline{N'_1}$ , а  $S_N(0) = 2\overline{N'_1}$ . Поэтому отношение сигнал/шум составляет

$$\left(\frac{S}{N}\right)_u = \frac{(\overline{N'_1})^2}{2\overline{N'_1}B} = \frac{\overline{N'_1}}{2B}. \quad (14.27)$$

При смешении квадрат сигнала равен

$$G(\overline{N}_i)^2 = 2\overline{N}''\overline{N}'', \quad (14.28)$$

а шум имеет вид

$$S_N(0) = 2 \operatorname{var} N = 2(2 + 2\eta)\overline{N}'', \quad (14.29)$$

поэтому отношение сигнал/шум описывается выражением

$$\left(\frac{S}{N}\right)_m = \frac{2\overline{N}''\overline{N}_i'}{2(2+2\eta)\overline{N}''B} = \frac{2}{2+2\eta} \frac{\overline{N}_i'}{2B} = \frac{2}{2+2\eta} \left(\frac{S}{N}\right)_d. \quad (14.30)$$

Это то же самое выражение, что и для фотоэлемента, и, следовательно, для смесителя на фотопроводимости имеем

$$P_{\text{экв}} = eV_{ph} \frac{2+2\eta}{\eta}. \quad (14.31)$$

Результаты измерений, проведенных Ли и Ван дер Зилом, согласуются с этой теорией [39]. Для детального ознакомления см. работы [28, 40]. Для твердотельного фотодиода найдено, что

$$P_{\text{экв}} = eV_{ph} \frac{1+2\eta}{\eta}. \quad (14.31a)$$

**Пример.**  $\lambda = 10,6$  мкм, или  $V_{ph} = 0,117$  эВ. Полагая  $\eta = 0,15$ , из выражения (14.31) находим величину  $P_{\text{экв}} = 2,9 \cdot 10^{-19}$  Вт/Гц, что представляет собой превосходный результат. Этот фотосмеситель, естественно, должен охлаждаться.

### 14.3. СМЕСИТЕЛЬ НА ТОЧЕЧНО-КОНТАКТНОМ ДИОДЕ С БАРЬЕРОМ ШОТТКИ

В разд. 10.5.1 мы видели, как точечно-контактные диоды с барьером Шоттки могли работать в качестве детекторов в инфракрасном диапазоне. Посмотрим теперь, как их можно использовать в качестве фотосмесителей в упомянутом частотном диапазоне.

Эквивалентная схема смесителя на точечно-контактном диоде та же, что и схема детектора, показанная на рис. 10.9б. Символ  $C$  — емкость области пространственного заряда,  $g_i$  — проводимость области пространственного заряда, изменяемая пролетными эффектами в этой области, а  $r$  — последовательное сопротивление объема базы диода.

В условиях, когда необходимо учитывать пролетные эффекты в области пространственного заряда, напряжение гетеродина на смесителе должно оставаться относительно малым. Иначе, если время пролета носителей становится приблизительно равным периоду гетеродинного напряжения, практически не будет электронов, достигающих точечного контакта, и, следовательно, не будет никакого смещения. Значительных величин постоянного тока и тока промежуточной частоты можно ожидать только при низком барьере и относительно малых амплитудах напряжения гетеродина  $v_p$ . При выполнении этих условий возможна линейная аппроксимация характеристик смесителя. Тогда можно разложить в ряд Тейлора ток  $I$ , вызванный напряжением  $V$ , приложенным к области пространственного заряда. Если  $V = (V_0 + \Delta V)$ , а отношение  $e\Delta V/kT$  относительно мало, то имеем

$$I = I_{d0} + \left. \frac{dI}{dV} \right|_{V_0} \Delta V + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2I}{dV^2} \right|_{V_0} \Delta V^2 + \dots, \quad (14.32)$$

где  $g_0 = (dI/dV)_{V_0}$  — низкочастотная входная проводимость детектора. Если  $\Delta V = v_p \cos \omega_p t + v_i \cos \omega_i t$ , ток на частоте  $|\omega_p - \omega_i|$  имеет амплитуду

$$\frac{1}{2} \left. \frac{d^2I}{dV^2} \right|_{V_0} v_p v_i. \quad (14.33)$$

Поэтому низкочастотная крутизна преобразования имеет вид

$$g_{o10} = \frac{1}{2} g_0 \left( \frac{d^2I/dV^2}{dI/dV} \right)_{V_0} v_p. \quad (14.34)$$



Из рис. 10.96 и выражения (10.54), заменяя  $v_0$  на  $v_t$ , получаем

$$|v_t|^2 = \frac{8P_a R_a}{[1 + g_t(R_a + r)]^2 + \omega^2 C^2 (R_a + r)^2}, \quad (14.35)$$

где  $P_a = |v_0|^2 / 8R_a$ .

Теперь следует учесть, что процесс гетеродинирования ухудшается пролетными эффектами точно так же, как и процесс детектирования; таким образом, на очень высоких частотах комплексная крутизна преобразования  $Y_{oi}$  должна иметь вид

$$Y_{oi} = g_{oi0} |g(j\omega)|^2. \quad (14.36)$$

Область пространственного заряда имеет низкочастотную проводимость  $g_0 = (dI/dV)_{v_0}$ . Если  $r \ll \ll 1/g_0$ , можно пренебречь влиянием последовательного сопротивления  $r$  на выходной сигнал. Тогда располагаемая мощность выходного сигнала имеет вид

$$(P_{\text{рас}})_{\text{вых}} = \frac{|Y_{oi}|^2 |v_t|^2}{8g_0} = \frac{1}{8} \left( \frac{g_{oi0}}{g_0} \right)^2 |g(j\omega)|^4 g_0 |v_t|^2, \quad (14.37)$$

так что достижимый коэффициент усиления смесителя по мощности равен

$$\begin{aligned} G_{\text{дос}} &= \frac{(P_{\text{рас}})_{\text{вых}}}{P_a} = \\ &= \left( \frac{g_{oi0}}{g_0} \right)^2 |g(j\omega)|^4 \frac{g_0 R_a}{[1 + g_t(R_a + r)]^2 + \omega^2 C^2 (R_a + r)^2}. \end{aligned} \quad (14.38)$$

Теперь шум на выходе в режиме короткого замыкания в частотном интервале  $\Delta f$  имеет средний квадрат величины

$$\overline{i_0^2} = 2eI_{d0} \Delta f = n_0 4kT g_0 \Delta f, \quad \text{где } n_0 = \frac{eI_{d0}}{2kT g_0} \quad (14.39)$$

— отношение шумов на выходе смесителя. Шум усилителя ПЧ можно представить генератором тока

$$\overline{i_a^2} = (F_2 - 1) 4kT g_0 \Delta f, \quad (14.39a)$$

включенным параллельно с  $g_0$ , где  $F_2$  — коэффициент шума усилителя ПЧ при сопротивлении источника, равном  $1/g_0$ . Отсюда полный шум можно представить генератором тока

$$\overline{i_{\text{полн}}^2} = (n_0 + F_2 - 1) 4kTg_0 \Delta f, \quad (14.40)$$

включенным параллельно с  $g_0$ . Следовательно, эквивалентная располагаемая мощность шума на выходе на единицу полосы составляет

$$(P_{\text{экр}})_0 = \frac{\overline{i_{\text{полн}}^2}}{4g_0 \Delta f} = (n_0 + F_2 - 1) kT, \quad (14.40a)$$

а отсюда эквивалентная мощность шума в антенне равна

$$(P_{\text{экр}})_a = \frac{n_0 + F_2 - 1}{G_{\text{дос}}} kT. \quad (14.41)$$

Чтобы сделать величину  $(P_{\text{экр}})_a$  по возможности малой, необходимо всемерно увеличивать коэффициент  $G_{\text{дос}}$ . Это означает, что коэффициент ухудшения за счет времени пролета  $|g(j\omega)|^2$  необходимо сделать по возможности близким к единице, а удельное сопротивление  $\rho$  материала базы сделать по возможности малым; и того и другого можно достичь высоким уровнем легирования. Как и в детекторе, выгодно делать площадь контакта  $A$  настолько малой, насколько это возможно, например  $A = 10^{-11}$  см<sup>2</sup>, однако не следует заходить столь далеко, чтобы получалось  $r > R_a$ .

До сих пор мы рассматривали случай линейного гетеродинирования, при котором коэффициент  $G_{\text{дос}}$  изменяется как квадрат амплитуды гетеродина  $u_p$ . Поскольку процесс смещения ухудшается при очень больших напряжениях гетеродина, должно существовать значение  $u_p$ , при котором коэффициент  $G_{\text{дос}}$  имеет оптимальную величину. Эту задачу оптимизации трудно решить теоретически, однако ее легко решить экспериментально, поскольку всегда можно установить величину  $u_p$  по максимуму выходного сигнала промежуточной частоты.

Наилучшие результаты по-прежнему ожидаются при использовании точечного детектора из GaAs  $n$ -типа. При уровнях легирования порядка  $10^{19}$  см $^{-3}$  хорошее смещение должно достигаться вплоть до длины волны 10 мкм.

Располагаемая мощность антенны  $P_a$  обычно меньше располагаемой мощности  $P_i$  падающего излучения. Подставляя  $P_a = aP_i$ , мы должны иметь  $a < 1$ ; следовательно, эквивалентная входная шумовая мощность падающего пучка равна

$$(P_{\text{эв}})_i = \frac{(P_{\text{эв}})_a}{a}. \quad (14.42)$$

Более подробно о фотосмещении см. работы [28, 40].

---

## УСИЛЕНИЕ СВЕТА С ПОМОЩЬЮ КАТОДНОЙ ЛЮМИНЕСЦЕНЦИИ

В данной главе будет рассмотрен интересный способ усиления света, основанный на катодной люминесценции. Он заключается в том, что на фотокатоде фокусируется свет, приходящий от слабо освещенного объекта. Под влиянием этого света фотокатод испускает фотоэлектроны, которые ускоряются разностью потенциалов около 20 кВ и фокусируются на люминесцентном экране. В этих условиях световая отдача люминесцентного экрана больше светового потока, возбуждающего фотокатод.

Чтобы понять шумовые свойства такого усилителя света, необходимо знать шум, генерируемый в процессе люминесценции. Он обсуждается в разд. 15.1, а разд. 15.2 посвящен применениям усилителя света с помощью катодной люминесценции.

