

Г. С. ГОРЕЛИК

# КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

ВВЕДЕНИЕ  
В АКУСТИКУ, РАДИОФИЗИКУ  
И ОПТИКУ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ

Под редакцией проф. С. М. РЫТОВА

*Допущено Министерством высшего образования СССР  
в качестве учебного пособия для университетов*



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

МОСКВА 1959

## А Н Н О Т А Ц И Я

В книге рассматриваются колебательные и волновые процессы, изучаемые механикой, акустикой, учением об электромагнетизме, оптикой, радиотехникой.<sup>47</sup> Оригинальная трактовка, данная в книге многим физическим явлениям на языке теории колебаний, помогает более глубокому их пониманию.

Книга может служить весьма ценным введением в изучение теории колебаний.



*Горелик Габриэль Семенович.*  
Колебания и волны

Редактор *Е. Б. Кузнецова.*

Технический редактор *С. Н. Ахламов.*

Корректор *И. С. Цветкова.*

Сдано в набор 28/V 1959 г. Подписано к печати 9/IX 1959 г. Бумага 70×108<sup>1/16</sup>  
Физ печ. л. 35,75. Условн. печ. л. 48,98. Уч-изд л. 44,23. Тираж 20000 экз. Т-06385.  
Цена книги 14 руб. 75 коп. Заказ № 1072

Государственное издательство физико-математической литературы  
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Московская типография № 5 Мосгорсовнархоза. Москва, Трехпрудный пер., 9.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора . . . . .	6
Предисловие автора к первому изданию . . . . .	7
<b>Глава I. Колебания . . . . .</b>	<b>9</b>
§ 1. Примеры гармонических колебаний . . . . .	9
§ 2. Единый подход к колебаниям различной физической природы . .	18
§ 3. Разнообразие типов колебаний . . . . .	24
§ 4. Фазовые соотношения между гармоническими колебаниями . . .	25
<b>Глава II. Суперпозиция колебаний . . . . .</b>	<b>30</b>
§ 1. Постановка задачи . . . . .	30
§ 2. Суперпозиция синхронных скалярных гармонических колебаний .	31
§ 3. Суперпозиция двух взаимно перпендикулярных векторов, изменяю- щихся синусоидально с одинаковой частотой . . . . .	40
§ 4. Электронный осциллоскоп . . . . .	42
§ 5. Суперпозиция гармонических колебаний с близкими частотами . .	48
§ 6. Суперпозиция гармонических колебаний с кратными частотами .	52
§ 7. О математическом аппарате учения о колебаниях и волнах . . .	54
<b>Глава III. Линейные колебательные системы . . . . .</b>	<b>56</b>
§ 1. Колебания маятника, фазовая плоскость . . . . .	56
§ 2. Незатухающий гармонический осциллятор . . . . .	61
§ 3. Затухающий гармонический осциллятор . . . . .	65
§ 4. Действие периодических толчков на незатухающий гармонический осциллятор . . . . .	72
§ 5. Действие периодических толчков на затухающий осциллятор . . .	81
§ 6. Действие синусоидальной силы на незатухающий гармонический осциллятор . . . . .	86
§ 7. Действие синусоидальной силы на затухающий осциллятор . . . .	93
§ 8. Резонансные кривые . . . . .	99
§ 9. Параметрический резонанс . . . . .	103
<b>Глава IV. Нелинейные колебательные системы . . . . .</b>	<b>107</b>
§ 1. Автоколебания, автоколебательные системы . . . . .	107
§ 2. Часы . . . . .	109
§ 3. Электронные лампы . . . . .	112
§ 4. Ламповый генератор . . . . .	115
§ 5. Условие самовозбуждения. Регенерация . . . . .	121
§ 6. Автоколебательные системы, не содержащие гармонических осцил- ляторов . . . . .	123
§ 7. Выпрямление колебаний . . . . .	127
§ 8. Модуляция . . . . .	132
§ 9. Демодуляция . . . . .	135
§ 10. Комбинационные колебания . . . . .	140
<b>Глава V. Волны . . . . .</b>	<b>144</b>
§ 1. Предварительные замечания. Волны на поверхности воды . . . . .	144
§ 2. Скалярные волны . . . . .	149
§ 3. Звуковые волны (предварительные сведения) . . . . .	154
§ 4. Векторные волны. Поляризация . . . . .	155
§ 5. Стоячие волны . . . . .	157

§ 6.	Суперпозиция двух шаровых или круговых синусоидальных волн	159
§ 7.	Световые волны (предварительные сведения)	163
§ 8.	Волновое уравнение	168
§ 9.	Дисперсия. Групповая скорость	170
§ 10.	Явление Доплера	178
<b>Глава VI. Упругие волны</b>		<b>182</b>
§ 1.	Продольные волны в твердом теле	182
§ 2.	Энергетические соотношения. Вектор Умова	189
§ 3.	Продольные собственные колебания стержней и пластин	194
§ 4.	Упругие волны в газах и жидкостях	201
§ 5.	Излучение	206
§ 6.	Поведение продольной волны на границе двух сред	209
§ 7.	Колебания газовых столбов	214
§ 8.	Поперечные волны на струне	217
§ 9.	Суперпозиция нормальных колебаний	219
§ 10.	Поглощение и дисперсия	223
§ 11.	Нелинейные явления	230
§ 12.	Дополнительные замечания	232
<b>Глава VII. Электромагнитные волны</b>		<b>233</b>
§ 1.	Исторические замечания	233
§ 2.	Уравнения Максвелла и их физический смысл	236
§ 3.	Электромагнитные волны (теория)	240
§ 4.	Электромагнитные волны (продолжение теории). Энергетические соотношения	248
§ 5.	Электромагнитные волны (лекционные эксперименты)	251
§ 6.	Радиолокация и радиоинтерферометрия	258
§ 7.	Излучение элементарного вибратора	264
§ 8.	Отражение и преломление	268
§ 9.	Электромагнитные волны в анизотропной среде	285
<b>Глава VIII. Сложные излучатели</b>		<b>294</b>
§ 1.	Предварительные замечания	294
§ 2.	Излучение полуволнового вибратора	295
§ 3.	Излучение антенны, состоящей из двух параллельных полуволновых вибраторов	297
§ 4.	Антенна в виде одномерной решетки из полуволновых вибраторов	300
§ 5.	Антенна в виде двумерной решетки	308
§ 6.	Направленное акустическое излучение	314
§ 7.	Общее исследование акустической волны, излучаемой колеблющейся пластинкой	317
§ 8.	Поле вблизи двумерной решетки из электрических вибраторов	330
§ 9.	Механизм отражения, преломления и дисперсии электромагнитных волн	333
§ 10.	Механизм двойного преломления и вращения плоскости поляризации	341
§ 11.	Рассеяние рентгеновского излучения	349
§ 12.	Дополнительные замечания	352
<b>Глава IX. Дифракция</b>		<b>354</b>
§ 1.	«Узкий» и «широкий» смысл термина «дифракция»	354
§ 2.	Принцип Гюйгенса—Френеля: основная идея	357
§ 3.	Дифракция Фраунгофера на периодической структуре (дифракционные решетки)	359
§ 4.	Принцип Гюйгенса—Френеля (продолжение): количественная формулировка	363
§ 5.	Простейшие дифракционные задачи с осевой симметрией	367
§ 6.	Фокусировка	372
§ 7.	Дифракция от длинной прямой щели	379
§ 8.	Неправильности краев экранов	388
§ 9.	Некоторые важные случаи дифракции Фраунгофера	393
§ 10.	Прожектор в оптике, акустике и радио	398
§ 11.	Дифракционная картина вблизи фокуса	402

<b>Глава X. Статистические явления</b> . . . . .	407
§ 1. Предварительные замечания . . . . .	407
§ 2. Суперпозиция колебаний со случайными фазами . . . . .	409
§ 3. Действие случайных толчков на гармонический осциллятор . . . . .	420
§ 4. Статистические явления в радиоаппаратуре . . . . .	429
§ 5. Статистические явления в источниках света . . . . .	438
§ 6. Общее исследование суперпозиции хаотически модулированных колебаний . . . . .	447
§ 7. Суперпозиция линейно поляризованных волн . . . . .	453
§ 8. Естественный и поляризованный свет . . . . .	456
§ 9. Общее рассмотрение суперпозиции электромагнитных волн . . . . .	461
§ 10. Интерференционные и дифракционные явления в случае протяженных источников . . . . .	467
§ 11. Вопросы когерентности в случае протяженных источников . . . . .	475
§ 12. Интерференционные и дифракционные опыты с протяженными источниками (продолжение) . . . . .	482
§ 13. Молекулярное рассеяние света . . . . .	488
<b>Глава XI. Спектральное разложение</b> . . . . .	492
§ 1. Спектр—реально существующая картина и спектр—математическое понятие . . . . .	492
§ 2. Спектральное разложение как математическая операция . . . . .	494
§ 3. Спектральное разложение как физическое явление. Его осуществление колебательным контуром . . . . .	502
§ 4. Спектральное разложение как физическое явление (продолжение). Его осуществление с помощью решетки и призмы . . . . .	509
§ 5. Избирательность и спектральная разрешающая сила . . . . .	518
§ 6. Сплошной спектр . . . . .	527
§ 7. Обсуждение физического смысла спектрального разложения . . . . .	536
§ 8. «Механизм» спектрального разложения. Простейшие случаи . . . . .	542
§ 9. Временной ход преобразования обрывка синусоиды спектральным аппаратом . . . . .	548
§ 10. Временной ход преобразования модулированного колебания спектральным аппаратом . . . . .	554
§ 11. Ширина спектральных линий . . . . .	560
§ 12. Спектральное разложение как метод исследования. Спектры и микромир . . . . .	564
<b>Предметный указатель</b> . . . . .	567

## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Оригинальная и интересная книга Г. С. Горелика «Колебания и волны» достаточно широко известна и по достоинству оценена нашей научно-педагогической общественностью. Это избавляет меня от необходимости давать ее характеристику и мотивировать выпуск ее второго издания. Подготовленное после безвременной смерти Г. С. Горелика, это издание, конечно, не подверглось той довольно значительной переработке, которую имел в виду произвести сам автор и о направлении которой можно составить представление по имеющимся в его бумагах наметкам и замечаниям.

Я ограничился несколькими небольшими вставками в основной текст, заимствованными из тех пояснений к отдельным вопросам общего характера, которые были написаны в 1953 г. самим Г. С. Гореликом (гл. I, § 2; гл. II, § 7; гл. VIII, § 12; гл. XI, §§ 7 и 10). Кроме того, я сделал несколько примечаний, которые в известной мере учитывают наметки автора ко второму изданию книги и отчасти связаны с работами Г. С. Горелика и его учеников, выполненными после выхода в свет первого издания (вопросы о разрешающей силе приборов, об измерении дисперсии среды и некоторые другие). Примечания редактора взяты в квадратные скобки.

*С. М. Рытов*

## ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

В этой книге сделана попытка рассмотреть с единой точки зрения на уровне университетского общего курса физики колебательные и волновые явления, встречающиеся в механике, акустике, оптике, учении об электромагнитных явлениях. Плодотворность единого подхода ко всевозможным колебательным и волновым явлениям давно ясна физикам и инженерам.

Книга составлена на основе лекций, читавшихся в течение ряда лет студентам-физикам второго курса Горьковского государственного университета. Она рассчитана главным образом на студентов физических, инженерно-физических и радиотехнических факультетов наших университетов и технических высших учебных заведений. Можно надеяться, что она принесет пользу и инженерам, имеющим дело с колебательными и волновыми явлениями.

Для чтения книги требуется знание разделов «механика» и «электричество» общего курса физики. В отношении математической подготовки читателя предполагается, что он владеет векторной алгеброй и аналитической геометрией и умеет вычислять производные и простейшие интегралы. Всякий раз, когда приходится пользоваться более сложным математическим аппаратом (например, дифференциальными уравнениями), даются необходимые пояснения, но без претензии на полноту и строгость.

Для того чтобы не увеличивать объема книги, пришлось ограничиться изложением отдельных фактов лишь в той мере, в какой они необходимы для понимания целого. Необходимо предупредить поэтому, что книга не может заменить обычный учебник оптики, акустики или радиотехники.

Сравнительно большое место, занимаемое в книге радиофизическим материалом, объясняется не только его важностью для техники, но и той ролью, которую играют радиофизические методы в самых разнообразных областях современного научного исследования — от ядерной физики до астрономии, от биологии до геофизики. Знание принципов, на которых основано действие важнейших типов радиоаппаратуры, приобрело такое же значение для естествоиспытателя, как понимание устройства микроскопа или гальванометра.

Автор старался показать, какой драгоценный вклад внесен в учение о колебаниях и волнах работами А. С. Попова, П. Н. Лебедева, Н. А. Умова, И. А. Вышнеградского, Н. Е. Жуковского, А. Н. Крылова, Л. И. Мандельштама и других выдающихся русских исследователей. В книге сделана попытка дать достаточно ясное (хотя по неизбежности неполное) представление о громадной и разнообразной исследовательской работе в области колебаний и волн, которая проделана в Советском Союзе.

Несколько слов о характере ссылок на литературу. В отличие от руководств, предназначенных для квалифицированного читателя, в данной книге ссылки на литературу не служат путеводителем по оригинальным работам и лишь указывают ряд книг и обзорных статей, которые помогут читателям полнее и глубже разобраться в отдельных вопросах.

Большую помощь в создании книги оказали автору сотрудники кафедры общей физики ГГУ и отдела радиофизики Физико-технического института ГГУ. Много труда в нее вложили лекционный ассистент А. П. Думенек, поставивший ряд описанных в книге демонстраций, В. С. Троицкий, разработавший аппаратуру для демонстрации микрорадиоволн и флуктуационных явлений в радиофизике, Н. М. Забавина и С. И. Боровицкий, выполнившие основную часть чертежной работы.

Представлялось весьма желательным, чтобы в книге были рисунки, дающие не слишком схематическое представление о некоторых лекционных экспериментах. Такие рисунки были сделаны с натуры С. Н. Рубиным.

Ряд ценных замечаний высказал при просмотре рукописи С. М. Рытов.

Большую работу по подготовке рукописи к печати проделала Н. К. Кожина.

Всем, кто помогал мне в работе над этой книгой, я выражаю свою искреннюю признательность.

Несмотря на старания автора и издательства, в книге могут оказаться (главным образом вследствие большого разнообразия материала) некоторые ошибки и промахи. Я буду весьма благодарен за указания необходимых или желательных исправлений.

*Г. Горелик*



# ГЛАВА I КОЛЕБАНИЯ

## § 1. Примеры гармонических колебаний

1. **Колебания маятника.** Отклоним рукой, а затем отпустим маятник, устроенный так, что он может сам рисовать график зависимости своего отклонения от времени (рис. 1). Этот маятник представляет собою конический сосуд, подвешенный на трех нитях, наполненный песком и имеющий

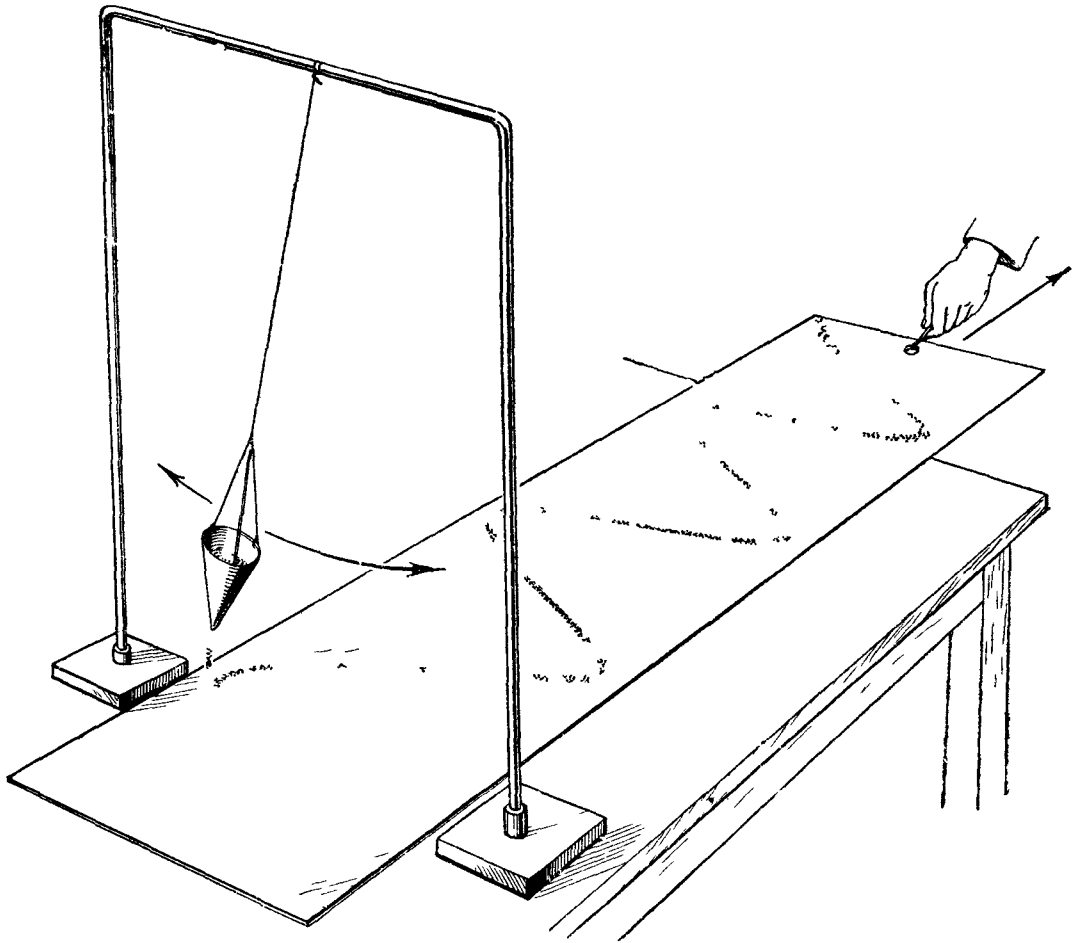


Рис. 1. Самопишущий маятник

внизу небольшое отверстие, из которого песок высыпается тонкой струйкой. На столе лежит выкрашенная в черный цвет длинная полоса картона. Заставим эту полосу равномерно скользить по столу в направлении, перпендикулярном к плоскости, в которой движется маятник. Песок сыплется на картон и прилипает к нему (картон был предварительно слегка смочен). Поставив затем картон вертикально, мы увидим то, что изображено на рис. 2. «Автограф» маятника, написанный им песком по картону, есть

синусоида, или, точнее, может рассматриваться с известным приближением как синусоида. При подходящем выборе начала координат эта кривая описывается уравнением

$$y = A \cos kx,$$

где  $A$ ,  $k$  — постоянные. Каждая ордината  $y$  равна, очевидно, смещению маятника в определенный момент  $t$ , а каждая абсцисса  $x$  — смещению

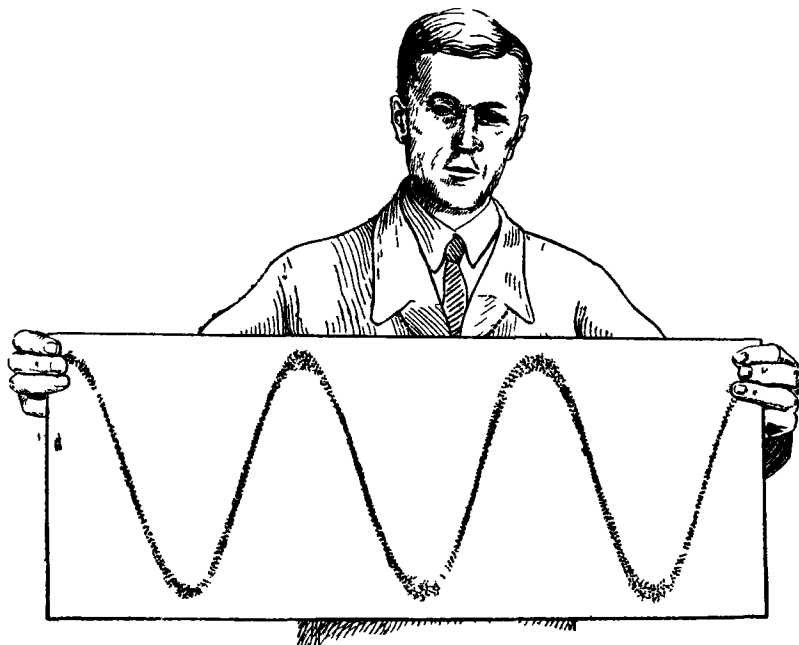


Рис. 2. «Автограф» маятника.

картона в тот же момент  $t$ . Так как картон движется равномерно (с некоторой постоянной скоростью  $v$ ), то

$$x = vt,$$

и следовательно, зависимость смещения маятника от времени выражается уравнением

$$y = A \cos \omega t, \quad (1.1)$$

где

$$\omega = kv.$$

Явление, описываемое формулой вида (1.1), где  $A$ ,  $\omega$  — постоянные, называется *гармоническим колебанием*.

Функция  $\cos \omega t$  обладает тем свойством, что при любом  $t$

$$\cos \omega (t + T) = \cos (\omega t + \omega T) = \cos \omega t,$$

если

$$\omega T = 2\pi,$$

т. е. если

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{или} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Промежуток времени  $T$  называется *периодом* гармонического колебания; это — продолжительность полного колебания, после которого все движение в точности повторяется. Величина

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

называется *частотой* гармонического колебания; это — число полных колебаний за единицу времени. Величина  $\omega$  называется *круговой частотой*. Это — число полных колебаний, происходящих в течение  $2\pi$  единиц

времени. Если время измеряется в секундах, то частота есть число полных колебаний в секунду. Единицей частоты является при этом частота колебания, период которого равен 1 сек. Для этой единицы частоты приняты названия герц и цикл \*). Маятник, изображенный на рис. 1, при длине нити в 1 м имеет период, равный приблизительно 2 сек., т. е. частоту около 0,5 герца. Периоду  $10^{-3}$  сек. соответствует частота 1 килогерц (или 1 килоцикл), периоду  $10^{-6}$  сек. — частота 1 мегагерц (или 1 мегацикл). С частотами такого порядка (и еще гораздо большими) нам постоянно придется встречаться в дальнейшем.

Величина  $A$  называется *амплитудой* гармонического колебания. Амплитуда равна наибольшему значению, принимаемому величиной, меняющейся со временем по закону, представляемому формулой (1.1).

2. Колебания камертона. Заставим звучать камертон, к одной из ножек которого прикреплено легкое зеркальце (рис. 3). Затемнив аудиторию, направим на зеркальце тонкий пучок белого света от электрической

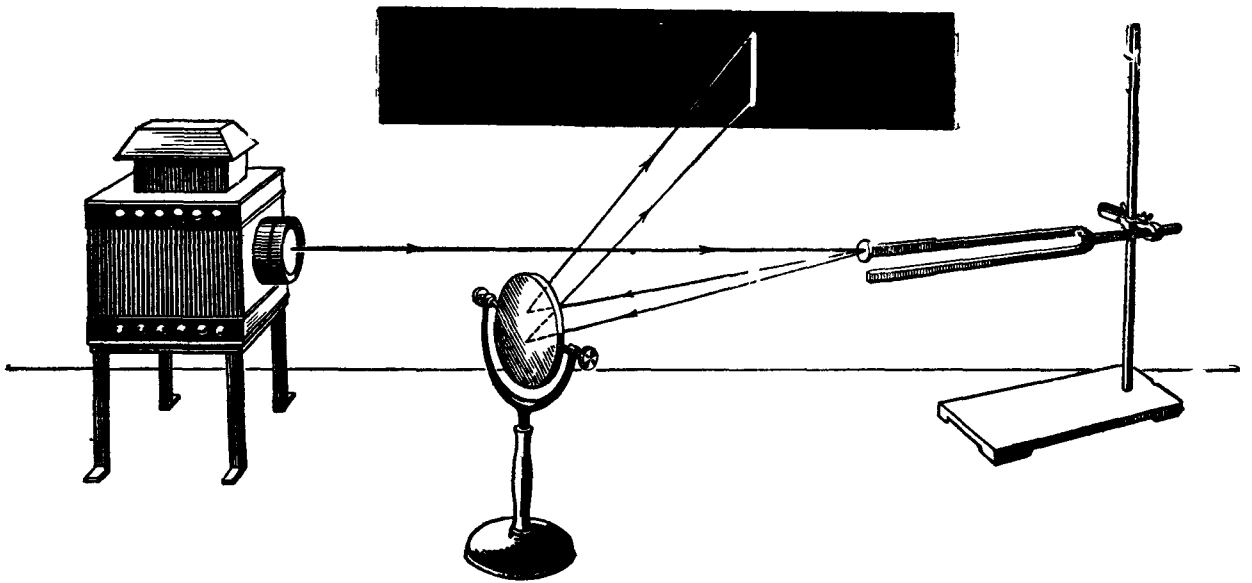


Рис. 3. Вертикальное размытие зайчика при звучании камертона.

дуги. Свет отражается от зеркальца, затем от другого (неподвижного) зеркала и попадает на экран. На экране образуется «зайчик», имеющий вид тонкой вертикальной черточки, более яркой на концах, чем в середине. Если мы придержим пальцем камертон так, чтобы он перестал звучать, черточка превратится в круглое пятнышко. Вертикальная черточка получается, очевидно, вследствие того, что ножка камертона и вместе с нею зеркальце быстро колеблются. При этом меняются угол падения и угол отражения света и луч, отбрасываемый от зеркальца, колеблется в вертикальной плоскости. Если зритель, фиксируя свой взгляд на вертикальной черточке, быстро повернет голову, он увидит яркую белую синусоиду на темном фоне. Максимумы и минимумы будут тем сильнее раздвинуты, чем быстрее поворачивать голову. Ясно в чем тут дело: сетчатка глаза, на которой получается изображение зайчика, находящегося на экране, играет ту же роль, что картон в опыте с маятником; зайчик изменяет свое положение, как и маятник, по синусоидальному закону. Отсюда легко заключить, что и смещение ножки камертона меняется со временем по такому же закону.

Это можно показать гораздо лучше, если заменить неподвижное зеркало многогранным зеркалом, вращающимся вокруг вертикальной оси.

\*) Правильнее говорить «цикл в секунду».

Тогда при остановленном камертоне зайчик многократно пробегает слева направо горизонтальную линию, и если движение — достаточно быстрое, глаз видит уже не отдельные положения зайчика, а сплошную горизонтальную линию. Если теперь отпустить камертон так, чтобы он снова зазвучал, эта линия превратится в синусоиду (рис. 4).

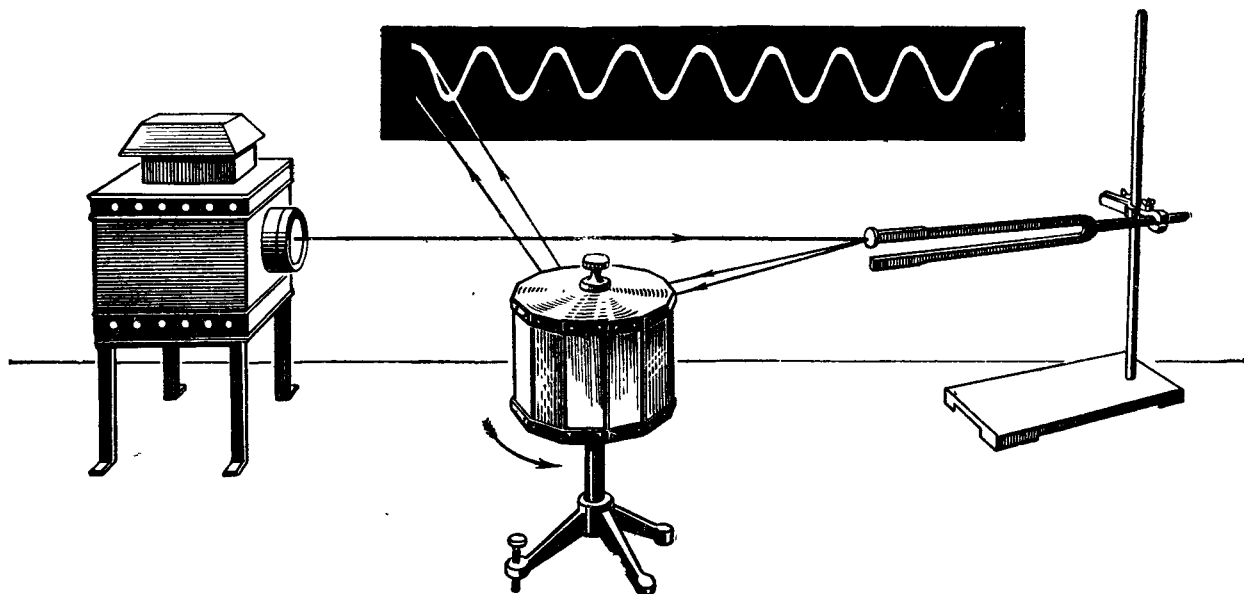


Рис. 4. То же, что и на рис. 3, но с добавлением горизонтальной развертки.

Итак, камертон также колеблется по закону (1.1), но здесь круговая частота  $\omega$  и частота  $\nu = \omega/2\pi$  гораздо больше, чем у маятника. Камертон, дающий тон *ля* первой октавы, колеблется с частотой 440 герц. Октава (рис. 5) соответствует отношению частот 2 : 1, терция — отношению частот 5 : 4.

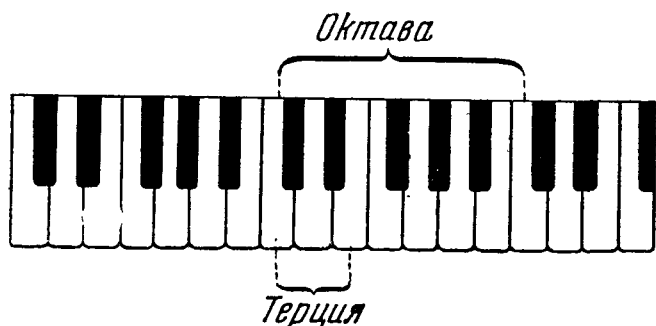


Рис. 5. Клавиатура фортепиано.

3. Колебания электрических величин\*). Проведем опыт, наглядно показывающий, по какому закону меняется со временем напряжение в городской сети.

Воспользуемся для этого электронным осциллографом\*\*), внешний вид которого показан на рис. 6. Устройство этого замечательного прибора мы подробнее опишем позднее (гл. II). Пока что достаточно знать следующее. Основной его частью является пустотная электронно-лучевая трубка — стеклянная колба с плоским дном, вдоль которой летят электроны, образующие электронный луч, т. е. тонкий пучок электронов. Дно трубки покрыто изнутри тонким слоем вещества, обладающего свойством светиться в том месте, где в него попадают электроны. Оно образует экран осциллографа. Включив трубку, мы видим сначала неподвижное светлое пятнышко

\*) Можно говорить о колебаниях физической системы (колебания маятника) и о колебаниях физической величины (колебания смещения, скорости, силы тока).

\*\*) Это название нам представляется более удачным, чем часто употребляемое «катодный осциллограф». Осциллограф означает «прибор, записывающий колебания». Осциллоскоп означает «прибор, позволяющий видеть колебания». Основным в приборе является наличие электронного пучка; катод является (наряду с анодом и т. д.) лишь одним из элементов, нужных для его получения.

в центре экрана — электронный луч бьет в одно определенное место (рис. 7, *a*). Поворачивая теперь одну из ручек управления, укрепленных на передней панели осциллоскопа, мы приводим в действие «развертку» — электрическое устройство, заставляющее электронный пучок многократно пробежать слева направо, с постоянной скоростью, по горизонтальному диаметру экрана. Это движение происходит так быстро, что глаз видит одну сплошную горизонтальную линию (рис. 7, *б*), подобно тому, что происходило при быстром вращении многогранного зеркала (пока камертон молчал). Обратным поворотом ручки остановим это движение. На экране снова видна светлая точка. Соединим теперь проводами клеммы городской сети с клеммами осциллоскопа (рис. 8). Светлая точка превратится в вертикальную черточку (рис. 7, *в*). Устройство осциллоскопа таково, что вертикальное смещение светлой точки пропорционально напряжению, подводимому к его

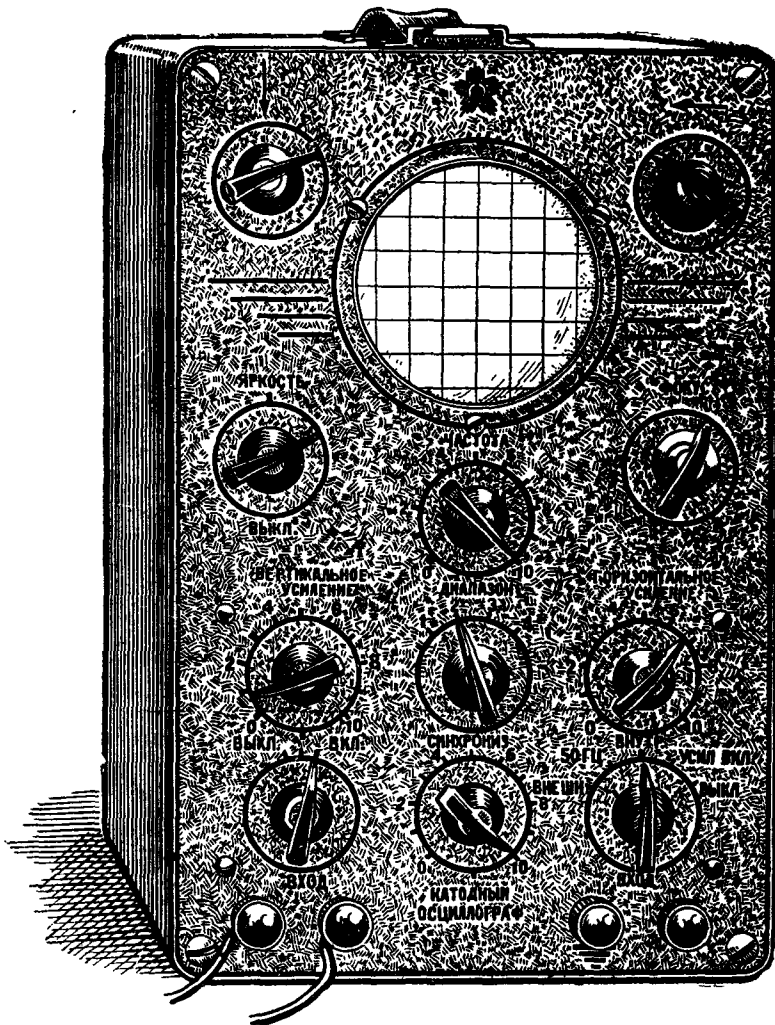
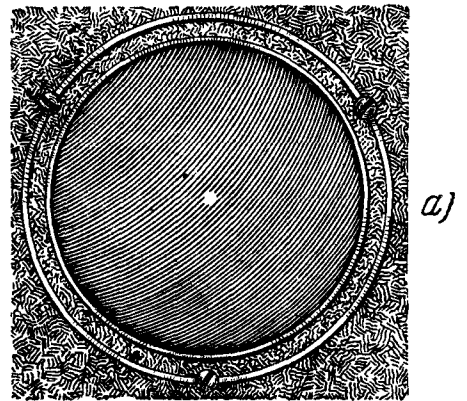
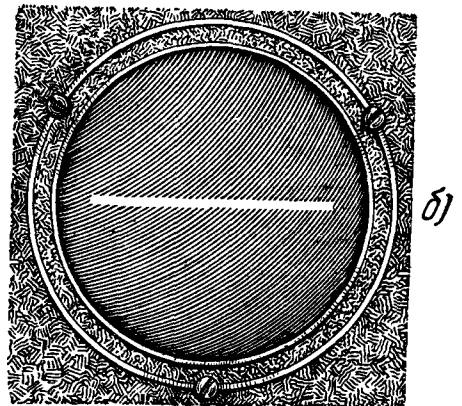


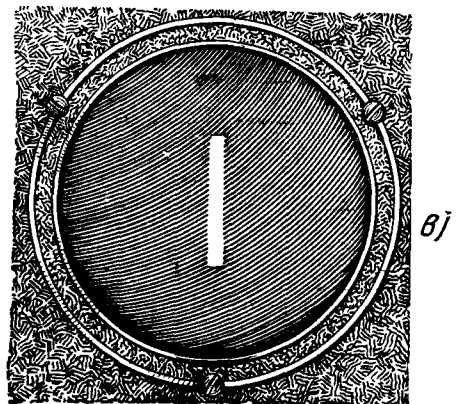
Рис. 6. Электронный осциллоскоп.