### 15.1. ШУМ СВЕТА КАТОДНОЙ ЛЮМИНЕСЦЕНЦИИ [41]

Пусть  $n_p$  будет число электронов, попадающих на люминесцентный материал за 1 с, и пусть поступающие электроны проявляют полный дробовой шум, т. е.  $\text{var } n_p = \bar{n}_p$ . Допустим, что  $i$ -й электрон образует  $P_i$  фотонов, так что в данную секунду образуется

$$N = \sum_i^{n_p} P_i \quad (15.1)$$

фотонов. Отсюда, если  $\bar{P}_i = P$  и  $\text{var } P_i = \text{var } P$  для всех  $i$ , то теорема о дисперсии предсказывает, что

$$\bar{N} = \bar{n}_p \bar{P}, \text{ var } N = (\bar{P})^2 \text{ var } n_p + \bar{n}_p \text{ var } P = \bar{n}_p P^2. \quad (15.2)$$

Если бы не было шума, генерируемого в процессе люминесценции, то мы имели бы

$$\text{var } N = \bar{n}_p (\bar{P})^2. \quad (15.2a)$$

Таким образом, запишем

$$\text{var } N = \bar{n}_p (\bar{P})^2 \Gamma, \text{ где } \Gamma = \frac{\bar{P}^2}{(\bar{P})^2} \quad (15.26)$$

является коэффициентом возрастания шума. Следовательно, низкочастотный шум равен

$$S_N(0) = 2 \text{ var } N = 2 \bar{n}_p (\bar{P})^2 \Gamma. \quad (15.3)$$

Рассчитаем теперь частотную зависимость фотонного шума. С этой целью необходимо более подробно определить модель люминесцентного материала. Рассмотрим нетипичный люминесцентный материал (подобный ZnS) следующим образом. Поступающие электроны генерируют электронно-дырочные пары; дырки немедленно захватываются, а свободные электроны рекомбинируют с захваченными дырками в процессе излучения света. Потерями на безызлучательные переходы через центры рекомбинации пренебрегаем. Таким образом, электроны и дырки присутствуют в одинаковых количествах, обозначаемых символом  $n$ . Уравнение для скорости процесса генерации—рекомбинации имеет вид

$$\frac{dn}{dt} = g_0 - Cn^2 + g(t) - r(t), \quad (15.4)$$

где  $g_0$  — результирующая скорость генерации электронно-дырочных пар, а  $r(n) = Cn^2$  — скорость рекомбинации; здесь  $g_0$  и  $C$  — постоянные величины. Наконец,  $g(t)$  и  $r(t)$  — случайные функции, описывающие флуктуации скоростей генерации и рекомбинации соответственно. Равновесное значение  $n_0$  коли-

чества свободных электронов получается из соотношения

$$g_0 = Cn_0^2, \quad (15.4a)$$

а  $g(t)$  и  $r(t)$  имеют спектры

$$S_g(f) = 2 \operatorname{var} N = 2\bar{n}_p(\bar{P})^2\Gamma, \quad (15.4b)$$

$$S_r(f) = 2r(n_0) = 2\bar{N} = 2\bar{n}_p\bar{P}.$$

Интересуясь малыми флуктуациями  $\Delta n$  величины  $n$  относительно  $n_0$ , находим из разложения выражения (15.4) в ряд Тейлора в окрестности точки  $n_0$

$$\frac{d\Delta n}{dt} = -\frac{\Delta n}{\tau} + g(t) - r(t), \quad (15.5)$$

где

$$\frac{1}{\tau} = \left[ \frac{d(Cn^2)}{dn} - \frac{dg_0}{dn} \right]_{n_0} = 2Cn_0. \quad (15.5a)$$

Теперь на отрезке  $0 \leq t < T$  произведем замену

$$\Delta n = \sum_n a_n \exp(j\omega_n t), \quad g(t) = \sum_n b_n \exp(j\omega_n t),$$

$$r(t) = \sum_n c_n \exp(j\omega_n t)$$

и получим

$$a_n = \frac{(b_n - c_n)\tau}{1 + j\omega\tau}. \quad (15.6)$$

Флуктуации светового излучения связаны с членом  $\Delta n/\tau + r(t)$ , который имеет коэффициенты Фурье

$$\frac{a_n}{\tau} + c_n = \frac{b_n}{1 + j\omega\tau} + c_n \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau}, \quad (15.6a)$$

так что

$$\begin{aligned} S_N(f) &= \frac{S_g(f)}{1 + \omega^2\tau^2} + \frac{S_r(f)\omega^2\tau^2}{1 + \omega^2\tau^2} = \\ &= \frac{2\bar{N}\bar{P}\Gamma}{1 + \omega^2\tau^2} + 2\bar{N} \frac{\omega^2\tau^2}{1 + \omega^2\tau^2}, \end{aligned} \quad (15.7)$$

где, как и ранее,  $\bar{N} = \bar{n}_p\bar{P}$ . Таким образом, на высоких частотах ( $\omega\tau \gg 1$ ) получаем полный дробовой шум.

Перепишем теперь величину  $\bar{P}$ , введя коэффициент полезного действия люминесценции. Поскольку  $eV_a$  — располагаемая первичная энергия и  $eV_{ph} = h\nu$ , максимально возможное число фотонов равно  $V_a/V_{ph}$ . Поэтому к. п. д.  $\eta_c$  определяется из соотношения

$$\bar{P} = \eta_c \frac{V_a}{V_{ph}}. \quad (15.8)$$

Обычно  $\eta_c = 10 \div 20\%$ . При величинах  $V_a = 25$  кВ,  $V_{ph} = 2,5$  эВ и  $\eta_c = 0,20$  на один первичный электрон генерируется в среднем 2000 фотонов. Следовательно, шум, определяемый выражением (15.7), существенно сверхпуассоновский.

Однако это еще не то, что *измеряется*. Для измерения шума световой эмиссии свет должен детектироваться фотоэмиссионным диодом. Пусть  $\eta_{ph}$  — вероятность того, что возникший фотон попадает на фотокатод диода, и пусть  $\eta_m$  — квантовая эффективность фотокатода, так что  $\eta_{ph}\eta_m$  есть вероятность того, что возникший фотон выбьет фотоэлектрон. Поэтому, если в 1 с образуется  $m$  фотоэлектронов, из теоремы о дисперсии следует, что

$$\bar{m} = \bar{N}\eta_{ph}\eta_m = \bar{n}_p\bar{P}\eta_{ph}\eta_m, \quad (15.9)$$

$$\text{var } m = (\eta_{ph}\eta_m)^2 \text{var } N + \bar{N}\eta_{ph}\eta_m(1 - \eta_{ph}\eta_m). \quad (15.10)$$

Следовательно, на низких частотах

$$\begin{aligned} S_m(0) &= 2 \text{var } m = (\eta_{ph}\eta_m)^2 S_N(0) + 2\bar{N}\eta_{ph}\eta_m(1 - \eta_{ph}\eta_m) = \\ &= 2\bar{n}_p[(\bar{P}\eta_{ph}\eta_m)^2\Gamma + \bar{P}\eta_{ph}\eta_m(1 - \eta_{ph}\eta_m)]. \end{aligned} \quad (15.11)$$

Далее

$$M = \bar{P}\eta_{ph}\eta_m = \frac{V_a}{V_{ph}} \eta_c \eta_{ph} \eta_m \quad (15.12)$$

является коэффициентом умножения этого устройства. Если  $V_a = 25$  кВ,  $V_{ph} = 2,5$  эВ,  $\eta_c = 0,20$ ,  $\eta_{ph} = 0,50$  и  $\eta_m = 0,10$ , то  $M = 100$ . Это довольно боль-

шое число. Следовательно, вторым членом в выражении (15.11) можно пренебречь, и

$$\bar{m} = \bar{n}_p M, \quad S_m(0) \approx 2\bar{n}_p M^2 \Gamma, \quad (15.13)$$

а высокочастотный шум имеет вид

$$S_m(f) = \frac{2\bar{n}_p M^2 \Gamma}{1 + \omega^2 \tau^2} + 2\bar{n}_p M(1 - \eta_{ph} \eta_m) + 2\bar{n}_p M \eta_{ph} \eta_m \times \\ \times \frac{\omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2}, \quad (15.13a)$$

так как последний член выражения (15.7) умножается на  $\eta_{ph}^2 \eta_m$ , а  $\bar{M} = \bar{P} \eta_{ph} \eta_m$ .

Переключимся теперь на токи  $I_{\text{перв}} = e\bar{n}_p$  и  $I_0 = e\bar{m} = eM\bar{n}_p = MI_{\text{перв}}$  и получим

$$S_I(0) \approx 2eI_0 M \Gamma. \quad (15.14)$$

$$S_I(f) = \frac{2eI_0 M \Gamma}{1 + \omega^2 \tau^2} + 2eI_0 \left(1 - \frac{\eta_{ph} \eta_m}{1 + \omega^2 \tau^2}\right). \quad (15.14a)$$

Так как  $M$  велико, то последним членом можно пренебречь везде, за исключением самых высоких частот, где шум представляет собой полный дробовой шум. Поэтому в следующем разделе мы пренебрежем этими членами. Поскольку величины  $I_0$  и  $M = (I_0/I_{\text{перв}})$  можно измерить, а  $S_I(0)$  и  $\tau$  определить на основе этих измерений, то можно рассчитать  $\Gamma$ .

Большинство люминофоров являются смесью материалов с различными постоянными времени, и, следовательно, их спектр должен быть несколько размытым. Это подтверждается экспериментально.

Нетрудно обобщить теорию, включив в нее потери при образовании фотонов, или проанализировать случай типичной люминесценции [42].

## 15.2. ШУМ УСИЛИТЕЛЕЙ СВЕТА

Займемся прежде всего фотокатодом. Пусть он имеет квантовую эффективность  $\eta_m$ , к. п. д. люминесцентного материала равен  $\eta_c$ , и улавливается часть  $\eta_{ph}$  всего светового потока. Следуя той же логике рассуждений,



что и выше, можно найти, что коэффициент усиления  $M$  усилителя света равен

$$M = \eta_m \eta_c \eta_{ph} \frac{V_a}{V_{ph}}. \quad (15.15)$$

При  $\eta_m = 10\%$ ,  $\eta_c = 20\%$ ,  $\eta_{ph} = 50\%$ ,  $V_a = 25$  кВ,  $V_{ph} = 2,5$  эВ имеем, как и ранее,  $M = 100$ .

Соединяя два усилительных каскада последовательно и прикладывая к каждому каскаду напряжение 12,5 кВ, можно получить гораздо большее усиление. В этом случае усиление каждого каскада составило бы 50, а общее усиление было бы равно 2500. Такое соединение достойно внимания.

Вычислим теперь в два этапа шум двухкаскадного усилителя. Тогда в конце третьего этапа получим шум однокаскадного усилителя.

1. Первичные кванты:  $\bar{K}$  в 1 с

$$S_a(0) = 2\bar{K}. \quad (15.16)$$

2. Первичные электроны:  $\eta_m \bar{K}$  в 1 с

$$S_b(0) = 2\bar{K}\eta_m. \quad (15.17)$$

3. Вторичные кванты:

$$\bar{N} = \bar{K}\eta_m \bar{P}\eta_{ph} = \bar{K}M \quad (15.18)$$

в 1 с, где  $M = \eta_m \eta_{ph} \bar{P} = \eta_m \eta_{ph} \eta_c V_a / V_{ph}$  — коэффициент умножения, а

$$S_c(0) = 2\bar{K}\eta_m (\bar{P}\eta_{ph})^2 \Gamma = \frac{2\bar{K}}{\eta_m} M^2 \Gamma. \quad (15.19)$$

Если пренебречь несколькими малыми членами, то

$$S_c(f) = \frac{2\bar{K}}{\eta_m} \frac{M^2 \Gamma}{1 + \omega^2 \tau^2}, \quad (15.19a)$$

где  $\tau$  — постоянная времени люминесцентного экрана. Это выражение описывает шум одного каскада.

Для оставшихся расчетов запишем

$$S_c(0) = 2\bar{K}\eta_m(\bar{P}\eta_{ph})^2 + 2\bar{K}(\bar{P}\eta_{ph})^2\eta_m(\Gamma - 1), \quad (15.196)$$

где первый член описывает *усиленный дробовой шум*, а второй — *истинный шум люминесценции*.

4. *Вторичные электроны*: в 1 с  $\bar{K}\eta_m^2\bar{P}\eta_{ph} = \bar{K}\eta_m M$ ,

$$S_d(0) = \eta_m^2 S_c(0) = 2\bar{K}\eta_m(\bar{P}\eta_m\eta_{ph})^2\Gamma = 2\bar{K}\eta_m M^2\Gamma. \quad (15.20)$$

5. *Третичные кванты*: в 1 с

$$\bar{K}\eta_m^2(\bar{P}\eta_{ph})^2 = \bar{K}M^2, \quad (15.21)$$

$$S_e(0) = 2\bar{K}\eta_m(\bar{P}\eta_m\eta_{ph})^2(\bar{P}\eta_{ph})^2\Gamma + \\ + 2\bar{K}\eta_m^2\bar{P}\eta_{ph}(\bar{P}\eta_{ph})^2(\Gamma - 1), \quad (15.22)$$

где  $\bar{K}\eta_m^2\bar{P}\eta_{ph} = \bar{K}\eta_m M$  описывает скорость поступления электронов на второй экран. Дробовой шум этих электронов умножается на величину  $(\bar{P}\eta_{ph})^2(\Gamma - 1)$  [см. выражение (15.196)].

Вводя коэффициент  $M$ , можно переписать это выражение в виде

$$S_e(0) = \frac{2\bar{K}}{\eta_m} M^4 \left( \Gamma + \frac{\Gamma - 1}{M} \right). \quad (15.23)$$

Второе слагаемое мало, если коэффициент  $M$  велик. Тогда, если пренебречь несколькими другими малыми членами и учесть частотные свойства обоих люминесцентных экранов, можно записать

$$S_e(f) = \frac{2(\bar{K}\eta_m)M^4\Gamma}{(1 + \omega^2\tau^2)^2}. \quad (15.24)$$

Тимм измерил коэффициент  $\Gamma$  как функцию  $M$  и обнаружил, что коэффициент  $\Gamma$  довольно велик при малых значениях  $M$  (т. е. малых ускоряющих напряжениях  $V_a$ ), но сильно убывает при увеличении напряжения  $V_a$ , достигая предельной величины порядка 1,5—2 для относительно больших значений  $V_a$  [26]. Этот результат выглядит вполне разумным.

---

## ПРИБОРЫ С КОНТАКТОМ ДЖОЗЕФСОНА

Контакт Джозефсона состоит из двух сверхпроводников, разделенных тонким слоем оксида. Простейшая схема заключается в обеспечении точечного контакта между заостренным проводом и пластиной, выполненными из сверхпроводящего материала.

Электроны в полупроводнике могут существовать в двух формах: а) в виде обычных электронов, рассеиваемых решеткой, и б) в виде куперовских пар, которые не могут рассеиваться решеткой и являются ответственными за появление сверхпроводящих свойств материала.

За счет туннельного эффекта куперовские пары и обычные электроны могут проходить сквозь оксидный слой. Это приводит к двум эффектам:

1. Постоянный ток сверхпроводимости, не превышающий некоторой максимальной величины  $I_0$ , может протекать через контакт, не создавая никакого падения напряжения на нем. Это явление называют *стационарным эффектом Джозефсона*.

2. Если к контакту приложено постоянное напряжение смещения  $V_0$ , то ток электронных пар колеблется с частотой  $f_0 = (2eV_0/h)$ , где  $e$  — заряд электрона, а  $h$  — постоянная Планка. Таким образом, этот прибор оказывается одночастотным автогенератором. При  $V_0 = 1$  мкВ имеем  $f_0 = 483,6$  МГц. Это явление называется *нестационарным эффектом Джозефсона*. Доказательство этого свойства контакта Джозефсона см. в разд. 16.2.2.

Кроме того, нам понадобится связанное со сверхпроводимостью явление, называемое *квантованием потока*, которое заключается в том, что поток  $\Phi$  через сверхпроводящее кольцо может принимать лишь значения  $s\varphi_0$ , где  $s = 0, 1, 2, \dots$  и  $\varphi_0 = h/2e$  ( $2,07 \times 10^{-15}$  Вб). Это один из макроскопических квантовых эффектов.

Наконец, нам потребуется выражение, описывающее шум в контакте Джозефсона. Покажем, что ток через контакт Джозефсона имеет спектральную плотность

$$S_I(f) = 4kT \frac{I}{V}, \quad (16.1)$$

где  $I$  — ток, протекающий через прибор, а  $V$  — приложенное напряжение. Следует заметить, что при  $V = 0$  ток изменяется от  $-I_0$  до  $+I_0$ , так что характеристика прибора имеет особую точку при  $V = 0$ .

Чтобы доказать справедливость равенства (16.1), обозначим через  $n$  обычные электроны, а через  $p$  — куперовские пары. Обычные электроны вызывают нормальный ток  $I_n = I_{n1} - I_{n2}$ , где  $I_{n1}$  и  $I_{n2}$  — два нормальных тока, которые протекают через контакт в противоположных направлениях. Спаренные электроны вызывают ток пар  $I_p = I_{p1} - I_{p2}$ , где  $I_{p1}$  и  $I_{p2}$  — два тока пар, которые проходят через контакт в противоположных направлениях. Следовательно,

$$I = I_n + I_p = I_{n1} - I_{n2} + I_{p1} - I_{p2}. \quad (16.1a)$$

Все токи флуктуируют независимо, и каждый сопровождается полным дробовым шумом. Однако, поскольку пары несут вдвое больший заряд, чем один электрон,

$$S_{I_n}(f) = 2e(I_{n1} + I_{n2}) = 2eI_n \frac{I_{n1} + I_{n2}}{I_{n1} - I_{n2}}, \quad (16.16)$$

$$S_{I_p}(f) = 4e(I_{p1} + I_{p2}) = 4eI_p \frac{I_{p1} + I_{p2}}{I_{p1} - I_{p2}}. \quad (16.1b)$$

Расчет методами волновой механики показывает, что [ср с выражением (5.25a)]

$$\frac{I_{n1} + I_{n2}}{I_{n1} - I_{n2}} = \operatorname{cth}\left(\frac{eV}{2kT}\right), \quad \frac{I_{p1} + I_{p2}}{I_{p1} - I_{p2}} = \operatorname{cth}\left(\frac{2eV}{2kT}\right). \quad (16.1r)$$

В последнем выражении учтено, что пары несут заряд  $2e$ . Следовательно,

$$S_I(f) = S_{I_n}(f) + S_{I_p}(f) = 2el_n \operatorname{cth} \left( \frac{eV}{2kT} \right) + 4el_p \operatorname{cth} \left( \frac{eV}{kT} \right). \quad (16.1д)$$

Для малых значений отношения  $|eV/kT|$  мы имеем  $\operatorname{cth}(eV/2kT) \approx 2kT/eV$  и  $\operatorname{cth}(eV/kT) \approx kT/eV$ . Поэтому для малых величин  $|V|$  имеем

$$S_I(f) = 2el_n \frac{2kT}{eV} + 4el_p \frac{kT}{eV} = 4kT \frac{I_n + I_p}{V} = 4kT \frac{I}{V},$$

что и требовалось доказать.

## 16.1. КОНТАКТ ДЖОЗЕФСОНА КАК ТЕРМОМЕТР

Если бы к контакту Джозефсона было приложено только постоянное напряжение  $V_0$ , то этот прибор работал бы как автогенератор, генерирующий колебание с единственной частотой  $f_0 = 2eV_0/h$ . Вызванное собственным шумом схемы случайное напряжение  $v(t)$  действует на контакт и вызывает шумовую частотную модуляцию сигнала, причем

$$f = f_0 + \Delta f(t) = f_0 + \frac{2ev(t)}{h}, \quad (16.2)$$

поскольку приложенное напряжение теперь равно  $V_0 + v(t)$ . Вследствие этого автогенератор имеет определенную ширину спектральной линии. Расчет показывает, что ширина линии прямо пропорциональна температуре  $T$ . Рассчитав параметры схемы, можно использовать измерения ширины спектральной линии автогенератора на контакте Джозефсона как средство определения температуры системы. Такие термометры с контактом Джозефсона для диапазона температур порядка нескольких градусов Кельвина изготавливаются серийно.

### 16.1.1. ОБСУЖДЕНИЕ ДЖОЗЕФСОНОВСКОГО ТЕРМОМЕТРА

Из уравнения (16.2) следует, что

$$\Delta f(t) = \frac{2ev(t)}{h} \text{ или } S_{\Delta f}(f) = \left(\frac{2e}{h}\right)^2 S_v(f), \quad (16.2a)$$

где  $S_{\Delta f}(f)$  — спектральная плотность  $\Delta f(t)$ .

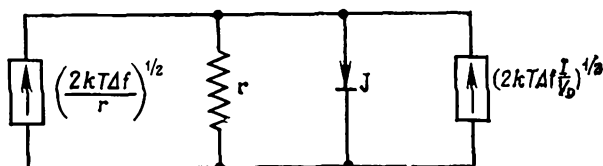


Рис. 16.1. Эквивалентная схема автогенератора Джозефсона, используемого для измерений температуры.

Теперь мы слегка изменим обозначения, введя спектральные плотности, которые вдвое меньше обычно используемых в этой книге. Мы делаем это ради согласования с теорией сигналов, модулированных по частоте шумом. Тогда функция  $S_x(f)$  означает спектральную плотность, определенную для положительных и отрицательных частот  $f$ , в то время как ранее введенная спектральная плотность связана с  $S_x(f)$  соотношением  $S'_x(f) = S_x(f) + S_x(-f) = 2S_x(f)$ , поскольку  $S_x(f)$  является четной функцией  $f$ .

Обратимся теперь к эквивалентной схеме рис. 16.1. Она состоит из джозефсоновского контакта  $J$ , шунтированного сопротивлением цепи смещения  $r$ , имеющего величину порядка 1 мОм или меньше. Два генератора тока  $(2kT \Delta f/r)^{1/2}$  и  $(2kT \Delta f I_0/V_0)^{1/2}$  представляют соответственно тепловой шум сопротивления  $r$  и шум джозефсоновского контакта, через который протекает ток  $I$ , когда к нему приложено напряжение  $V_0$ . Поскольку дифференциальное сопротивление контакта  $J$  велико по сравнению с сопротивлением цепи смещения  $r$ , имеем

$$S_v(f) = \left(\frac{2kT}{r} + 2kT \frac{I}{V_0}\right) r^2 = 2kTr \left(1 + \frac{Ir}{V_0}\right). \quad (16.3)$$

Следовательно,

$$S_{\Delta f}(f) = \left(\frac{2e}{h}\right)^2 2kTr \left(1 + \frac{Ir}{V_0}\right). \quad (16.4)$$

Теперь нас интересует спектр случайной переменной

$$x(t) = \exp \left[ j\omega_0 t + I \int 2\pi \Delta f(t) dt \right]. \quad (16.5)$$

Расчет показывает, что

$$S_x(f) = \frac{1}{\pi^2 S_{\Delta f}(0)} \frac{1}{1 + \left\{ (f - f_0) / [I \pi S_{\Delta f}(0)] \right\}^2}, \quad (16.6)$$

так что ширина линии  $\Delta f_0$  по уровню половинной мощности определяется формулой

$$\Delta f_0 = 2\pi S_{\Delta f}(0).$$

Следовательно, ширину линии модулированного по частоте сигнала от джозефсоновского перехода можно представить в виде

$$\Delta f_0 = \pi \left(\frac{2e}{h}\right)^2 4kTr \left(1 + \frac{Ir}{V_0}\right). \quad (16.7)$$

Таким образом, измеряя величину  $\Delta f_0$  и зная сопротивление  $r$ , ток  $I$  и напряжение  $V_0$ , можно рассчитать  $T$ . Чтобы измерить величину  $\Delta f_0$ , необходимо использовать узкополосный приемник с полосой пропускания  $B \ll \Delta f_0$ .