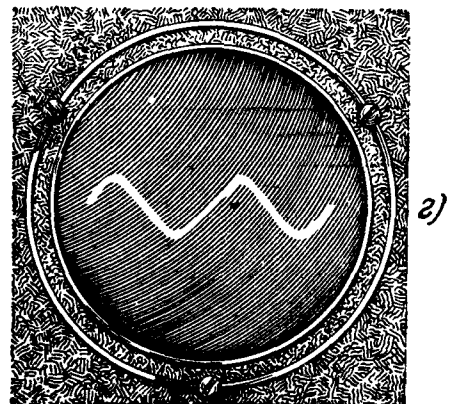
*a*)



*б*)



*в*)



*г*)

Рис. 7. Картины на экране осциллоскопа: *a*—включена труба; *б*—включена развертка; *в*—включена сеть; *г*—включены развертка и сеть.

клеммам. Появление светлой черточки означает, что электронный луч начинает совершать быстрое колебательное движение вверх и вниз. Снова повернув первую ручку, мы увидим на экране кусок синусоиды (рис. 7, *г*). Это означает, что напряжение  $u$  на клеммах городской сети изменяется по закону

$$u = A \cos \omega t,$$

т. е. по тому же закону, что отклонение маятника или ножки камертона. Здесь частота равна 50 герц.

Будем исследовать, далее, с помощью электронного осциллографа напряжение, возникающее на клеммах звукового генератора — довольно сложного прибора, внешний вид которого показан на рис. 9 (о его устройстве речь будет идти в гл. IV). Соединим для этого проводами выходные клеммы звукового генератора с осциллографом. Мы и здесь увидим синусоиду — напряжение, создаваемое звуковым генератором, также представляет собой гармоническое колебание.

Рис. 8. Осциллоскоп подключен к клеммам городской сети.

Будем поворачивать «ручку настройки»  $H$  звукового генератора (рис. 9) по часовой стрелке. Синусоида на экране сжимается в горизонтальном

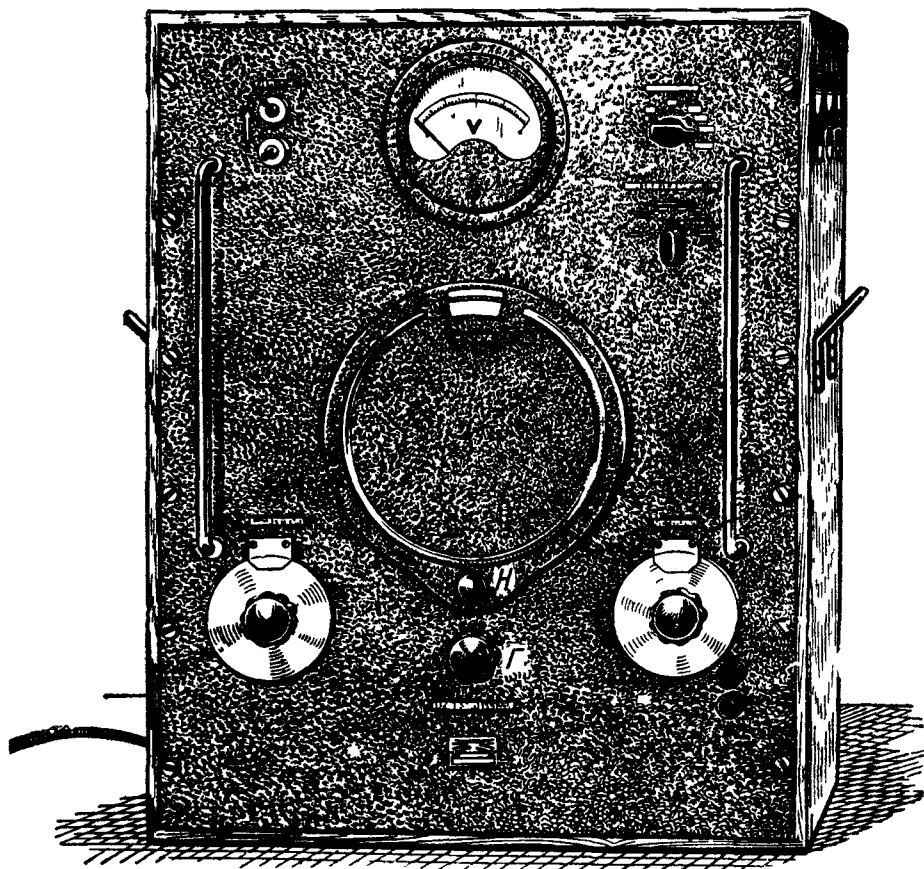


Рис. 9. Звуковой генератор.

направлении, горбы и впадины сближаются и их число на экране растет (рис. 10, *а*, *б*) — частота исследуемого напряжения \*) становится больше.

\*) Говорят «частота напряжения», «амплитуда силы» и т. д. в смысле частота или амплитуда гармонического колебания напряжения, силы и т. д.

Частота звукового генератора, показанного на рис. 9, меняется от нескольких герц до 20 000 герц. Будем поворачивать по часовой стрелке ручку  $\Gamma$  («ре-

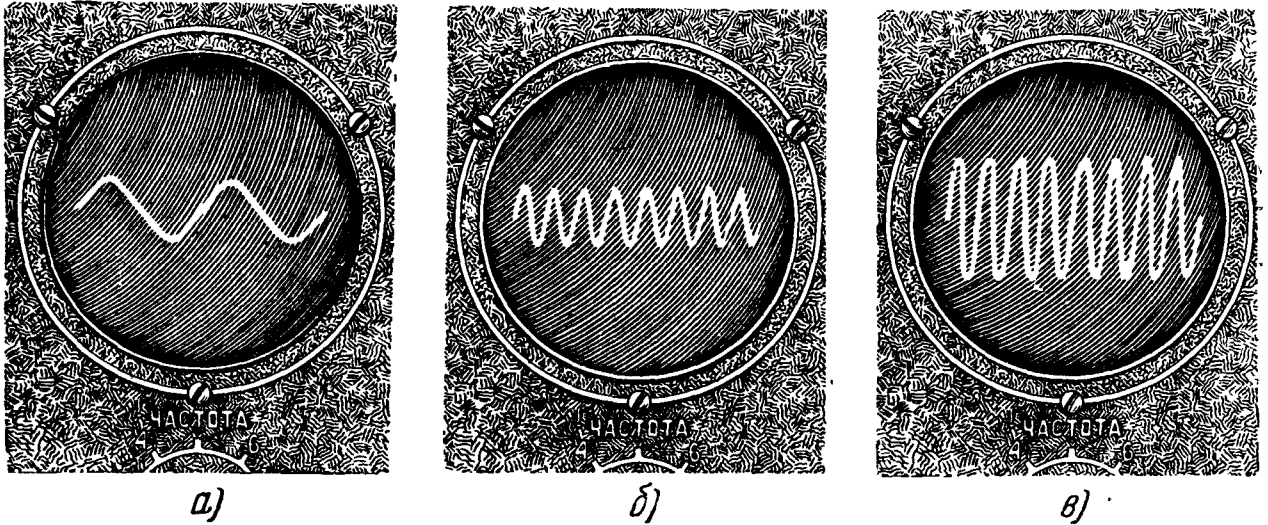


Рис. 10. Картины на экране осциллоскопа: *а*—первоначальная картина; *б*—после поворота ручки  $H$ ; *в*—после поворота ручки  $\Gamma$  (рис. 9).

гулировка выхода»). Мы увидим, что синусоида растягивается в вертикальном направлении (рис. 10, *в*), растет амплитуда исследуемого напряжения.

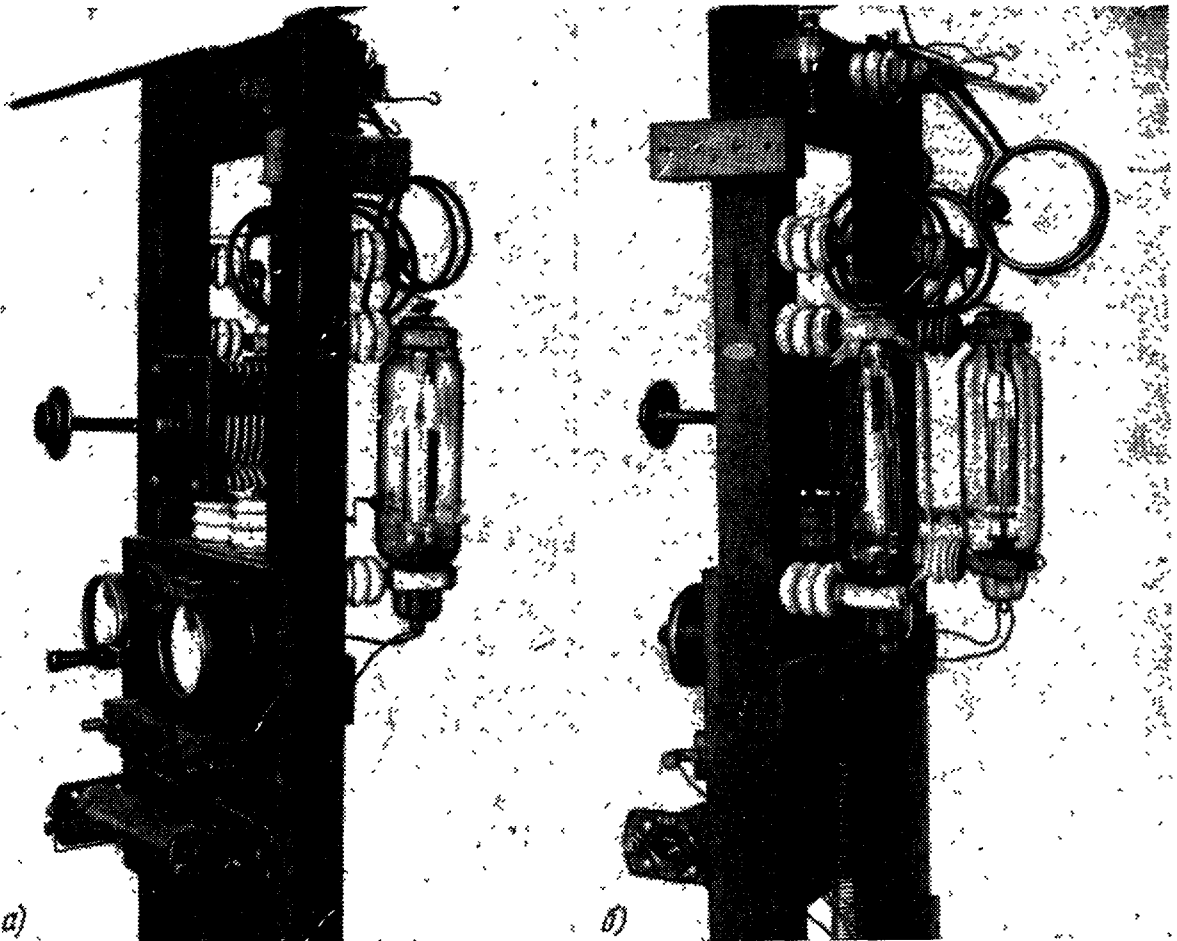


Рис. 11. Демонстрационный генератор высокой частоты: *а*—вид со стороны панели управления; *б*—вид со стороны колебательного контура. (По снимкам, любезно представленным физическим кабинетом МГУ.)

На рис. 11 показан генератор электромагнитных колебаний более высокой частоты (порядка 50 мегагерц); его основные элементы:

колебательный контур, состоящий из нескольких витков толстой медной проволоки и конденсатора переменной емкости, и трехэлектродная электронная лампа (с тем, как работает такой генератор, мы подробно познакомимся в гл. IV). Когда мы подаем на лампу нужные для ее работы постоянные напряжения, в колебательном контуре возникает ток, меняющийся по закону

$$i = A \cos \omega t.$$

Напряженности электрического и магнитного полей  $E$  и  $H$  в пространстве, окружающем генератор, меняются по такому же закону:

$$E = A_1 \cos \omega t, \quad H = A_2 \cos \omega t,$$

где  $A_1$  и  $A_2$  — постоянные (в каждой точке) векторы \*).

Поднесем к генератору виток проволоки, замкнутый на лампочку накаливания. Индукционный ток, возникающий в витке вследствие изменения  $H$ , раскаливает нить лампочки. Увеличив постоянное «напряжение накала» электронной лампы, мы увеличиваем амплитуду тока в контуре генератора: это легко заметить по возрастанию яркости лампочки накаливания.

Случай, когда пропорционально  $\cos \omega t$  меняется скаляр (например, сила тока), мы будем называть *скалярными* гармоническими колебаниями, а случай, когда пропорционально  $\cos \omega t$  меняется вектор (например,  $E$ ) — *векторными* гармоническими колебаниями.

**4. Колебания давления воздуха.** Присоединим к выходным клеммам звукового генератора громкоговоритель. Его диафрагма начнет колебаться. Возникнет звук. Будем исследовать, как меняется при этом давление воздуха. Укрепим на некотором расстоянии от громкоговорителя микрофон и присоединим его к электронному осциллоскопу, как это показано на рис. 12. Когда громкоговоритель звучит, на экране осциллоскопа видна синусоида. Это значит, что давление воздуха около диафрагм микрофона отличается от значения  $p_0$ , которое оно имеет в отсутствие звука, на некоторую величину  $\Delta p$ , изменяющуюся со временем по закону

$$\Delta p = A \cos \omega t.$$

Легко убедиться, переключив осциллоскоп с клемм цепи микрофона к выходным клеммам звукового генератора, что частота колебания давления воздуха  $\Delta p$  равна частоте колебания напряжения  $u$ , подаваемого на громкоговоритель.

Приключим снова осциллоскоп к выходным клеммам цепи микрофона. Будем поворачивать ручку настройки звукового генератора в сторону увеличения частоты. При этом мы слышим увеличение *высоты тона*, создаваемого громкоговорителем. Вместе с тем мы видим, что горбы и впадины синусоиды на экране осциллоскопа сгущаются (так же как в опыте, к которому относятся рис. 10, а, б). Этот опыт показывает, что чем больше частота колебаний давления воздуха, тем выше звук. Легко проверить, что повышению звука на одну октаву соответствует увеличение частоты в два раза.

Будем теперь поворачивать ручку регулировки выхода звукового генератора в сторону увеличения амплитуды напряжения  $u$ . При этом мы слышим увеличение *громкости* звука, создаваемого громкоговорителем. Вместе с тем мы видим, что горбы синусоиды на экране осциллоскопа

\*) Для простоты мы здесь не рассматриваем фазовые соотношения (см. § 4) между  $i$ ,  $E$ ,  $H$ .



становятся выше, впадины — глубже (как в опыте, к которому относится рис. 10, б, в). Этот опыт показывает, что чем больше амплитуда колебаний давления воздуха, тем громче звук.

Будем дальше увеличивать частоту. Звук станет очень высоким и едва слышимым, а затем мы уже ничего не будем слышать, хотя осциллоскоп показывает (если мы работаем с громкоговорителем и микрофоном надлежащей конструкции), что давление воздуха продолжает колебаться со значительной амплитудой. Этим опытом устанавливается, что наше ухо не ощущает как звук такие колебания давления воздуха, частота

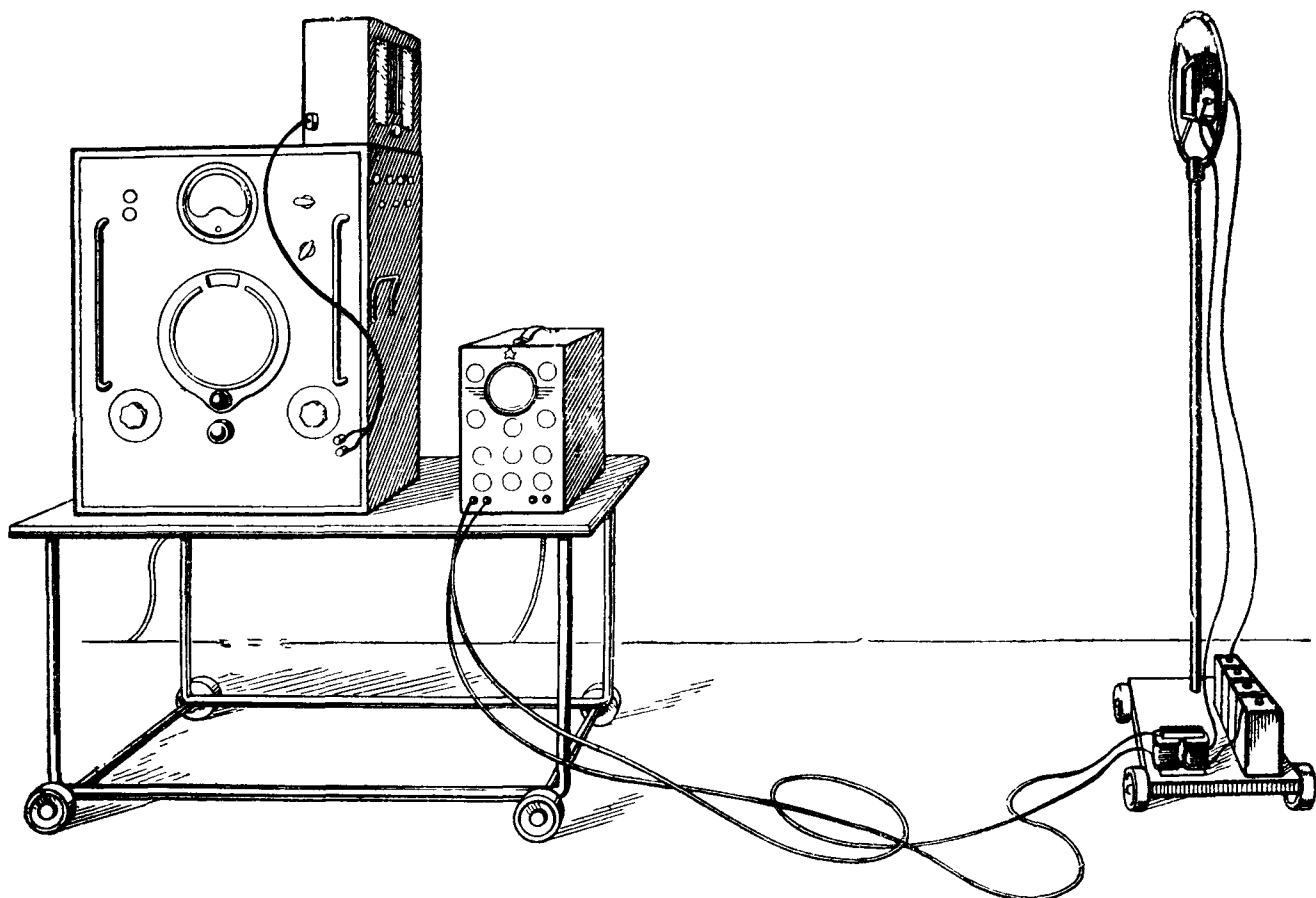


Рис. 12. Исследование звуковых колебаний давления воздуха.

которых превышает известную границу. Эта граница слышимости у различных людей различна, но не превышает приблизительно 15 000 герц. Опыт показывает, что человеческое ухо не воспринимает как звук также колебания давления, имеющие очень низкую частоту — около 30 герц и ниже.

5. Периодичность монохроматического света. Осветим ярко-желтым светом натриевого пламени или светом электрической дуги, пропущенным через желтый светофильтр, пленку из мыльного раствора, затягивающую расположенный в вертикальной плоскости проволочный каркас. С помощью объектива спроектируем пленку на экран (рис. 13). Мы увидим ряд чередующихся через одинаковые промежутки желтых и черных полос. (Мы описываем опыт в том виде, как его показывают в большой аудитории; отдельный наблюдатель может увидеть полосы, просто глядя на пленку.) Осветим ту же пленку фиолетовым светом (например, с помощью электрической дуги и фиолетового светофильтра). Мы увидим ряд чередующихся через одинаковые промежутки *фиолетовых* и черных полос, причем промежутки между ними будут примерно в полтора раза меньше, чем при опыте с желтым светом. Осветим пленку красным светом, заменив фиолетовый светофильтр красным: мы увидим чередующиеся *красные* и черные

полосы; промежутки между ними будут примерно вдвое больше, чем в случае фиолетового света.

Еще Ньютон понял, что наблюдаемая в опытах, подобных только что показанному, пространственная периодичность обуславливается тем, что в свете происходит какое-то периодическое изменение во времени. Но долго оставалось неизвестным, что именно периодически меняется в свете. Мы хорошо знаем это теперь: в каждой точке пространства, в котором распро-

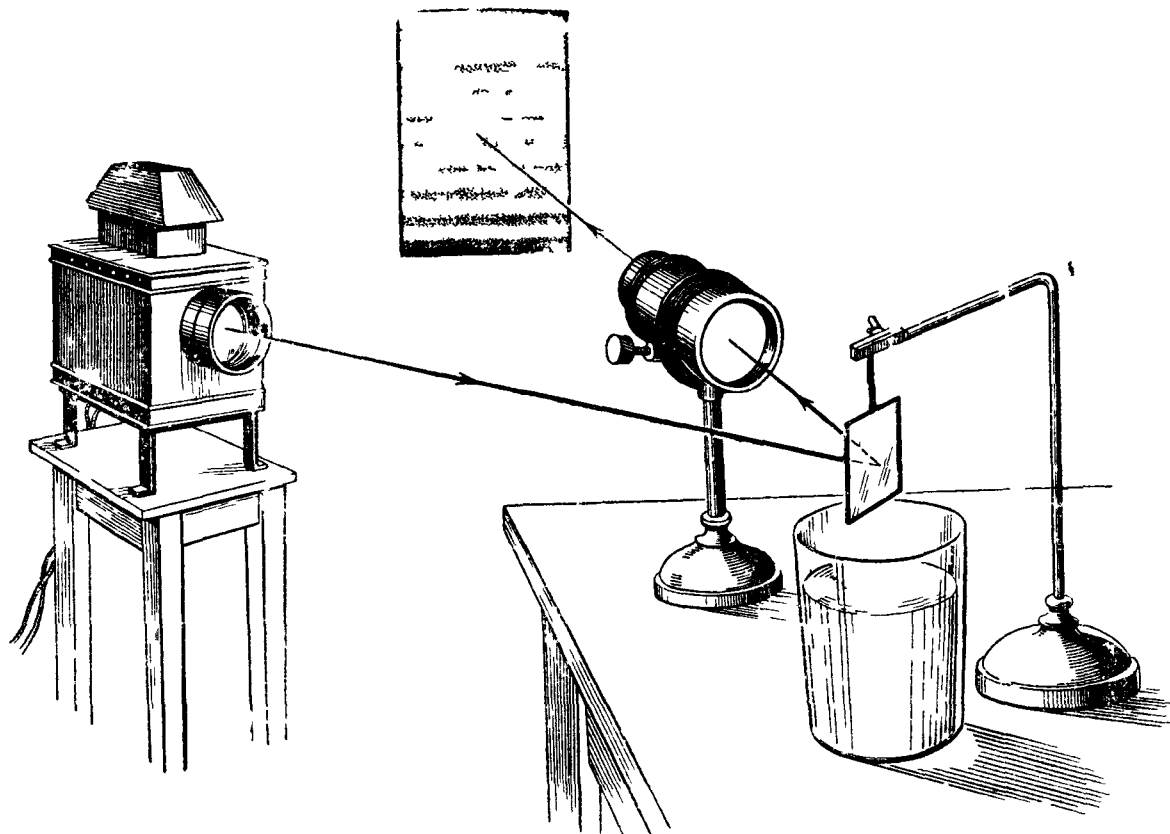


Рис 13. Схема расположения приборов при демонстрации окраски пленки и схематический вид картины на экране (Светофильтр не показан)

страняется свет, напряженности электрического и магнитного поля колеблются в простейшем случае приблизительно по закону

$$E = A_1 \cos \omega t, \quad H = A_2 \cos \omega t,$$

причем векторы  $A_1$ ,  $A_2$  взаимно перпендикулярны. Эти колебания гораздо более часты, чем те, которые создаются радиопередатчиками. Например, колебание электрического поля, создаваемое пламенем натрия и воспринимаемое как желтый свет, имеет частоту около  $5 \cdot 10^{14}$  герц. В случае красного света частота около  $4 \cdot 10^{14}$  герц, в случае фиолетового — около  $7 \cdot 10^{14}$  герц. Чем ярче свет, тем больше амплитуда соответствующих колебаний. Факты, убеждающие в правильности этих представлений, будут изложены в дальнейших главах.

## § 2. Единый подход к колебаниям различной физической природы

1. Единый язык теории колебаний. Существующее деление физики на механику, акустику, оптику, учение о теплоте, учение об электрических и магнитных явлениях еще и сегодня преобладает не только в средней, но и в высшей школе. С точки зрения этого деления опыты, описанные в § 1, относятся к различным разделам физики: первый — к механике,

второй и шестой — к акустике \*), третий, четвертый и пятый — к электромагнетизму, седьмой — к оптике.

Такое деление физики сложилось исторически. Оно имеет основание в том, что отражает в известной мере качественное различие форм движения в объективном мире (звука и света, механических и электромагнитных явлений). Некоторую роль сыграло и то, как различные явления (например свет и радиоволны) воспринимаются нашими органами чувств.

В настоящее время невозможно заниматься акустикой, не касаясь ультразвуков — колебаний, не слышимых человеческим ухом, но отличающихся от упругих колебаний, воспринимаемых человеческим ухом как звук, только более высокой частотой \*\*). Невозможно также заниматься оптикой, не уделяя значительного внимания ультрафиолетовому и инфракрасному излучениям и игнорируя рентгеновское излучение,  $\gamma$ -лучи и радиоволны. Все эти не воспринимаемые человеческим глазом электромагнитные излучения отличаются от света в узком смысле лишь большей или меньшей частотой колебаний напряженностей электрического и магнитного поля. Их часто называют невидимым светом.

С другой стороны, изучая звук и свет, механические и электромагнитные колебания, мы наталкиваемся на поразительную общность многих закономерностей. Развитие науки привело к тому, что все глубже познаются общие закономерности и связи качественно различных физических явлений. В связи с этим наряду с изучением особенностей механических, акустических, оптических и других явлений возникает целесообразность изучения всех этих явлений с точки зрения выявления общих закономерностей, свойственных этим явлениям. Такой подход позволяет выделить в качестве одного из отделов физики учение о колебаниях и волнах \*\*\*). Этот отдел охватывает материал, рассматриваемый также в разделах механики, акустики, электромагнетизма и оптики.

Тот единый подход к механическим и электромагнитным колебаниям, к звуку и свету, которого мы здесь будем придерживаться, играет все большую роль в науке и технике.

Когда мы говорим: качание маятника, звук *ля*, желтый свет натриевого пламени, магнитное поле лампового генератора, мы пользуемся языком механики, акустики, оптики, радиофизики. На язык общей теории колебаний все эти термины — и еще многие другие — переводятся одинаковым образом; все перечисленные явления можно рассматривать, с определенной степенью приближения, как гармонические колебания, изображаемые *единой* формулой

$$s = A \cos \omega t,$$

где  $s$  — смещение или скорость, компонента напряженности электрического поля в данной точке пространства, изменение давления или температуры в данной точке пространства, сила тока, угол отклонения стрелки и т. д. — число примеров можно было бы увеличить во много раз.

То, что колеблется в опыте с камертоном и в опыте с радиопередатчиком, было различным. То, как происходят колебания в обоих случаях, одинаково. Дело не только в том, что тут и там колебательный процесс

\*) Электромагнитные приспособления играют в них лишь вспомогательную роль.

\*\*\*) С помощью средств, созданных радиофизикой, можно получать ультразвук частоты до  $10^8$  герц и больше.

\*\*\*\*) Другой пример группирования материала по общности закономерностей: статистическая физика, охватывающая разнообразнейшие явления, подчиняющиеся вероятностным законам: процессы теплообмена, испарения, намагничивания, излучения и рассеяния света и т. д.

изображается синусоидой. Аналогичным может быть и сам механизм колебаний камертона и колебательного контура генератора \*). Часто при исследовании конкретных задач приходится интересоваться не столько тем, *что* колеблется, сколько тем, *как* и *почему* происходят колебания.

Материалистическое обоснование единого подхода к колебаниям и волнам различной физической природы состоит в том, что единые законы колебаний и волн, охватывающие как механические (в частности, акустические), так и электромагнитные (в частности, световые) колебания и волны, являются отражением многочисленных общих черт, объективно присущих этим процессам. Именно отсюда проистекает и целесообразность единого «колебательного» подхода. Это необходимо подчеркнуть, так как существует и имеет хождение в буржуазной научной литературе другое — субъективное — толкование подобного рода целесообразности, сводящее все дело к «удобству описания» в духе махистского «принципа экономии мышления».

Вместе с тем, между единым учением о колебаниях и волнах и классификацией отделов физики по формам движения материи (принцип, положенный Энгельсом в основу классификации наук вообще \*\*) нет, конечно, никакого противоречия. Из существования качественно различных форм движения (механических, электромагнитных и т. п.) никак не вытекает, что у них не может быть весьма существенных, объективно им присущих общих черт. Именно такие черты и изучаются в физике колебаний и волн, что в свою очередь не исключает, а, наоборот, предполагает отчетливое понимание качественных различий, например, между механическими и электромагнитными колебаниями и волнами (см. в этой связи последующие замечания в гл. II, § 7 и гл. VIII, § 12).

История единого подхода к колебаниям и волнам различной физической природы еще ждет своих исследователей. Уже М. В. Ломоносов в своем «Слове о происхождении света» отчетливо проводил аналогию между суперпозицией световых и звуковых волн (см. гл. V, § 7). В курсе общей физики, который читал в конце прошлого века в Московском университете А. Г. Столетов (этот курс был выдающимся по своему научному уровню и блеску изложения), развивалось общее учение о колебаниях и волнах, а затем — на его основе — излагалось учение о звуковых и световых явлениях. В 1895 г. вышел учебник А. Г. Столетова, содержащий обработку этих лекций. В предисловии А. Г. Столетов следующим образом формулирует содержание учебника: «Предлагаемая книга передает в сжатой и элементарной форме и в объеме, соответствующем университетскому курсу общей физики, основы учения о колебаниях и волнах, с приложением к акустике и оптике»\*\*\*).

Ярким примером единого подхода к механическим и электрическим колебаниям является замечательная работа П. Н. Лебедева «Экспериментальное исследование пондеромоторного действия волн на резонаторы» \*\*\*\*). В этой работе изучены, в частности, механические силы, действующие

\*) Это будет в случае, если колебания камертона поддерживаются электромагнитным устройством того же типа, что и применяемое в электрическом звонке (электромагнитный камертон). При этом камертон совершает автоколебания (см. гл. IV).

\*\*) См. Ф. Энгельс, Диалектика природы, ГИИЛ, 1949, стр. 198.

\*\*\*) А. Г. Столетов, Собрание сочинений, т. III, стр. 7. [Еще ранее развернутое и сознательное использование единого колебательного подхода было положено в основу выдающегося труда Рэля «Теория звука» (2-е русск. издание, Гостехиздат, 1955), впервые вышедшего в 1877—1878 гг. и явившегося важной вехой в развитии классической (линейной) теории колебаний.]

\*\*\*\*) П. Н. Лебедев, Избранные сочинения под редакцией и с предисловием А. К. Тимирязева, Гостехиздат, 1949, стр. 84.

на электрический резонатор при воздействии на него электромагнитных волн, а также на акустический резонатор при воздействии на него звуковой волны. Основной вывод, к которому приходит в результате своего исследования П. Н. Лебедев, сформулирован им в следующих словах (стр. 149): «Полная тождественность в действии пондеромоторных сил, которая экспериментально обнаружена для столь различных колебательных движений, каковы колебания электромагнитные, гидродинамические и акустические, показывает, что те элементарные законы, к которым сводятся наблюдаемые явления, должны быть независимы от физической природы данных колебаний и воспринимающих их резонаторов. В таком случае пределы приложимости найденных законов должны быть независимы от физической природы данных колебаний и воспринимающих их резонаторов. В таком случае пределы приложимости найденных законов должны быть чрезвычайно расширены».

2. **Плодотворность единого подхода.** Мало сказать, что вполне законно рассматривать вместе все явления, описанные в § 1, изучать с единой точки зрения звук и свет, маятник и радиопередатчик. Такой подход позволяет ознакомиться в более компактной и легче запоминаемой форме со сходными фактами, разбросанными при обычном изложении почти по всем разделам курса физики, и, что гораздо важнее, такой подход является весьма плодотворным в научных исследованиях. Одни и те же колебательные закономерности проходят красной нитью через многие физические явления. Поэтому, как подчеркивал Л. И. Мандельштам (1879 — 1944), изучая колебательные явления в одной области, например в оптике, мы приобретаем интуицию в другой области, например радиофизике. Часто, наоборот, «темные места в оптике освещаются, как прожектором, при изучении колебаний в механике».

Поясним эту мысль на примере.

Перед нами — два одинаковых камертона (рис. 14, а). Если по ним ударить молоточком, они звучат в унисон (издают звуки одинаковой высоты). Увеличим массу одного из камертонов, прикрепив грузик к его ножке (рис. 14, б). Теперь камертоны будут «расстроены» один по отношению к другому. Если по ним ударить, они издадут звуки различной высоты.

Сделаем теперь такой опыт. Сначала оба камертона молчат. Ударим молоточком только по нагруженному камертону (рис. 14, б). Он звучит некоторое время, после чего, коснувшись его рукой, мы заставляем его замолчать. Наступает полная тишина, молчит не только первый, но и второй камертон; он не откликнулся на колебание первого камертона.

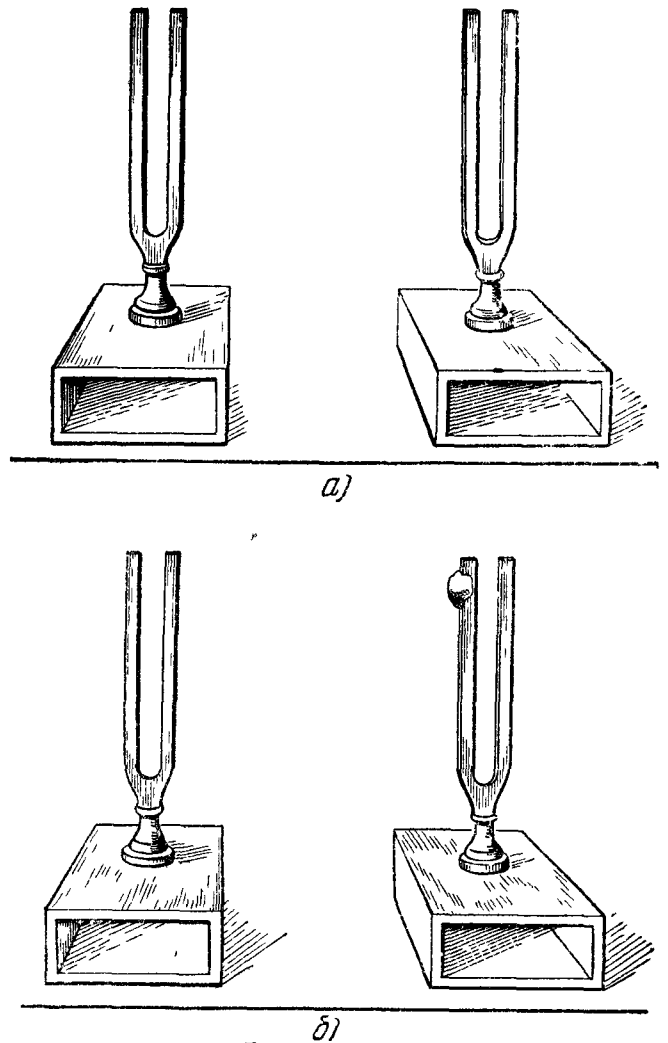


Рис. 14. а—настроенные в унисон и б—слегка расстроенные камертоны.

Повторим опыт, ударив сильнее по нагруженному камертону. Он будет издавать гораздо более громкий звук. Тем не менее и на этот раз второй камертон не откликнется заметно на звучание первого. Настроим теперь камертоны снова в унисон, сняв грузик с первого камертона. Ударим— не очень сильно— по первому камертону и, дав ему прозвучать некоторое время, заглушим его. Мы продолжаем *отчетливо слышать звук той же высоты*, хотя и менее громкий, — это звучит второй камертон. Он теперь сильно откликается или, как еще говорят, *резонирует* на колебания первого камертона.

Все описание опыта велось на языке акустики. Переведем его на язык учения о колебаниях. Всякое устройство, способное совершать гармони-

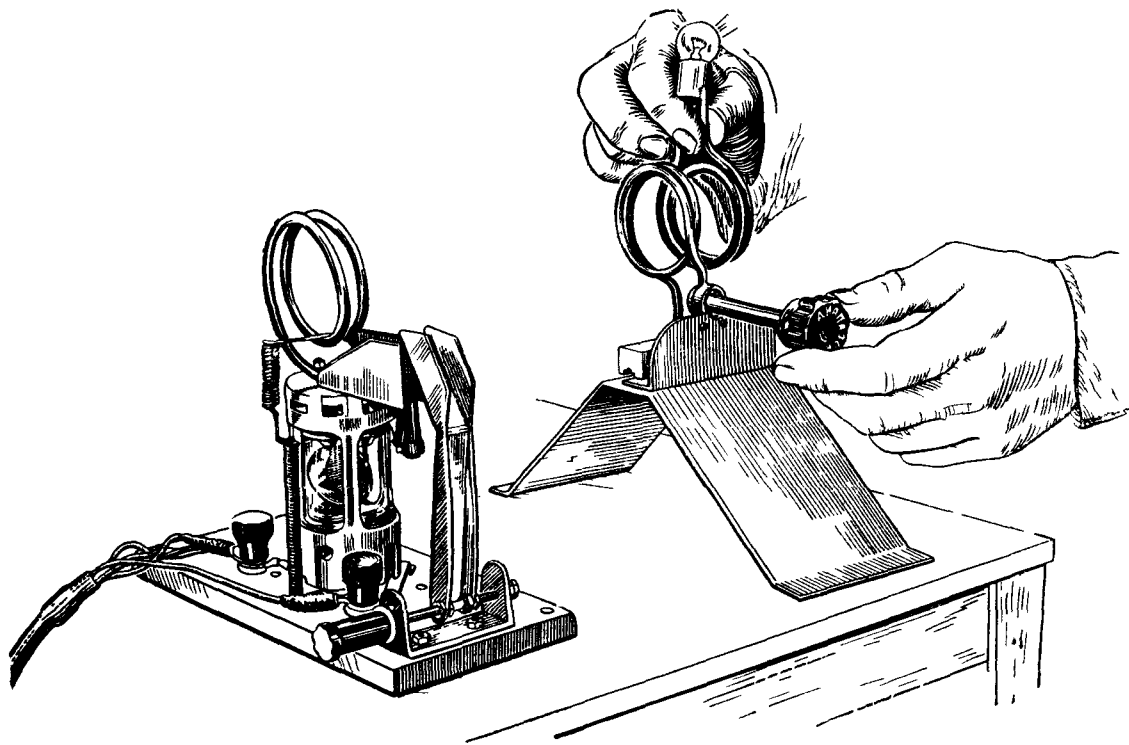


Рис 15 Расположение приборов при наблюдении электрического резонанса

ческие колебания, мы будем называть *гармоническим осциллятором* \*). Мы наблюдали действие одного гармонического осциллятора на другой. Мы видели, что если частоты колебаний осцилляторов заметно отличаются между собой, это действие является очень слабым, если же частоты одинаковы, то колебания одного осциллятора возбуждают сильные колебания в другом.

Мы можем теперь догадаться, что произойдет, если мы возбудим электромагнитные колебания в одном колебательном контуре и подвергнем действию электрического или магнитного поля, создаваемого этими колебаниями, другой колебательный контур. Здесь роли двух гармонических осцилляторов исполняют уже не камертоны, а колебательные контуры, но явления будут аналогичные, в чем легко убедиться.

Поместим на небольшом расстоянии от миниатюрного лампового генератора колебательный контур. Конденсатор колебательного контура генератора состоит из двух неподвижных пластин и подвижной пластины, которую можно вводить в зазор между ними посредством специальной ручки настройки (рис 15). Вращая ее, мы «настраиваем» генератор на тот

\*) Более точное определение см в гл. III.

или иной период колебаний \*): чем меньше емкость конденсатора, тем меньше период колебаний.

Около второго колебательного контура находится виток проволоки, в который включена электрическая лампочка накаливания. Если в этом контуре возникнут достаточно сильные электромагнитные колебания, в витке будет индуцироваться переменный ток, способный раскалить нить лампочки.

Несмотря на то, что в первом контуре уже есть колебания, лампочка вначале не горит. Увеличим накал электронной лампы генератора. Амплитуда колебаний генератора, как мы знаем, при этом сильно возрастает. Тем не менее лампочка не загорается. Ослабим снова накал электронной лампы генератора и начнем медленно поворачивать его ручку настройки или, как показано на рис. 15, аналогичную ручку настройки второго колебательного контура. Хотя амплитуда колебаний генератора при этом почти не меняется, при определенном положении ручки настройки лампочка резко вспыхивает и продолжает ярко гореть, если мы перестаем поворачивать ручку настройки. Если повернуть эту ручку дальше, лампочка снова гаснет. Мы могли бы с помощью электронной лампы превратить второй контур в генератор электромагнитных колебаний и убедиться в том, что он давал бы колебания как раз того периода, который имели колебания первого контура в тот момент, когда ярче всего горела лампочка. Таким образом, колебания первого контура вызывают сильные колебания во втором контуре тогда, когда оба контура одинаково настроены. При этом имеет место *электрический резонанс*. Лампочка служит в нашем опыте индикатором электрического резонанса.

Резонанс можно наблюдать также и со светом. Если в откачанный стеклянный сосуд ввести кусочек натрия, последний будет испаряться. Можно подобрать такую температуру, чтобы в сосуде установилась заметная плотность газообразного натрия и тем не менее он еще не давал свечения. Если освещать сосуд красным, оранжевым, зеленым, синим, фиолетовым светом, сосуд останется темным. Но если освещать его желтым светом натрия, с которым мы познакомились в § 1, газообразный натрий в сосуде вспыхивает таким же желтым светом. Это явление называется резонансной флуоресценцией. Объяснение его заключается в том, что электроны, заключенные в атомах натрия, ведут себя как гармонические осцилляторы, настроенные на определенный период колебаний, соответствующий желтому свету. Если период колебаний падающего на них света совпадает с собственным периодом колебаний, они сильно раскачиваются (резонанс!) и сами начинают испускать свет такого же периода.

Резонанс играет большую роль в технике, — не только в радиотехнике (где он широко используется), но и в судостроении, машиностроении, в строительном деле, электротехнике и т. д. (где обычно приходится с ним бороться) — всюду, где приходится иметь дело с вибрирующими механическими конструкциями или переменными электрическими токами.

Мы убедились, что результат воздействия одного камертона на другой камертон, одного колебательного контура на другой колебательный контур и т. д. сравнительно мало зависит от того, насколько *сильно* колеблется источник воздействия. Если мы уменьшим амплитуду колебаний источника вдвое, амплитуда возбуждаемого им колебания уменьшится тоже только вдвое. Но результат воздействия чрезвычайно сильно зависит от

\*) Радиотехники говорят «настроить генератор» или «настроить приемник», подобно тому как музыканты говорят «настроить скрипку». Слова «настройка», «настроить» пришли в общую терминологию учения о колебаниях из музыкальной и акустической терминологии. То же самое относится к термину «резонанс».

темпа этого воздействия. Достаточно очень малого расхождения между периодами двух камертонов, чтобы взаимодействие их стало гораздо слабее, чем при настройке их в унисон. Мы встретимся с примерами, где

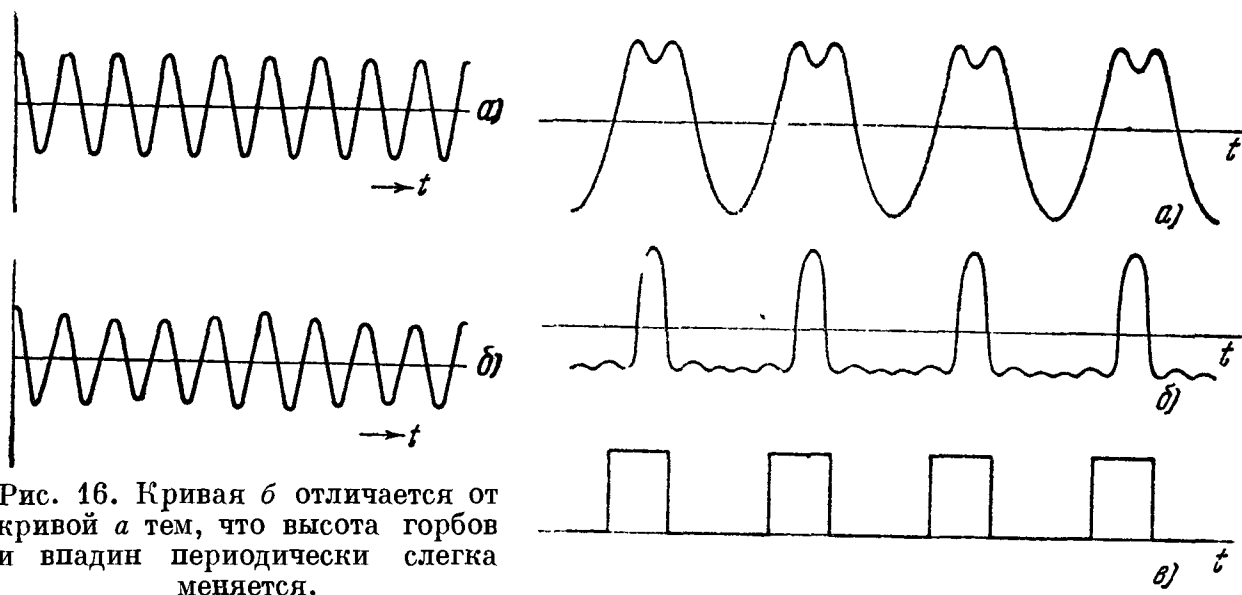


Рис. 16. Кривая б отличается от кривой а тем, что высота горбов и впадин периодически слегка меняется.

взаимодействие падает вдвое уже при расхождении периодов в  $\frac{1}{100\,000}$ . Мы увидим далее, что и результат воздействия зависит от *всей формы кривой*, изображающей это воздействие. Может, например, случиться так, что воздействие, изображаемое кривой а (рис. 16), почти не раскачивает определенную колебательную систему, а воздействие, изображаемое слегка отличной кривой б, раскачивает ее очень сильно. Эти примеры иллюстрируют одну из самых важных и характерных черт, присущую всей области колебательных явлений.

### § 3. Разнообразие типов колебаний

Речь шла до сих пор только о гармонических колебаниях. Гармонические колебания будут играть очень важную роль в этой книге. Но мы будем встречаться и с другими типами колебаний: на рис. 17 приведены некоторые типичные кривые, изображающие зависимость колеблющейся величины от времени. Такие кривые называются *осциллограммами*.

Особое место среди колебаний занимают *периодические колебания*, т. е. колебания, изображаемые функциями  $f(t)$ , обладающими тем свой-

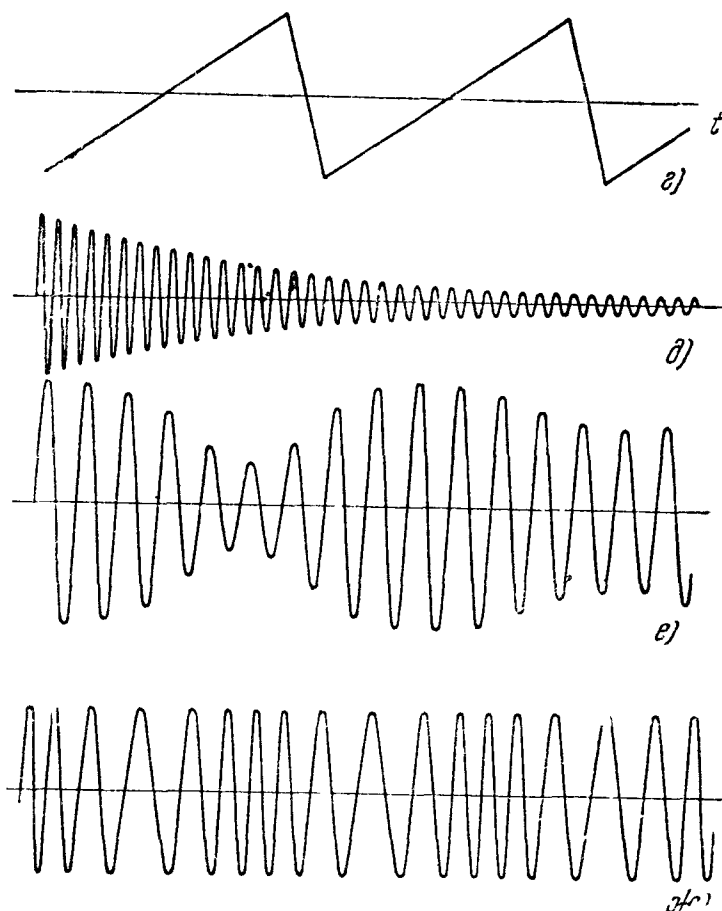


Рис. 17. Некоторые типы колебаний.



ством, что

$$f(t + T) = f(t) \tag{1.2}$$

при *любом*  $t$ , причем  $T$  — отличная от нуля постоянная. Величина  $T$  называется *периодом* колебания (рис. 18). Гармоническое колебание есть, оче-

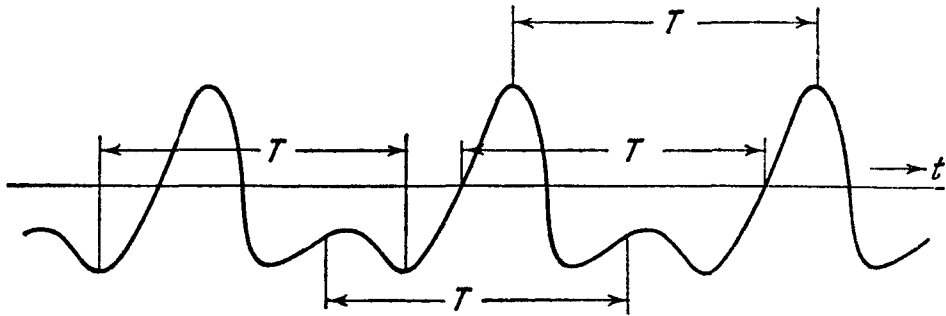


Рис. 18. Периодическая функция.

видно, частный случай периодического колебания. Другие частные случаи изображены кривыми *a, б, в, г* (рис. 17).

Тождество (1.2) выполняется, очевидно, и при замене  $T$  на  $2T$ . Действительно,

$$f(t + 2T) = f(t + T + T),$$

причем на основании (1.2)

$$f(t + T + T) = f(t + T) = f(t)$$

и, следовательно,

$$f(t + 2T) = f(t).$$

Точно так же можно доказать, что оно выполняется при замене  $T$  на  $nT$ , где  $n$  — любое целое число (положительное или отрицательное).

Таким образом, если периодическая функция имеет период  $T$ , то она обладает также периодами  $nT$ . Обычно под периодом понимают наименьшее отличное от нуля положительное число  $T$ , при котором выполняется тождество (1.2).

Было бы напрасной тратой труда пытаться провести резкую границу между колебаниями и «неколебаниями». Вряд ли можно провести разумное разграничение, позволяющее сказать, является ли, например, процесс, показанный на рис. 19, колебанием или нет.

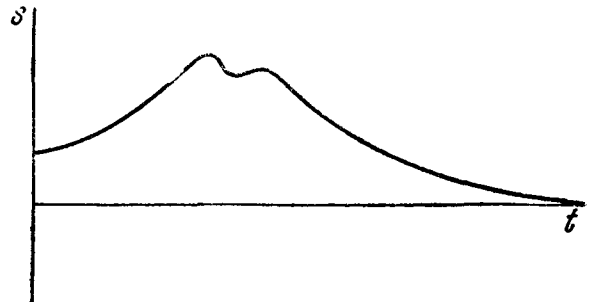


Рис. 19. Иллюстрация отсутствия резкой границы между колебательными и неколебательными процессами.

#### § 4. Фазовые соотношения между гармоническими колебаниями

Вернемся к гармоническим (синусоидальным) колебаниям. Необходимо дополнить сказанное в § 1, введя понятие *фазы*.

Понятие фазы гармонического колебания — чрезвычайно важное. В явлениях, с которыми мы будем иметь дело на протяжении почти всей этой книги, соотношения фаз отдельных участвующих в них гармонических колебаний играют решающую роль.

1. Фаза гармонического колебания, ее зависимость от выбора начала счета времени. Формула

$$s = A \cos \omega t \tag{1.3}$$

указывает, что при  $t = 0$  величина  $s$  проходит через значение  $s = A$ .

Что в действительности означает запись:  $t = 0$ ? Предположим для конкретности, что мы наблюдаем колебание маятника, отсчитывая время  $t$  по положению стрелки секундомера. В этом случае момент  $t = 0$  есть момент пуска секундомера (секундомер, предварительно заведенный, пускают в ход нажимом кнопки). Запись (1.3) означает, что секундомер пущен в один из тех моментов, когда маятник занимает крайнее правое положение, т. е.  $s$  проходит через один из максимумов.

Будем теперь понимать под  $t$  время, отсчитываемое по секундомеру, пущенному в ход в *произвольный* момент времени. Тогда колебание может быть записано так:

$$s = A \cos \omega (t - t_m), \quad (1.4)$$

где  $t_m$  — показание секундомера в момент какого-нибудь прохождения  $s$  через максимальное значение. Введя обозначение

$$\varphi = \omega t_m = 2\pi \frac{t_m}{T}, \quad (1.5)$$

мы можем переписать формулу (1.4) в таком виде:

$$s = A \cos (\omega t - \varphi).$$

Постоянная  $\varphi$  называется *фазой* гармонического колебания\*). Фаза есть безразмерная величина: она не меняется при изменении единицы времени, так как при этом  $t_m$  и  $T$  меняются в одинаковом отношении.

При произвольном, но фиксированном выборе начала счета времени различные колебания одинаковой частоты имеют, вообще говоря, *различные* фазы. Таким образом, скалярное гармоническое колебание характеризуется тремя параметрами: частотой, амплитудой и фазой.

(Мы здесь называем параметрами величины, остающиеся в отличие от  $s$  и  $t$  постоянными в течение всего процесса, т. е. характеризующие процесс *в целом*.)

С другой стороны, фаза *данного* колебания *зависит от выбора начала счета времени*. Если счет ведется с такого момента, когда  $s$  проходит через максимум, мы можем положить  $t_m = 0$ , что дает  $\varphi = 0$ , т. е.

$$s = A \cos \omega t.$$

Если счет ведется с такого момента, когда  $s$  проходит, возрастая, через нуль мы можем положить  $t_m = T/4$ , что дает  $\varphi = \pi/2$ , т. е.

$$s = A \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) = A \sin \omega t.$$

Сделаем два существенных замечания.

а) Одно и то же значение фазы может соответствовать различным началам счета времени, именно отстоящим друг от друга на целое число

\*) [Точнее: постоянная  $\varphi$  (или  $-\varphi$ ) называется *начальной фазой* гармонического колебания в отличие от *мгновенной фазы* — переменной величины  $\omega t - \varphi$ , которая при  $t=0$  равна начальной фазе. Говоря далее просто о фазе, мы будем иметь в виду начальную фазу.]

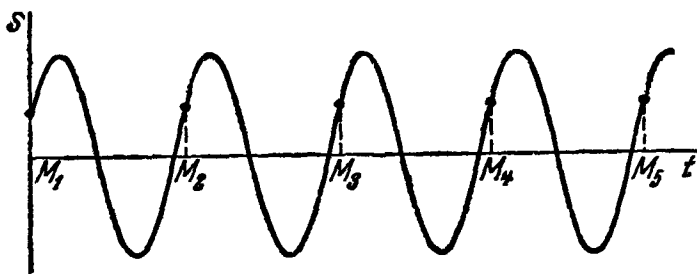


Рис. 20. Началам счета времени  $M_1, M_2, M_3, \dots$  соответствует одно и то же значение фазы колебания.

периодов. Действительно, пусть рис. 20 изображает осциллограмму гармонического колебания при каком-нибудь начале счета времени. Если мы будем вести счет времени от любого из моментов  $M_1, M_2, M_3, \dots$ , отстоящих друг от друга на период, мы можем взять в качестве  $t_m$  одну и ту же величину, — скажем, время, протекающее до ближайшего от начала счета максимума  $s$ , — и при этом будет справедлива одна и та же формула (1.4).

б) При фиксированном начале счета времени фаза не определена однозначно, а лишь с точностью до целого кратного числа  $2\pi$ . Действительно, формула (1.4) справедлива, если взять в качестве  $t_m$  момент наступления *любого* максимума  $s$ , т. е.

$$t_m = t_m^* \pm nT \quad (p = 1, 2, 3, \dots),$$

где  $t_m^*$  — время наступления одного определенного максимума, откуда согласно (1.5)

$$\varphi = \omega t_m^* \pm n \cdot 2\pi.$$

**2. Разность фаз двух синхронных гармонических колебаний, ее независимость от выбора начала счета времени.** Рассмотрим два *синхронных* гармонических колебания, т. е. два гармонических колебания  $s_1, s_2$  одинакового периода (рис. 21). При определенном выборе начала счета времени эти колебания запишутся так:

$$\begin{aligned} s_1 &= A_1 \cos(\omega t - \varphi_1), \\ s_2 &= A_2 \cos(\omega t - \varphi_2). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Величина

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

называется *разностью фаз* или *сдвигом фаз* двух колебаний.

Покажем, что в отличие от фазы каждого колебания разность фаз двух синхронных колебаний *не* зависит от выбора начала счета времени.

Пусть  $t$  — время, отсчитываемое по одному секундомеру,  $t'$  — время, отсчитываемое по другому секундомеру. Оба секундомера имеют одинаковый ход, но второй пущен на  $\tau$  сек. позднее первого. Тогда, очевидно,

$$t = t' + \tau. \quad (1.7)$$

Подставляя (1.7) в (1.6), получаем формулы, описывающие наши два колебания при счете времени по второму секундомеру:

$$s_1 = A_1 \cos(\omega t' - \varphi'_1), \quad s_2 = A_2 \cos(\omega t' - \varphi'_2), \quad (1.8)$$

где

$$\varphi'_1 = \varphi_1 - \omega\tau, \quad \varphi'_2 = \varphi_2 - \omega\tau.$$

Таким образом, фазы  $\varphi'_1, \varphi'_2$  при отсчете по второму секундомеру отличны от фаз  $\varphi_1, \varphi_2$  при отсчете по первому. Но *разность* фаз по второму секундомеру

$$\varphi'_2 - \varphi'_1 = \varphi_2 - \varphi_1,$$

т. е. *равна* разности фаз по первому, что и требовалось доказать.

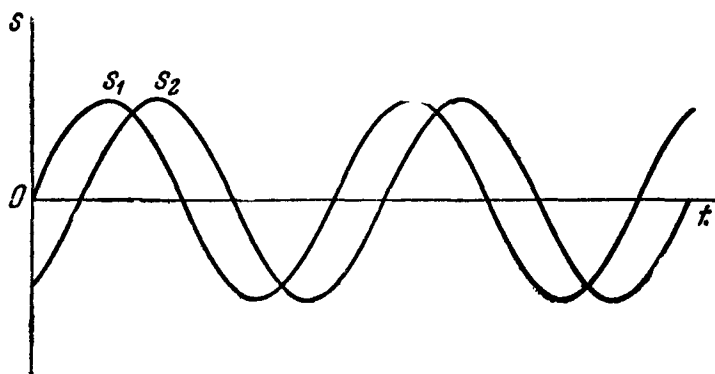


Рис. 21. Два синхронных колебания одинаковой амплитуды, сдвинутые по фазе.

Так как фаза каждого колебания определена только с точностью до целого кратного от  $2\pi$ , то же самое имеет место и для разности фаз двух колебаний. Например, в случае колебаний, изображенных на рис. 22, а, можно считать, что фаза первого колебания равна нулю, а фаза второго  $\frac{\pi}{2}$  или  $\frac{\pi}{2} + 2\pi$ , или  $\frac{\pi}{2} - 2\pi$ , или вообще  $\frac{\pi}{2} \pm n \cdot 2\pi$ , где  $n$  — целое.

Для этого случая можно с одинаковым правом писать:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{3}{2}\pi, \quad \frac{\pi}{2} \pm n \cdot 2\pi \quad (n - \text{целое}).$$

Если

$$\varphi_1 - \varphi_2 > 0,$$

говорят: второе колебание опережает по фазе первое на  $|\varphi_1 - \varphi_2|$ , или первое колебание отстает по фазе от второго на  $|\varphi_1 - \varphi_2|$ ; если

$$\varphi_1 - \varphi_2 < 0,$$

— наоборот. Например, в случае рис. 22, а колебание  $s_1$  опережает по фазе  $s_2$  на  $\frac{\pi}{2}$ . Но ясно, что такой способ выражения не однозначен: можно с таким же правом сказать, что первое колебание отстает по фазе от второго на  $\frac{3\pi}{2}$ .

Часто бывает удобно пользоваться следующим соглашением: брать в качестве разности фаз наименьшее по абсолютной величине значение  $\varphi_1 - \varphi_2$ , т. е. величину  $\omega |\Delta t|$ , где  $\Delta t$  — промежуток времени между каким-нибудь максимумом  $s_1$  и ближайшим к нему максимумом  $s_2$ . При таком соглашении в случае рис. 22, а колебание  $s_2$  отстает по фазе от колебания  $s_1$  на  $\frac{\pi}{2}$ , а в случае рис. 22, б, — наоборот, опережает. Это соглашение приводит к однозначному определению разности фаз во всех случаях, за исключением того, который изображен на рис. 22, в.

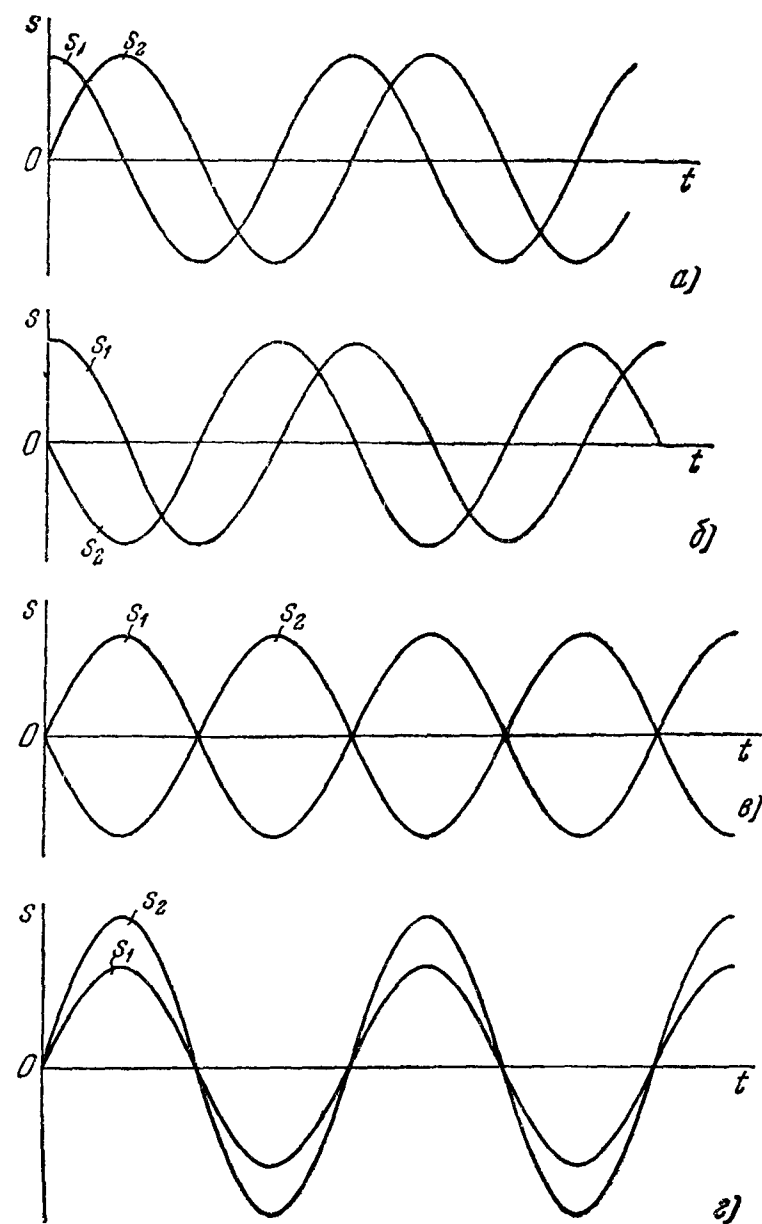


Рис. 22. Синхронные колебания с различными сдвигами фаз.

Здесь на одинаковом расстоянии от максимума  $s_2$  находятся два максимума  $s_1$ , и следовательно, можно с одинаковым правом говорить, что колебание  $s_1$  опережает  $s_2$  или отстает от него по фазе на  $\pi$ .

Однако указанное соглашение не всегда целесообразно, как мы увидим при изучении волн (гл. V).

Если разность фаз двух колебаний равна нулю (рис. 22, а), говорят: колебания — в фазе или синфазны; если она равна  $\pi$ , говорят: колебания — в противофазе или антифазны; если она равна  $\frac{\pi}{2}$  или  $\frac{3\pi}{2}$ , говорят: колебания находятся в квадратуре. Происхождение последнего термина станет понятно немного позднее (см. гл. II, § 2). В первом случае максимумы обоих колебаний наступают одновременно, во втором — отстают друг от друга на полпериода, в третьем — на четверть периода.

**3. Приведенная разность фаз несинхронных колебаний.** Все сказанное относилось только к синхронным гармоническим колебаниям. Рассмотрим два гармонических колебания с *различными частотами*:

$$s_1 = A_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1), \quad s_2 = A_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2), \quad \omega_1 \neq \omega_2.$$

Тогда при другом начале счета времени имеем согласно (1.7)

$$s_1 = A \cos(\omega_1 t' - \varphi_1'), \quad s_2 = A \cos(\omega_2 t' - \varphi_2'),$$

где

$$\varphi_1' = \varphi_1 - \omega_1 \tau, \quad \varphi_2' = \varphi_2 - \omega_2 \tau,$$

откуда

$$\varphi_1' - \varphi_2' = \varphi_1 - \varphi_2 - (\omega_1 - \omega_2) \tau,$$

т. е. здесь разность фаз  $\varphi_1 - \varphi_2$  *зависит* от начала счета времени. Но от него не зависят, как нетрудно проверить, величины

$$\varphi_1 - \frac{\omega_1}{\omega_2} \varphi_2, \quad \frac{\omega_2}{\omega_1} \varphi_1 - \varphi_2,$$

которые мы будем называть «*приведенными разностями фаз*» несинхронных колебаний.

## ГЛАВА II

### СУПЕРПОЗИЦИЯ КОЛЕБАНИЙ

#### § 1. Постановка задачи

Мы познакомились в первой главе с разнообразными примерами, когда та или иная физическая величина (скаляр: электрическое напряжение, давление воздуха и т. д., или вектор: напряженность магнитного или электрического поля и т. д.) меняется со временем по колебательному закону, в частности по закону, который можно изобразить с достаточным приближением формулой вида

$$s = A \cos(\omega t - \varphi)$$

или

$$v = A \cos(\omega t - \varphi),$$

где  $A$ ,  $A$ ,  $\omega$ ,  $\varphi$  — постоянные (гармоническое колебание).

Мы начнем систематическое изложение с задачи, играющей фундаментальную роль во всем учении о колебаниях и волнах, на которой строится теория многих явлений, разбираемых в этой книге. Задача эта состоит в следующем.

Известно, что некоторая интересующая нас физическая величина (скаляр или вектор) есть сумма — или, как еще говорят, *суперпозиция* — нескольких величин (скаляров или векторов), закон изменения которых со временем нам известен. Требуется исследовать закон изменения во времени интересующей нас величины.

Речь может идти об изменении давления воздуха  $\Delta p$ , создаваемом в данной точке пространства двумя не очень сильными источниками звука (например, двумя камертонами). Опыт учит, что  $\Delta p$  практически равно в каждое мгновение просто сумме тех изменений давления  $\Delta p_1$  и  $\Delta p_2$ , которые создавал бы каждый источник в отдельности:

$$\Delta p = \Delta p_1 + \Delta p_2.$$

Речь может идти, далее, о токе  $i$  в разветвленной цепи, если даны токи  $i_1$ ,  $i_2$ , ... в разветвлениях; как известно,

$$i = i_1 + i_2 + \dots$$

Еще один пример. Опыт учит, что напряженность электрического поля  $E$ , создаваемого в данной точке пространства двумя радиопередатчиками\*) или двумя источниками света, равна векторной сумме напряжен-

---

\*) За исключением особого случая, называемого «люксембург-горьковским эффектом». Он возникает при очень большой напряженности поля в ионизированных высоких слоях атмосферы (ионосфере).

ностей  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{E}_2$ , которые они создавали бы в отдельности:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2.$$

Исследование результата суперпозиции полей, создаваемых отдельными источниками, имеет огромное значение в оптике и радиофизике.

Мы рассмотрим, прежде всего, задачу о суперпозиции гармонических колебаний (скалярных и векторных) одинаковой частоты. Как мы увидим, здесь весьма существенную роль играет разность фаз.

## § 2. Суперпозиция синхронных скалярных гармонических колебаний

### 1. Случай двух колебаний. Пусть

$$s = s_1 + s_2,$$

где

$$s_1 = A_1 \cos(\omega t - \varphi_1), \quad s_2 = A_2 \cos(\omega t - \varphi_2).$$

Имеем:

$$s = A_1 \cos(\omega t - \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t - \varphi_2) \quad (2.1)$$

или, сделав простые тригонометрические преобразования,

$$s = (A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2) \cos \omega t + (A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2) \sin \omega t. \quad (2.2)$$

Всегда можно найти такие действительные величины  $A$ ,  $\varphi$ , чтобы удовлетворялись уравнения

$$\left. \begin{aligned} A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2 &= A \cos \varphi, \\ A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2 &= A \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Действительно, рассматривая (2.3) как два уравнения с двумя неизвестными  $A$ ,  $\varphi$ , мы найдем, возведя их в квадрат и сложив, а затем разделив второе на первое,

$$\left. \begin{aligned} A^2 &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2), \\ \operatorname{tg} \varphi &= \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

$A^2$  положительно или равно нулю, так как  $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) \geq -1$ . Следовательно,  $A$  действительно. Подставляя (2.3) и (2.2), мы получим:

$$s = A (\cos \varphi \cos \omega t + \sin \varphi \sin \omega t)$$

или

$$s = A \cos(\omega t - \varphi). \quad (2.5)$$

Таким образом, суперпозиция двух гармонических колебаний одинаковой частоты есть гармоническое колебание той же частоты, амплитуда и фаза которого выражаются через амплитуды и фазы составляющих колебаний так, как указывают формулы (2.4).

**2. Обсуждение.** Главное, что показывают формулы (2.4), состоит в следующем: вообще говоря, ни амплитуда, ни интенсивность результирующего колебания не равны соответственно сумме амплитуд или интенсивностей, составляющих колебаний (*интенсивностью* мы называем квадрат амплитуды). Результирующая амплитуда и интенсивность существенно зависят от разности фаз  $\varphi_1 - \varphi_2$  между составляющими колебаниями.

а) Пусть  $A_1 = A_2$ , т. е. складываются колебания одинаковой амплитуды.