### 16.1.2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО РАВЕНСТВА (16.6)

Чтобы доказать равенство (16.6), перепишем функцию  $x(t)$  в виде

$$x(t) = \exp [j\omega_0 t + j\psi(t)] = \exp(j\omega_0 t) u(t) \quad (16.8)$$

и положим, что

$$\Delta f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\psi(t)}{dt}, \text{ откуда } S_{\Delta f}(f) = f^2 S_{\psi}(f), \quad (16.9)$$

т. е.

$$S_{\psi}(f) = \frac{S_{\Delta f}(f)}{f^2}. \quad (16.9a)$$

Поскольку известна функция  $S_{\Delta f}(t)$ , известна также и функция  $S_{\psi}(f)$

Теперь мы хотим определить спектр случайной переменной

$$u(t) = \exp [j\psi(t)]. \quad (16.10)$$

Чтобы рассчитать спектр  $S_u(f)$ , необходимо знать автокорреляционную функцию

$$\Phi_u(s) = \overline{u^*(t) u(t+s)} = \overline{\exp[-j\psi(t) + j\psi(t+s)]}, \quad (16.11)$$

где звездочка означает комплексное сопряжение. Чтобы рассчитать спектр, необходимо знать совместную плотность вероятности  $W(\psi_1, \psi_2)$  величин  $\psi_1 = \psi(t)$  и  $\psi_2 = \psi(t+s)$ . В соответствии с результатами гл. 4, преобразуя выражение (4.9), получим

$$W(\psi_1, \psi_2) = \frac{1}{2\pi [\Phi_{\psi}^2(0) - \Phi_{\psi}^2(s)]^{1/2}} \times \\ \times \exp \left[ \frac{-\frac{1}{2} \Phi_{\psi}(0) (\psi_1^2 + \psi_2^2) + \Phi_{\psi}(s) \psi_1 \psi_2}{\Phi_{\psi}^2(0) - \Phi_{\psi}^2(s)} \right], \quad (16.12)$$

где  $\Phi_{\psi}(s) = \overline{\psi^*(0) \psi(0+s)}$ ,  $\Phi_{\psi}(0) = \overline{\psi^*(0) \psi(0)}$ , и звездочка введена на тот случай, если  $\psi(t)$  — комплексная функция. Мы приняли здесь  $t=0$ . После некоторых преобразований получим

$$\Phi_u(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j\psi_1 + j\psi_2) W(\psi_1, \psi_2) d\psi_1 d\psi_2 = \\ = \exp[-\Phi_{\psi}(0) + \Phi_{\psi}(s)] = \exp[-k(s)] \quad (16.13)$$

Используя обратное преобразование Фурье, найдем, что

$$\Phi_{\psi}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\psi}(f) \exp(2\pi jfs) df,$$



и, следовательно,

$$\begin{aligned}
 k(s) &= \varphi_\psi(0) - \varphi_\psi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} S_\psi(f) [1 - \exp(2\pi jfs)] df = \\
 &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} S_\psi(f) (\sin 2\pi fs)^2 df = 2\pi s S_{\Delta f}(0) \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin \pi fs}{\pi fs} \right)^2 d(\pi fs) = \\
 &= 2\pi^2 s S_{\Delta f}(0), \tag{16.14}
 \end{aligned}$$

поскольку спектр  $S_{\Delta f}(f)$  практически является белым. Следовательно,

$$\begin{aligned}
 S_u(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_u(s) \exp(2\pi jfs) ds = \frac{4\pi^2 S_{\Delta f}(0)}{[2\pi^2 S_{\Delta f}(0)]^2 + (2\pi f)^2} = \\
 &= \frac{1}{\pi^2 S_{\Delta f}(0) \left\{ 1 + \left[ \frac{f}{\pi S_{\Delta f}(0)} \right]^2 \right\}} \tag{16.15}
 \end{aligned}$$

и

$$S_x(f) = S_u(f - f_0) = \frac{1}{\pi^2 S_{\Delta f}(0) \left\{ 1 + \left[ \frac{f - f_0}{\pi S_{\Delta f}(0)} \right]^2 \right\}},$$

что и требовалось доказать.

## 16.2. КОНТАКТ ДЖОЗЕФСОНА КАК УСИЛИТЕЛЬ

### 16.2.1. ДЖОЗЕФСОНОВСКИЙ УСИЛИТЕЛЬ НИЗКИХ ЧАСТОТ

Если к контакту Джозефсона приложить постоянное напряжение  $V_0$  и малое переменное напряжение сигнала  $v_s \cos \omega_s t$ , то получается частотно-модулированный сигнал с несущей частотой  $f_0 = (2eV_0/h)$ . Этот ЧМ-сигнал можно пропустить через усилитель и протектировать частотным детектором для получения усиленного переменного напряжения сигнала с частотой  $\omega_s$ .

Чтобы понять предельные возможности такого усилителя по полосе и шуму, примем во внимание индуктивность  $L$  входной цепи. Обычно величина  $L$  имеет

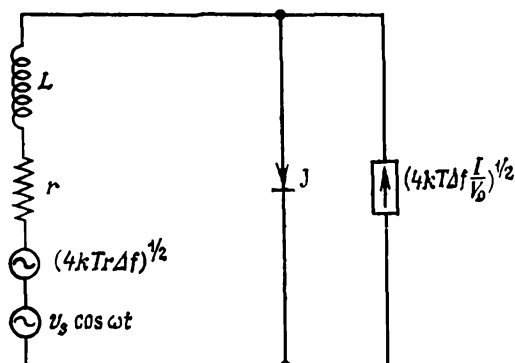


Рис. 16.2а. Эквивалентная схема усилителя с контактом Джозефсона.

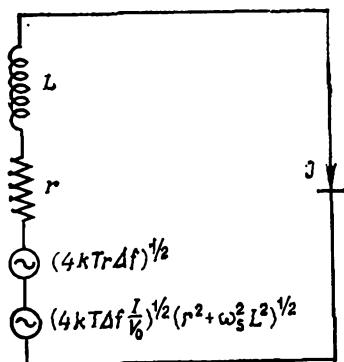


Рис. 16.2б. Другой вариант эквивалентной схемы.

порядок  $10^{-9}$  Гн, однако при соответствующей конструкции контакта ее можно сделать примерно в 10 раз меньшей (рис. 16.2а).

Что касается сигнала, то пока значение  $\omega L$  мало по сравнению с дифференциальным сопротивлением  $r_d = dV/dI$  контакта, никаких ограничений нет. Однако если рассматривать шум, то ограничение возникает,

поскольку генератор тока  $(4kT \Delta f I / V_0)^{1/2}$  вызывает эквивалентную э. д. с.  $(4kT \Delta f I / V_0)^{1/2} (r^2 + \omega_s^2 L^2)^{1/2}$ , включенную последовательно с  $r$  и  $L$  (рис. 16.2, б). Поэтому коэффициент шума на частоте  $\omega_s$  имеет вид

$$F = 1 + \frac{4kT \Delta f (I / V_0) (r^2 + \omega_s^2 L^2)}{4kT r \Delta f} =$$

$$= 1 + \frac{I}{V_0} \left( r + \frac{\omega_s^2 L^2}{r} \right). \quad (16.16)$$

Он имеет минимальное значение

$$F_{\min} = 1 + 2 \frac{I}{V_0} \omega_s L \text{ при } r = \omega_s L. \quad (16.16a)$$

Таким образом, коэффициент шума возрастает с увеличением частоты, и это накладывает ограничение сверху на рассматриваемую полосу. Определяя верхнюю граничную частоту  $f_0$  равенством

$$2\pi f_0 L = r$$

и используя величину  $r = 10^{-3}$  Ом и  $L = 10^{-9}$  Гн, получим  $f_0 = 160$  кГц. Коэффициент шума на низких частотах в этом случае равен

$$F_0 = 1 + \frac{I}{V_0} r. \quad (16.16b)$$

Для несущей частоты 30 МГц напряжение  $V_0 = 0,062$  мВ, а величина тока  $I$  обычно составляет  $\sim 50$  мкА. Следовательно, при сопротивлении  $r = 10^{-3}$  Ом  $F_0 = 1,8$ . Коэффициент шума  $F_0$  уменьшается, если несущая частота  $f_0$  возрастает, поскольку это означает увеличение напряжения  $V_0$ .

Какова минимальная мощность сигнала, который можно обработать, не потеряв его в шуме? Величина  $P_{\text{экв}}$  находится из равенства

$$\overline{v_s^2} = F_0 4kT r \text{ или } P_{\text{экв}} = \frac{\overline{v_s^2}}{4r} = F_0 kT. \quad (16.16b)$$

Полагая  $F_0 = 1,8$ ,  $T = 4,2$  К, получим  $P_{\text{экв}} = 1,06 \cdot 10^{-22}$  Вт/Гц и  $(\overline{v_s^2})^{1/2} = (4r P_{\text{экв}})^{1/2} = 0,65 \times 10^{-12}$  В/Гц<sup>1/2</sup> при  $r = 10^{-3}$  Ом.

Существуют различные способы улучшения работы этого усилителя:

1. Можно перейти к более высокой несущей частоте  $f_0$ . Это не только уменьшает низкочастотный коэффициент шума  $F_0$ , но и увеличивает генерируемую мощность вследствие возрастания постоянного напряжения  $V_0$ .

2. Можно уменьшить индуктивность цепи  $L$ . Максимальная генерируемая мощность  $P_{\text{макс}}$  обратно пропорциональна индуктивности  $L$ .

Оба эти способа можно свести в одно уравнение

$$P_{\text{макс}} = \text{const} \frac{h}{2c} \frac{f_0}{2L}. \quad (16.17)$$

Увеличение мощности  $P_{\text{макс}}$  значительно упрощает выделение ЧМ-сигнала с несущей частотой  $f_0$  и таким образом облегчает достижение предела, определяемого равенством (16.16в).

В Миннесотском университете Чоу сконструировал усилитель с контактом Джозефсона, работающий на несущей частоте  $f_0 = 30$  МГц [43]. Ему не удалось достигнуть предела, соответствующего равенству (16.16в), поскольку несущий сигнал тонул в сопровождающих его шумах. Кроме того, наблюдались кратные квантовые переходы, и это могло сильно увеличить шум. Хотя этот механизм генерации шума не полностью ясен, кратные квантовые переходы можно объяснить следующим образом.

Если контактное давление в точечном джозефсоновском контакте увеличивается, площадь контакта между двумя сверхпроводниками возрастает и через контакт может протекать больший критический ток. В таких условиях оказывается возможным движение с коллективным квантованием, характеризуемое потоком  $N\varphi_0$ , где  $\varphi_0 = h/2e$  — квант потока, а  $N$  — целое число. В результате этого генерируется колебание с частотой  $V_0/N\varphi_0$  и его высшие гармоники, так что частоты колебаний можно записать в виде

$$f = \frac{n}{N} \frac{V_0}{\varphi_0}, n = 1, 2, \dots, N. \quad (16.18)$$

Мощность, генерируемая при  $n = 1$ , намного больше мощности, генерируемой в случае  $V'_0 = V_0/N$ , и поэтому легче получить сигнал, превосходящий собственный шум усилителя.

Действуя таким образом, Чоу смог обнаружить сигнал порядка  $10^{-11}$  В/Гц<sup>1/2</sup> при сопротивлении  $r \approx \approx 10^{-3}$  Ом.

### 16.2.2. КОНТАКТ ДЖОЗЕФСОНА КАК ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ УСИЛИТЕЛЬ

Покажем теперь, что контакт Джозефсона имеет зависящую от времени дифференциальную индуктивность.

Основные уравнения контакта Джозефсона имеют вид

$$I = I_0 \sin \Theta, \quad (16.19)$$

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{2eV_0}{\hbar}, \quad (16.20)$$

где  $I_0$  — максимальный постоянный ток, который может протекать через переход,  $V_0$  — приложенное напряжение,  $\hbar = h/2\pi$ , а  $\Theta$  — разность фаз волновых функций в сверхпроводниках по разные стороны от оксидного слоя. Интегрирование уравнения (16.20) приводит к выражению

$$\Theta = \frac{2eV_0}{\hbar} t + \Theta_0, \quad (16.21)$$

а его подстановка в выражение (16.19) дает

$$I = I_0 \sin \left( \frac{2eV_0}{\hbar} t + \Theta_0 \right), \quad (16.22)$$

что соответствует сигналу частотой  $f_0 = 2eV_0/h$ . Таким образом, нестационарный эффект Джозефсона является прямым следствием уравнений (16.19) и (16.20).

Дифференциальная индуктивность контакта  $L_i$  определяется следующим образом:

$$L_i = \frac{V_0}{dI/dt}. \quad (16.23)$$

Подставляя выражения (16.19) и (16.20), получим

$$L_1 = \frac{V_0}{(I_0 \cos \Theta) d\Theta/dt} = \frac{\Phi_0}{2\pi I_0 \cos \Theta}, \quad (16.23a)$$

где  $\Phi_0 = h/2e$  — элементарный квант потока. В соответствии с выражением (16.21) индуктивность периодически меняется во времени с угловой частотой  $\omega_0 = 2eV_0/\hbar$ . Это можно использовать для параметрического усиления [44].

### 16.2.3. ДЖОЗЕФСОНОВСКИЙ ПЕРЕХОД КАК СМЕСИТЕЛЬ

Из-за существенно нелинейных характеристик контакта Джозефсона при действии на него двух сигналов с частотами  $f_1$  и  $f_2$  возникнут составляющие тока с суммарной и разностной частотами. Таким образом, этот прибор может быть использован как смеситель. Более подробно этот вопрос изложен в статье Ричардса и др. [45].

## 16.3. СВЕРХПРОВОДНИКОВЫЙ КВАНТОВЫЙ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫЙ ПРИБОР

Сверхпроводниковый квантовый интерференционный прибор (СКИП) используется для измерения чрезвычайно малых магнитных потоков. Он применяется в двух вариантах (приборы постоянного и переменного тока), его работа основана на том, что поток через сверхпроводящее кольцо может принимать лишь значения, кратные  $\Phi_0 = h/2e$  (квантование потока).

### 16.3.1. СКИП ПОСТОЯННОГО ТОКА

На рис. 16.3а показан СКИП, работающий на постоянном токе. Он состоит из крошечного сверхпроводящего кольца с индуктивностью  $L$  порядка  $10^{-6}$  Гн, содержащего два джозефсоновских контакта. Через эту цепь проходит постоянный ток  $I$ . Если ток  $I$  меньше,

чем удвоенный критический ток  $I_0$  каждого контакта, то падение напряжения на кольце  $V$  равно нулю. Если  $I > 2I_0$ , то  $V > 0$ . Мы предполагаем, что эта схема работает при выполнении последнего условия.

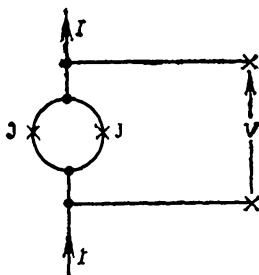


Рис 16.3а. Схема СКИПа, работающего на постоянном токе.

Если теперь внешний поток  $\varphi_s < (1/2)\varphi_0$  (где  $\varphi_0 = h/2e$  — элементарный квант потока) проходит через кольцо, в нем устанавливается экранирующий ток  $I_s = \varphi_s/L$ , сводящий к нулю поток через кольцо.

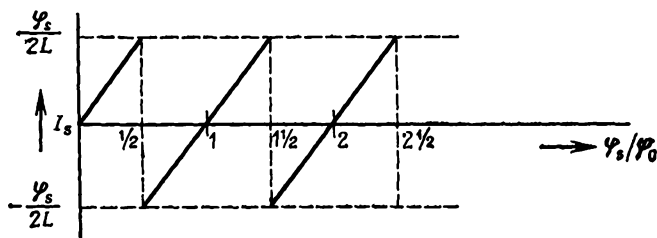


Рис. 16.3б. Зависимость тока  $I_s$  от отношения  $\varphi_s/\varphi_0$ .

При возрастании потока  $\varphi_s$  от нуля до  $\varphi_0/2$  ток  $I_s$  растет от нуля до  $\varphi_0/2L$ . Если поток  $\varphi$  возрастает дальше, то поток в кольцо переходит из квантового состояния  $s = 0$  в состояние  $s = 1$ . При этом ток  $I_s$  изменяется до величины  $-\varphi_0/2L$  и затем возрастает с увеличением  $\varphi_s$ , пока  $\varphi_s$  не достигнет величины  $3\varphi_0/2$ , после чего этот процесс повторяется снова. Таким образом, кривая зависимости тока  $I_s$  от  $\varphi_s$  имеет пилообразную форму, показанную на рис. 16.3б.

Если по кольцу течет ток  $I_s$ , то результирующий ток через один контакт превышает результирующий ток через другой контакт на величину  $2|I_s|$ . Критический ток одного контакта превышает, если ток другого контакта равен  $I_0 - 2|I_s|$ . Следовательно, полный критический ток равен  $I'_0 = 2I_0 - 2|I_s|$ . Ток  $I'_0$

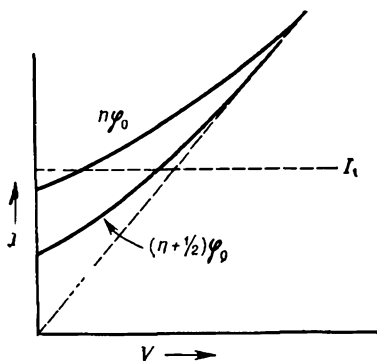


Рис. 16.3в. Предельные вольт-амперные характеристики СКИПа.

имеет максимум при  $\varphi_s = n\varphi_0$  и минимум при  $\varphi_s = (n + 1/2)\varphi_0$ . Соответствующая вольт-амперная характеристика показана на рис. 16.3в.

Если теперь такой прибор работает на постоянном токе  $I_1$  (несколько превышающем  $2I_0$ ) и  $\varphi_s$  постепенно возрастает, то напряжение  $V$  этой цепи изменяется периодически и имеет треугольную форму. Если  $R$  — сопротивление каждого контакта, то размах этой кривой от минимума к максимуму равен

$$V = 2|I_s|_{\text{макс}} \frac{R}{2} = \frac{\varphi_0 R}{2L}, \quad (16.24)$$

поскольку  $|I_s|_{\text{макс}} = \varphi_0/2L$ . При значениях  $R = 5$  Ом и  $L = 10^{-9}$  Гн в учетом того, что  $\varphi_0 = 2,07 \cdot 10^{-15}$  Вб, получим  $V = 5$  мкВ. Следовательно, малое изменение  $\delta\varphi_s$  потока  $\varphi_s$  вызывает выходное напряжение

$$\delta V_s = \frac{k}{L} \delta\varphi_s, \quad (16.25)$$



которое можно измерить обычными методами. Теоретический предел в этих измерениях определяется шумом. Практический предел в настоящее время выше и составляет величину порядка  $(10^{-8} - 10^{-7}) \varphi_0$ . Более подробно этот вопрос освещен в обзорной статье Кларка [46].

### 16.3.2. РАДИОЧАСТОТНЫЙ СКИП

Радиочастотный СКИП представляет собой колебательный контур, настроенный, например, на частоту 30 МГц и связанный с крошечным кольцом, содержа-

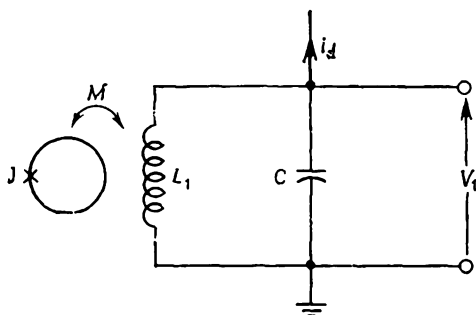


Рис. 16.4. СКИП переменного тока.

Виток с одним контактом Джозефсона связан с LC-контуром возбуждаемым переменным током  $i_d$ , а выходное напряжение определяется как функция потока через виток.

щим один джозефсоновский контакт. Контур питается током  $i_d$  (рис. 16.4). Падение напряжения  $V_T$  на контуре зависит от величины потока  $\Phi$  через кольцо с джозефсоновским контактом.

Для более детального ознакомления см. обзорную статью Кларка [46].

---

## ДЕТЕКТОРЫ КВАНТОВ И ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ ВЫСОКОЙ ЭНЕРГИИ

### 17.1. ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ

При поглощении рентгеновских лучей,  $\gamma$ -лучей или заряженных частиц высокой энергии полупроводниками или изоляторами в них образуются электронно-дырочные пары. Если к облучаемому образцу приложено достаточно большое электрическое поле, то электроны и дырки могут попасть на коллекторные контакты и таким образом генерировать импульсы, которые могут быть обработаны методами, обсужденными в гл. 8. Таким образом строятся *полупроводниковые счетчики*. В ранее применявшихся счетчиках использовались газовые ионизационные камеры, однако в настоящее время они заменены их полупроводниковыми эквивалентами. В наиболее ответственных случаях в счетчиках используется кремний или германий.

В другом варианте поле не прикладывается, а берется люминесцентный материал, в котором большая часть энергии используется для получения квантов люминесцентного свечения, которые используются для возбуждения фотокатода фотоумножителя. Такие счетчики называют *сцинтилляционными*. Наиболее важным материалом является легированный таллием иодид натрия. Такие счетчики используются главным образом для подсчета квантов  $\gamma$ -излучения.

Контакты к полупроводниковым счетчикам должны быть *неинжектирующими* или *блокирующими*. *Инжектирующий* контакт при действии большого постоянного напряжения вызвал бы протекание тока, ограниченного пространственным зарядом, и это привело бы

к избыточному шуму *Блокирующим* является контакт, который собирает носители, поступающие к нему, но предотвращает инжекцию носителей в противоположном направлении. Блокирующие контакты могут быть выполнены с использованием металлических контактов с соответствующей работой выхода, однако простейшее решение состоит в том, чтобы методом диффузии сформировать  $p^+$ - и  $n^+$ -области на противоположных сторонах образца и сделать омические контакты к этим областям. Таким образом, получается  $p^+i-n^+$ -диод, который используется в режиме обратного смещения.

Ток утечки такого прибора вызывает дробовой шум. Если этот шум оказывается слишком большим, то прибор необходимо охлаждать для уменьшения тока утечки до достаточно малой величины.

Пусть к диоду приложено такое обратное смещение, что в  $i$ -области получается поле порядка нескольких тысяч В/см и  $i$ -область настолько широка, что ионизирующие кванты или частицы теряют в ней всю свою энергию. Если  $E$  — энергия частицы, или кванта, а  $E_0$  — энергия, необходимая для образования электронно-дырочной пары, то среднее число возникающих пар равно

$$\bar{n} = \frac{E}{E_0}. \quad (17.1)$$

Таким образом, мы видим, что в этом случае число  $\bar{n}$ , а следовательно, и амплитуда результирующих импульсов линейно зависят от первичной энергии  $E$

Первой важной характеристикой счетчика является энергия  $E_0$ , необходимая для образования электронно-дырочной пары. Другим важным параметром счетчика является коэффициент Фано, определяемый соотношением

$$\overline{\Delta n^2} = F\bar{n}. \quad (17.2)$$

Тот факт, что для кремния и германия коэффициент  $F$  намного меньше единицы, указывает на то, что процесс образования электронно-дырочных пар не является пуассоновским. Типичным для кремния и германия является значение коэффициента  $F = 0,12$ .

Соответствующая таким измерениям неопределенность найденной энергии определяется выражением

$$\sqrt{\Delta E^2} = E_0 \sqrt{\Delta n^2} = E_0 (Fn)^{1/2}, \quad (17.3)$$

так что относительная неопределенность равна

$$\frac{\sqrt{\Delta E^2}}{E} = \left( \frac{FE_0}{E} \right)^{1/2}. \quad (17.3a)$$

Например, если величины  $F = 0,12$ ,  $E_0 = 3,0$  В и  $E = 10^6$  В, относительная неопределенность равна  $0,6 \cdot 10^{-3}$ . Таким образом, важно выбирать материалы, для которых произведение  $FE_0$  оказывается как можно меньшим. Приведенные соображения справедливы как для полупроводниковых, так и для сцинтилляционных счетчиков.