Первая формула (2.4) принимает вид

$$A^2 = 2A_1^2 [1 + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)]. \quad (2.6)$$

На рис. 23 показан для этого случая график зависимости  $A^2$  от  $\varphi_1 - \varphi_2$ .  $A^2$  имеет максимумы, равные учетверенной интенсивности  $A_1^2$  каждого из колебаний  $s_1, s_2$ , при  $\varphi_1 - \varphi_2 = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ , т. е. когда разность фаз складывающихся колебаний есть четное, кратное  $\pi$ , иначе говоря, когда  $s_1$  и  $s_2$  в фазе.  $A^2$  обращается в нуль при  $\varphi_1 - \varphi_2 = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \dots$ , т. е. когда разность фаз складывающихся колебаний есть нечетное, кратное  $\pi$ , иначе говоря, когда  $s_1$  и  $s_2$  в противофазе.

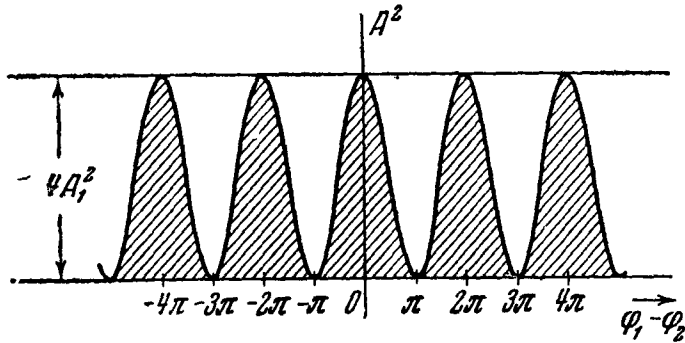


Рис. 23. Зависимость результирующей интенсивности от разности фаз слагаемых (их амплитуды равны).

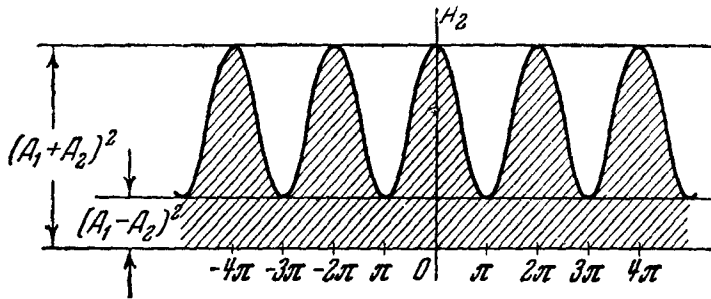


Рис. 24. То же, но амплитуды слагаемых не равны.

Только в этом последнем случае результирующая интенсивность есть сумма интенсивностей складывающихся колебаний.

Полученные результаты имеют бесчисленное множество применений. Из них следует, например, что если в определенном месте пространства происходят звуковые колебания под действием двух источников, то результирующая громкость может быть меньше, чем громкость, создаваемая каждым источником в отдельности. Если звуки, создаваемые каждым источником в отдельности, имеют одинаковую интенсивность, то при подходящих условиях эти звуки гасят друг друга, и можно сказать, что «звук + звук = молчанию». Возможны также условия, когда два пучка света, падающие на экран, дают не большую, а меньшую освещенность, чем каждый пучок в отдельности; возможен даже случай, когда «свет + свет = темноте». Об этом будет идти речь подробно в гл. V и X. Здесь мы рассмотрим несколько примеров из области электромагнитных колебаний.

3. Примеры. а) Если переменный ток

$$i = I \cos \omega t \quad (2.7)$$

течет по цепи, состоящей из сопротивления  $R$  и катушки индуктивности  $L$  (рис. 25), напряжение на них равно соответственно

$$u_1 = Ri = RI \cos \omega t,$$

$$u_2 = L \frac{di}{dt} = -\omega LI \sin \omega t = \omega LI \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right).$$

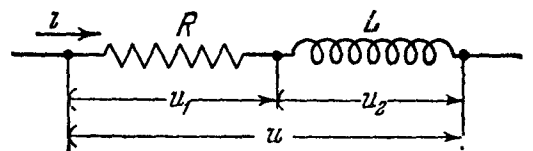


Рис. 25. Последовательное соединение сопротивления и индуктивности. Амплитуда  $u$  не равна сумме амплитуд  $u_1$  и  $u_2$ .



Общее напряжение  $u$  на участке цепи, содержащем  $R$  и  $L$ , равно сумме напряжений на  $R$  и  $L$ :

$$u = u_1 + u_2.$$

Так как напряжения  $u_1$  и  $u_2$  сдвинуты по фазе на  $\frac{\pi}{2}$ , амплитуда  $U$  и фаза  $\varphi$  напряжения  $u$  выражаются согласно (2.4) формулами

$$U = I_1 \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{\omega L}{R}.$$

б) Аналогичным образом, если ток (2.7) течет по цепи, состоящей из сопротивления  $R$  и конденсатора емкости  $C$  (рис. 26), имеем:

$$u_1 = Ri = RI \cos \omega t,$$

$$u_2 = \frac{\int i dt}{C} = \frac{I}{\omega C} \sin \omega t = \frac{I}{\omega C} \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right).$$

Общее напряжение  $u$  на участке цепи, содержащем  $R$  и  $C$ ,

$$u = u_1 + u_2.$$

Следовательно, его амплитуда  $U$  и фаза  $\varphi$  выражаются согласно (2.4) формулами

$$U = I \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\omega RC}.$$

Подчеркнем, что в обоих разобранных случаях амплитуда напряжения  $u$  не равна сумме амплитуд напряжений  $u_1, u_2$  на отдельных участках цепи.

в) Пусть

$$u = U \cos \omega t$$

— напряжение между клеммами  $a, b$  (рис. 27). Имеем:

$$u = \frac{\int i_1 dt}{C},$$

$$u = Ri_2,$$

Рис. 27. Сопротивление и емкость, соединенные параллельно. Амплитуда  $i$  не равна сумме амплитуд  $i_1$  и  $i_2$ .

где  $i_1, i_2$  — токи в левой и правой ветви, откуда

$$i_1 = C \frac{du}{dt} = -C\omega U \sin \omega t = \omega C U \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right),$$

$$i_2 = \frac{u}{R} = \frac{U}{R} \cos \omega t.$$

Ток в общей цепи

$$i = i_1 + i_2.$$

Для его амплитуды  $I$  и фазы  $\varphi$  имеем согласно (2.4)

$$I = U \sqrt{\frac{1}{R^2} + \omega^2 C^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = -\omega CR.$$

Здесь амплитуда тока не равна сумме амплитуд токов в разветвлениях.

4. Графическая интерпретация, векторные диаграммы. Рассмотрим следующую геометрическую задачу.

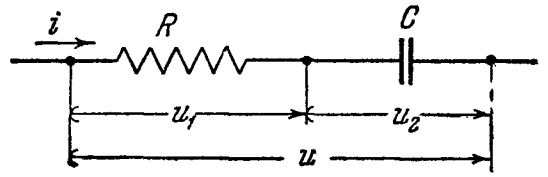
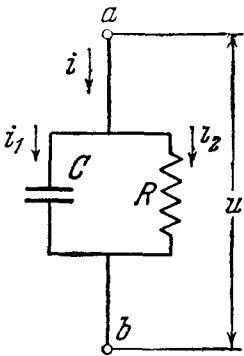


Рис. 26. Последовательное соединение сопротивления и емкости.



Даны два вектора  $r_1, r_2$  длины  $A_1, A_2$ , образующие с некоторой произвольной осью  $OO'$  углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , причем векторы  $r_1, r_2$  и ось лежат в одной плоскости. Чему равна длина  $A$  вектора  $r = r_1 + r_2$  и какой угол  $\varphi$  он образует с осью  $OO'$ ?

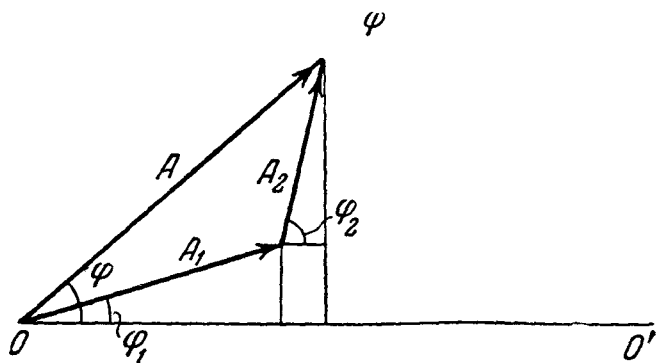


Рис. 28. Сложение векторов.

Сравнивая этот результат с тем, который был получен в § 2, мы видим, что одни и те же формулы (2.4) решают задачу о сложении скалярных синхронных гармонических колебаний и задачу о сложении двух векторов. Амплитуда и фаза результирующего колебания зависят от амплитуд и фаз складываемых колебаний точно так же, как длина и угол с осью  $OO'$  результирующего вектора зависят от длин и углов с этой же осью соответствующих векторов. Если нам нужно решить задачу о сложении двух скалярных синхронных гармонических колебаний, мы можем это сделать с помощью геометрического построения, показанного на рис. 28, причем длины векторов должны быть равны в некотором масштабе амплитудам колебаний, а углы векторов с осью  $OO'$  должны быть равны фазам складываемых колебаний. Длина результирующего вектора равна в выбранном масштабе амплитуде, а его угол с осью  $OO'$  равен фазе результирующего колебания. Рис. 28 называется в этом случае *векторной диаграммой сложения колебаний*.

В теории переменных токов, а также в теории механических колебаний принято чертить векторные диаграммы так, что возрастанию  $\varphi$  соответствует поворот вектора *по* часовой стрелке.

В оптике установился обычай чертить их так, что возрастанию  $\varphi$  соответствует поворот вектора *против* часовой стрелки. Для того чтобы читатель мог в дальнейшем легче разбираться во всей литературе по колебаниям и волнам, мы вынуждены пользоваться обоими соглашениями, показывая, если нужно, стрелкой направление возрастания  $\varphi$ .

Рис. 29 показывает вид векторной диаграммы для случаев, когда разность фаз  $\varphi_1 - \varphi_2$  равна  $0, \frac{\pi}{2}, \pi, -\frac{\pi}{2}$ . Здесь сразу видно, что резуль-

Строя по известному правилу сумму векторов и опуская перпендикуляр из конца вектора  $r$  на ось  $OO'$ , получим (рис. 28):

$$A \cos \varphi = A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2,$$

$$A \sin \varphi = A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2,$$

откуда

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2),$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}.$$

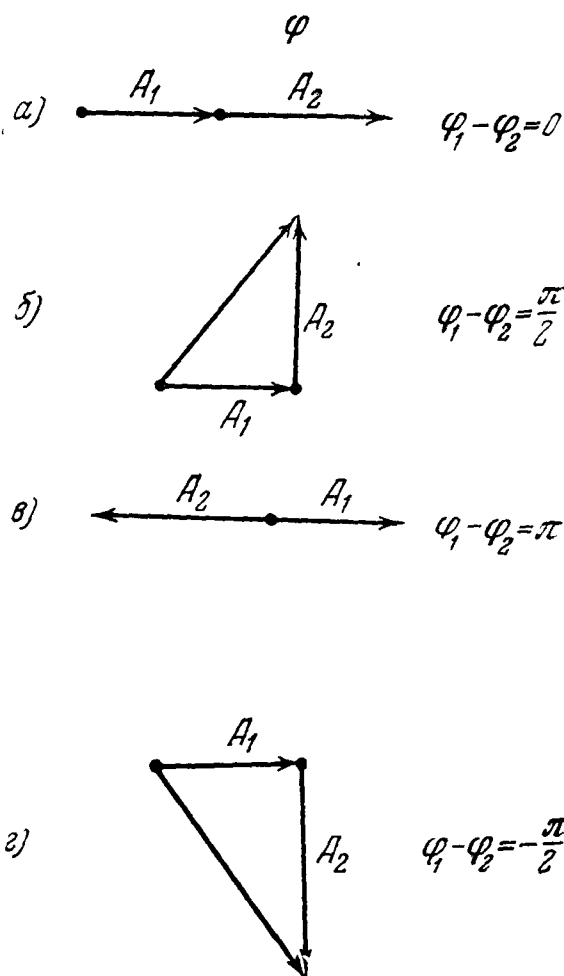


Рис. 29. Векторные диаграммы для различных  $\varphi_1 - \varphi_2$ .

тирующая амплитуда равна в этих случаях соответственно

$$A_1 + A_2, \quad \sqrt{A_1^2 + A_2^2}, \quad |A_1 - A_2|, \quad \sqrt{A_1^2 + A_2^2}.$$

Рисунки 29, б и г являются векторными диаграммами для примеров, рассмотренных в п. 3. Рис. 29, б относится к первому и третьему примерам, рис. 29, г — ко второму.

В случае непрерывного возрастания разности фаз  $\varphi_2 - \varphi_1$  конец вектора, изображающего суммарное колебание, описывает окружность. Центр ее совпадает с концом вектора, изображающего одно из составляющих колебаний (рис. 30).

С наглядным представлением сложения колебаний с помощью векторной диаграммы связаны термины: «поворот фазы» в смысле «изменение фазы», «фазовращатель» в смысле «устройство, изменяющее фазу колебания», и т. п. С этим наглядным представлением связано также выражение «колебания находятся в квадратуре», означающее, что изображающие их векторы составляют прямой угол.

При некотором навыке можно чертить векторную диаграмму той или иной задачи непосредственно на основании физических данных, минуя формулы. В частности, легко (и полезно) научиться рисовать векторные диаграммы задач на сложение синусоидальных токов или напряжений, прямо глядя на схему, без промежуточного аналитического звена. Прделаем это на одном важном примере.

**5. Пример: векторная диаграмма фазовращателя.** Пусть в схеме рис. 31 оба конденсатора имеют одинаковую емкость  $C$ , оба сопротивления одинаковы и равны  $R$ . Тогда токи в ветвях  $abd$ ,  $acd$  имеют одинаковые

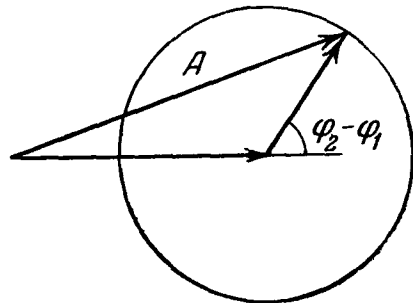


Рис. 30. При возрастании разности фаз вектор  $A$  описывает окружность.

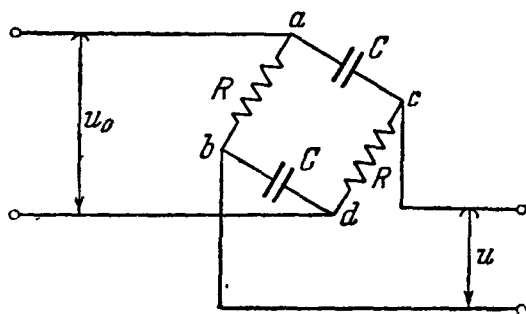


Рис. 31. Схема фазовращателя.

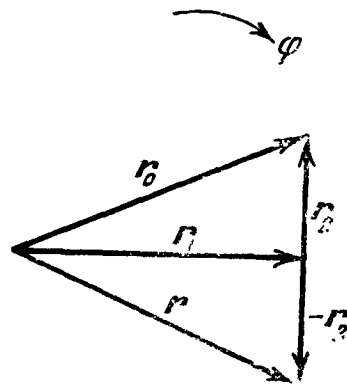


Рис. 32. Векторная диаграмма фазовращателя.

амплитуды и фазы. Напряжения между клеммами  $ab$  и  $cd$  изображаются одинаковыми векторами  $r_1$  длины  $RI$ , напряжение между клеммами  $bd$  и  $ac$  — векторами  $r_2$  также одинаковой длины  $I/\omega C$ , повернутыми относительно предыдущих на прямой угол. Напряжение  $u_0$  изображается суммой, напряжение  $u$  — разностью вектора  $r_1$ ,  $r_2$ .

Это дает векторную диаграмму рис. 32, где вектор  $r_0$  изображает амплитуду и фазу подаваемого на клеммы  $a$ ,  $d$  напряжения

$$u_0 = U_0 \cos \omega t,$$

а вектор  $r$  — снимаемого с клемм  $bc$  напряжения

$$u = U \cos(\omega t - \varphi).$$

Векторная диаграмма показывает, что

$$U = U_0,$$

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{\frac{I}{\omega C}}{IR} = \frac{1}{\omega CR}.$$

Снимаемое напряжение имеет ту же амплитуду, что подаваемое; разность фаз  $\varphi$  меняется от 0 до  $\pi$  при изменении  $C$  или  $R$  от  $\infty$  до 0.

Практически в фазовращателе оба сопротивления (или обе емкости) изменяются поворотом *одной* ручки, причем должно быть обеспечено равенство обеих емкостей (или сопротивлений) при каждом положении ручки.

**6. Сложение произвольного числа колебаний.** Легко обобщить построенные рис. 28 на случай суммы любого числа синхронных гармонических колебаний. Величина

$$s = A_1 \cos(\omega t - \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t - \varphi_2) + \dots + A_N \cos(\omega t - \varphi_N)$$

есть гармоническое колебание

$$s = A \cos(\omega t - \varphi),$$

где  $A$  есть длина, а  $\varphi$  — угол с осью  $OO'$  геометрической суммы  $N$  векто-

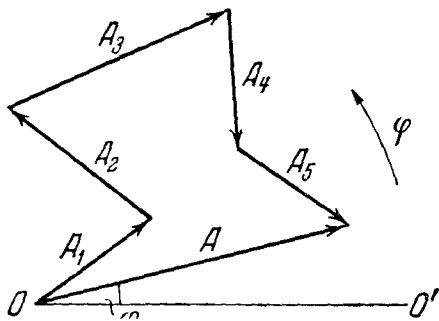


Рис. 33. Векторная диаграмма суммы нескольких колебаний.

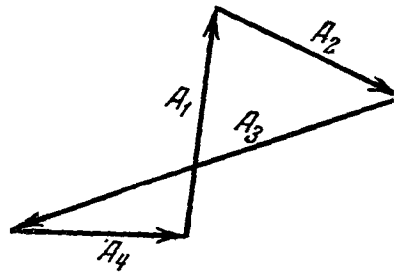


Рис. 34. Случай, когда сумма колебаний равна нулю.

ров, имеющих длины  $A_1, A_2, \dots, A_N$  и образующих с этой осью углы  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$  (рис. 33). Это можно записать в виде формул

$$A \cos \varphi = A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2 + \dots + A_N \cos \varphi_N,$$

$$A \sin \varphi = A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2 + \dots + A_N \sin \varphi_N,$$

откуда

$$A^2 = A_1^2 + \dots + A_N^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \dots + 2A_{N-1}A_N \cos(\varphi_{N-1} - \varphi_N),$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2 + \dots + A_N \sin \varphi_N}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2 + \dots + A_N \cos \varphi_N}.$$

Здесь также результирующая амплитуда существенно зависит от *фаз* складывающихся колебаний. Она, в частности, равна нулю, если фазы таковы, что векторы, изображающие складывающиеся колебания, образуют замкнутую цепочку (рис. 34).

**7. Сложение колебаний равной амплитуды, фазы которых образуют арифметическую прогрессию.** Этот случай, как выяснится в дальнейшем, представляет особенный интерес.

Пусть

$$s = A \cos \omega t + A \cos (\omega t - \varepsilon) + A \cos (\omega t - 2\varepsilon) + \dots + A \cos [\omega t - (N - 1) \varepsilon],$$

т. е.

$$s = \sum_{n=1}^N A \cos [\omega t - (n - 1) \varepsilon].$$

Векторная диаграмма в нашем случае — ломаная, состоящая из звеньев одинаковой длины  $A$ , причем каждое звено образует одинаковый угол  $\varepsilon$  с предыдущим звеном. Такая диаграмма изображена на рис. 35. Обозначим результирующую амплитуду буквой  $M$ . Имеем из рис. 35:

$$\begin{aligned} \frac{M}{2} &= OH = OC \cdot \sin \widehat{OCH} = OC \cdot \left| \sin \frac{2\pi - N\varepsilon}{2} \right| = \\ &= OC \cdot \left| \sin \frac{N\varepsilon}{2} \right|, \\ \frac{A}{2} &= OC \cdot \left| \sin \frac{\varepsilon}{2} \right|, \end{aligned}$$

откуда

$$M = A \left| \frac{\sin \left( \frac{N\varepsilon}{2} \right)}{\sin \frac{\varepsilon}{2}} \right|. \quad (2.8)$$

Очевидно  $M = 0$ , когда векторная диаграмма образует замкнутый многоугольник.  $M$  имеет наибольшее возможное значение при данных  $N$  и  $A$ , а именно:  $M = NA$ , если  $\varepsilon = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ , т. е. векторная цепочка вытягивается в прямую (рис. 36).

Легко себе представить изменение векторной диаграммы в зависимости от  $\varepsilon$  с помощью складного метра (рис. 37; здесь  $N = 10$ ).

Для того чтобы иметь полное представление о функции (2.8), построим отдельно график числителя и знаменателя дроби

$$\frac{\sin \left( \frac{N\varepsilon}{2} \right)}{\sin \frac{\varepsilon}{2}} \quad (2.8a)$$

как функции  $\varepsilon$  (рис. 38, а, б). Числитель изображается синусоидой, в  $N$  раз более частой, чем знаменатель. График самой дроби показан на рис. 38, в (для  $N = 6$ ). Все нули дроби соответствуют нулям числителя, но обратное не верно: при

$$\varepsilon = \pm n \cdot 2\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

обращается в нуль не только числитель, но и знаменатель.

Пользуясь правилом Лопиталья, находим:

$$\lim_{\frac{\varepsilon}{2} \rightarrow n\pi} \frac{\sin \left( \frac{N\varepsilon}{2} \right)}{\sin \frac{\varepsilon}{2}} = \frac{N \cos (Nn\pi)}{\cos (n\pi)} = \frac{(-1)^{Nn}}{(-1)^n} N = (-1)^{(N-1)n} N = \pm N.$$

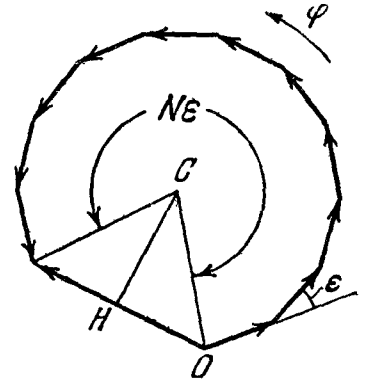


Рис. 35. Векторная диаграмма суммы колебаний равной амплитуды, фазы которых образуют арифметическую прогрессию.

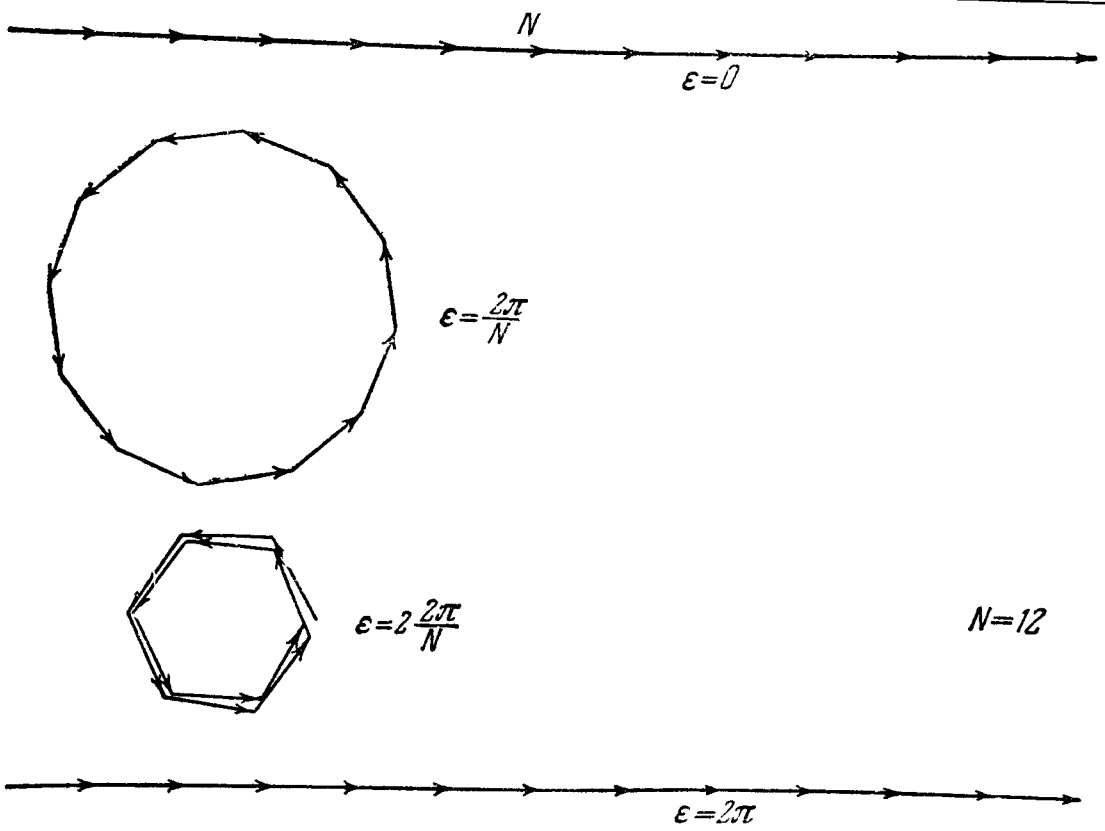


Рис. 36. Частные случаи диаграммы рис. 35.

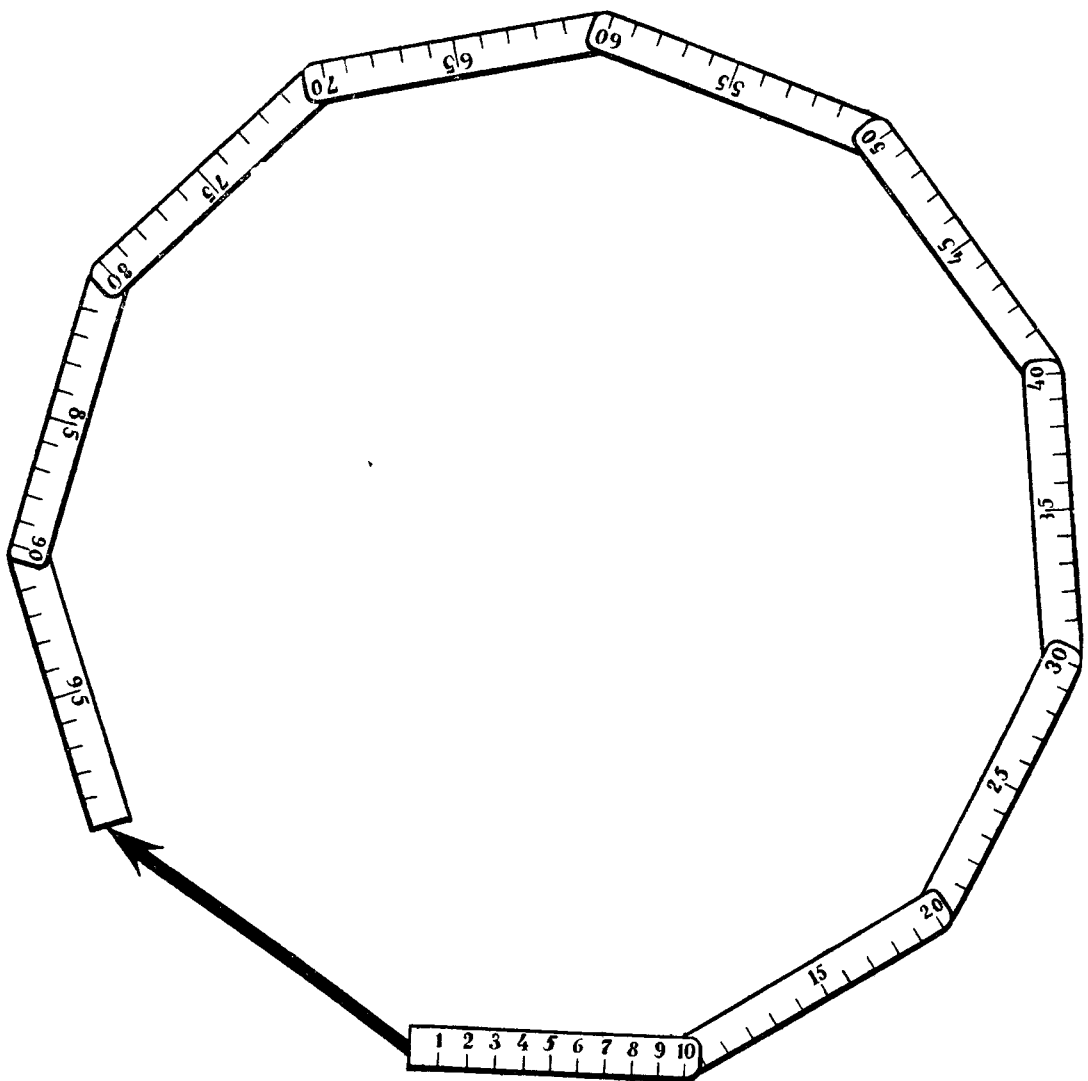


Рис. 37. Иллюстрация векторной диаграммы рис. 36 с помощью складного метра.

Следовательно, при  $\varepsilon = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$  и т. д.  $M = NA$ , как уже было найдено из других соображений. На рис. 38, *г* представлена зависимость квадрата дроби (2.8а) от  $\varepsilon$ . Здесь характерно наличие высоких «главных максимумов», соответствующих  $\varepsilon = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ , нулей при  $\varepsilon = \pm \frac{2\pi}{N} n$ ,

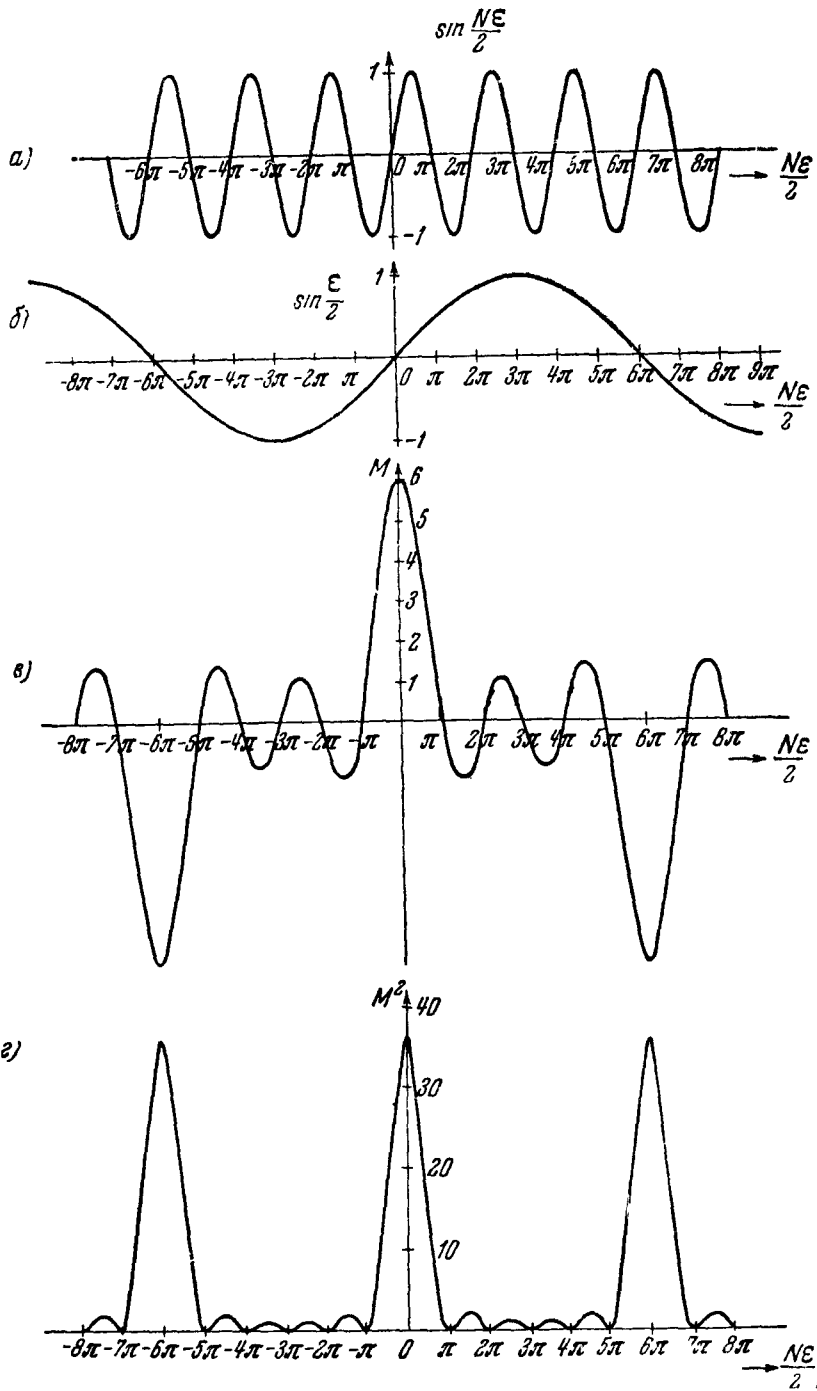


Рис. 38. Графическое исследование функции, представляемой формулой (2.8а) для  $N=6$ .

где  $n$  — целые числа, за исключением кратных  $N$ , и *побочных максимумов* между  $\varepsilon = \frac{2\pi}{N} n$  и  $\varepsilon = \frac{2\pi}{N} (n+1)$ . Побочные максимумы ниже всего там, где  $\left| \sin \frac{\varepsilon}{2} \right|$  имеет наибольшее значение, т. е. на полпути между главными максимумами.

При данных  $\varepsilon$  и  $A$  суммарная амплитуда с ростом числа складывающихся колебаний  $N$  сначала растет, потом убывает, потом снова растет и т. д. (это ясно из рис. 35).

Иллюстрацией к только что сказанному являются следующие случаи, весьма важные в электротехнике.

а) Пусть в проводниках, соединенных «звездой», текут токи

$$i_1 = I \cos \omega t, \quad i_2 = I \cos \left( \omega t - \frac{2\pi}{N} \right), \quad \dots, \quad i_N = I \cos \left[ \omega t - \frac{2\pi}{N} (N - 1) \right]$$

(чаще всего  $N = 3$ , рис. 39); в этом случае ток  $i$  в общей цепи равен нулю.

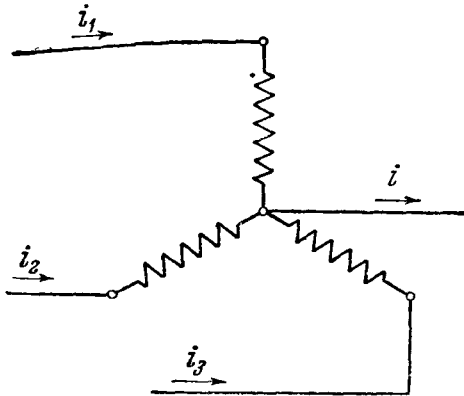


Рис. 39. Соединение «звездой».

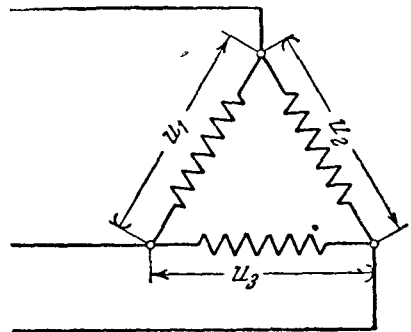


Рис. 40. Соединение «треугольником».

б) Пусть напряжения на последовательно соединенных проводниках равны

$$u_1 = U \cos \omega t, \quad u_2 = U \cos \left( \omega t - \frac{2\pi}{N} \right), \quad \dots, \quad u_N = U \cos \left[ \omega t - \frac{2\pi}{N} (N - 1) \right]$$

(здесь также чаще всего  $N = 3$ ). Тогда напряжение между крайними клеммами равно 0 и их можно соединить вместе, не изменяя токов в рассматриваемых проводниках (при  $N = 3$  — соединение «треугольником», рис. 40).

### § 3. Суперпозиция двух взаимно перпендикулярных векторов, изменяющихся синусоидально с одинаковой частотой

Предположим, что два вектора  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  меняются синусоидально с одинаковой частотой:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{A}_1 \cos(\omega t - \varphi_1), \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{A}_2 \cos(\omega t - \varphi_2), \quad (2.9)$$

где  $\mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{A}_2$  — постоянные векторы. Пусть нам известно, что некоторый вектор  $\mathbf{v}$  есть геометрическая сумма векторов  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$ :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2.$$

Спрашивается, какое движение будет совершать конец вектора  $\mathbf{v}$ ?

Если векторы  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  коллинеарны, т. е. направлены по одной прямой, имеем:

$$v = v_1 + v_2,$$

и задача о движении его конца сводится к уже рассмотренной задаче о сложении синхронных гармонических скалярных колебаний. Если же векторы  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  не коллинеарны, конец вектора  $\mathbf{v}$  описывает в плоскости векторов  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  некоторую замкнутую кривую, которую нам нужно найти. Мы ограничимся наиболее важным случаем, когда  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  взаимно перпендикулярны.



Введем декартову систему координат  $x, y$ , расположив ось  $x$  по направлению вектора  $A_1$ , ось  $y$  по направлению вектора  $A_2$  (рис. 41). Тогда координаты конца вектора  $v$  будут равны соответственно

$$v_x = A_1 \cos(\omega t - \varphi_1), \quad v_y = A_2 \cos(\omega t - \varphi_2).$$

Эти уравнения можно рассматривать как уравнения некоторой траектории, написанные в параметрической форме; параметром служит  $t$ . Для того чтобы найти уравнение, непосредственно связывающее  $v_x$  и  $v_y$ , напомним (на основании известных тригонометрических формул):

$$\frac{v_x}{A_1} = \cos \varphi_1 \cos \omega t + \sin \varphi_1 \sin \omega t,$$

$$\frac{v_y}{A_2} = \cos \varphi_2 \cos \omega t + \sin \varphi_2 \sin \omega t.$$

Умножим первое уравнение на  $\cos \varphi_2$ , второе — на  $(-\cos \varphi_1)$  и сложим результаты. Это дает:

$$\frac{v_x}{A_1} \cos \varphi_2 - \frac{v_y}{A_2} \cos \varphi_1 = \sin \omega t \sin(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Умножим теперь первое уравнение на  $\sin \varphi_2$ , второе — на  $(-\sin \varphi_1)$  и также сложим результаты:

$$\frac{v_x}{A_1} \sin \varphi_2 - \frac{v_y}{A_2} \sin \varphi_1 = \cos \omega t \sin(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Возведем в квадрат оба последних уравнения и сложим левые и правые части. Получается:

$$\frac{v_x^2}{A_1^2} + \frac{v_y^2}{A_2^2} - 2 \frac{v_x}{A_1} \cdot \frac{v_y}{A_2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (2.10)$$

Это уравнение изображает кривую второго порядка, которая может быть только эллипсом, так как  $v_x$  и  $v_y$  меняются в ограниченных пределах и не выходят за пределы прямоугольника со сторонами  $2A_1, 2A_2$  (рис. 41). Итак, в результате сложения двух взаимно перпендикулярных векторов, совершающих синхронные гармонические колебания, получается вектор, конец которого движется по эллипсу. Такое движение часто называют (эта терминология идет из оптики) *эллиптически-поляризованным колебанием*. В отличие от этого колебания  $v_1, v_2$  (2.9) называются *линейно-поляризованными колебаниями*.

Мы можем теперь выразиться так: при суперпозиции двух взаимно перпендикулярных линейно-поляризованных синхронных гармонических колебаний возникает эллиптически-поляризованное колебание.

Рассмотрим несколько характерных частных случаев.

1. Разность фаз равна целому кратному  $2\pi$ , т. е.  $\varphi_1 - \varphi_2 = \pm n \cdot 2\pi$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), колебания синфазны. В этом случае уравнение (2.10) существенно упрощается и превращается в

$$\left( \frac{v_x}{A_1} - \frac{v_y}{A_2} \right)^2 = 0,$$

откуда

$$\frac{v_x}{A_1} = \frac{v_y}{A_2}.$$

Это — уравнение прямой, на которой лежит диагональ прямоугольника, идущая по первому и третьему квадрантам; конец вектора  $v$  колеблется по этой диагонали (рис. 42, а).

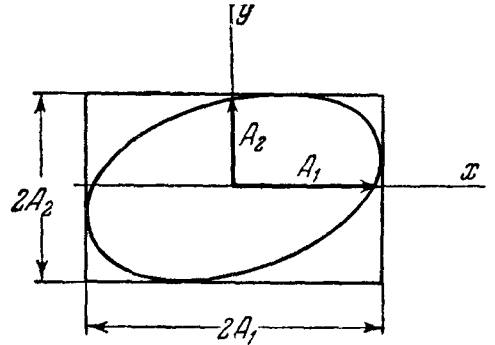


Рис. 41. Сложение двух взаимно перпендикулярных синхронных векторных колебаний

2. Разность фаз равна нечетному кратному  $\pi$ , т. е.  $\varphi_1 - \varphi_2 = \pm (2n + 1)\pi$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), колебания находятся в *противофазе*. Уравнение (2.10) здесь также упрощается и переходит в

$$\left( \frac{v_x}{A_1} + \frac{v_y}{A_2} \right)^2 = 0,$$

откуда

$$\frac{v_x}{A_1} = -\frac{v_y}{A_2}.$$

Конец вектора  $v$  колеблется по диагонали прямоугольника, идущей по второму и четвертому квадрантам (рис. 42, б).

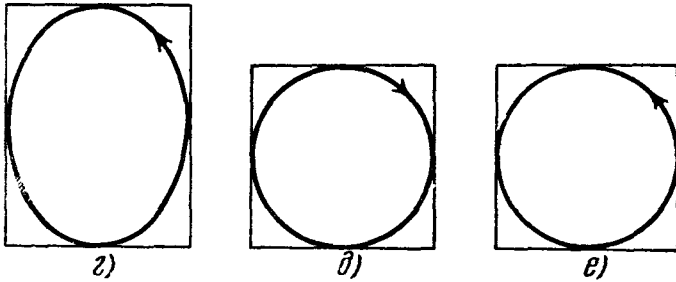
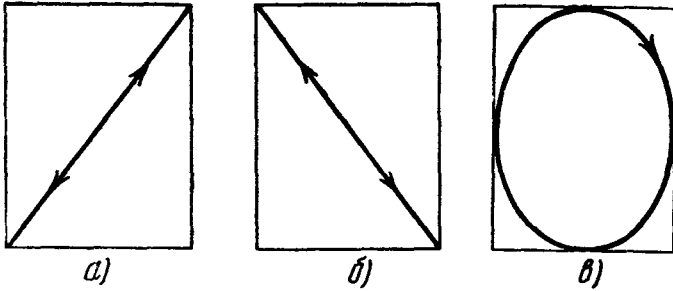


Рис. 42. Характерные частные случаи рис. 41.

вектора  $v$  движется по этому эллипсу по часовой стрелке (рис. 42, в).

Если *амплитуды колебаний одинаковы*, эллипс вырождается в окружность. Мы получаем *колебание, поляризованное по кругу* (рис. 42, д).

4. Разность фаз равна  $-\frac{\pi}{2} \pm 2n\pi$ . При  $\varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{\pi}{2} \pm 2n\pi$  снова имеем эллипс

$$\frac{v_x^2}{A_1^2} + \frac{v_y^2}{A_2^2} = 1,$$

но конец вектора движется по нему *против* часовой стрелки (рис. 42, е). При равенстве амплитуд эллипс снова вырождается в окружность (рис. 42, е); получается колебание, поляризованное по кругу. Иллюстрацией случаев 3, 4 является получение вращающегося магнитного поля (в некоторых асинхронных моторах) путем суперпозиции двух синусоидальных взаимно перпендикулярных магнитных полей, имеющих одинаковую частоту и амплитуду, но сдвинутых по фазе на  $\pi/2$  \*).

#### § 4. Электронный осциллоскоп

Мы можем теперь понять принцип действия электронного осциллоскопа — прибора, без которого не может обойтись ни одна физическая лаборатория и с которым мы уже немного знакомы (см. гл. I).

\*) Чаще в асинхронных моторах вращающееся поле создается путем суперпозиций *трех* полей, сдвинутых по фазе на  $2\pi/3$  и образующих между собой угол в  $120^\circ$ .

1. **Электронно-лучевая трубка.** Основным элементом электронного осциллоскопа — электронно-лучевая трубка, изображенная на рис. 43. В ее узкий конец вмонтирована так называемая «электронная пушка» — устройство, состоящее из накаливаемого электрическим током катода, испускающего электроны, анода, имеющего положительный потенциал по отношению к катоду и разгоняющего электроны, и фокусирующего устройства,

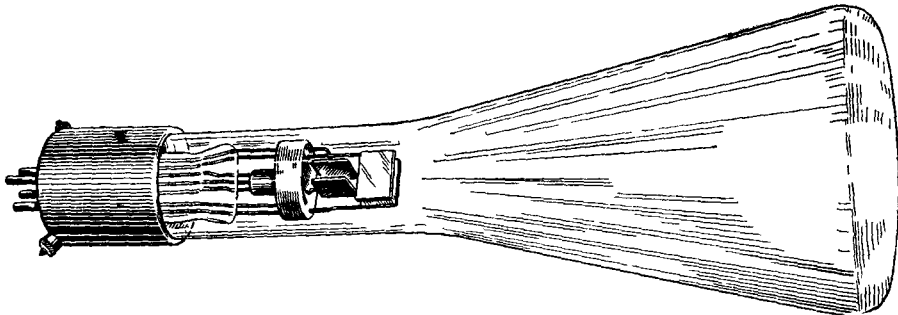


Рис. 43. Электронно-лучевая трубка простейшей конструкции.

состоящего из нескольких металлических цилиндров. Электрическое поле, создаваемое фокусирующим устройством, сводит электроны в тонкий пучок — электронный луч. Широкое плоское дно трубки — ее экран — покрыто изнутри слоем вещества, флуоресцирующего под действием ударов электронов. Чаще всего употребляют вещества, дающие зеленое свечение, иногда — фиолетовое. Если электронный луч хорошо сфокусирован, на экране в том месте, куда бьет электронный луч, образуется небольшое светлое пятнышко. Между электронной пушкой и экраном расположены управляющие электроды (рис. 44). Они образуют два конденсатора, состоящих каждый из пары пластин. Когда эти конденсаторы заряжены, поле одного из них ( $C_1$ ) горизонтально, другого ( $C_2$ ) — вертикально. Электронный луч последовательно проходит через оба конденсатора. Электрическое поле конденсатора  $C_1$  отклоняет электронный луч вправо (для наблюдателя, смотрящего на внешнюю сторону дна трубки) или влево, смотря по тому, какая из пластин заряжена положительно — правая или левая. Поле конденсатора  $C_2$  аналогичным образом отклоняет луч вверх или вниз. Результирующее смещение  $r$  светлого пятна (конца луча) на экране есть векторная сумма смещений  $r_1$  и  $r_2$ , создаваемых соответственно полями конденсаторов  $C_1$  и  $C_2$ .

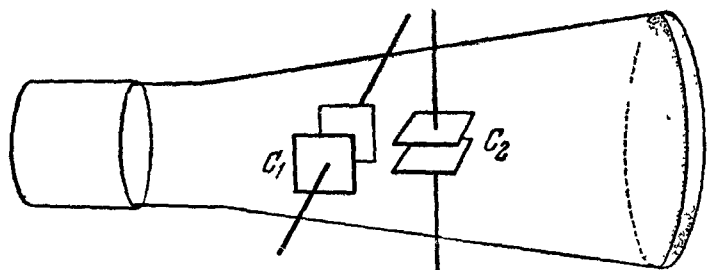


Рис. 44. Электронно-лучевая трубка. Схема управляющих электродов.

При соответствующем положении одной из ручек управления в осциллоскопе осуществляется схема соединений, представленная на рис. 45, где управляющие конденсаторы показаны в проекции на плоскость экрана.

Присоединим клеммы  $X_1$ ,  $X_2$  к источнику переменного напряжения  $u_1(t)$ , а клеммы  $Y_1$ ,  $Y_2$  — к источнику переменного напряжения  $u_2(t)$ . Поле в конденсаторе  $C_1$ , а следовательно, горизонтальное смещение  $r_1$ , будет изменяться пропорционально  $u_1$ , поле в конденсаторе  $C_2$ , а следовательно, вертикальное смещение  $r_2$  — пропорционально  $u_2$ . Вектор  $r$  будет

суперпозицией двух взаимно перпендикулярных колебаний

$$r_1 = x_1 k u_1, \quad r_2 = y_1 k u_2,$$

где  $x_1, y_1$  — единичные векторы, направленные соответственно по горизонтали и по вертикали,  $k$  — коэффициент, характеризующий чувствительность осциллоскопа\*). Он равен смещению, вызываемому напряжением  $u = 1$  в. Обычно в осциллокопе  $k$  — порядка одного миллиметра на вольт. Для наблюдения более слабых напряжений их подводят к отклоняющим пластинам через усилители (гл. IV), вмонтированные в ящик осциллокопа. При этом чувствительность обычно возрастает в несколько десятков раз.

В частности, пусть

$$u_1 = A_1 \cos(\omega t - \varphi_1),$$

$$u_2 = A_2 \cos(\omega t - \varphi_2),$$

т. е. к клеммам подводят два синхронных гармонических колебания. Тогда

$$r_1 = x_1 k A_1 \cos(\omega t - \varphi_1),$$

$$r_2 = y_1 k A_2 \cos(\omega t - \varphi_2),$$

Рис. 45. Схема включения электронно-лучевой трубки для наблюдения суперпозиции двух взаимно перпендикулярных колебаний.

и согласно § 3 мы увидим на экране эллипс, вид которого будет зависеть от амплитуд  $A_1, A_2$  и разности фаз  $\varphi_1 - \varphi_2$ .

Сделаем, например, такой опыт. Замкнем выходные клеммы звукового генератора цепью, состоящей из последовательно включенных сопротивления порядка десяти омов и конденсатора емкостью порядка одной микрофарды, и затем подведем к одной паре клемм напряжение, падающее на сопротивлении, а к другой паре — напряжение на конденсаторе (рис. 46). Мы увидим на экране эллипс, главные оси которого параллельны осям координат. Это указывает на то, что между напряжениями  $u_1, u_2$  на сопротивлении и на конденсаторе существует сдвиг фаз, равный по абсолютной величине  $\pi/2$  (ср. § 2, п. 3, пример б).

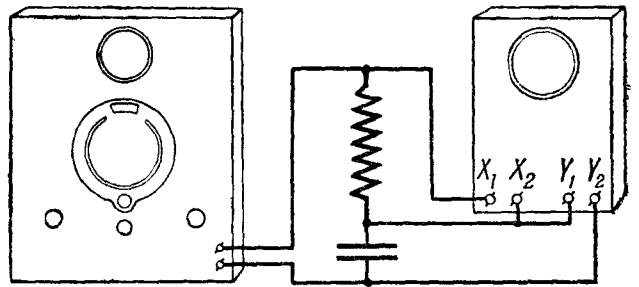


Рис. 46. Схема, позволяющая установить, что сдвиг фаз между напряжениями на

$$R \text{ и } C \text{ равен } \frac{\pi}{2}.$$

**2. Развертка.** Меняя положение той ручки управления осциллокопом, о которой шла речь выше, мы осуществляем в нем схему соединений, показанную на рис. 47. Здесь  $\Pi$  — находящийся внутри ящика осциллокопа генератор напряжения, периодически изменяющегося со временем так, как показывает рис. 48. На протяжении каждого периода оно сначала плавно растет пропорционально времени, от некоторого значения  $-a$  до  $+a$ , затем очень быстро (практически мгновенно, например, за  $1/1000$  периода) возвращается к исходному значению  $-a$ . Такое напряжение называют (по виду осциллограммы) *пилообразным*. Под действием пилообразного напряжения светлое пятно на экране совершает периодически

\*) Мы рассматриваем только случай, когда чувствительность в обоих направлениях одинакова.

повторяющееся равномерное движение слева направо, чередующееся с очень быстрыми обратными скачками справа налево. (О том, как работает генератор пилообразного напряжения, будет сказано в гл. IV.)

Пусть теперь к вертикальным обкладкам подводится пилообразное напряжение  $u_0(t)$  (по схеме рис. 47), а одновременно с этим к горизонтальным обкладкам — некоторое исследуемое периодическое напряжение  $u(t)$ .

Предположим сначала, что период развертки  $T_0$  есть *целое кратное* периода  $T$  исследуемого напряжения (рис. 49). Рассмотрим интервал времени  $0 < t < T_0$ . Так как горизонтальное отклонение пятна пропорционально времени, а вертикальное — исследуемому напряжению  $u(t)$ , траектория пятна будет изображать в определенном масштабе кусок осциллограммы функции  $u(t)$  в интервале  $0 < t < T_0$ . То же самое относится к интервалам  $T_0 < t < 2T_0$ ,  $2T_0 < t < 3T_0$ , ... Но так как  $T_0$  есть целое кратное периода  $T$  исследуемой функции, то отдель-

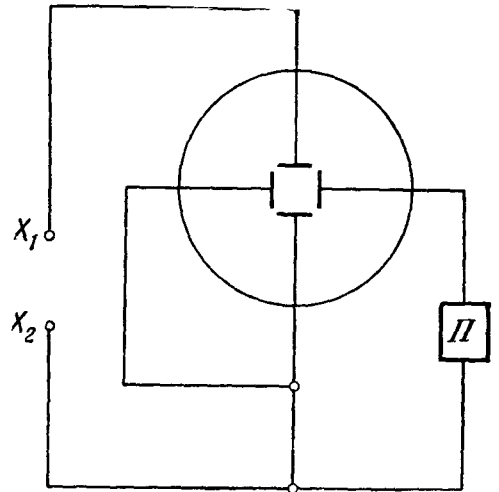


Рис. 47. Схема включения осциллографа с пилообразной разверткой.

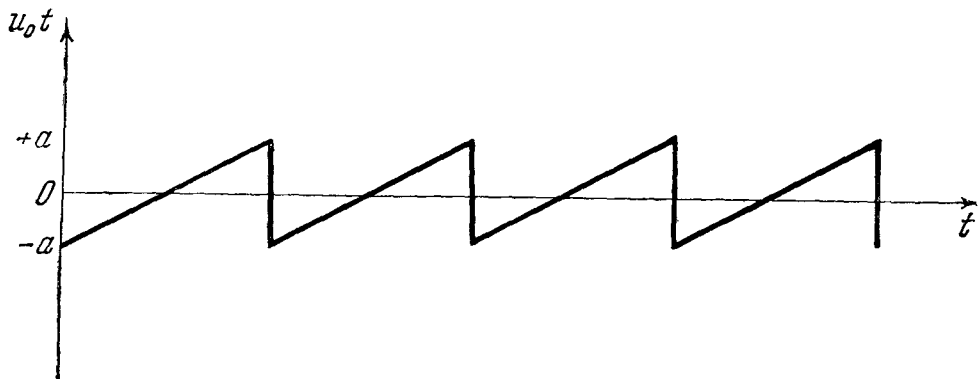


Рис. 48. Осциллограмма пилообразного напряжения.

ные куски осциллограммы функции  $u(t)$  продолжительностью  $T_0$  будут в точности ложиться один на другой, и глаз увидит на экране *неподвижную*

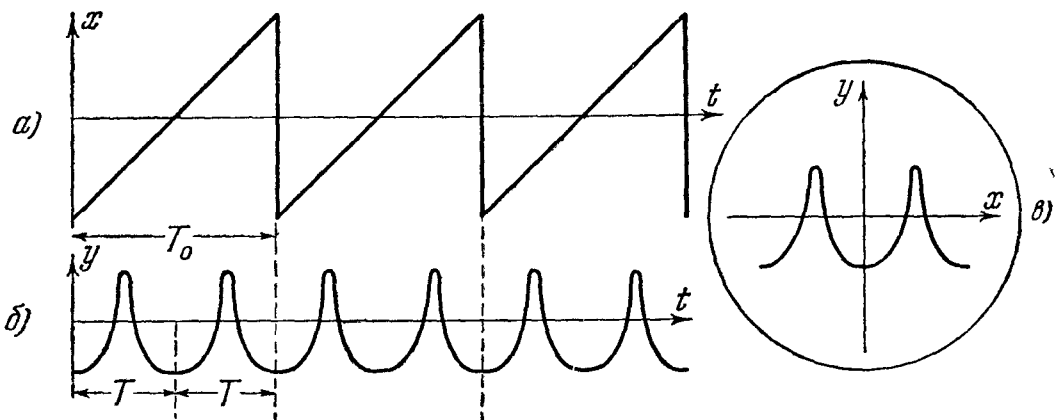


Рис. 49. Осциллограммы: а—развертки; б—исследуемого напряжения; в—картина на экране при  $T_0$ , целом кратном  $T$ .

картину, воспроизводящую кусок осциллограммы функции  $u(t)$  продолжительности  $T_0$ , охватывающий целое число ее периодов  $T$ .

Посмотрим, что получится, если  $T_0$  не есть целое кратное  $T$ . Рассмотрим, например, случай, показанный на рис. 50. Здесь кривая, описываемая светлым пятном за время  $T_0$ , будет также куском осциллограммы, охватывающей время  $T_0$ , но теперь такие куски не будут накладываться друг на друга. Если отличие между  $T_0$  и  $nT$  ( $n$  — целое число) невелико,

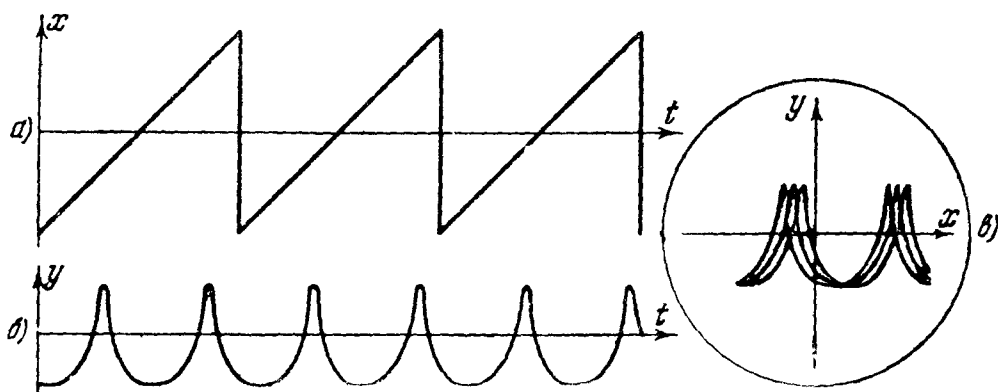


Рис. 50. То же, но при  $T_0$ , не целом кратном  $T$ .

глаз увидит медленно плывущий слева направо (если  $T_0 < nT$ ) или справа налево (если  $T_0 > nT$ ) кусок осциллограммы функции  $u(t)$ . Чем больше отличие между  $T_0$  и  $nT$ , тем быстрее будет происходить это перемещение, и при достаточно большом отличии глаз уже не будет различать отдельные положения кривой, а увидит «мазню» — равномерно засвеченную полосу.

Нетрудно видеть, что неподвижная картина получится не только при  $T_0 = nT$ , но и тогда, когда  $mT_0 = nT$ , где  $m, n$  — не очень большие целые

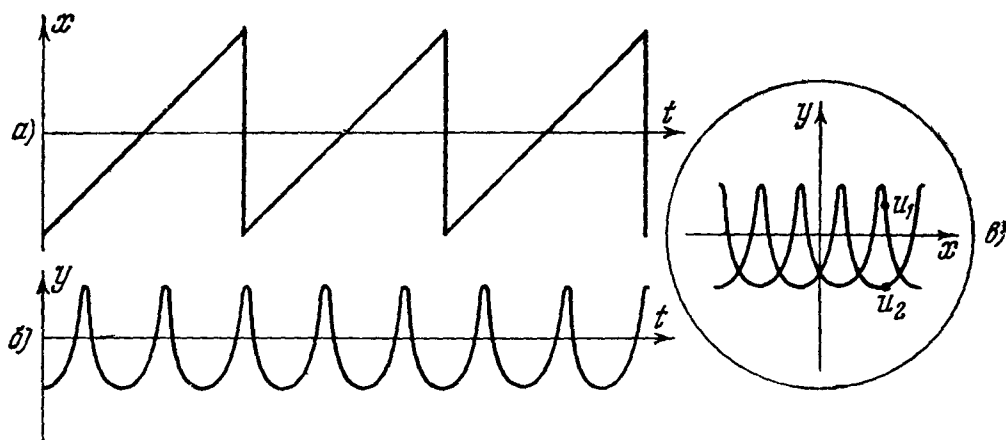


Рис. 51. То же, когда  $2T_0 = 5T$ .

числа, т. е. если некоторое (небольшое) кратное периода развертки есть целое кратное периода изучаемого процесса. Пусть, например,  $m = 2$ . Тогда мы увидим то, что показано на рис. 51. Двухзначная кривая получается потому, что каждому значению напряжения  $u_0$  соответствуют два значения исследуемого напряжения  $u(t)$ , например  $u_1$  и  $u_2$ .

Из сказанного ясно, насколько важно для отчетливого наблюдения осциллограммы, чтобы период пилообразного напряжения точно равнялся целому кратному периода исследуемого напряжения. Свойства генераторов пилообразного напряжения таковы, что требуемый синхронизм легко достигается. Для этого достаточно подобрать подходящее положение соответствующей ручки регулировки осциллографа. (О том, как устанавливается при этом синхронизм, мы скажем несколько слов в гл. IV при изложении принципа действия генератора пилообразного напряжения.)

Теперь должно стать понятно, каким образом получались синусоиды, о которых шла речь в гл. I, § 1.

Существуют осциллоскопы, где в одной вакуумной трубке имеется два устройства описанного здесь типа, расположенных одно над другим. В них получаются два электронных луча и соответственно два светлых пятна на экране, дающие независимые картины. Горизонтальная развертка обоих лучей осуществляется с помощью одного и того же пилообразного напряжения, оба светлых пятна находятся в каждое мгновение в точности одно над другим. Такой двухлучевой осциллоскоп позволяет непосредственно сравнивать временной ход двух колебательных процессов.

3. Иллюстрация теорем о сложении синхронных гармонических колебаний. Соберем схему, показанную на рис. 52. На одну из пар верти-

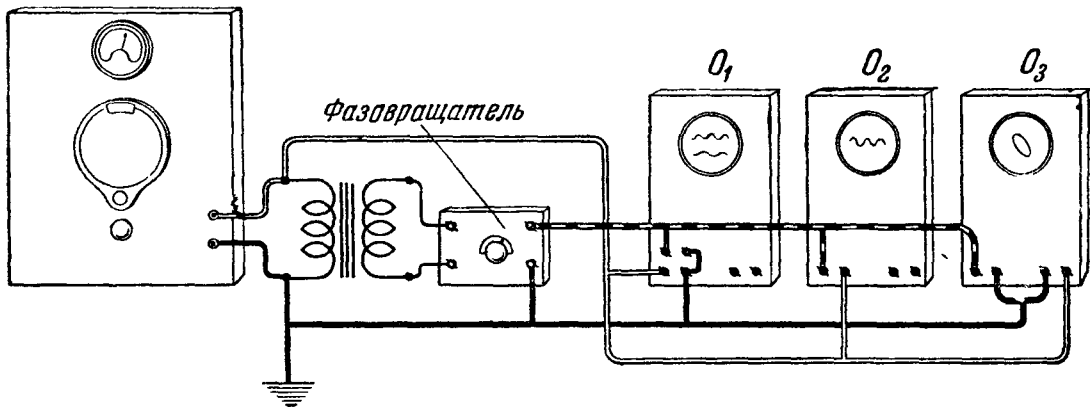


Рис. 52. Схема для демонстрации сложения синхронных гармонических колебаний.

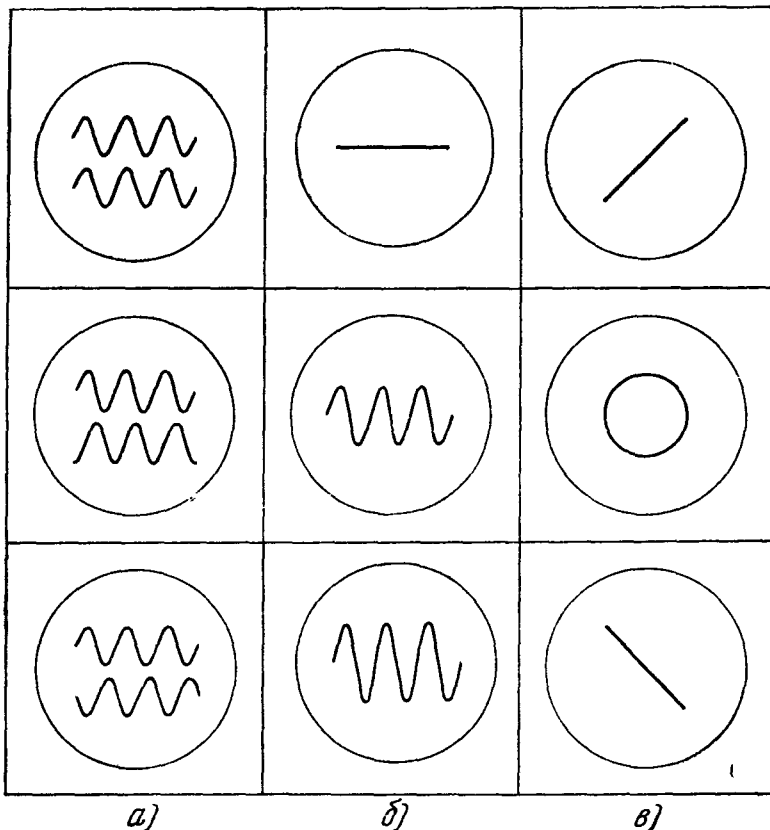


Рис. 53. Картина на экранах осциллоскопов.

кально отклоняющих пластин двухлучевого осциллоскопа  $O_1$  подается напряжение  $u_1$  с выхода звукового генератора, на другую его пару вертикально отклоняющих пластин — напряжение  $u_2$  с выхода фазовращателя,

присоединенного через трансформатор \*) к звуковому генератору. Включим развертку и будем поворачивать ручку фазовращателя. Мы увидим последовательность картин, показанную на рис. 53, а: сдвиг фаз между напряжениями  $u_1$  и  $u_2$  меняется от 0 до величины, близкой к  $\pi$ . Одновременно с этим разность напряжений  $u = u_2 - u_1$  подается на вертикально отклоняющие пластинки однолучевого осциллоскопа  $O_2$ . Видно, что амплитуда  $u$  наибольшая, когда  $(-u_1)$  и  $u_2$  в фазе, и обращается в нуль, когда они в противофазе (рис. 53, б).

Осциллоскоп  $O_3$  включен так, что на горизонтально отклоняющие пластинки при этом подается  $u_1$ , а на вертикально отклоняющие подается  $u_2$ . Последовательности картин на его экране соответствует последовательность фигур, показанных на рис. 53, в.

## § 5. Суперпозиция гармонических колебаний с близкими частотами

### 1. Случай скалярных колебаний. Биения. Пусть

$$\left. \begin{aligned} s &= s_1 + s_2, \\ \text{где} \quad s_1 &= A_1 \cos(\omega t - \varphi_1), \quad s_2 = A_2 \cos(\omega' t - \varphi_2), \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

причем  $(\omega' > \omega)$ . Введя обозначения

$$\left. \begin{aligned} \omega' - \omega &= \Omega, \\ -\Omega t + \varphi_2 &= \psi(t), \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

мы можем написать:

$$s_2 = A_2 \cos[\omega t - \psi(t)]$$

Здесь справедливы формулы

$$s = A(t) \cos[\omega t - \varphi(t)], \quad (2.13)$$

$$\left. \begin{aligned} A(t)^2 &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos[\varphi_1 - \psi(t)], \\ \operatorname{tg} \varphi(t) &= \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \psi(t)}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \psi(t)}, \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

получающиеся таким же образом, как формулы (2.4), соответствующие постоянным  $A$ ,  $\varphi$

Эти формулы верны независимо от того, велика или мала «расстройка»  $\omega' - \omega$ . Но замена формул (2.11) математически эквивалентными им формулами (2.13), (2.14) целесообразна с точки зрения физики лишь при малой расстройке. Здесь могут быть такие условия опыта, когда формулы (2.13), (2.14) непосредственно указывают, как воспринимается колебание приемной аппаратурой или органами чувств.

Предположим для определенности, что мы имеем дело с суперпозицией колебаний  $s_1 = \Delta p_1$ ,  $s_2 = \Delta p_2$  давления воздуха около нашего уха, создаваемых слегка расстроенной парой колеблющихся камертонов. Такой опыт легко осуществить, взяв два одинаковых камертона и нагрузив один из них маленькой массой (см. рис. 14, б).

Величина  $A^2$  меняется со временем так, как показывает рис. 54 — периодически с периодом  $\tau = 2\pi/\Omega$ . Предположим, что этот период велик

\*) Это необходимо во избежание короткого замыкания одной из ветвей фазовращателя.



по сравнению с  $T = 2\pi/\omega$ , а также со временем  $\tau_0$ , в течение которого на наше ухо должно действовать *синусоидальное* колебание давления частоты  $\omega$  для того, чтобы успело возникнуть ощущение тона определенной высоты и громкости. Это время  $\tau_0$  порядка 0,1 сек. Тогда, разбив период  $\tau$  на части продолжительности  $\tau_0$ , мы сможем высказать следующее утверждение: колебание  $\Delta p = \Delta p_1 + \Delta p_2$  ухо будет воспринимать как чередование

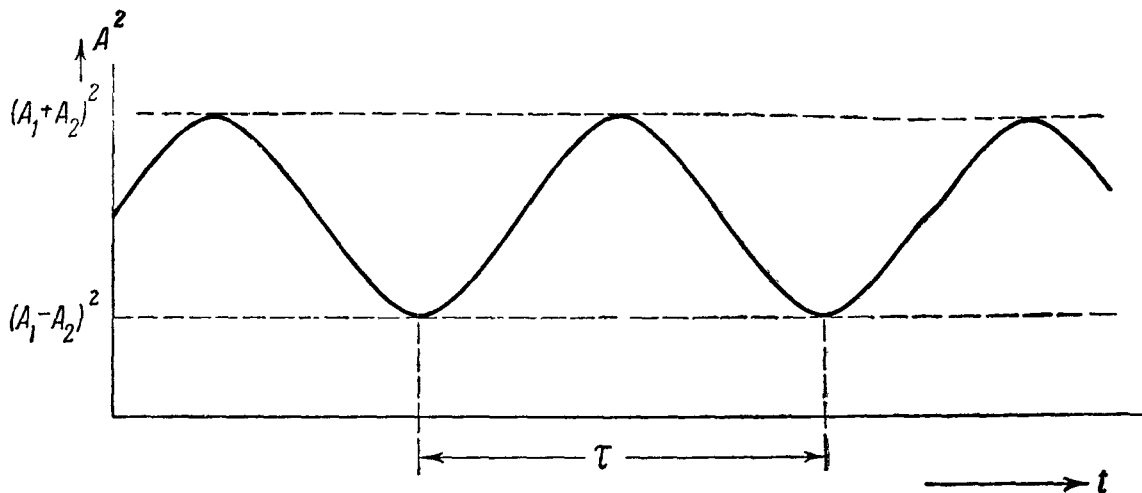


Рис. 54. Зависимость интенсивности от времени.

тонов одной и той же высоты, но различной громкости. Интенсивность будет меняться периодически от

$$(A_1 + A_2)^2$$

в моменты, когда

$$\cos[\varphi_1 - \psi(t)] = \cos(\Omega t + \varphi_1 - \varphi_2) = +1,$$

до

$$(A_1 - A_2)^2$$

(и, в частности, до нуля, если  $A_1 = A_2$ ) в моменты, когда

$$\cos[\varphi_1 - \psi(t)] = \cos(\Omega t + \varphi_1 - \varphi_2) = -1.$$

Это легко подтвердить на опыте, заставив звучать совместно оба камертона при расстройке порядка нескольких герц или десятых долей герца. Мы слышим *биения* — звук поочередно усиливается и ослабевает.