Третьим важным параметром полупроводниковых счетчиков является время пролета электронов и дырок. В  $p-i-n$ -диоде поле в  $i$ -области, а следовательно, и скорость частиц постоянны. Поэтому, если  $i$ -область имеет ширину  $d$ , время пролета и соответственно длительность импульсов равны

$$\tau = \frac{d}{v}. \quad (17.4)$$

Например, если  $d = 1,0$  см и  $v = 10^8$  см/с, то  $\tau = 10^{-8}$  с.

Скорость  $v$  определяется выражением

$$v = \mu E, \quad (17.5)$$

где  $\mu$  — подвижность носителей, а  $E$  — напряженность поля. При величине  $\mu = 1000$  см<sup>2</sup>/В для достижения скорости  $v = 10^8$  см/с необходима напряженность поля  $E = 10^5$  В/см. Конечно, можно и дальше увеличивать напряженность поля и таким образом увеличивать скорость  $v$ , однако в этом направлении нельзя идти слишком далеко по двум причинам:

1. При большой напряженности поля происходит насыщение скорости, и она стремится к предельной скорости  $v_{\text{нас}}$ , типичное значение которой равно  $10^7$  см/с.

Увеличение напряженности поля выше этого значения не повышает чувствительности прибора и в сущности вредно по причине, излагаемой ниже.

2. Если напряженность поля становится слишком большой, возникает ударная ионизация, при которой электроны и (или) дырки создают дополнительные электронно-дырочные пары. Этот процесс сопровождается сильным шумом, и поэтому его следует избегать.

В сцинтилляционных счетчиках важным параметром является постоянная времени  $\tau$  процесса люминесценции. Для получения коротких вспышек света необходимо делать  $\tau$  малым. Это значит, что надо использовать малоинерционные люминесцентные материалы.

Полупроводниковые и сцинтилляционные счетчики реагируют на электроны высокой энергии и (или) кванты высокой энергии. Они не реагируют на нейтральные частицы, например нейтроны, поскольку те не вызывают непосредственной ионизации. Для обнаружения нейтронов необходимо с их помощью вызвать ядерные реакции, которые приводят к возникновению заряженных частиц или квантов высокой энергии.

Тяжелые заряженные частицы, например ионы высокой энергии, стремятся стать нейтральными к концу пробега и прекращают генерацию электронно-дырочных пар. Это вносит ошибку при измерении энергии, которую необходимо рассчитать и скорректировать.

Обсудим теперь ток насыщения  $I_0$  полупроводникового счетчика. Если  $G(x)$  — скорость генерации электронно-дырочных пар,  $A$  — площадь поперечного сечения  $i$ -области и  $d$  — ее ширина, то

$$I_0 = A \int_0^d G(x) dx, \quad (17.6)$$

Однако, согласно теории Шокли—Рида—Холла

$$G(x) = \frac{n_i^2}{(n + n_1) \tau_{p0} + (p + p_1) \tau_{n0}}, \quad (17.7)$$

где  $n_i$  — концентрация носителей в собственном полупроводнике,  $n$  и  $p$  — концентрации электронов и

дырок соответственно,  $n_1$  и  $p_1$  — концентрации носителей, когда уровень Ферми совпадает с уровнем ловушки, а  $\tau_{p0}$  и  $\tau_{n0}$  — постоянные времени.

Для собственного полупроводника с ловушками, расположенными на уровне Ферми,  $n = p = n_1 = p_1 = n_i$  и

$$G = G_0 = \frac{n_i}{2(\tau_{p0} + \tau_{n0})}, \quad (17.8)$$

ток равен

$$I_0 = G_0 A d. \quad (17.9)$$

Он изменяется как  $\exp(-E_g/2kT)$ , где  $E_g$  — ширина запрещенной зоны материала. Таким образом, ток  $I_0$  можно существенно уменьшить при переходе к более низким температурам. Это особенно важно для германиевых счетчиков, поскольку ширина запрещенной зоны в германии составляет всего 0,70 эВ. У кремния ширина запрещенной зоны равна 1,10 эВ, и, следовательно, ток  $I_0$  на несколько порядков ниже. Тем не менее важно охлаждать также и кремниевые счетчики, чтобы дополнительно уменьшить  $I_0$ .

Чрезвычайно тщательной очисткой можно получить германий, в котором один атом примеси приходится на  $10^{14}$  атомов основного вещества. Для кремния при получении таких малых концентраций примесей возникают технологические трудности, и поэтому применяется метод компенсации примеси. Обычно применяется метод дрейфа лития в слаболегированном материале  $p$ -типа. Ранее этот метод применялся также и для германия, но в связи с тем, что весьма низкие концентрации примесей можно получить непосредственно, в применении этого метода больше нет необходимости.

Литий является донором, который может легко диффундировать в кремнии или германии при повышенных температурах. В германии температура дрейфа составляет 20—50 °С, и поэтому необходимо следить, чтобы к детекторам на основе германия, полученного методом дрейфа лития, напряжение прикладывалось только после охлаждения до низкой температуры. Для кремния температура дрейфа равна 120—140 °С,

и, следовательно, на детекторы из кремния с литием можно подавать напряжение при комнатной температуре. Дрейф лития через идеальный кремниевый детектор толщиной 1 см при напряжении 500 В и токе через детектор, равном 1 мА, происходит примерно за 14 дней.

Путь  $\alpha$ -частицы с энергией  $10^8$  эВ в кремнии составляет около 4 мм, а путь электрона с энергией около  $4 \cdot 10^6$  эВ равен 1 см.

Чтобы понять, что происходит, если промежуточная область является не совсем беспримесной, рассмотрим  $n^+ - p^-$ -диод, в котором концентрация акцепторов в  $p$ -области  $N_a = 10^{10} \text{ см}^{-3}$ . В этом случае максимум напряженности электрического поля  $F_{\text{макс}}$  в области пространственного заряда находится в точке металлургического перехода и равен

$$F_{\text{макс}} = \frac{eN_a}{\epsilon\epsilon_0} d, \quad (17.10)$$

где  $d$  — ширина слоя пространственного заряда. Подставляя  $F_{\text{макс}} = 10^4$  В/см и  $\epsilon = 12$ , получим  $d = 6,6$  см. Следовательно, если использовать кремниевый детектор длиной 1 см, то при концентрации акцепторов  $10^{10} \text{ см}^{-3}$  в  $i$ -области получается почти однородное поле.

## 17.2. ПРИМЕНЕНИЕ ДЕТЕКТОРОВ КВАНТОВ И ЧАСТИЦ ВЫСОКОЙ ЭНЕРГИИ

### 17.2.1. ГЕРМАНИЕВЫЙ ДЕТЕКТОР

В германии для создания электронно-дырочной пары при температуре 90 К требуется энергия 2,96 эВ. Коэффициент Фано для больших германиевых детекторов равен 0,12, а у малых он может уменьшаться до 0,08. Причина этого еще не ясна. Билгером [47] написана фундаментальная статья о коэффициенте Фано в германии. Для  $\gamma$ -лучей величина  $\sqrt{\Delta E^2} = 1,4 \cdot 10^8$  эВ при энергии квантов  $10^8$  эВ.

### 17.2.2. КРЕМНИЕВЫЙ ДЕТЕКТОР

В кремнии энергия  $E_0 = 3,64$  эВ при  $25^\circ\text{C}$  и  $E_0 = 3,80$  эВ при  $90\text{ K}$ . Коэффициент Фано для кремния составляет около  $0,12$ . Для рентгеновских лучей с энергией кванта  $10^4$  эВ имеем  $\sqrt{\Delta E^2} = 160$  эВ, а для  $\alpha$ -частиц с энергией  $50 \cdot 10^6$  эВ величина  $\sqrt{\Delta E^2} = 1,1 \times 10^4$  эВ.

### 17.2.3. СЦИНТИЛЛЯЦИОННЫЙ СЧЕТЧИК НА ОСНОВЕ NaI

Сцинтилляционные детекторы на основе NaI, легированного таллием, имеют разрешение порядка  $75 \times 10^3$  эВ для квантов  $\gamma$ -лучей с энергией  $1,27 \cdot 10^6$  эВ, т. е. примерно в 40 раз хуже, чем у германиевых детекторов с дрейфующим литием для тех же квантов энергии. Это вытекает из величины произведения  $FE_0$ . Однако, поскольку возможно получение очень больших кристаллов NaI, они находят постоянное применение для регистрации квантов  $\gamma$ -лучей с энергией, превышающей  $10^7$  эВ. Весь вызываемый такими квантами свет с помощью простых оптических средств можно направить на фотокатод.

Еще один недостаток такого детектора состоит в том, что неопределенность числа регистрируемых электронов, вносимая электронной схемой (гл. 8), имеет здесь больший вес, чем в кремниевых и германиевых детекторах, поскольку фотокатод имеет относительно низкую квантовую эффективность  $\eta$ . Если  $\overline{\Delta N^2}$  — дисперсия регистрируемого числа электронов, обусловленная электронной схемой, то результирующая дисперсия измеряемого числа квантов, приходящихся на одну частицу, равна  $\overline{\Delta N^2}/\eta^2$ . Следовательно, дисперсия измеряемой энергии равна  $(E_0/\eta)^2 \overline{\Delta N^2}$ . Обычно  $\eta = 0,10 \div 0,20$ . Для кремниевых и германиевых детекторов энергия  $E_0$  меньше и  $\eta = 1,00$ .

О детекторах квантов и частиц высокой энергии см. также работы [14, 15, 48].



## ПРИЛОЖЕНИЕ

### ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ СЕГНЕТОЭЛЕКТРИКОВ

Если к линейному диэлектрику приложить поле  $E$ , то диэлектрик поляризуется и имеет поляризацию  $P$ . Сила, действующая на ион этой решетки или на связанный с ним электрон, в таком случае не равна  $eE$ , а должна записываться как  $eE_i$ , где  $E_i$  — напряженность локального поля. Причина этого в том, что другие поляризованные ионы также действуют с некоторой силой на отдельные ионы. Эта сила, конечно, пропорциональна поляризации  $P$ . Таким образом, мы можем записать ее в виде  $e\gamma P/\epsilon_0$ , где  $\gamma$  — коэффициент пропорциональности, который при кубической симметрии равен  $1/3$ , но при других симметриях может быть иным. Следовательно, имеем

$$E_i = E + \gamma \frac{P}{\epsilon_0}. \quad (\text{П.1})$$

Если  $\alpha$  — поляризуемость ионов, а  $N$  — число ионов на единицу объема, то на каждом ионе локальное поле наводит дипольный момент  $\alpha E_i$ , и, следовательно, поляризация равна

$$P = N\alpha E_i = N\alpha E + \gamma \frac{N\alpha}{\epsilon_0} P. \quad (\text{П.2})$$

Решая это уравнение относительно  $P$ , получим

$$P = \frac{N\alpha/\epsilon_0}{1 - \gamma N\alpha/\epsilon_0} \epsilon_0 E = (\epsilon - 1) \epsilon_0 E, \quad (\text{П.3})$$

так что диэлектрическая восприимчивость равна

$$\varepsilon - 1 = \frac{N\alpha/\varepsilon_0}{1 - \gamma N\alpha/\varepsilon_0}. \quad (\text{П.3а})$$

При  $\gamma N\alpha/\varepsilon_0 = 1$  это решение уходит в бесконечность, т. е. при конечном  $E$  должна бы получиться бесконечно большая величина  $P$ . Конечно, этого не происходит. Рассматриваемое соотношение становится нелинейным из-за того, что  $\alpha$  уменьшается с ростом  $P$ . Поскольку  $\alpha$  не может зависеть от знака  $P$ , эта величина должна быть функцией  $P^2$ . Таким образом, мы можем записать

$$\alpha = \frac{\alpha_0(T)}{1 + bP^2 + cP^4 + \dots} \quad (\text{П.4})$$

Подстановка в выражение (П.2) и умножение обеих частей равенства на  $1 + bP^2 + cP^4 + \dots$  после группировки слагаемых, содержащих  $P$  и  $E$ , дает

$$\left[ 1 - \frac{\gamma N\alpha_0(T)}{\varepsilon_0} \right] P + bP^3 + cP^5 + \dots = N\alpha_0(T) E$$

или

$$E = \left[ \frac{1 - \gamma N\alpha_0(T)/\varepsilon_0}{N\alpha_0(T)} \right] P + \frac{b}{N\alpha_0(T)} P^3 + \frac{c}{N\alpha_0(T)} P^5 + \dots \quad (\text{П.5}).$$

Обычно  $\alpha_0(T)$  — монотонно убывающая функция. Тогда может существовать такая температура  $T_c$ , что

$$\gamma \frac{N\alpha_0(T_c)}{\varepsilon_0} = 1. \quad (\text{П.5а})$$

Предположим, что мы имеем дело как раз с таким случаем. Производя разложение в ряд Тейлора в окрестности точки  $T = T_c$  и ограничиваясь лишь членами наименьшего порядка, не равными нулю, получим

$$E = \frac{(\gamma/\varepsilon_0) (-d\alpha_0/dT)|_{T_c}}{\alpha_0(T_c)} (T - T_c) P + \frac{b}{N\alpha_0(T_c)} P^3 + \frac{c}{N\alpha_0(T_c)} P^5 + \dots \quad (\text{П.6})$$

Это выражение можно переписать в виде

$$E = \beta(T - T_c)P + B_0P^3 + C_0P^5 + \dots, \quad (\text{П.6а})$$

где  $\beta > 0$ . Это — основное уравнение, описывающее поведение сегнетоэлектрика и используемое в гл. 12. Как упомянуто в этой главе, уравнение  $E = 0$  имеет ненулевое решение при  $T < T_c$ . В этом случае данный материал имеет спонтанную поляризацию при  $T < T_c$ , т. е. он является сегнетоэлектриком.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Van der Ziel A., Noise, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1954, Appendix I; имеется русский перевод: Ван дер Зил А., Флуктуации в радиотехнике и физике, приложение I, Госэнергоиздат, 1958.
2. Cramer H., Mathematical Methods of Statistics, Princeton U. P., 1946; имеется русский перевод: Крамер Г., Математические методы статистики, ИЛ, 1948.
3. Burgess R. E., *Faraday Soc. Disc.*, **28**, 151 (1959).
4. Van der Ziel A., Solid State Physical Electronics, 3rd ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1976.
5. Murray C. B., *Physica*, **38**, 549 (1968).
6. Van der Ziel A., Noise: Sources, Characterization, Measurements, Prentice Hall, Englewood, Cliffs, N. J., 1970; имеется русский перевод: Ван дер Зил А., Шум (источники, описание, измерение), изд-во «Советское радио», М., 1973.
7. Van der Ziel A., et al., *Solid State Electronics*, **19**, 149 (1976).
8. Hooge F. N., *Phys. Lett.*, **29A**, 139 (1969).
9. Klaassen F. M., *IEEE Trans.*, **ED 18**, 887 (1971).
10. Van der Ziel A., *Physica*, **48**, 42 (1970).
11. Plumb J. L., Chenette E. R., *IEEE Trans.*, **ED-10**, 304 (1964).
12. Lauritzen P. O., *Solid State Electron.*, **8**, 41 (1965).
13. Hiatt C. F., Ph. D. Thesis, University of Florida 1974 (будет опубликовано).
14. Dearnaley G., Northrop D. C., Semiconductor Counters for Nuclear Reactions, Wiley, New York, 1966.
15. Bertolini G., Coche A. (eds.), Semiconductor Detectors, Wiley-Interscience, New York, North-Holland, Amsterdam, 1968.
16. Kattke G. W., van der Ziel A., *Physica*, **49**, 461 (1970).
17. Van der Ziel A., *Proc. IEEE*, **58**, 1178 (1970).
18. Stevens N. B., et al. (eds), Semiconductors and Semimetals, vol. 5. Ch. 7, 1970, p. 287—318.
19. Kruse P. W., et al., Elements of Infrared, Technology, Wiley, New York, 1962.
20. Jones R. C., Advances in Electronics, vol. V, XI, Academic, New York, 1953, 1959.
21. Holter M. R., et al., Fundamentals of Infrared Technology, MacMillan, New York, 1962.
22. Lauritzen P. O., *IEEE Trans.*, **ED-15**, 770 (1968).
23. Van der Ziel A., *Solid State Electronics*, **18**, 969 (1975).
24. De la Moneda F., et al., *IEEE Trans.*, **ED-18**, 340 (1971).
25. McIntyre R. J., *IEEE Trans.*, **ED-13**, 164 (1966).

26. Timm G. W., van der Ziel A., *IEEE Trans.*, ED-15, 314 (1968).
27. Van der Ziel A., *Physica*, 81, B&C, 107 (1976).
28. Willardson R. K., Beer A. C. (eds.), *Semiconductors and Semimetals*, vol. 5, 1970, см. гл. 2—5.
29. Small J. M., et al., *Appl. Phys. Lett.*, 24, 275 (1974).
30. Van der Ziel A., *J. Appl. Phys.*, 44, 1400, 1402 (1973).
31. Singh V. P., Ph. D. Thesis, University of Minnesota, 1973.
32. Putley E. H., см. книгу [28], ч. 6.
33. Goetze G. W., Воерго А. Н., *Proc. IEEE*, 52, 1007 (1964).
34. Weimer P. K., Image Sensors for Solid State Cameras, см. в книге Morton L. (ed.), *Advances in Electronics and Electron Physics*, vol. 37, Academic, New York, 1975, p. 181—262.
35. Taylor R. G. F., Boot H. A. H., *Cont. Phys.*, 14, 55 (1973).
36. Holeman B. R., Wreathall W. M., *J. Phys. D. Appl. Phys.*, 4, 1898 (1971).
37. Garn L. E., Sharp E. J., *IEEE Trans.*, PHP 10, 208 (1974).
38. Lee S. J., van der Ziel A., *Physica*, 45, 379 (1969).
39. Lee S. J., van der Ziel A., *Physica*, 67, 119 (1973).
40. Van der Ziel A., *J. Appl. Phys.*, 47, 2059 (1976) (Sec. 14.3).
41. Chen T. M., van der Ziel A., *IEEE Trans.*, ED 12, 489 (1965).
42. Zijlstra R. J. J., Proc. Int. Conf. Lumin., Vols. 1 and 2, Budapest, Academia Krado, 1968, p. 2102—2107; Fijnaut H. M., Zijlstra R. J. J., *Britt. J. Appl. Phys.*, 3, 45 (1970).
43. Choe H. M., Ph. D. Thesis, University of Minnesota, 1973.
44. Russer P. H., Bayegan H., *Proc. IEEE*, 61, 46 (1973).
45. Richards P. L., et al., *Proc. IEEE*, 61, 36 (1973).
46. Clarke J., *Proc. IEEE*, 61 8 (1973).
47. Bilger H. R., *Phys. Rev.*, 163, 238 (1967).
48. Cerny J. (ed), *Nuclear Spectroscopy and Reactions*, Part A (vol. 40A in the series *Pure and Applied Physics*), Academic, New York, 1974; см. Sec. IIIA and IIIB; Sec. IIID discusses the Electronics used in the Detection of the Pulses.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Автокорреляционная функция 10, 15, 54  
 Ансамбль 10
- Баркгаузена* шум 220  
 Биения (между оптическими сигналами) 137, 186  
 Биноминальное распределение 28  
 Биномиальный процесс 28  
 Блокирующие контакты 274  
*Больцмана* множитель 20  
 — постоянная 19  
 Броуновское движение 18
- Вероятности плотность 10  
 — — многомерная 13  
 — — совместная 13  
 Взаимокорреляционная функция 10, 15  
 Взаимные спектральные плотности 53  
 Видикон 226  
 — пьроэлектрический 237  
 — с вторично-электронной проводимостью 229  
*Винера—Хинчина* теорема 46  
 Время переходного процесса (в фотодиодах) 164  
 Вторичной эмиссии шум 42  
 Вторично-электронная проводимость, видикон 229
- Гаусса* распределение 33  
 Генерационно-рекомбинационный шум 8, 65, 72, 112  
 — — связанный с ловушками или примесными центрами 112  
 — — — — центрами в области пространственного заряда 240
- Гетеродинарование оптическое 240  
 Гетеродинный приемник 240
- Дарлингтона* схема 99  
 Датчики изображения 231  
 — — шум 236  
 Двухкаскадный усилитель 86, 95  
 Двухполюсники 69  
*Девоншира* теория 209, 281  
 Детектирующая способность 131  
*Джозефсона* контакт 259  
 — — параметрический усилитель 269, 270  
 — — смеситель 270  
 — — термометр 261  
 — — усилитель 265  
 — эффект нестационарный 259  
 — — стационарный 259  
 Днод  $p-n$  31, 65, 153  
 Дисперсия 12  
 — теорема 35  
 Донорные уровни 196  
 Дробовый шум 8, 57, 155, 174, 178  
 — — в днодах 155  
 — — — транзисторах 57
- Емкостной болометр 213  
 — — с переменным смещением 213  
 — — — постоянным смещением 213  
 Емкость средняя 216  
 — — малосигнальная 216
- Зарядом управляемые приборы 234

- Заряженных частиц детекторы 274  
 — — — германиевые 279  
 — — — кремниевые 280  
 Захват в ловушку 102
- Измерение излучения 27  
 — малых зарядов 124  
 — напряжений 118  
 — тока 25, 116  
 Интегральные резисторы 108  
 Истоковый повторитель 84
- Канальный умножитель 178  
 Карсона теорема 60  
 Катодная люминесценция 252  
 — — шум 252  
 Квантовые детекторы 152, 274  
 — — высоких энергий 274  
 Классические детекторы 179  
 Компенсирующее легирование 197  
 Корреляция 10  
 — коэффициент 14, 15  
 — полная 14  
 — частичная 14  
 Крамерса—Кренига соотноше-  
 ние 222  
 Критически демпфированный  
 гальванометр 23, 166  
 Кюри точка (температуры) 209
- Лавинное умножение 174  
 Лазер 31, 136, 240  
 — излучение 136  
 — — флуктуация 136  
 Ланжевена метод 62  
 Лития метод дрейфа 278  
 Локальное поле 210 281  
 Лоренца постоянная 210
- Металл—окисел—металл, диоды  
 со структурой 185  
 МОП-конденсаторы 233  
 — транзисторы 73  
 — — тепловой шум 73
- — фликер-шум 73, 105  
 Мощность достижимая 80  
 — усиление 80
- Найквиста теорема 58  
 — — квантовая поправка 59  
 Напряженный измерение 118  
 Нормальное распределение 33  
 Нормальный закон 33  
 Нормировка 11, 16  
 Нулевая энергия 134
- Орбитон с переносом изображе-  
 ния 223  
 Основное уравнение 67  
 Охранное кольцо в  $p-n$ -диоде  
 160
- Пентод 29, 36  
 Переход  $p-n$  56, 153  
 Пирозлектрический видикон 237  
 — — режим вибрации 237  
 — — — с прерыванием 237  
 — — счигывание методом анод-  
 ной стабилизации 238  
 — — — катодной стабили-  
 зации 238  
 — детектор 89, 214  
 — коэффициент 207  
 Планка постоянная 134, 259  
 Подансамбль 35  
 Полевой транзистор двухза-  
 творный 88  
 — — с МОП-структурой 73  
 — — — общим затвором 84  
 — — — плоскостным затво-  
 ром 72  
 Полосы расчет ширины (в фото-  
 диодных детекторах) 166  
 Полупрозрачное зеркало 29  
 Поляризации шум 220  
 Поляризация 207  
 Поляризуемость 281  
 Потока квантование 259  
 Предельная точность 24  
 Прерывания метод 118  
 Проходная проводимость 72, 78  
 ПТПЗ 72