Если  $\tau$  мало по сравнению с  $\tau_0$ , формулы (2.13), (2.14) остаются в силе. Но они ничего не говорят о том, как будет восприниматься колебание ухом. Знание того, что синусоидальное колебание воспринимается как тон, здесь нисколько не помогает. Опыт показывает, что при  $\tau$ , немного меньшем, чем  $\tau_0$ , ухо испытывает неприятное ощущение *диссонанса*.

Приведем другой пример, не связанный с физиологией органов чувств. Замкнем на тепловой вольтметр выход двух последовательно соединенных (через трансформаторы) звуковых генераторов, настроив их на сильно различающиеся частоты  $\omega$ ,  $\omega'$  (рис. 55) и сделав амплитуды одинаковыми. Стрелка вольтметра отклонена, но стоит неподвижно. Взявшись теперь за ручку настройки одного из звуковых генераторов, будем сближать их частоты. Когда частоты станут близки, стрелка начнет колебаться тем медленнее, чем ближе частоты. При расстройке порядка 1 герца стрелка будет периодически ходить с частотой расстройки от нуля до некоторого максимального отброса и обратно.

Интерпретация опыта очевидна. Стрелка вольтметра отклоняется под действием переменного тока не мгновенно, а за некоторое время  $\tau_0$

порядка нескольких десятых долей секунды. Пока  $\tau$  мало по сравнению с  $\tau_0$ , вольтметр показывает среднее значение величины  $A^2$ , определяемой уравнением (2.14), где  $A_1, A_2, \omega, \omega'$  — амплитуды и частоты напряжений  $u_1, u_2$ , генерируемых отдельным звуковым генератором. Когда  $\tau$  становится большим по сравнению с  $\tau_0$ , прибор успевает реагировать на изменение  $A^2$ : мы видим биения.

В случаях, когда наша аппаратура или органы чувств успевают реагировать на изменение  $A^2$ , допустимо и даже целесообразно называть про-

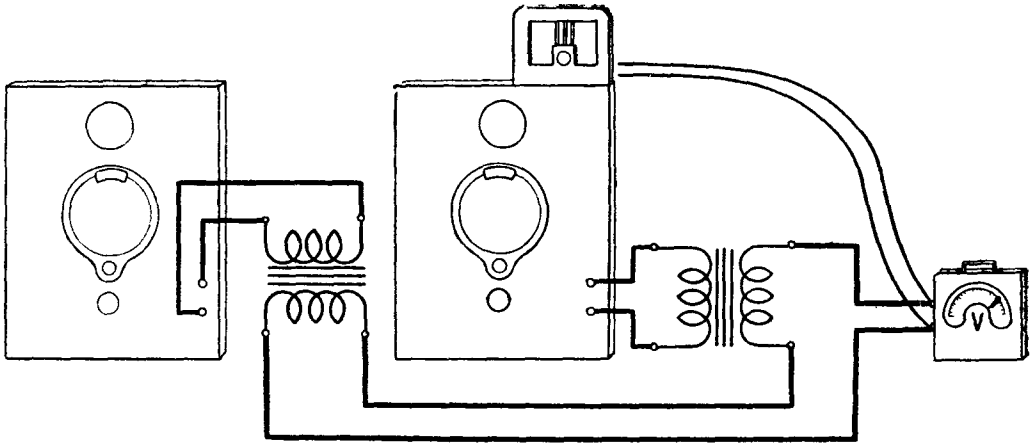


Рис. 55. Наблюдение суперпозиции несинхронных гармонических колебаний.

цесс (2.11) «синусоидальным колебанием с переменной амплитудой». Кавычки мы ставим потому, что с чисто логической стороны этот термин неудовлетворителен: синусоидальное колебание есть колебание вида  $A \cos(\omega t - \varphi)$  с постоянными  $A, \omega$  и  $\varphi$ . Термин в кавычках имеет следующий смысл: в каждый данный момент воспринимающее устройство реагирует так, как будто  $A$  и  $\varphi$  — постоянные. В таком же смысле можно говорить при  $\tau \ll \tau_0$ , что  $s_1, s_2$  — «синусоидальные колебания с переменной разностью фаз  $\Omega t + \varphi_1 - \varphi_2$ , растущей пропорционально времени».

Подчеркнем, что здесь всюду играет роль малость расстройки  $\Omega = \omega' - \omega$  по отношению к  $2\pi/\tau_0$ , а не по отношению к частотам  $\omega, \omega'$ . Критерий малости расстройки дается *воспринимающей аппаратурой*, а не самими колебаниями. Это иллюстрирует такой пример. Включим параллельно вольтметру (рис. 55) громкоговоритель. При расстройке около 5 герц мы слышим уже биения, но стрелка вольтметра может еще стоять практически неподвижно (если его  $\tau_0$  — порядка нескольких секунд). Но можно заменить такой вольтметр другим со столь малой инерцией, что стрелку его мы будем видеть сильно размытой тогда, когда ухо еще слышит диссонанс, а не биения.

2. Случай взаимно перпендикулярных векторных колебаний. Пусть постоянные векторы  $A_1, A_2$  взаимно перпендикулярны и

$$v_1 = A_1 \cos(\omega t - \varphi_1), \quad v_2 = A_2 \cos(\omega' t - \varphi_2),$$

причем

$$\omega' - \omega = \Omega \neq 0.$$

Рассуждая так же, как в п. 1, мы получим для траектории конца вектора

$$v = v_1 + v_2$$

параметрические уравнения

$$v_x = A_1 \cos(\omega t - \varphi_1), \quad v_y = A_2 \cos(\omega' t - \varphi_2)$$

или

$$v_x = A_1 \cos(\omega t - \varphi_1), \quad v_y = A_2 \cos(\omega t - \psi),$$

причем снова

$$\psi = \varphi_2 - \Omega t.$$

Если  $\Omega$  достаточно мало (критерий малости задается аппаратурой), мы будем воспринимать движение конца вектора  $v$  как движение по эл-

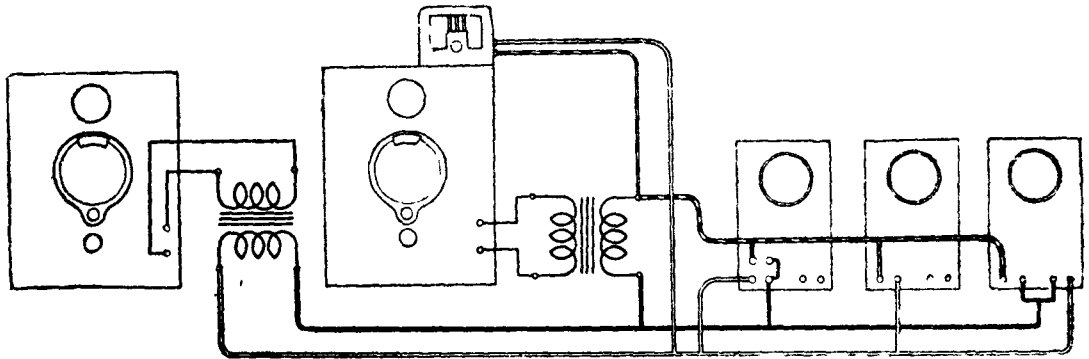


Рис. 56. Схема для демонстрации сложения гармонических колебаний различной частоты с помощью электронных осциллографов.

липсу, вписанному в прямоугольник со сторонами  $2A_1, 2A_2$ , но *постепенно* меняющему свою ориентацию и форму — тем медленнее, чем меньше  $\Omega$ . При этом в такие моменты, когда  $\varphi_1 - \psi > 0$ , конец вектора  $v$  вращается *по* часовой стрелке, а в такие моменты, когда  $\varphi_1 - \psi < 0$ , — *против* часовой стрелки.

3. Иллюстрация с помощью электронных осциллографов. Соберем установку по схеме рис. 56. Если частоты обоих звуковых генераторов отличаются друг от друга на величину порядка 1 герца, мы будем одновременно слышать биения и видеть на экране двухлучевого осциллографа, как меняется постепенно «сдвиг фаз»

$$\varphi_1 - \psi = \Omega t + \varphi_1 - \varphi_2$$

между напряжениями  $u_1, u_2$  на вторичных обмотках трансформаторов, питающих громкоговоритель, а на экране однолучевого осциллографа — всю картину биений, т. е. пульсаций амплитуды результирующего колебания.

Поворачивая ручки регулировки частоты и амплитуды одного из звуковых генераторов, мы получаем картины, показанные на рис. 57, а—г. Осциллограммы а, б получаются при  $A_1 = A_2$ .

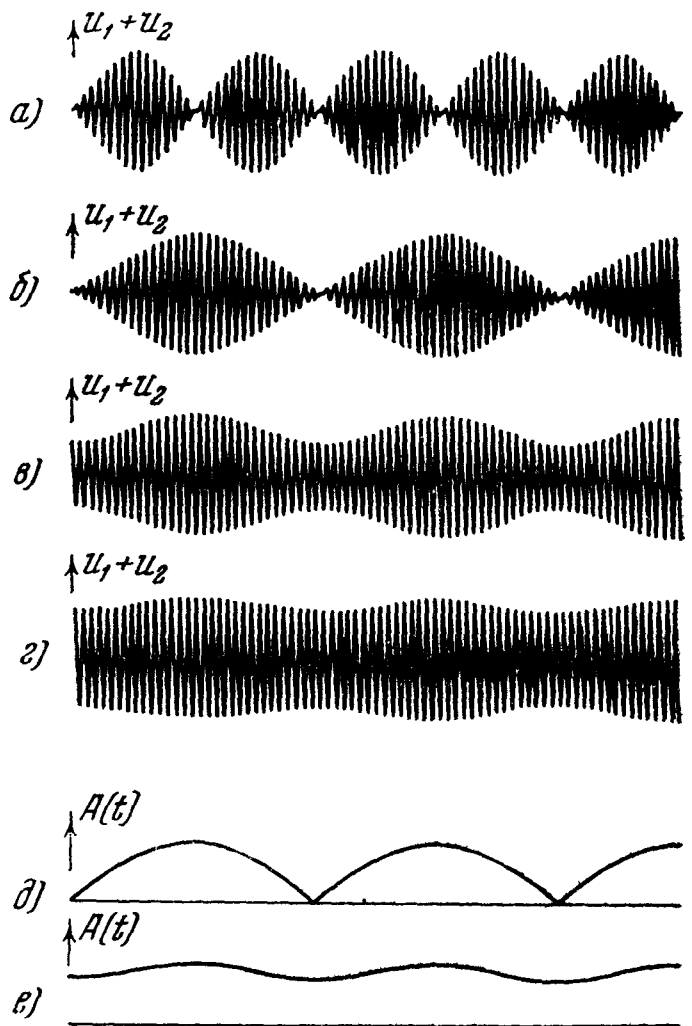


Рис. 57. Осциллограммы биений и их огибающие.

Переход от  $a$  к  $b$  осуществляется путем сближения частот звуковых генераторов; переход от  $b$  к  $e$ , затем к  $g$  — путем уменьшения одной из амплитуд. Наблюдаемые картины находятся в согласии с формулами (2.12), (2.14), которые дают для  $A_1 = A_2$

$$A = A_1 \sqrt{2[1 + \cos(\Omega t + \varphi_1 - \varphi_2)]},$$

а для  $A_2 \ll A_1$  приближенно

$$A = A_1 + A_2 \cos(\Omega t + \varphi_1 - \varphi_2)$$

Графики  $A(t)$  для этих двух случаев даны на рис. 57,  $d, e$ . На экране второго однолучевого осциллографа осуществляется случай, рассмотренный в п. 2. Мы видим на нем пульсирующий эллипс, вырождающийся в прямую в моменты, когда  $\varphi_1 - \varphi_2 = 0, \pi, 2\pi, \dots$ , и в окружность (если  $A_1 = A_2$ ) — в моменты, когда  $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi/2, 3\pi/2, \dots$ . Если сильно увеличить расстройку, глаз перестает различать пульсирующий эллипс. На экране правого осциллографа виден сплошной засвеченный прямоугольник.

## § 6. Суперпозиция гармонических колебаний с кратными частотами

### 1. Скалярные колебания. Функция

$$s = A_1 \cos(\omega t - \varphi_1) + A_2 \cos(2\omega t - \varphi_2) + \dots + A_N \cos(N\omega t - \varphi_N) \quad (2.15)$$

является периодической функцией с периодом  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , так как каждый из членов суммы, а следовательно, и сама сумма, не меняется при замене  $t$  на  $t+T$ .

Уже при двух слагаемых вид осциллограммы функции  $s$  может быть довольно разнообразным в зависимости от отношения амплитуд и приведенной разности фаз (ср. гл. I, § 4). Это показано на рис. 58 для случая

$$s = A_2 \cos(2\omega t - \varphi_2) + A_3 \cos(3\omega t - \varphi_3) \quad (\text{т. е. } N=3, A_1=0).$$

2. Векторные колебания, фигуры Лиссажу. Пусть

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2,$$

где

$$\mathbf{v}_1 = A_m \cos(m\omega t - \varphi_m),$$

$$\mathbf{v}_2 = A_n \cos(n\omega t - \varphi_n),$$

причем  $A_m, A_n$  — взаимно перпендикулярные постоянные векторы,  $m, n$  — целые числа. Конец вектора описывает траекторию, уравнение которой в параметрической форме имеет вид

$$v_x = A_m \cos(m\omega t - \varphi_m)$$

$$v_y = A_n \cos(n\omega t - \varphi_n).$$

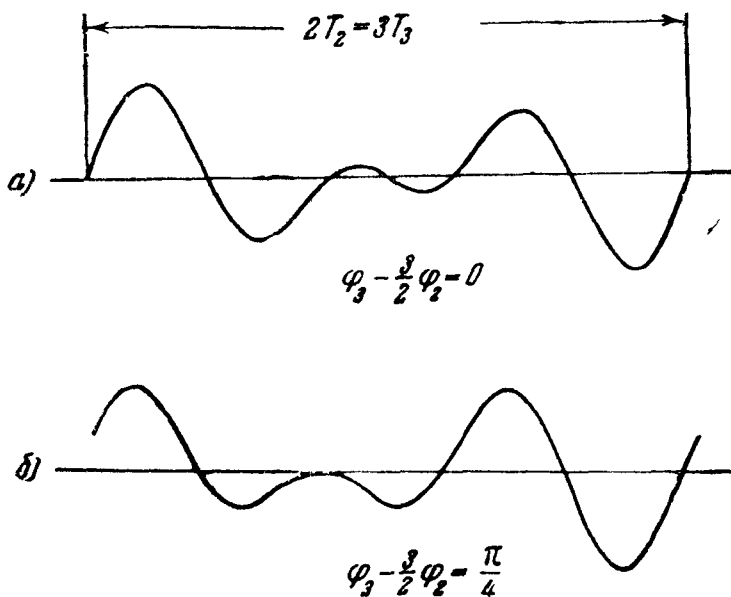


Рис. 58. Осциллограмма колебания  $s = A_2 \cos(2\omega t - \varphi_2) + A_3 \cos(3\omega t - \varphi_3)$ ,  
а)  $\varphi_3 - \frac{3}{2} \varphi_2 = 0$ , б)  $\varphi_3 - \frac{3}{2} \varphi_2 = \frac{\pi}{4}$ .

Эта траектория—замкнутая, так как  $v_x$ , а также  $v_y$  имеют одинаковые значения при  $t = t_0$  и  $t = t_0 + T$ , где

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Она называется *фигурой Лиссажу*. Частным случаем фигуры Лиссажу при  $m = n$  являются эллипсы, о которых шла речь в § 3.

Фигуры Лиссажу можно наблюдать на экране электронного осциллоскопа, подведя к отклоняющим конденсаторам напряжения от двух звуковых генераторов.

Будем поворачивать ручки настройки звуковых генераторов. Точное равенство отношения частот отношению заданных целых чисел устано-

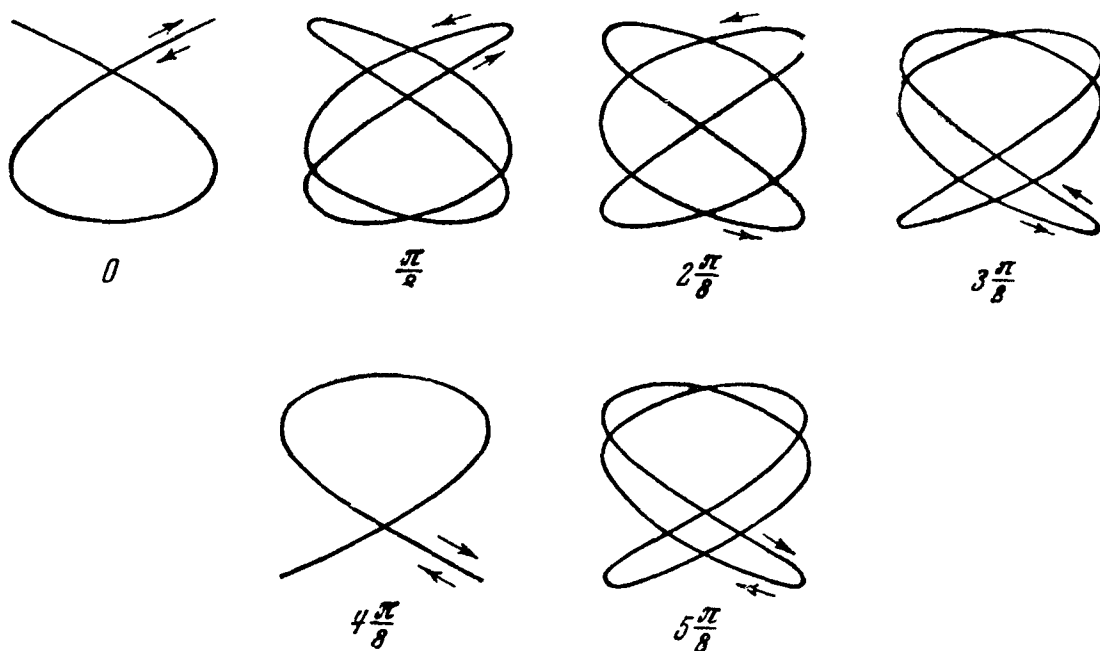


Рис. 59. Фигуры Лиссажу;  $v_1 = A \cos(2\omega t - \varphi_2)$ ,  $v_2 = A \cos(3\omega t - \varphi_3)$ . Около каждой фигуры написано значение  $\varphi_3 - \frac{3}{2}\varphi_2$ . Стрелки показывают направление движения конца вектора  $v$ .

вить практически невозможно. Но при положении ручек, когда частоты находятся в отношении, очень близком к  $1 : 2$ ,  $2 : 3$ ,  $3 : 4$  и т. д., мы видим на экране осциллоскопа очень медленно деформирующиеся фигуры Лиссажу. Например, при отношении частот, очень близком к  $2 : 3$ , видна последовательность фигур, часть которых показана на рис. 59. Рассуждая так же, как в § 5, можно сказать, что мы наблюдаем в каждый момент фигуру Лиссажу, соответствующую частотам, находящимся *точно* в отношении  $2 : 3$ , причем приведенная разность фаз  $\varphi_3 - \frac{3}{2}\varphi_2$  (ср. гл. I, § 4) медленно нарастает.

Если отношение частот генераторов *не* близко к отношению малых целых чисел, мы видим на экране не замкнутую кривую, а «мазню» — сплошь засвеченный прямоугольник. Чем тоньше линия на экране (чем острее фокусировка электронного пучка), тем при бóльших  $m$ ,  $n$  видна замкнутая кривая (фигура Лиссажу).

Включим последовательно с выходами обоих звуковых генераторов громкоговоритель (см. рис. 56). Когда на экране осциллоскопа  $O_3$  при повороте ручек настройки генераторов возникает вместо «мазни» очень

медленно деформирующаяся фигура Лиссажу ( $m \neq n$ ), ощущение диссонанса сменяется ощущением неизменяющегося музыкального тона. При этом колебание давления  $\Delta p$ , создаваемое громкоговорителем, является, очевидно, суммой двух скалярных синусоидальных колебаний с частотами, находящимися в отношении малых (неравных) целых чисел, с медленно меняющейся приведенной разностью фаз » (кавычки — по той же причине, что в аналогичных выражениях п. 1).

Это — один из опытов, показывающих, что мы воспринимаем как неизменяющийся музыкальный тон суперпозицию любого числа синусоидальных колебаний давления воздуха, имеющих слышимые частоты (ср. гл. I, § 1), находящиеся в отношении малых целых чисел. При этом звуковое ощущение совершенно не зависит от соотношения фаз этих синусоидальных составляющих (в отличие от соотношения фаз синусоидальных колебаний одинаковой частоты, ср. § 5).

**3. Теорема Фурье (предварительные замечания).** Рассмотрим сумму постоянной величины и бесконечно большого числа синусоидальных колебаний с кратными частотами:

$$s = A_0 + A_1 \cos(\omega t - \varphi_1) + A_2 \cos(2\omega t - \varphi_2) + A_3 \cos(3\omega t - \varphi_3) + \dots \quad (2.16)$$

В математике доказывается, что при подходящем подборе  $A_0$ , амплитуд  $A_1, A_2, \dots$  и фаз  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  функция  $s$  тождественно равна любой наперед заданной периодической функции  $f(t)$  периода  $T = 2\pi/\omega$  из того класса функций, с которыми приходится иметь дело в физике. Это — одно из утверждений, заключенных в теореме Фурье. Теорема Фурье играет в физике, и в особенности в учении о колебаниях и волнах, весьма важную роль, и в дальнейшем мы познакомимся с ней более подробно (гл. VI, XI). Ряд вида (2.16) называется рядом Фурье.

### § 7. О математическом аппарате учения о колебаниях и волнах

Примеры, приведенные в этой главе, уже дают некоторое представление о том, как один и тот же математический аппарат (тригонометрические формулы, векторные диаграммы) может быть с успехом применен к задачам о суперпозиции колебаний самой различной физической природы. В следующей главе мы познакомимся с дифференциальным уравнением гармонического осциллятора, которое описывает колебания множества физически совершенно разнородных систем; в главе V — с волновым дифференциальным уравнением, одинаково применимым к акустическим и электромагнитным волнам; в главе XI — с понятием «спектра» функции и со спектральным разложением, частным случаем которого является ряд (2.16) и которое также служит одним из наиболее универсальных и сильных математических средств теории колебаний и волн.

В чем причина того, что один и тот же математический аппарат оказывается пригодным для выражения закономерностей физически разнородных процессов?

Тождественность математического аппарата, применяемого в акустике, оптике, радиофизике и т. д., как и вообще единый подход к колебаниям и волнам различной физической природы, тоже не является делом «удобства», произвола, как это часто пытаются изобразить физики и математики, стоящие на субъективистских позициях. (Необходимо заметить, что, в сущности, такую же позицию занимают и те, кто отвергает единый подход к колебаниям и волнам, утверждая, что он является фор-

мальным, так как исходит из якобы «только» формальной аналогичности математического аппарата.)

Точка зрения диалектического материализма на этот вопрос была уже давно с исчерпывающей ясностью высказана В. И. Лениным. Касаясь в связи с борьбой физика-материалиста Л. Больцмана против «феноменологической» физики Э. Маха вопроса об аналогичности дифференциальных уравнений, с которыми оперируют различные разделы физики, В. И. Ленин писал: «Единство природы обнаруживается в „поразительной аналогичности“ дифференциальных уравнений, относящихся к разным областям явлений» \*).

Таким образом, единство природы, единство многих закономерностей объективных процессов, происходящих при столь различных видах движения материи, как колебания маятника и колебания в электрическом контуре, распространение упругих волн и распространение электромагнитных волн—вот что лежит в основе единого учения о колебаниях и волнах и в основе единого математического аппарата этого учения.

---

\*) В. И. Л е н и н, Материализм и эмпириокритицизм, Госполитиздат, 1952, стр. 272.

## ГЛАВА III

### ЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

#### § 1. Колебания маятника, фазовая плоскость

1. Дифференциальное уравнение движения. Опыт с маятником, описанный в начале гл. I, дает осциллограмму, практически не отличающуюся (если начальное отклонение невелико и запись длится не очень долго, ср. § 2) от синусоиды: маятник совершает гармоническое колебание. Если при  $t=0$  мы отклоним маятник на больший угол, мы получим синусоиду с большей амплитудой. Если при  $t=0$  мы не отклоним

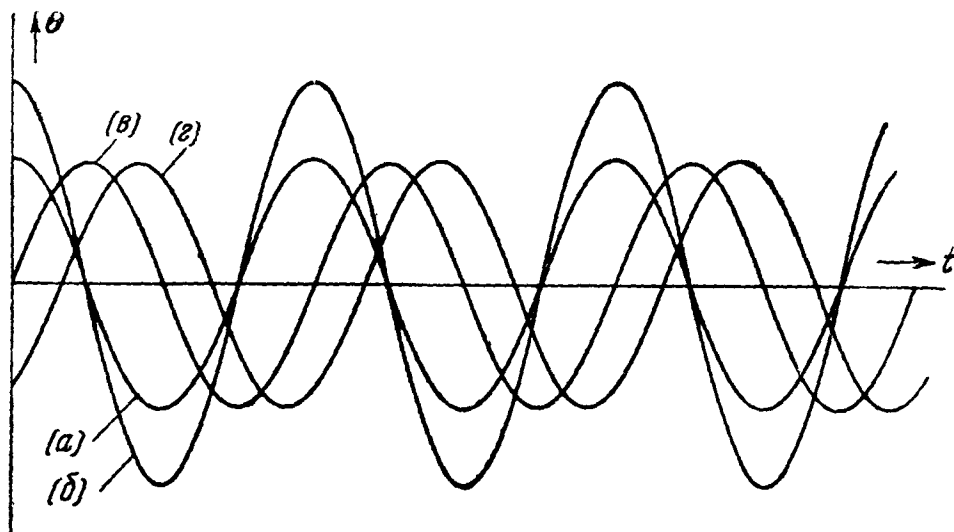


Рис. 60. Осциллограмма колебаний маятника:  $a$ —при  $t=0$  маятник выпущен без толчка из отклоненного положения;  $b$ —то же, но начальное отклонение больше;  $c$ —при  $t=0$  маятник пущен толчком из положения  $\theta=0$ ;  $d$ —при  $t=0$  маятник имеет начальное отклонение и испытывает начальный толчок.

маятник, а резко толкнем его, мы получим синусоиду с другой фазой — она сдвинута на  $\frac{1}{4}$  периода в сторону возрастающего времени по сравнению с предыдущими. Пуская маятник по-разному, мы получим множество различных осциллограмм, изображающих различные случаи движения одного и того же маятника (рис. 60).

Такой подход к изучению движения физической системы может быть охарактеризован как кинематический. Гораздо плодотворнее другой, динамический подход. Он заключается, грубо говоря, в следующем. На основании учета физических свойств изучаемой системы строится дифференциальное уравнение, которому подчиняются (с той или иной



степенью приближения) все ее движения, независимо от начальных условий, т. е. от того, как система пускается в ход. Дифференциальное уравнение — это такое уравнение, которое устанавливает связь между искомой функцией (например, смещением маятника) и ее производными различных порядков по независимой переменной (в интересующем нас здесь случае — по времени). Затем с помощью математических рассуждений и вычислений из дифференциального уравнения выводятся уравнения частных движений, удовлетворяющие тем или иным начальным условиям.

Применим этот метод к маятнику (рис. 61).

Будем считать его абсолютно твердым телом, т. е. отвлечемся от возможных его деформаций. Тогда, как учит механика,

$$J\ddot{\theta} = M, \quad (3.1)$$

где  $J$  — момент инерции маятника,  $\ddot{\theta}$  — угловое ускорение ( $\theta$  — угол отклонения),  $M$  — момент сил, действующих на маятник.  $J$  и  $M$  берутся относительно оси  $O$ , вокруг которой поворачивается маятник. Будем считать, что силы трения, возникающие при движении маятника (сопротивление воздуха, трение на оси) очень малы, и не будем принимать их в расчет. Тогда  $M$  сведется к моменту веса маятника  $mg$ :

$$M = -mgl \sin \theta, \quad (3.2)$$

где  $l$  — расстояние от оси до центра тяжести маятника. Ограничимся рассмотрением таких движений, при которых угол  $\theta$  очень мал, и предположим, что мы не получим заметной ошибки, если будем считать, что

$$\sin \theta = \theta. \quad (3.3)$$

Подставляя (3.2) и (3.3) в (3.1), мы получаем:

$$J\ddot{\theta} = -mgl \theta,$$

или

$$\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \theta, \quad (3.4)$$

где

$$\omega_0^2 = mg \frac{l}{J}, \quad (3.5)$$

или еще

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0. \quad (3.6)$$

Таково дифференциальное уравнение простейшей идеализированной модели маятника. Это уравнение, если взять его в форме (3.4), можно прочесть так: функции времени, описывающие движения нашей модели маятника, обладают тем свойством, что их вторая производная в каждый момент времени равна отрицательной постоянной  $-\omega_0^2$ , умноженной на саму функцию.

Таким свойством обладает всякая функция вида

$$\theta = A \cos(\omega_0 t - \varphi), \quad (3.7)$$

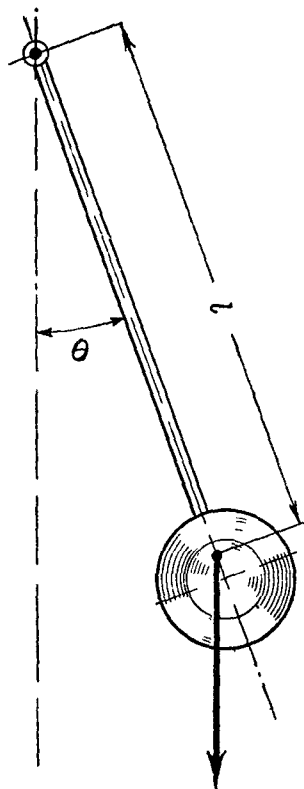


Рис. 61. Маятник.

где  $A$  и  $\varphi$  — какие угодно постоянные величины («произвольные постоянные»). Действительно, дифференцируя дважды (3.7), получаем:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta} &= -\omega_0 A \sin(\omega_0 t - \varphi), \\ \ddot{\theta} &= -\omega_0^2 A \cos(\omega_0 t - \varphi) = -\omega_0^2 \theta. \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

Таким образом, всякая функция вида (3.7) является, как говорят в теории дифференциальных уравнений, *решением* уравнения (3.4) или (3.6). В курсах дифференциальных уравнений доказывается, что никакие другие действительные функции (а только действительные функции нас могут интересовать здесь с физической точки зрения) не обладают требуемым свойством и, следовательно, не являются решением уравнения (3.4) или (3.6) и не могут изображать движения нашей модели.

Итак, из дифференциального уравнения мы узнали, что маятник (для краткости не будем говорить каждый раз: идеализированная модель маятника) способен совершать всевозможные гармонические колебания с частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J}}. \quad (3.5a)$$

В частности, если можно считать, что масса маятника сосредоточена в точке («математический маятник»), имеем:

$$J = ml^2, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (3.9)$$

Но дифференциальное уравнение не дает никаких указаний на то, какое из этих колебаний осуществляется в каком-нибудь конкретном опыте с маятником, например, если мы пустим в ход маятник, отклонив его сначала на угол  $\theta_0$ . Мы сможем ответить на этот вопрос, если к дифференциальному уравнению, справедливому (с какой-то степенью приближения) для *всех* условий опыта, мы добавим математическую формулировку условий данного конкретного опыта в виде так называемых *начальных условий* \*).

**2. Начальные условия.** Предположим, что мы держим рукой маятник, отклонив его на угол  $\theta_0$ , и затем выпускаем, толкнув его одновременно так, что он — практически мгновенно — приобретает угловую скорость  $\dot{\theta}_0$ . Начиная с момента пуска — того момента, когда рука перестала касаться маятника, — справедливо уравнение (3.6), и следовательно, происходит одно из движений (3.7). В момент пуска

$$\theta = \theta_0, \quad \dot{\theta} = \dot{\theta}_0. \quad (3.10)$$

Если момент пуска маятника совпадает с моментом пуска секундомера, по которому мы отсчитываем время, т. е. моментом

$$t = 0, \quad (3.11)$$

то в момент пуска маятника должны одновременно выполняться уравнения (3.7), (3.8), а также условия (3.10), (3.11).

Подставляя (3.10), (3.11) в (3.7), (3.8), получаем:

$$\theta_0 = A \cos \varphi, \quad \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0} = -A \sin \varphi.$$

\*) Возможна совсем другая *статистическая*, постановка задачи. Это — единственно возможная, например, в оптике (см. гл. X).

Возводя эти уравнения в квадрат и складывая, мы получим:

$$A^2 = \theta_0^2 + \left( \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0} \right)^2, \quad (3.12)$$

а деля второе на первое,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0 \theta_0}. \quad (3.13)$$

Формула (3.12) выражает амплитуду, формула (3.13) — фазу колебания маятника через начальные условия (3.10), (3.11).

В частности, если маятник пущен без начального толчка ( $\dot{\theta}_0 = 0$ ), имеем:

$$A = \theta_0, \quad \varphi = 0, \quad \theta = \theta_0 \cos \omega_0 t;$$

осциллограмма переменной  $\theta$  имеет вид, показанный на рис. 60, а, б. Если маятник пущен толчком, но без начального отклонения ( $\theta_0 = 0$ ), имеем:

$$A = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \theta = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t,$$

осциллограмма  $\theta$  имеет вид, показанный на рис. 60, в. Амплитуда колебаний тем больше, чем больше начальное отклонение или начальный толчок.

**3. Определение линейных колебательных систем.** Дифференциальное уравнение, в которое искомая функция, а также ее производные входят линейно, т. е. только в *первой* степени, называется линейным дифференциальным уравнением. Физические системы, совершающие колебания, существенные черты которых передаются с достаточным приближением линейным дифференциальным уравнением, называются *линейными колебательными системами*, остальные — *нелинейными*. Частным случаем линейной колебательной системы является рассмотренный в п. 1 маятник, совершающий *малые* колебания (такие, при которых  $\sin \theta$  можно с достаточной при данных условиях опыта точностью заменить на  $\theta$ ). Все системы, о которых будет идти речь в этой главе, являются линейными колебательными системами.

Деление колебательных систем на линейные и нелинейные основано на общности характера колебаний, а не на природе колеблющихся величин (ср. гл. I, § 2).

**4. Фазовая плоскость.** Изучая движение какой-нибудь физической системы, мы можем интересоваться, скажем, тем, каково будет положение отдельных ее частей в какой-то момент времени, или тем, *когда* система придет в такое-то положение. Именно так ставит задачу астроном, предвычисляющий момент наступления затмения. Но можно интересоваться и другим: общим характером движения — тем, например, является ли оно периодическим или нет, каковы коэффициенты его разложения в ряд Фурье (если оно является периодическим), и т. п. Именно такой подход характерен для теории колебаний. Например, вопрос о том, может ли под действием колебаний маятника сильно раскачаться рама, к которой он подвешен (гл. I, рис. 1), решается не тем, велико или мало отклонение маятника в какой-то определенный момент времени, а тем, каков ритм колебаний, т. е. каков характер движения, *взятого в целом*. Желательно поэтому иметь наглядное графическое изображение всего движения физической системы, например маятника, т. е. изображение, охватывающее все значения  $t$ . Желательно, кроме того, изобразить графически на одной диаграмме все разнообразие, все богатство движений, которые может совершать изучаемая система, в данном случае маятник. Нанеся

на одну диаграмму осциллограммы всевозможных функций вида (3.7), мы не достигнем этой цели. Получается нечто мало вразумительное (рис. 60) — осциллограммы пересекаются между собой и, кроме того, на диаграмме можно изобразить только кусок каждой осциллограммы. Но мы получим то, что хотим, если воспользуемся следующим приемом.

Возьмем декартову систему координат. Будем откладывать по оси абсцисс  $\theta$ , а по оси ординат  $\dot{\theta}$  или, еще лучше, пропорциональную ей величину  $\frac{\dot{\theta}}{\omega_0}$  (рис. 62). Задание этих двух величин полностью характеризует состояние (момент, а следовательно, и угловое ускорение определяются отклонением  $\theta$ ). Поэтому точка на плоскости переменных  $\theta, \frac{\dot{\theta}}{\omega_0}$  изображает состояние системы. Назовем эту точку *изображающей точкой*.

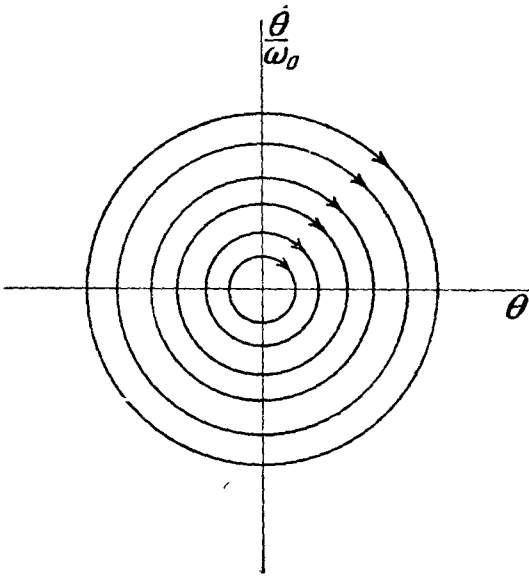


Рис. 62. Фазовая плоскость идеализованного маятника (малые колебания, трение отсутствует).

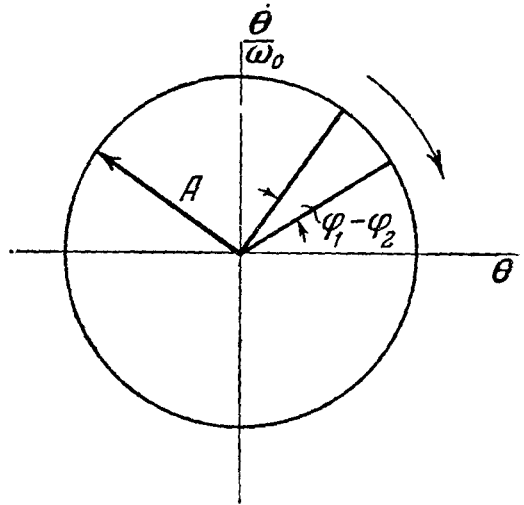


Рис. 63. Изображение на фазовой плоскости движений, имеющих одинаковые амплитуды и различные фазы.

Так как состояние системы иногда называют ее *фазой* (здесь слово «фаза» имеет другой смысл, чем тот, с которым мы познакомились ранее), плоскость  $\theta, \frac{\dot{\theta}}{\omega_0}$  называют *фазовой плоскостью*. Когда маятник движется, его скорость меняется, изображающая точка перемещается по фазовой плоскости.

Уравнения

$$\theta = A \cos(\omega_0 t - \varphi), \quad \frac{\dot{\theta}}{\omega_0} = -A \sin(\omega_0 t - \varphi)$$

являются параметрическими уравнениями линии (траектории), по которой движется изображающая точка на фазовой плоскости; параметром служит время  $t$ . Его легко исключить, возведя уравнения в квадрат и сложив их. Это дает:

$$\theta^2 + \left(\frac{\dot{\theta}}{\omega_0}\right)^2 = A^2.$$

Получилось уравнение окружности, радиус которой равен амплитуде  $A$ . Колебаниям со всевозможными амплитудами соответствует семейство концентрических окружностей с центром в начале координат, показанное на рис. 62. Колебаниям с одинаковой амплитудой, но с различными

фазами соответствует движение по одной и той же окружности, но при этом в один и тот же момент времени изображающие точки занимают разные положения. Разность фаз равна углу между радиусами-векторами изображающих точек (рис. 63).

## § 2. Незатухающий гармонический осциллятор

1. Простейший пример упругих колебаний. Рассмотрим систему, изображенную на рис. 64: груз, висящий на цилиндрической пружине. Пусть  $l$ —«естественная» длина пружины (т. е. ее длина в недеформированном состоянии),  $z$ —длина пружины в данный момент. Нас будут интересовать только вертикальные смещения груза. На него действует, во-первых, упругая сила со стороны пружины, равная  $-k(z-l)$ , где  $k$ —постоянная, так как сила пропорциональна деформации пружины, и, во-вторых, его вес  $mg$  (трением мы здесь пренебрегаем, как и в п. 1). Тогда по второму закону Ньютона

$$m\ddot{z} = -k(z-l) + mg. \quad (3.14)$$

Это дифференциальное уравнение имеет решение, не зависящее от времени:

$$z = z_0,$$

где

$$z_0 = l + \frac{mg}{k},$$

изображающее состояние равновесия. Упругая сила пружины при этом в точности уравновешивает вес груза. Введем новую переменную  $\zeta$ , положив:

$$z = z_0 + \zeta. \quad (3.15)$$

$\zeta$  есть смещение груза из положения равновесия.

Подставляя (3.15) в (3.14), получаем:

$$m\ddot{\zeta} + k\zeta = 0.$$

Введя обозначение

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad (3.16)$$

представим это уравнение в виде

$$\ddot{\zeta} + \omega_0^2 \zeta = 0. \quad (3.17)$$

Это уравнение имеет такой же вид, как (3.6). Можно, следовательно, повторить для рассматриваемой системы все, что было сказано о малых колебаниях маятника. Если груз вывести из состояния равновесия (отклонением или толчком), то он будет совершать гармонические колебания с частотой  $\omega_0$  и амплитудой, зависящей от начальных условий, и т. д.

Фазовая плоскость будет в точности такой же, как для маятника, совершающего малые колебания.

С точки зрения теории колебаний системы, описываемые уравнениями (3.6) и (3.17), эквивалентны друг другу, несмотря на то, что между ними имеется глубокое физическое отличие: сила, возвращающая маятник

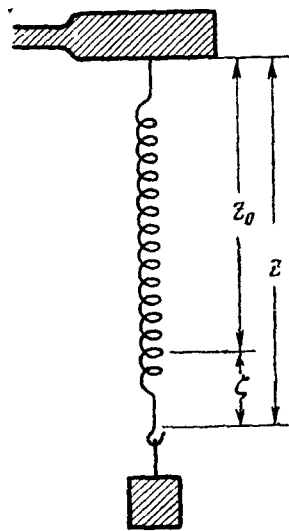


Рис. 64. Груз, подвешенный на пружине.

к положению равновесия, есть тангенциальная составляющая силы тяжести; она пропорциональна его массе; в случае груза такой «восстанавливающей силой» является упругая сила пружины. Отсюда истекает то, что во втором случае период зависит от массы груза, а в первом не зависит (при одинаковой геометрической форме) от массы маятника. Сопоставление формул (3.9) и (3.16) показывает, что в случае математического маятника аналогом  $k$  является  $g$ , аналогом массы груза  $m$  — длина маятника  $l$ , а не его масса. Физические величины  $k$  и  $g$ ,  $m$  и  $l$

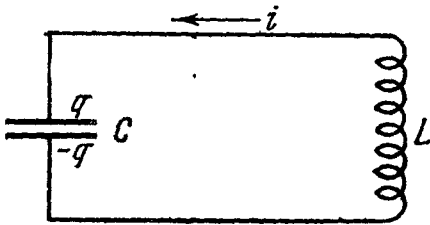


Рис. 65. Колебательный контур.

являются совершенно разными по своей природе. Но на языке теории колебаний отличие между ними исчезает, так же как исчезает отличие между обеими механическими системами, о которых идет речь, и той электрической системой, к рассмотрению которой мы теперь перейдем.

**2. Простейший пример электрических колебаний.** На схеме (рис. 65) условно изображен контур, состоящий из емкости  $C$  и индуктивности  $L$ , но не обладающий сопротивлением. Отсутствие сопротивления — важнейшая из тех идеализаций, которые лежат в основе нашего исследования.

Разность потенциалов  $q/C$  между обкладками конденсатора ( $q$  — заряд одной из обкладок) равна электродвижущей силе индукции  $-L \frac{di}{dt}$ , возникающей в катушке ( $i$  — сила тока в катушке). Итак,

$$\frac{q}{C} = -L \frac{di}{dt}.$$

Но

$$i = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$$

и, следовательно,

$$L\ddot{q} + \frac{q}{C} = 0 \quad (3.18)$$

или

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad (3.19)$$

где

$$\omega_0^2 = \frac{1}{CL}. \quad (3.20)$$

Уравнение (3.19) имеет тот же вид, что (3.6) и (3.17). Следовательно, все, что было сказано в п. 1 или 2, можно применить в этом случае, заменив угловое смещение  $\theta$  или линейное смещение  $\zeta$  зарядом конденсатора  $q$ ; угловую скорость  $\dot{\theta}$  или линейную скорость  $\dot{\zeta}$  — силой тока  $\dot{q}$  и т. д. Если конденсатор имеет начальный заряд или если в катушке возбужден начальный ток (например, в результате движения магнита около катушки), в контуре происходят электрические гармонические колебания

$$q = A \cos(\omega_0 t - \varphi). \quad (3.21)$$

Их частота зависит от емкости  $C$  и индуктивности  $L$  по формуле (3.20), которая легко преобразуется в следующую формулу для периода колебаний (формула Томсона):

$$T = 2\pi \sqrt{LC}.$$

Фазовую плоскость для колебательного контура мы получим, заменив на рис. 63 обозначения  $\theta$ ,  $\dot{\theta}$  на  $q$ ,  $\dot{q}$ .

3. Общее понятие «гармонический осциллятор». Можно было бы во много раз увеличить число примеров систем, которые при соответствующей идеализации описываются уравнением вида

$$\ddot{s} + \omega_0^2 s = 0.$$

Такие системы называются *гармоническими осцилляторами* (ср. гл. I, § 2). Маятник (при малых размахах), всевозможные механические системы, в которых существенную роль играют масса и упругость (например, показанная на рис. 66), всевозможные электрические системы, имеющие основными элементами индуктивность и емкость, можно представить при соответствующей идеализации как гармонические осцилляторы.

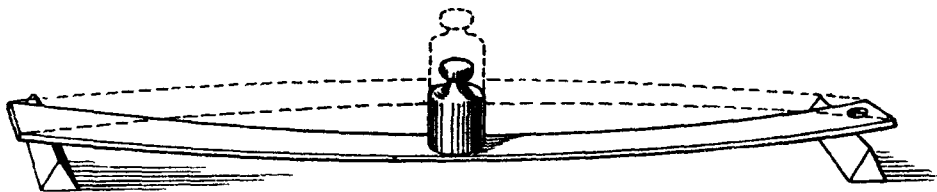


Рис. 66. Груз, лежащий на «упругой балке».

Весьма важным и плодотворным для физики является применение модели гармонического осциллятора к электронам в атомах. Несмотря на то, что эта модель не соответствует современной (квантовой) теории атома, в физике продолжают часто пользоваться ею, так как она позволяет дать наглядную картину определенного круга явлений, связанных с излучением света и прохождением его через вещество (см. гл. VII, VIII), и получить практически ценные выводы.

Пользуясь термином «гармонический осциллятор», мы можем придать единую формулировку всем результатам §§ 1 и 2. Можно, например, сказать: фазовая плоскость гармонического осциллятора заполнена семейством концентрических окружностей; период обращения изображающей точки одинаков для всех окружностей.

Для величины  $\dot{s}/\omega_0$  (т. е.  $\dot{\theta}/\omega_0$ ,  $\dot{\xi}/\omega_0$ ,  $\dot{q}/\omega_0$ , ...), которую мы откладываем по оси ординат на фазовой плоскости, мы введем единое обозначение  $p$ ; мы будем ее называть приведенным импульсом.

4. Энергетические соотношения. Говоря на языке сил, мы можем сказать, что в гармоническом осцилляторе колебания возникают в результате действия двух факторов: *восстанавливающей силы* ( $-kz$ , или  $-mgl\theta$ , или  $-q/C$ ), стремящейся вернуть систему в состояние равновесия (уничтожить деформацию пружины или отклонение маятника, разрядить конденсатор), и *инерции* (масса, индуктивность), благодаря которой система «проскакивает» положение равновесия и отклоняется в другую сторону (конденсатор перезаряжается, сжатая пружина превращается в растянутую). Полезно и другое толкование тех же явлений, связанное с рассмотрением энергии.

Умножим уравнение (3.18) на  $\dot{q}$ . Получим:

$$\dot{q} \left( L\ddot{q} + \frac{q}{C} \right) = 0$$

или

$$L\dot{q}\ddot{q} + \frac{1}{C}q\dot{q} = 0$$

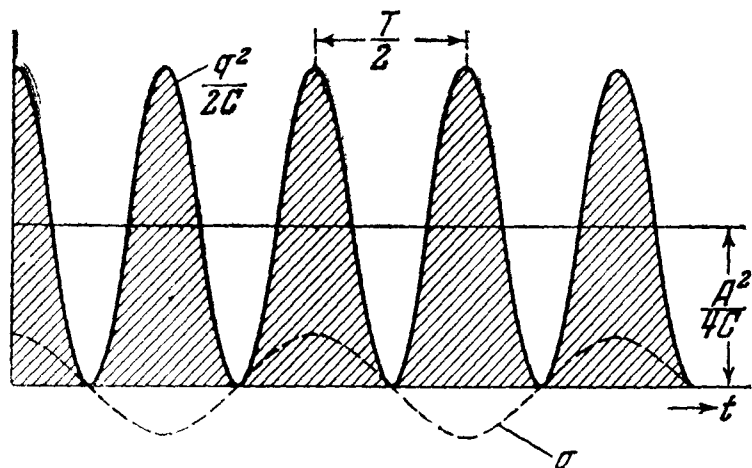
или еще

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{L\dot{q}^2}{2} + \frac{1}{C} \frac{q^2}{2} \right) = 0,$$

откуда, интегрируя, получаем:

$$\frac{L\dot{q}^2}{2} + \frac{q^2}{2C} = \text{const.}$$

Слева стоит сумма *магнитной* энергии (энергии магнитного поля катушки) и *электрической* энергии (энергии электрического поля конденсатора). Эта сумма постоянна. В силу (3.21) имеем:



$$\begin{aligned} \frac{q^2}{2C} &= \frac{A^2}{2C} \cos^2(\omega_0 t - \varphi) = \\ &= \frac{A^2}{4C} + \frac{A^2}{4C} \cos 2(\omega_0 t - \varphi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{L\dot{q}^2}{2} &= \frac{A^2}{2C} \sin^2(\omega_0 t - \varphi) = \\ &= \frac{A^2}{4C} - \frac{A^2}{4C} \cos 2(\omega_0 t - \varphi), \end{aligned}$$

так как  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ .

Обе величины меняются с одинаковой частотой  $2\omega_0$  около одинакового среднего значения. Сдвиг фаз между ними, равный  $\pi$ , обеспечивает постоянство полной энергии (рис. 67).

Совершенно аналогично имеем для маятника

$$\frac{J\dot{\theta}^2}{2} + \frac{mgl\theta^2}{2} = \text{const}$$

(сумма *кинетической* и *гравитационной* энергии постоянна) и для упругого осциллятора

$$\frac{m\dot{\zeta}^2}{2} + \frac{k\zeta^2}{2} = \text{const}$$

Рис. 67. Осциллограмма электрической и магнитной энергии в контуре без затухания. Сумма ординат обеих осциллограмм постоянна.

(сумма *кинетической* и *упругой* энергии постоянна), причем кинетическая и потенциальная (гравитационная, упругая) энергии колеблются в противоположных фазах около одинакового среднего значения с частотой  $2\omega_0$ .

5. Действие толчка на гармонический осциллятор. О действии толчка на гармонический осциллятор уже говорилось в § 1, п. 1. Для дальнейшего (§ 4, а также гл. IV) необходим более подробный разбор этого вопроса. Рассмотрим для определенности пружину с грузом. Если на него действует извне сила  $f(t)$ , отличная от нуля только в течение промежутка времени  $\tau$ , малого по сравнению с собственным периодом  $T_0$ , можно считать, что за время такого толчка груз заметно не смещается, а его коли-



чество движения  $m\dot{\zeta}$  возрастает на величину  $\Delta(m\dot{\zeta})$ , равную импульсу силы

$$\int_{t_1}^{t_1+\tau} f(t) dt.$$

(За  $t = t_1$  мы принимаем мгновение, когда начинает действовать толчок.)  
Итак,

$$\Delta(m\dot{\zeta}) = \int_{t_1}^{t_1+\tau} f(t) dt,$$

откуда для приращения  $\Delta p$  приведенного импульса  $p$  получаем:

$$\Delta p = \Delta\left(\frac{\dot{\zeta}}{\omega_0}\right) = \frac{1}{m\omega_0} \int_{t_1}^{t_1+\tau} f(t) dt.$$

Аналогичным образом для маятника получим следующее соотношение:

$$\Delta p = \frac{1}{J\omega_0} \int_{t_1}^{t_1+\tau} f(t) dt,$$

причем здесь  $f(t)$  — момент внешней силы относительно оси вращения.

Для электрического контура

$$\Delta p = \frac{1}{L\omega_0} \int_{t_1}^{t_1+\tau} f(t) dt.$$

Здесь  $f(t)$  — электродвижущая сила. Поясним это на конкретной схеме. Пусть ток  $i_0$  (рис. 68) нарастает от значения  $i_0 = 0$  до  $i_0 = I$  за время  $\tau$ ,

малое по сравнению с  $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$  (как осуществляется такой случай, мы увидим, например, в гл. IV, § 3). Тогда в катушке возникает кратковременная электродвижущая сила (электрический толчок)

$$f(t) = -M \frac{di_0}{dt},$$

причем

$$\int_{t_1}^{t_1+\tau} f(t) dt = -M \int_{t_1}^{t_1+\tau} \frac{di_0}{dt} dt = -MI.$$

### § 3. Затухающий гармонический осциллятор

1. Составление дифференциального уравнения. Всякая идеализация рано или поздно «мстит за себя». Пренебрежение трением или его аналогом — электрическим сопротивлением в §§ 1, 2 приводит к выводу о незатухающем характере колебаний; между тем из опыта известно, что если подождать достаточно долго, мы во всех рассмотренных системах обнаружим постепенное уменьшение амплитуды вплоть до полного прекращения колебаний\*).

\*) Говоря точнее, таков результат наблюдения, не учитывающего броуновского движения; ср. гл. X.

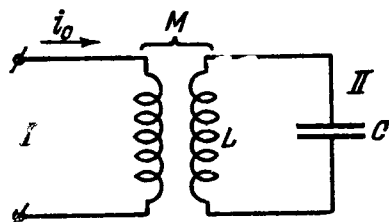


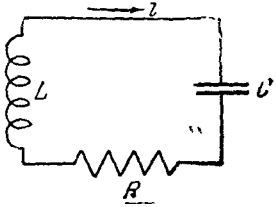
Рис. 68. При резком изменении тока  $i_0$  в контуре  $LC$  возникает электрический толчок; при синусоидальном изменении тока  $i_0$  в контуре  $LC$  возникает синусоидальная э. д. с. (см. § 6).

Примем во внимание сопротивление  $R$  катушки колебательного контура. Мы можем теперь изобразить этот контур схемой рис. 69, для которой справедливо уравнение

$$\frac{q}{C} + Ri = -L \frac{di}{dt}.$$

Слева стоит сумма разностей потенциалов на конденсаторе и на сопротивлении (последняя равна  $Ri$  на основании закона Ома), справа — э. д. с. индукции. Приняв во внимание, что

$$i = \frac{dq}{dt},$$



получим дифференциальное уравнение

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0. \quad (3.22)$$

Рис. 69. Колебательный контур.

Сопротивление изображено в виде отдельного элемента схемы.

Мы приходим к совершенно аналогичным уравнениям для маятника и для груза, висящего на пружине, если будем считать, что они испытывают со стороны воздуха силу трения, пропорциональную угловой

скорости  $\dot{\theta}$  или соответственно скорости  $\dot{z}$  (механические аналоги закона Ома). Покажем это для груза на пружине. Если сила трения имеет вид  $-h\dot{z}$ , где  $h$  — постоянная, имеем:

$$m\ddot{z} = -k(z - l) + mg - h\dot{z}. \quad (3.23)$$

По-прежнему

$$z = z_0,$$

где

$$z_0 = l + \frac{mg}{k},$$

является одним из решений уравнения движения: наличие трения не влияет на положение равновесия. Введем снова переменную

$$\zeta = z - z_0. \quad (3.24)$$

Подставляя (3.24) в (3.23), получим уравнение

$$m\ddot{\zeta} + h\dot{\zeta} + k\zeta = 0. \quad (3.25)$$

В нем  $h$  играет такую же роль, как  $R$  в уравнении электрического контура.

Приведем оба уравнения (3.22), (3.25) к стандартному виду

$$\ddot{s} + 2\delta\dot{s} + \omega_0^2 s = 0, \quad (3.26)$$

положив

в уравнении (3.22)                      в уравнении (3.25)  
(электрический случай)            (механический случай)

$$s = q,$$

$$s = \zeta,$$

$$2\delta = \frac{R}{L},$$

$$2\delta = \frac{h}{m},$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC},$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

Величина  $\delta$  имеет размерность [время] $^{-1}$ , так же как и  $\omega_0$ . Легко убедиться путем подстановки, что функция

$$s = Ae^{-\delta t} \cos(\omega t - \varphi), \quad (3.27)$$

где  $A$ ,  $\varphi$  — произвольные постоянные величины, а

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \quad (3.28)$$

удовлетворяет уравнению (3.26). Действительно, дифференцируя дважды (3.27), получаем:

$$\dot{s} = -A\delta e^{-\delta t} \cos(\omega t - \varphi) - A\omega e^{-\delta t} \sin(\omega t - \varphi),$$

$$\ddot{s} = A\delta^2 e^{-\delta t} \cos(\omega t - \varphi) + 2A\omega\delta e^{-\delta t} \sin(\omega t - \varphi) - A\omega^2 e^{-\delta t} \cos(\omega t - \varphi),$$

откуда

$$\begin{aligned} \ddot{s} + 2\delta\dot{s} + \omega_0^2 s &= A\delta^2 e^{-\delta t} \cos(\omega t - \varphi) + 2A\omega\delta e^{-\delta t} \sin(\omega t - \varphi) - \\ &- A\omega^2 e^{-\delta t} \cos(\omega t - \varphi) - 2A\delta^2 e^{-\delta t} \cos(\omega t - \varphi) - 2A\omega e^{-\delta t} \sin(\omega t - \varphi) + \\ &+ A\omega_0^2 e^{-\delta t} \cos(\omega t - \varphi) \equiv 0. \end{aligned}$$

В теории дифференциальных уравнений доказывается, что уравнение (3.26) при  $\omega_0^2 \neq \delta^2$  не имеет решений, кроме тех, которые изображаются (при всевозможных значениях  $A$  и  $\varphi$ ) формулой (3.27). Формула (3.27) имеет непосредственный физический смысл только в том случае, если  $\omega$  действительная величина, т. е. если выполнено условие

$$\omega_0^2 > \delta^2, \quad (3.29)$$

т. е. в случае электрического контура

$$\frac{L}{C} > \frac{R^2}{4},$$

а в случае механической системы

$$km > \frac{h^2}{4}.$$

**2. Декремент затухания, добротность.** Предположим, что условие (3.29) выполнено.

Функция  $s$  является произведением убывающей (так как  $\delta > 0$ ) показательной функции  $e^{-\delta t}$  и синусоидальной функции  $A \cos(\omega t - \varphi)$ , период которой  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  больше, чем период  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$  тех гармонических колебаний, которые получались бы при  $\delta = 0$ . График функции  $s$  может быть получен путем перемножения ординат графиков функций  $e^{-\delta t}$  и  $A \cos(\omega t - \varphi)$ ; он показан на рис. 70. Функция  $s$  изображает *затухающее колебание*. Эта функция — *непериодическая*: она не удовлетворяет определению периодической функции, данному в гл. I, § 3. Это видно хотя бы из того, что все ординаты при  $t > t_1$  меньше, чем ордината при  $t = t_1$ , где  $t_1$  — момент первого максимума. Но  $s$  обладает известного рода «повторяемостью», заключающейся в том, что максимумы функции, а также ее минимумы и нули наступают через равные промежутки времени, равные периоду  $T$  гармонического множителя  $A \cos(\omega t - \varphi)$ .

Для нулей наше утверждение очевидно; докажем его для максимумов и минимумов. Напишем условие экстремума функции  $s$  — равенство нулю ее первой производной, которую мы уже вычислили в п. 1:

$$-A\delta e^{-\delta t} \cos(\omega t - \varphi) - A\omega e^{-\delta t} \sin(\omega t - \varphi) = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg}(\omega t - \varphi) = -\frac{\delta}{\omega}.$$

Если  $t = t_1$  есть решение этого уравнения, то его решениями являются также

$$\begin{aligned} \dots t_1 - T, \quad t_1 + T, \quad t_1 + 2T, \quad t_1 + 3T, \dots, \\ \dots t_1 - \frac{T}{2}, \quad t_1 + \frac{T}{2}, \quad t_1 + \frac{3T}{2}, \quad t_1 + \frac{5T}{2}, \dots \end{aligned}$$

Легко убедиться подстановкой в выражение для  $\ddot{s}$ , что если  $t = t_1$  соответствует максимуму  $s$  ( $\ddot{s} < 0$ ), первая строка соответствует максимумам  $s$ , вторая строка — минимумам \*).

Обозначим через  $s_n, s_{n+1}$  значения  $s$  (рис. 70) в двух последовательных максимумах:  $n$ -м и  $(n+1)$ -м ( $n=1, 2, 3, \dots$ ). Имеем:

$$s_n = Ae^{-\delta t_n} \cos(\omega t_n - \varphi), \quad (3.30)$$

$$s_{n+1} = Ae^{-\delta t_{n+1}} \cos(\omega t_{n+1} - \varphi), \quad (3.31)$$

где  $t_n, t_{n+1}$  — моменты времени, соответствующие  $n$ -му и  $(n+1)$ -му максимуму. Деля (3.31) на (3.30) и принимая во внимание, что

$$t_{n+1} = t_n + T,$$

получаем:

$$\frac{s_{n+1}}{s_n} = e^{-\delta T} \quad (3.32)$$

или

$$\frac{s_{n+1}}{s_n} = e^{-d}, \quad (3.33)$$

где

$$d = \delta T, \quad (3.34)$$

или еще

$$\ln \frac{s_{n+1}}{s_n} = -d. \quad (3.35)$$

Рис. 70. Построение осциллограммы затухающего колебания.

Формулы (3.32), (3.33) показывают, что максимумы функции  $s$  образуют убывающую геометрическую прогрессию. Иначе говоря, отношение величины каждого максимума к предыдущему одинаково.

Величину  $\delta$  будем называть *коэффициентом затухания* колебания, безразмерная величина  $d$  называется *логарифмическим декрементом* затухания. Поясним физический смысл этих величин.

\*) Предоставим читателю доказательство того, что промежуток времени от максимума или минимума до нуля больше, чем промежуток от нуля до ближайшего следующего максимума или минимума.

Обозначим  $\tau$  промежуток времени, за который амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз. Тогда

$$e^{-\delta\tau} = e^{-1},$$

откуда

$$\delta\tau = 1, \quad \delta = \frac{1}{\tau}.$$

Таким образом,  $\delta$  есть величина, обратная промежутку времени  $\tau$ , в течение которого амплитуда убывает в  $e$  раз. Пусть, например, колебательный контур имеет  $\delta = 10^4 \text{ сек}^{-1}$ . Это означает, что амплитуда колебаний убывает в  $e$  раз за время  $10^{-4}$  сек.

Логарифмический декремент характеризует, насколько убывает амплитуда функции  $\cos(\omega t - \varphi)$  за один период. Пусть  $N$  — число колебаний, после которых амплитуда уменьшается в  $e$  раз. Тогда

$$\tau = NT,$$

$$d = \delta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N}.$$

Таким образом,  $d$  есть величина, обратная числу колебаний, по истечении которых амплитуда спадает в  $e$  раз. Пусть, например,  $d = 0,01$ . Это значит, что амплитуда колебаний спадает в  $e$  раз по истечении 100 колебаний.

Логарифмический декремент (часто говорят просто декремент) является «естественной» мерой быстроты затухания колебаний. Мы хотим этим сказать следующее. Будем сравнивать между собой два затухающих колебания. Пусть, например, первое колебание характеризуется числами

$$T = 10^{-8}, \quad \delta = 10^5, \quad d = 10^{-3},$$

второе — числами

$$T = 10^{-3}, \quad \delta = 10^2, \quad d = 10^{-1}.$$

Какое из колебаний затухает быстрее? Этот вопрос можно понимать по-разному. Если нас интересует, *сколько секунд* длится колебание, то мы скажем, что затухает быстрее то колебание, у которого  $\delta$  больше, т. е. *первое*. Но если мы возьмем для каждого колебания его естественный масштаб времени — длительность  $T$  отдельного колебания — и будем интересоваться тем, насколько быстро затухает колебание в этом масштабе, мы скажем, что быстрее затухает то колебание, у которого  $d$  больше, т. е. *второе* колебание.

Для характеристики колебательных контуров часто употребляется еще величина, называемая *добротностью* и обычно обозначаемая буквой  $Q$ . Она определяется следующим образом:

$$Q = \frac{\pi}{d} = \pi N. \quad (3.36)$$

Добротность тем больше, чем дольше длятся колебания контура, причем здесь слово «дольше» относится к естественному масштабу времени контура, задаваемому длительностью отдельного колебания. В нашем примере добротность контура, в котором происходит второе колебание, в 100 раз меньше добротности первого контура.

Формулу (3.28) можно представить в виде

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{\omega_0}\right)^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \left(\frac{d}{2\pi}\right)^2}.$$

Если декремент мал (по сравнению с единицей), второй член под корнем является малой величиной второго порядка, и им обычно можно

пренебречь. В этом случае имеем приближенно:

$$d = \delta T_0 = \delta \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{R}{2L} \frac{2\pi}{\omega_0} = \pi \frac{R}{\omega_0 L} = \pi R \omega_0 C,$$

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R \omega_0 C} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (3.36a)$$

Приведем порядок величины добротности некоторых важнейших типов затухающих осцилляторов, т. е. колебательных систем, описываемых уравнением вида (3.26):

Обычный колебательный контур (на радиочастотах) . . . . .	10 <sup>2</sup>
Камертон (без резонатора) . . . . .	10 <sup>4</sup>
Пьезокварц в вакууме *) . . . . .	10 <sup>5</sup>
Полый резонатор для микрорадиоволн **) . . . . .	10 <sup>5</sup>
Электрон в атоме ***) . . . . .	10 <sup>7</sup>

Необходимо иметь в виду, что величиной сопротивления здесь учитываются не только потери на нагревание, но и на излучение (ср. гл. VII), которые при некоторых условиях играют основную роль.

3. Спирали на фазовой плоскости. На фазовой плоскости вместо окружностей мы получим для затухающего осциллятора скручивающиеся

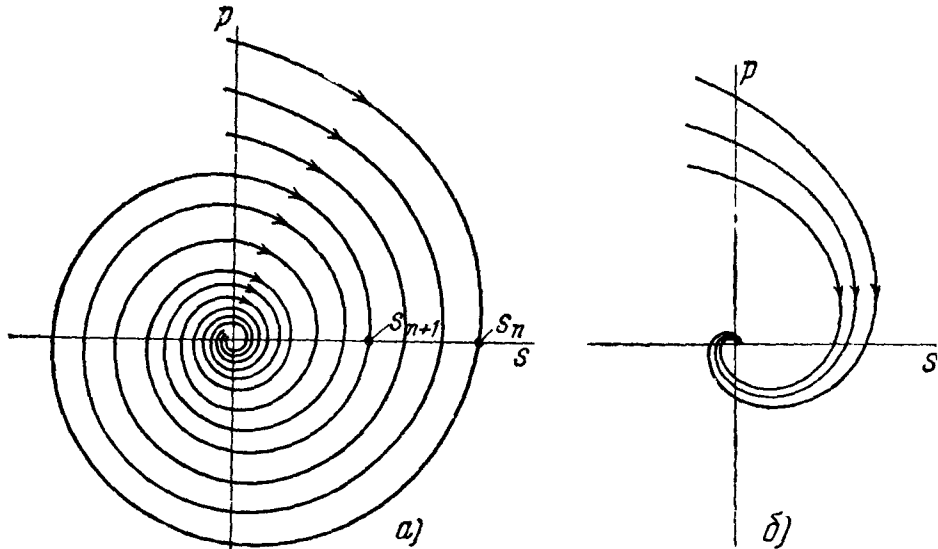


Рис. 71. Фазовая плоскость затухающего осциллятора. В случае б) затухание значительно больше, чем в случае а).

спирали (рис. 71, а, б). Шаг спирали равен

$$s_n - s_{n+1} = A - Ae^{-d} = A(1 - e^{-d}).$$

Разлагая  $e^{-d}$  в ряд по степеням  $d$ , имеем:

$$1 - e^{-d} = 1 - \left( 1 - d + \frac{d^2}{2} + \dots \right) = d - \frac{d^2}{2} + \dots,$$

откуда приближенно, если  $d \ll 1$ ,

$$s_n - s_{n+1} = Ad.$$

Таким образом, характер траектории изображающей точки на фазовой плоскости определяется не коэффициентом затухания  $\delta$ , а логарифмическим декрементом  $d$  (или добротностью  $Q$ ).

\*) См. гл. VI, § 4.

\*\*) См. гл. VII, § 5.

\*\*\*) См. гл. VII, § 7.

4. **Случай большого трения.** Если  $\delta^2 > \omega_0^2$ , уравнение (3.26) имеет, как легко проверить подстановкой, действительное решение

$$s = A_1 e^{-\alpha_1 t} + A_2 e^{-\alpha_2 t}, \quad (3.37)$$

где  $A_1, A_2$  — произвольные постоянные,

$$\alpha_1 = \delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}, \quad \alpha_2 = \delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}.$$

Процесс, описываемый формулой (3.37), называется *апериодическим*. Его график изображен для одного частного случая на рис. 72.

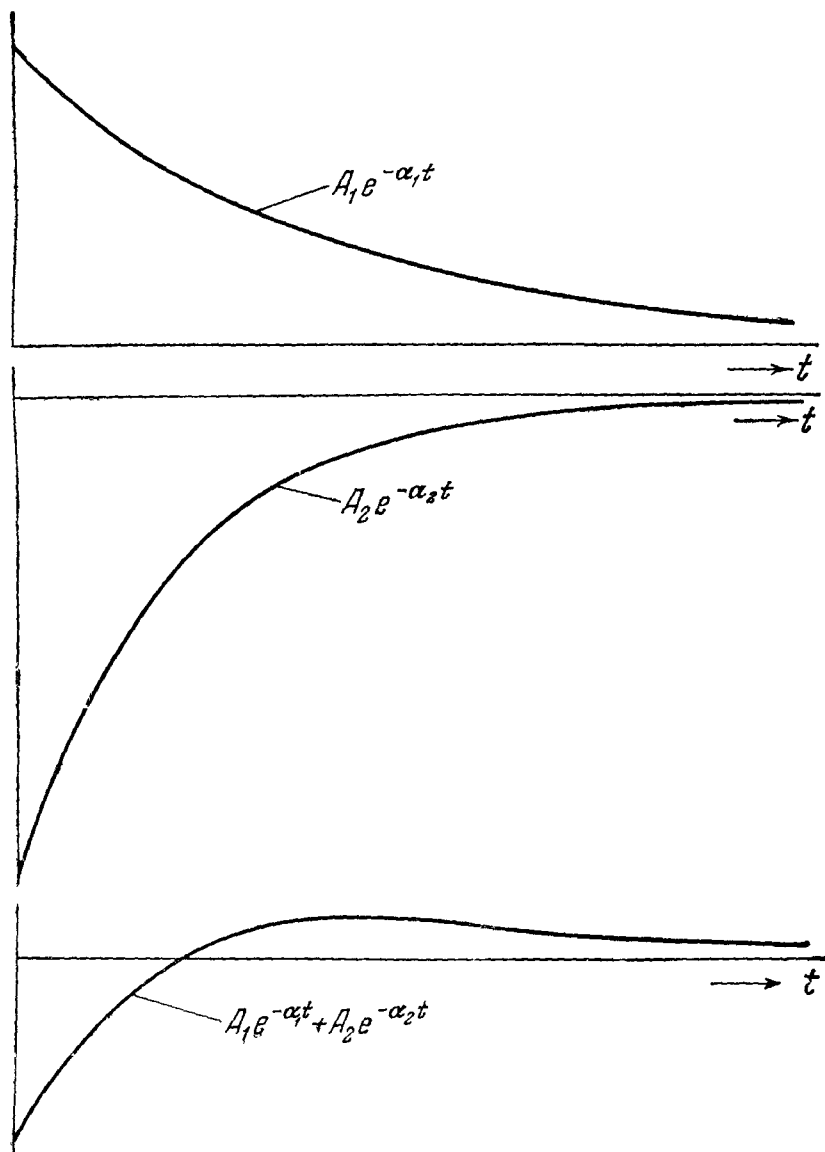


Рис. 72. Пример осциллограммы в случае большого трения ( $\delta^2 > \omega_0^2$ ).