- ПТПЗ генерационно-рекомбинационный шум 72, 112  
 — тепловой шум 74  
*Пирсона* процесс 30  
 — распределение 30  
 Пуассоновские события 23  
 Пухлый нуль 184, 235
- Распределение постоянных времени 78, 103  
 Распределения функция 10  
 — — многомерная  $B$ , 13  
 — шум 36  
 Резистивный болометр 114  
*Ричардсона* закон 26
- Сверхпроводимость 259  
 Света усиление 252  
 — усилители 256  
 СКИП постоянного тока 270  
 — радиочастотный 273  
 Слаболегированный материал 152, 194  
 Случайная переменная 9  
 — — дискретная 9  
 — — непрерывная 9  
 — — стационарная 9  
 Сопротивление излучения (антенны) 183, 249  
 Спектральная плотность 46, 49  
 — — взаимная 53  
 Средние 10  
 — по ансамблю 12  
 — — времени 12  
 Стационарные процессы 11, 13  
*Стефана—Больцмана* закон 133  
 — постоянная 18, 132  
 Суперпуассоновский процесс 31, 42  
 Схема включения полевого транзистора с общим затвором 84  
 — — транзистора с общей базой 98  
 — — — — общим эмиттером 93  
 Сцинтилляционный счетчик 274  
 — — на NaI 280  
 Счетная техника 23  
 — — измерение излучения 25  
 — — — тока 25
- Телевизионные передающие трубки 223  
 Темновой ток (в  $p-n$ -диодах) 158  
 Температурных флуктуаций шум 9, 63, 131  
 Теорема о равномерном распределении энергии по степеням свободы 11, 20, 212  
 Теплового излучения детекторы 129  
 Тепловой шум 18, 58, 63, 73  
 — — в полевых транзисторах 73  
 — — — фотопроводниках 198  
 Термопара как детектор 137  
 Термоэлектронный диод 56  
 — — насыщенный 56  
 — — с ограничением тока пространственным зарядом 56  
 Техническая чувствительность 22, 130  
 Тока измерение 25, 116  
 — коэффициент усиления 92  
 Транзисторы 29, 38, 57, 92  
 — дробовый шум 57  
 — фликер-шум 108  
 Туннельное прохождение 102  
 — — вероятность 103
- Умножения методы 170  
 — — вторично-эмиссионного 177  
 — — лавинного 174  
 — шум 39  
 Усиление в проводниках 191  
 — — фототранзисторах 171  
 — — фотоумножителях 177  
 Усилитель 76, 80, 95  
 — шум 76, 80, 95, 198
- Фазовый детектор 120  
*Фано* коэффициент 29, 42, 218, 275  
*Ферми* статистика 30  
 Фликер-шум 9, 72, 101, 198  
 — в интегральных резисторах 108  
 — — МОП-транзисторах 105  
 — — транзисторах 108  
 — — угольных резисторах 110



- Фликер-шум в фотопроводниковых детекторах 198  
 Фотодиоды 29 152, 262  
 Фотокатод 27  
 Фотон 27  
 Фотопроводниковые детекторы 187, 246  
 — шумовые характеристики 191  
 — спектральные характеристики 189  
 Фотосмещение 240  
 — на диоде с барьером Шоттки 247  
 — — фотодиоде 242  
 — — фотопроводнике 246  
 — — фотоумножителе 242  
 — — фотозементе 245  
 — усиление 241  
 — шумы 242  
 Фототранзистор 171  
 Фотоумножитель 27, 177, 242  
 Фотоэлектрические детекторы 162  
 Фотоэлемент 152, 245  
 Фотоэмиссионные диоды 152  
 — катоды 29  
 Фриисса формула 79  
 Фурье анализ 44  
 — компоненты 45  
 — коэффициенты 45  
 — преобразование 48, 60  
 — теорема 44  
  
 Центральная предельная теорема 34  
  
 Четырехполюсники 71  
 Черного тела излучение 134  
 — — — флуктуация 134  
 — — — моды 134  
  
 Шоки—Рида—Холла центры 195  
 — рекомбинация 277  
 Шоттки барьер, детектор 182  
 — — диод 181  
 — — смеситель 247  
 — теорема 56  
 Шум см. Фликер-шум, Генерационно-рекомбинационный шум, Температурных флуктуаций шум, Дробовой шум и Тепловой шум  
 — в гальванометрах 21  
 — — цепях с полевыми транзисторами 81  
 — — — — транзисторами 92  
 — — электрических цепях 18  
 Шума коэффициент 76  
 — — — — возрастания 76  
 — — — — в видеоканалах 230  
 — — — — канальных умножителях 178  
 — — — — усилителя света 256  
 — — — — фотоумножителях 177  
 — методы уменьшения 201  
 — описание 69  
 Шумовая проводимость 69  
 — — входная 72  
 Шумовое сопротивление 69, 72  
  
 Эквивалентные схемы 74  
 Эквивалентный ток в режиме насыщения диода 70  
 Электронов умножение 38, 25  
 Электронов энергия сродства 40, 154  
 Эмиттерный повторитель 73, 96  
 Эргодичность 5, 12

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода . . . . .	5
Предисловие автора . . . . .	6
<b>Глава 1. Введение . . . . .</b>	<b>7</b>
<b>Глава 2. Функции распределения, средние значения, авто- и взаимокорреляционные функции . . . . .</b>	<b>10</b>
2.1. Функции распределения и средние значения . . . . .	11
2.2. Авто- и взаимокорреляционные функции . . . . .	15
<b>Глава 3. Простые измерения . . . . .</b>	<b>17</b>
3.1. Шум при электрических измерениях . . . . .	18
3.2. Измерения при помощи счетной техники . . . . .	23
<b>Глава 4. Типичные функции распределения. Теорема о дис- персии . . . . .</b>	<b>28</b>
4.1. Типичные функции распределения . . . . .	28
4.2. Теорема о дисперсии . . . . .	36
<b>Глава 5. Спектральный анализ флуктуирующих величин. Спектральные плотности . . . . .</b>	<b>44</b>
5.1. Спектральный анализ. Теорема Винера—Хинчина . . . . .	44
5.2. Расчет функции $S_x(f)$ или $S_x(0)$ . . . . .	54
<b>Глава 6. Описание шумов приборов и усилителей . . . . .</b>	<b>69</b>
6.1. Описание шумов . . . . .	69
6.2. Применения к схемам с полевыми транзисторами . . . . .	81
6.3. Шум транзисторных устройств . . . . .	92
<b>Глава 7. Фликер-шум и генерационно-рекомбинационный шум . . . . .</b>	<b>101</b>
7.1. Вывод формулы для спектра фликер-шума из формулы для спектра генерационно-рекомбинационного шума . . . . .	102
7.2. Фликер-шум в МОП-транзисторах . . . . .	105
7.3. Фликер-шум в транзисторах . . . . .	108
7.4. Фликер-шум в угольных резисторах . . . . .	110
7.5. Генерационно-рекомбинационный шум в полевых транзисторах с плоскостным затвором . . . . .	112

<b>Глава 8. Измерение малых токов, напряжений и зарядов</b>	<b>116</b>
8.1. Измерение токов	116
8.2. Измерение постоянного напряжения	118
8.3. Измерение малых зарядов	124
<b>Глава 9. Тепловые детекторы излучения</b>	<b>129</b>
9.1. Общий анализ	130
9.2. Детектор на термопаре	137
9.3. Резистивный болометр	144
<b>Глава 10. Фотоэлектрические и классические детекторы</b>	<b>152</b>
10.1. Фотоэмиссионные диоды, фотодиоды и фотоэлементы	153
10.2. Расчеты ширины полосы	166
10.3. Методы умножения в плоскостных полупроводниковых диодах	170
10.4. Умножение в фотоэмиссионных приборах	177
10.5. Классические детекторы	179
<b>Глава 11. Детекторы, основанные на эффекте фотопроводимости</b>	<b>187</b>
11.1. Характеристики фотопроводимости	189
11.2. Примеры	194
11.3. Тепловой шум, фликер-шум и шум усилителя	198
11.4. Методы уменьшения шума	201
11.5. Практические примеры фотопроводников	203
<b>Глава 12. Пирозлектрические детекторы и емкостные болометры</b>	<b>205</b>
12.1. Пирозлектрический детектор	206
12.2. Емкостной болометр	213
12.3. Природа шумов прибора	220
<b>Глава 13. Шум в телевизионных передающих трубках</b>	<b>223</b>
13.1. Ортикон с переносом изображения	223
13.2. Видикон	226
13.3. Видикон со вторичной электронной проводимостью	229
13.4. Твердотельные датчики изображения	231
13.5. Пирозлектрический видикон	237
<b>Глава 14. Фотосмешение</b>	<b>240</b>
14.1. Эквивалентная шумовая мощность гетеродинного приемника	240
14.2. Фотосмесительные устройства	241
14.3. Смеситель на точечно-контактном диоде с барьером Шоттки	247

---

<b>Глава 15. Усиление света с помощью катодной люминесценции</b> . . . . .	252
15.1. Шум света катодной люминесценции . . . . .	252
15.2. Шум усилителей света . . . . .	256
<b>Глава 16. Приборы с контактом Джозефсона</b> . . . . .	259
16.1. Контакт Джозефсона как термометр . . . . .	261
16.2. Контакт Джозефсона как усилитель . . . . .	265
16.3. Сверхпроводниковый квантовый интерференционный прибор . . . . .	270
<b>Глава 17. Детекторы квантов и заряженных частиц высокой энергии</b> . . . . .	274
17.1. Принципы построения . . . . .	274
17.2. Применение детекторов квантов и частиц высокой энергии . . . . .	279
<b>Приложение. Введение в теорию сегнетоэлектриков</b> . . . . .	281
<b>Литература</b> . . . . .	284
<b>Предметный указатель</b> . . . . .	286

А. ван дер Зил

**ШУМЫ ПРИ ИЗМЕРЕНИЯХ**

Научный редактор В. Соболев  
Младший научный редактор Л. Краснюк  
Художники А. Ясинский, И. Плотников  
Художественный редактор Л. Безрученков  
Технический редактор Н. Толстякова  
Корректор Л. Панова

ИБ № 1260

Сдано в набор 25.05.78. Подписано в печать 12.12.78. Формат 84×108<sup>1</sup>/<sub>32</sub>.  
Бумага типографская № 2. Гарнитура латинская. Печать высокая.  
Объем 4,63 бум. л. Усл. печ. л. 15,54. Уч.-изд. л. 12,41. Изд. № 20/9692.  
Цена 90 коп. Заказ № 1161. Тираж 10 600 экз.

Издательство «Мир»  
129820, МОСКВА, И-110, ГСП  
1-й Рижский пер., 2

Отпечатано в ордена Трудового Красного Знамени Ленинградской типографии № 2 имени Евгении Соколовой «Союзполиграфпрома» при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29 с матриц Ленинградской типографии № 6 Ленинградского производственного объединения «Техническая книга» Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 193144, Ленинград, С-144, ул. Моисеенко, 10