5. **Энергетические соотношения.** Умножим на  $\dot{q}$  уравнение (3.22) и сделаем такие же преобразования, как в § 2, п. 4. Мы получим:

$$-dW = R\dot{q}^2 dt, \quad \text{где} \quad W = \frac{L\dot{q}^2}{2} + \frac{q^2}{2C},$$

т. е. убыль полной энергии  $W$  за время  $dt$  равна энергии, поглощаемой за это же время сопротивлением  $R$  (нагревание, излучение).

Проинтегрируем полученное соотношение в пределах от произвольного  $t_0$  до  $t_0 + T$ :

$$W(t_0) - W(t_0 + T) = R \int_{t_0}^{t_0+T} \dot{q}^2 dt = \frac{2RT}{L} \left[ \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{L\dot{q}^2}{2} dt \right].$$

Выражение в квадратных скобках есть среднее значение магнитной энергии за время  $T$ , равное приблизительно, если затухание мало,  $W(t_0)/2$ . (Согласно § 1, п. 4, в отсутствие затухания среднее значение магнитной энергии за период равно половине полной энергии.) Таким образом, при малом затухании

$$W(t_0) - W(t_0 + T) = \frac{RT}{L} W_0(t)$$

или

$$\frac{W(t_0) - W(t_0 + T)}{W(t_0)} = 2d = \frac{2\pi}{T},$$

относительная убыль электромагнитной энергии контура за время  $T$  равна удвоенному декременту или  $2\pi/Q$ , где  $Q$  — добротность контура. Этот результат непосредственно обобщается на всякий гармонический осциллятор. Его можно получить также, исходя из формулы (3.27).

#### § 4. Действие периодических толчков на незатухающий гармонический осциллятор

1. Постановка задачи. В §§ 1 и 2 мы считали, что после того, как осциллятор получил определенное начальное отклонение и определенную начальную скорость, он колеблется совершенно свободно, не испытывая

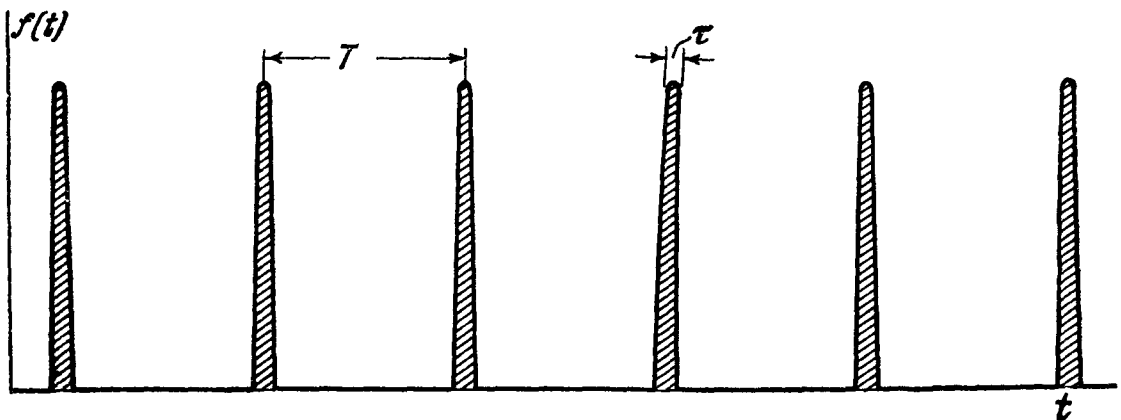


Рис. 73. Периодическая сила, состоящая из кратковременных толчков.

больше никаких внешних воздействий. Теперь мы поставим другую задачу. Будем считать, что гармонический осциллятор испытывает действие *многократных* толчков, следующих друг за другом через некоторые промежутки времени. Спрашивается, будет ли колебание в результате нескольких толчков сильнее или слабее, чем колебание, вызванное отдельным толчком? Будет ли происходить *накопление* действия отдельных толчков, т. е. усиление колебания после каждого толчка, или же, наоборот, действие одних толчков будет *компенсировать* действие других?

Пусть толчки *периодичны*, т. е. все одинаковы и следуют друг за другом через равные промежутки времени \*). Этот случай изображен на рис. 73.

\*) Впоследствии (гл. X) нам придется рассмотреть другой случай, тот, когда толчки одинаковы, но происходят в совершенно случайные моменты времени.



Внешняя сила, действующая на осциллятор, отлична от нуля лишь в течение очень коротких промежутков времени, это и означает, что действует последовательность кратковременных толчков. Примем сначала для упрощения задачи, что осциллятор не обладает затуханием.

**2. Раскачивание незатухающего осциллятора периодическими толчками.** Предположим, что в начальный момент времени осциллятор находился в состоянии равновесия, т. е. что  $s = 0, p = 0$ , где  $p$  — сокращенное обозначение величины  $\dot{s}/\omega_0$ .

Будем следить за движением изображающей точки на фазовой плоскости  $s, p$  (рис. 74).

В начальный момент изображающая точка находится в начале координат. Первый толчок мгновенно (мы имеем право так говорить, если продолжительность толчков  $\tau$  очень мала по сравнению с периодом собственных колебаний осциллятора) переводит изображающую точку из начала координат  $O$  в положение  $A_1$ , причем  $OA_1 = P$ , где

$$P = \frac{\int_{t_1}^{t_1+\tau} f(t) dt}{m\omega_0}$$

пропорционально импульсу, сообщенному отдельным толчком (см § 2, п. 5, для определенности мы здесь имеем в виду осциллятор в виде пружины и груза). После этого и вплоть до момента, когда подействует следующий толчок, будет происходить гармоническое колебание с частотой  $\omega_0$ . Изображающая точка будет двигаться по окружности с центром  $O$  и радиусом  $OA_1$ . Пусть для определенности период толчков  $T$  немного больше собственного периода  $T_0$ . Тогда следующий толчок застигнет осциллятор *после* того, как он успеет проделать одно полное колебание, скажем, в состоянии  $B_1$ . Ордината  $p$  снова возрастет скачком на величину  $P$ , после чего изображающая точка опять пойдет по окружности с центром  $O$  — на этот раз уже радиуса  $OA_2$ . Снова происходит гармоническое колебание. Его амплитуда  $OA_2$  не равна удвоенной амплитуде  $OA_1$  колебания, происшедшего после первого толчка. Геометрически очевидно, что она *меньше* чем  $2OA_1$ . Так как толчки следуют друг за другом периодически и так как угловая скорость движения изображающей точки, равная  $\omega_0$ , не зависит от амплитуды колебания, третий толчок застигнет изображающую точку в таком положении  $B_2$ , при котором угол  $A_2OB_2$  равен углу  $A_1OB_1$ . Амплитуда в результате третьего толчка снова возрастет, но еще меньше, чем после второго.

Продолжив такое рассмотрение дальше, мы увидим, что наступит момент, когда толчки начнут *уменьшать* амплитуду колебаний. Это произойдет тогда, когда накопится достаточное запоздание момента прихода толчка по отношению к моменту, когда изображающая точка проходит через свое крайнее верхнее положение; толчки будут заставлять ее позже, чем четверть периода спустя после этого момента (точки  $B_n, A_{n+1}$

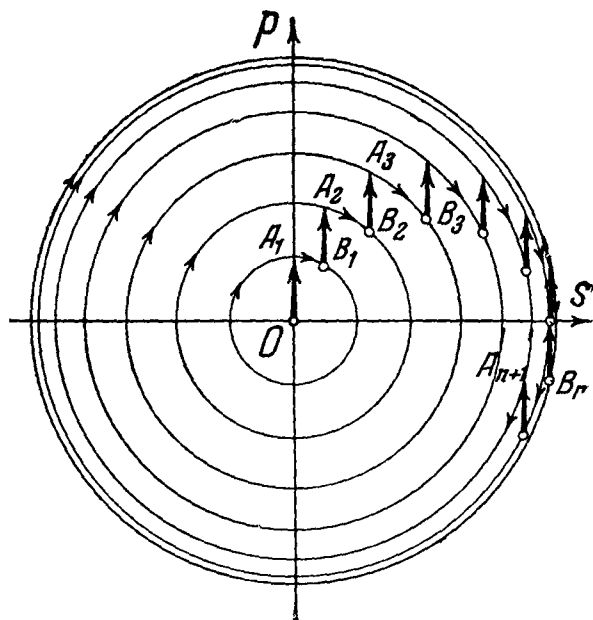


Рис 74. Гармонический осциллятор под действием периодических толчков. Период воздействия больше собственного периода. Фазовая плоскость

на рис. 74). После того как амплитуда уменьшится почти до нуля, наступит момент, когда толчки снова начнут ее увеличивать, и т. д.\*).

Будет происходить процесс, осциллограмма которого представлена на рис. 75. Она состоит из кусков синусоид одинакового периода, но различной амплитуды. На ней видны изломы, соответствующие скачкообразным увеличениям скорости. Этот процесс имеет характер *биений* (ср. гл. II, § 5).

Ясно, что биения будут тем более редкими и амплитуда будет нарастать до тем большей величины, чем меньше отличается  $T$  от  $T_0$ .

К аналогичным заключениям мы придем, рассмотрев случай, когда  $T$  немного меньше  $T_0$  (рис. 76). Здесь второй толчок придет *раньше*, чем

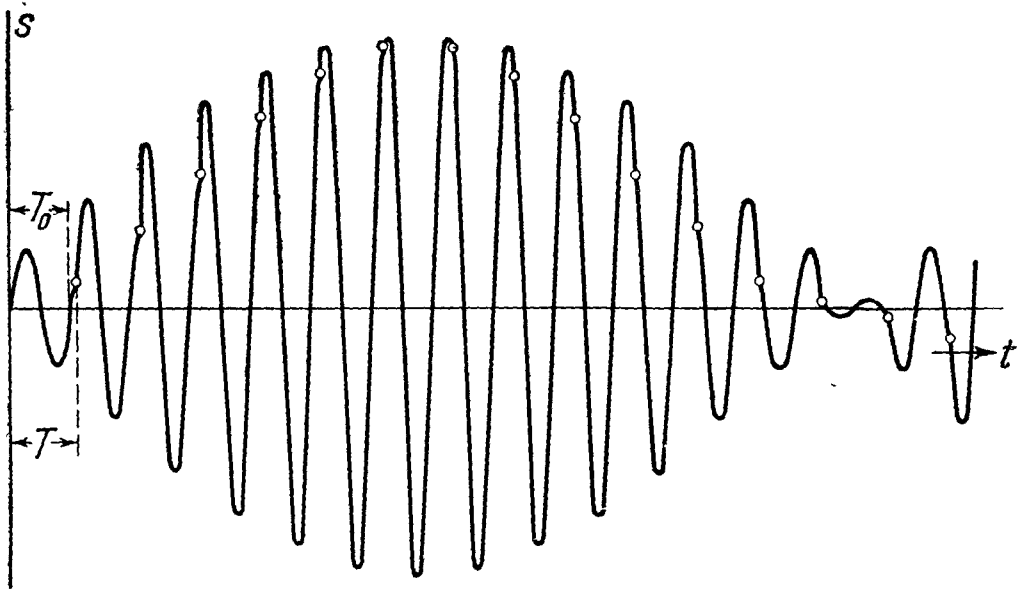


Рис. 75. Осциллограмма к рис. 74. Кружочками отмечены моменты толчков.

изображающая точка успеет вернуться в  $A_1$ , и поэтому также увеличит амплитуду меньше, чем на  $P$ . Третий толчок увеличит амплитуду еще слабее и т. д., и, начиная с некоторого момента, толчки, заставляя изображающую точку в третьем квадранте, будут уменьшать амплитуду.

Рассмотрим теперь случай  $T = T_0$  (период воздействия совпадает с собственным периодом осциллятора). Второй толчок произойдет теперь как раз в тот момент, когда изображающая точка проходит через ось ординат, и в результате толчка она перейдет в точку  $A_2$  такую, что  $OA_2 = 2OA_1$  (рис. 77). Третий толчок застанет изображающую точку в положении  $A_2$  и переведет ее в положение  $A_3$ , причем  $OA_3 = 3OA_1$ , и т. д. Изображающая точка под влиянием толчков будет переходить на окружности, радиусы которых растут в арифметической прогрессии с каждым новым толчком. При сделанной нами идеализации мы приходим к такому результату: как бы ни были малы толчки, мы получим, выждав достаточно долгое время, колебания *сколь угодно большой амплитуды*. Такое нарастание колебаний под действием повторяющегося воздействия — одна из черт явления, играющего центральную роль в учении о колебаниях и называемого *резонансом*.

\*) В случаях, рассмотренных в §§ 1—3, положение изображающей точки на фазовой плоскости однозначно определяет ее дальнейшее движение. В случае, рассматриваемом здесь, положение изображающей точки на фазовой плоскости *не* определяет однозначно ее дальнейшее движение: оно зависит от того, происходит ли в рассматриваемый момент толчок или не происходит. Так, из  $B_1$  изображающая точка один раз уходит по окружности с центром  $O$ , а второй раз — по отрезку  $B_1A_2$ .

Мы здесь наталкиваемся на характерное свойство колебательных систем, о котором уже было сказано в гл. I, § 2: «отклик» гармонического осциллятора на внешнее воздействие определяется главным образом не интенсивностью, а ритмом воздействия.

Легко убедиться, что резонанс наступит не только при  $T = T_0$ , но также и тогда, когда  $T = 2T_0, 3T_0$  и вообще  $T = mT_0$ , где  $m$  — целое число. Действительно, при этом за время между первым и вторым толчками изображающая точка успеет  $m$  раз оббежать окружность, и второй толчок переведет ее из точки  $A_1$  в точку  $A_2$  (рис. 77), затем изображающая точка  $m$  раз оббежит окружность радиуса  $OA_2$ , после чего третий толчок переведет ее из  $A_2$  в  $A_3$ , и т. д. Таким образом, и здесь под действием толчков

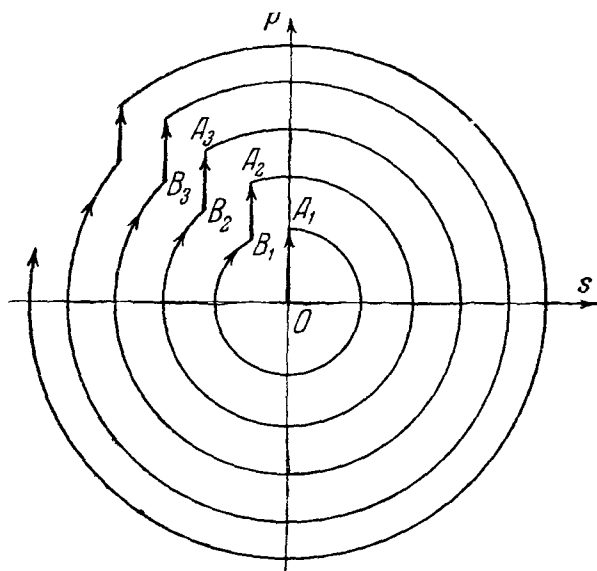


Рис 76. То же, что рис. 74, но период воздействия меньше собственного периода.

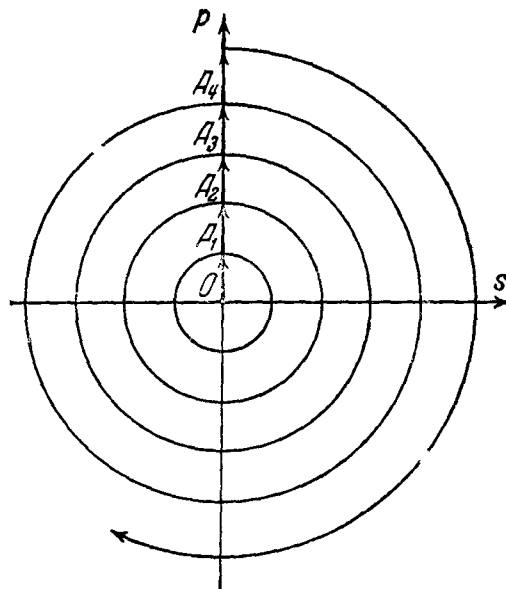


Рис. 77. Монотонное нарастание амплитуды при  $T = T_0$ .

будет происходить неограниченное раскачивание колебаний, хотя и в  $m$  раз более медленное, чем при  $T = T_0$ . Заметим, что если  $T$  немного больше или немного меньше чем  $mT_0$ , будут происходить биения того же типа, как рассмотренные вначале.

Сильные колебания, возникающие в результате резонанса, могут быть весьма опасными. Известны, например, случаи разрушения мостов (мост можно уподобить до некоторой степени системе, изображенной на рис. 66) под действием ритмических толчков от проходящего отряда войск. Такого рода катастрофа произошла в прошлом столетии с Египетским мостом в Петербурге; при этом погибло 40 кавалеристов. С другой стороны, резонанс широко используется в радиотехнике и в технике физического эксперимента, о чем будет подробно идти речь в дальнейшем.

**3. Другой подход к задаче. Суммирование действия толчков.** Докажем теорему, являющуюся частным случаем принципа суперпозиции, к которому мы еще не раз будем возвращаться: *колебание, вызванное в гармоническом осцилляторе последовательными толчками, равно сумме тех колебаний, которые вызвал бы каждый толчок в отдельности.* Принцип суперпозиции является важнейшим свойством физических систем, описываемых линейными дифференциальными уравнениями.

Мы проведем доказательство для двух толчков произвольной величины  $P_1, P_2$ , действующих в моменты  $t=0, t=t_1$  (читатель легко обобщит доказательство на случай любого числа толчков, наступающих в произвольные моменты времени).

В момент  $t=0$  изображающая точка попадает под действием толчка в положение  $L$  (рис. 78). Пусть в момент  $t=t_1$  она находится в положении  $M$ , причем  $\alpha = \angle LOM = \omega_0 t_1$ . В этот момент толчок переводит ее в положение  $N$ , после чего происходит колебание

$$s = A \cos(\omega_0 t - \varphi), \quad (3.38)$$

где  $A = ON$ . Как видно из чертежа,

$$A^2 = P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2 \cos \alpha. \quad (3.39)$$

При  $t = t_1$  имеем:

$$s = A \sin \beta = A \cos\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right),$$

где  $\beta = \angle MNO$ , откуда, сравнивая с (3.38),

$$\omega_0 t_1 - \varphi = \beta - \frac{\pi}{2}$$

и, следовательно,

$$\varphi = \alpha - \beta + \frac{\pi}{2}.$$

Из треугольника  $OMN$  имеем:

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{P_1 + P_2 \cos \alpha}{P_2 \sin \alpha} \quad (3.40)$$

Формулы (3.38), (3.39), (3.40) определяют колебание, получившееся в результате *обоих* толчков.

Заметим теперь, что *первый* толчок в отдельности вызвал бы колебание

$$s_1 = P_1 \sin \omega_0 t = P_1 \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right),$$

*второй* толчок в отдельности — колебание

$$s_2 = P_2 \sin \omega_0(t - t_1) = P_2 \cos\left(\omega_0 t - \omega_0 t_1 - \frac{\pi}{2}\right).$$

Рассмотрим сумму

$$s_1 + s_2 = P_1 \sin \omega_0 t + P_2 \sin \omega_0(t - t_1).$$

Преобразуя ее по формулам гл. II, § 2, получаем гармоническое колебание частоты  $\omega_0$ , амплитуда и фаза которого определяются формулами (3.39), (3.40). Следовательно,

$$s = s_1 + s_2,$$

что и требовалось доказать.

Вернемся теперь к задаче о периодических толчках. Пусть первый толчок, приходящий в момент  $t=0$ , застает систему в состоянии равновесия. Он вызывает колебание

$$s_1 = P \sin \omega_0 t.$$

Второй толчок, если бы не было остальных, вызвал бы колебание

$$s_2 = P \sin \omega_0(t - T) = P \sin(\omega_0 t - \varepsilon),$$

где  $\varepsilon = \omega_0 T$ ; третий толчок, если бы не было остальных, — колебание

$$s_3 = P \sin \omega_0(t - 2T) = P \sin(\omega_0 t - 2\varepsilon),$$

и т. д.

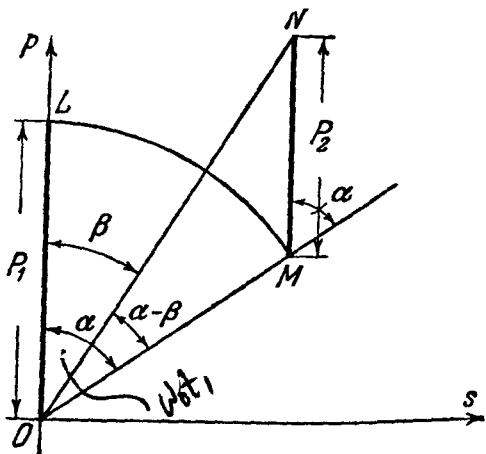


Рис. 78. К выводу теоремы о суперпозиции действия толчков.

После  $N$ -го толчка колебание осциллятора будет изображаться согласно принципу суперпозиции формулой

$$s = s_1 + s_2 + \dots + s_N.$$

Мы пришли к задаче о сложении  $N$  колебаний одинаковой частоты и амплитуды, фазы которых образуют арифметическую прогрессию. Эта

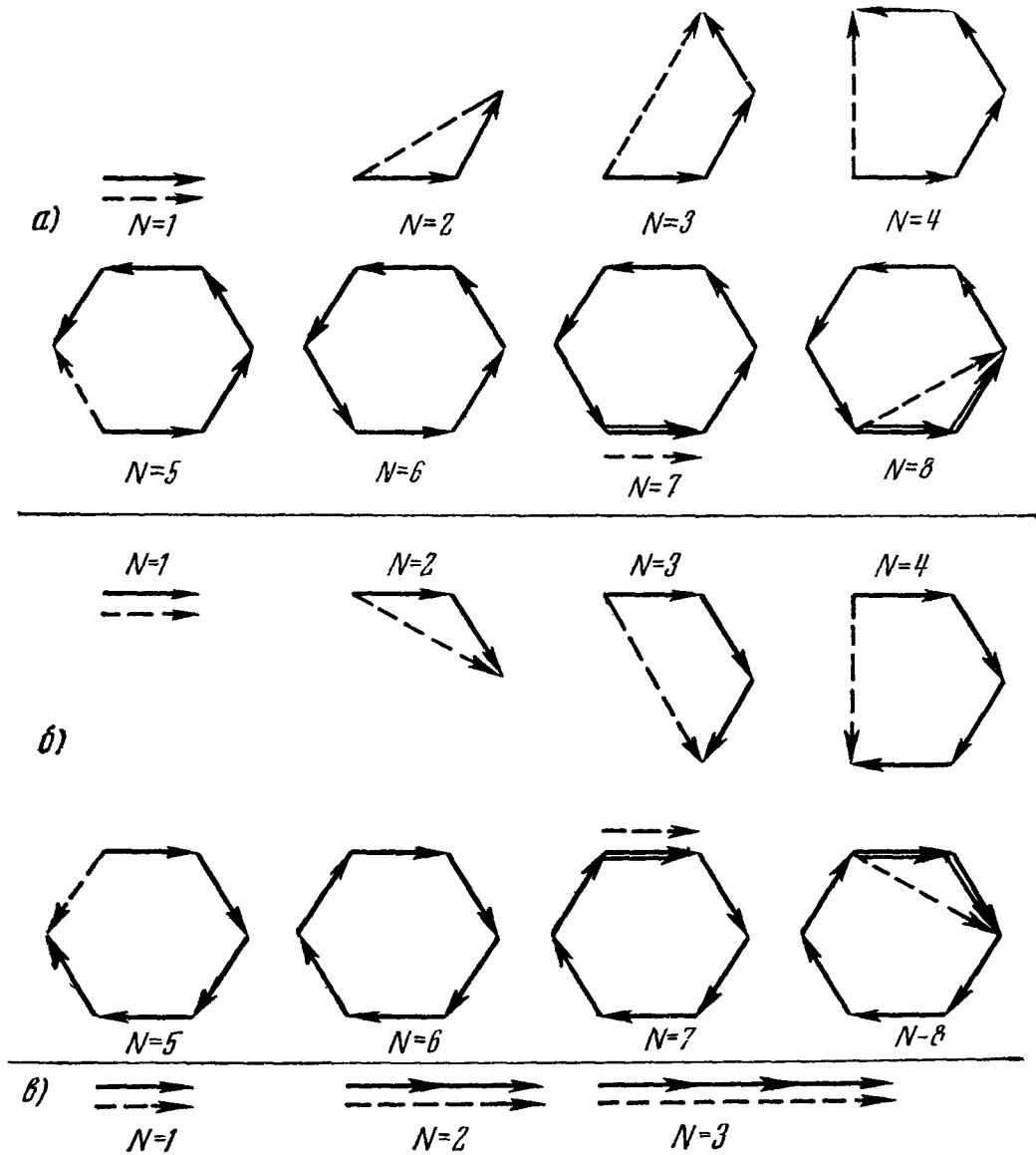


Рис. 79. Изменение векторной диаграммы с ростом  $N$ . Результирующее колебание изображается замыкающей (показанной пунктиром) цепочки векторов одинаковой длины, образующих с горизонтальной осью углы, растущие в арифметической прогрессии. Показаны следующие частные случаи: а) период толчков  $T = (m+1/6)T_0$ , где  $m=1, 2, 3$ , т. е.  $\varepsilon = m \cdot 2\pi + 3\pi/6$ ; б) период толчков  $T = (m-1/6)T_0$ , т. е.  $\varepsilon = m \cdot 2\pi - 2\pi/6$ ; в) период толчков  $T = mT_0$ , т. е.  $\varepsilon = m \cdot 2\pi$ .

задача была рассмотрена в гл. II, § 3, и мы знаем, что суммарное колебание  $s$  имеет амплитуду

$$A_N = P \left| \frac{\sin \frac{N\varepsilon}{2}}{\sin \frac{\varepsilon}{2}} \right|. \quad (3.41)$$

С ростом  $N$ , т. е. по мере того, как приходят все новые толчки, амплитуда колебания меняется так, как показывает серия векторных диаграмм рис. 79. Пусть  $T$  не равно  $mT_0$  ( $m=1, 2, 3$ ), т. е.  $\varepsilon$  не равно  $m \cdot 2\pi$ .

Сначала амплитуда растет, затем уменьшается, снова начинает расти после некоторого  $N = N_1$ , и т. д. Это и есть то явление биений, о котором уже говорилось в п. 2. Рассмотрим для простоты случай, когда

$$\varepsilon = 2\pi \pm \frac{2\pi}{n} \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

или

$$\varepsilon' = |\varepsilon - 2\pi| = \omega_0 |T - T_0| = \frac{2\pi}{n}.$$

Здесь

$$N_1 = \frac{2\pi}{\varepsilon'}.$$

Период биений равен  $N_1 T$ , откуда частота биений

$$\Omega = \frac{2\pi}{N_1 T} = \frac{\varepsilon'}{T} = \omega_0 \frac{|T - T_0|}{T} = |\omega_0 - \omega|,$$

где

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Она равна абсолютной величине разности собственной частоты и частоты внешней силы (повторяющихся толчков).

Максимальная амплитуда, характеризующая размах биений,

$$A_m = \frac{P}{\left| \sin \frac{\varepsilon}{2} \right|}.$$

Она тем больше, чем ближе мы находимся к резонансу.

Если  $\varepsilon = 2\pi, 4\pi$ , т. е. период толчков  $T = T_0, 2T_0, \dots$ , формула (3.41) обращается в

$$A = PN.$$

Амплитуда колебаний пропорциональна числу уже происшедших толчков. Действие отдельных толчков накапливается, и амплитуда монотонно и неограниченно растет с ростом  $N$ . Это уже рассмотренный нами другим способом случай *резонанса*.

**4. Периодическое вынужденное колебание.** Рассмотрим теперь другую задачу. Можно ли при наличии периодических толчков так «запустить» гармонический осциллятор, т. е. подобрать такие начальные условия, чтобы он совершал *периодическое* движение с периодом толчков? Иначе говоря, могут ли при подходящих условиях периодические толчки *навязать осциллятору свой период*, поддерживая в нем периодические колебания с периодом, отличным от собственного периода осциллятора? Будем опять вести исследование на плоскости  $s, p$ .

В каком бы состоянии толчок ни застал наш осциллятор, изображающая точка в момент толчка мгновенно подскакивает вверх; ее перемещение при этом равно  $P$ . В промежутке  $T$  между толчками изображающая точка движется по окружности с центром в начале координат с угловой скоростью  $\omega_0$ . Вопрос, таким образом, сводится к построению на плоскости  $s, p$  замкнутой траектории, состоящей из дуги окружности, соответствующей центральному углу  $\omega_0 T$ , проходимой по часовой стрелке, и вертикального отрезка длины  $P$ , проходимого снизу вверх.

Предположим сначала, что собственный период  $T_0$  немного больше, чем период толчков  $T$ . В этом случае поставленным условиям удовлетворяет траектория, показанная на рис. 80. Здесь угол

$$\omega_0 T < \omega_0 T_0 = 2\pi.$$

Таким образом, мы получим периодическое колебание периода  $T$ , если пустим осциллятор так, чтобы в момент, когда начинается первый толчок, изображающая точка оказалась в положении  $M$ . Здесь период обращения

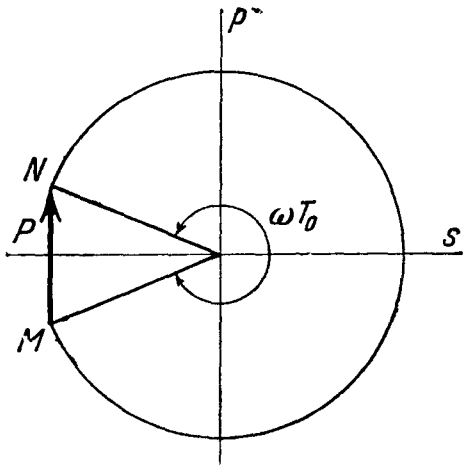


Рис. 80. Периодическое движение при  $T < T_0$ .

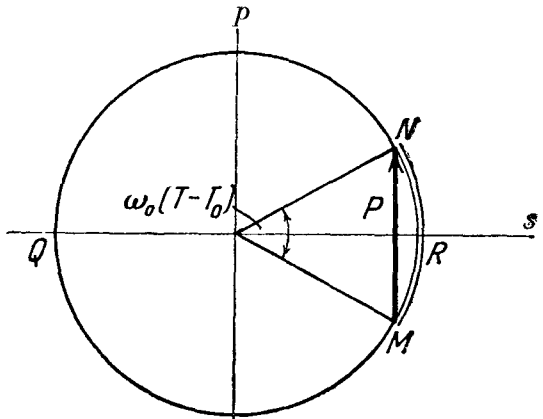


Рис. 81. Периодическое движение при  $T > T_0$ .

изображающей точки по ее траектории короче  $T_0$  и равен  $T$ , потому что часть окружности, если можно так выразиться, «съедается» толчками. Это — такая часть, на прохождение которой требовалось бы время  $T_0 - T$ .

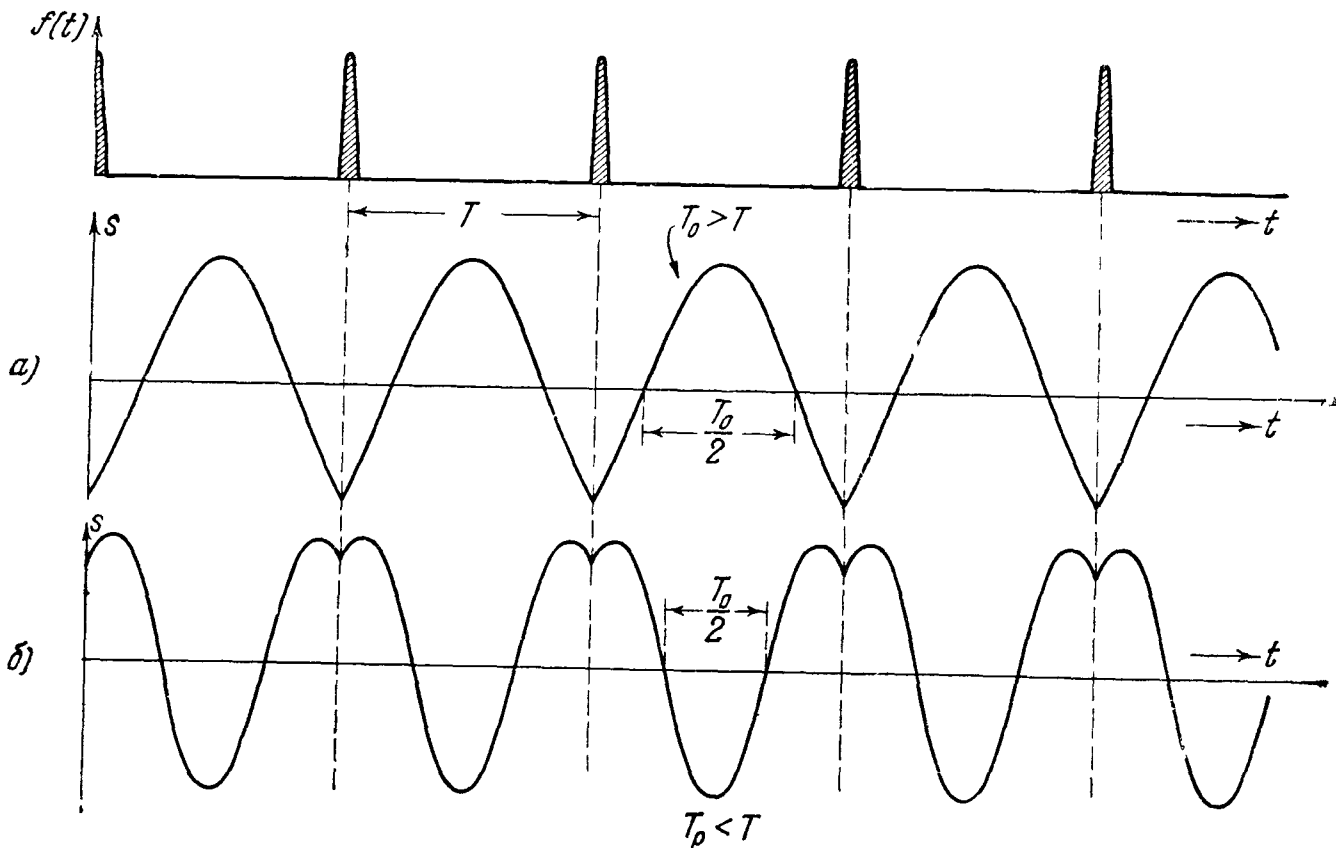


Рис. 82. Осциллограмма периодических движений: а—при  $T < T_0$ ; б—при  $T > T_0$ .

Предположим теперь, что  $T$  немного больше  $T_0$ . В этом случае поставленным условиям удовлетворяет траектория рис. 81. Здесь угол  $\omega_0 T > \omega_c T_0 = 2\pi$ . За время между двумя толчками изображающая точка проходит дугу  $NRMQNRM$ , т. е. дважды проходит показанную двойной линией дугу  $NRM$ , соответствующую углу  $\omega_0(T - T_0)$ , на прохождение которой она тратит время  $T - T_0$ .

Периодическое движение с периодом внешней силы называется *периодическим вынужденным колебанием*. На рис. 82 показаны осциллограммы

периодических вынужденных колебаний при  $T < T_0$  и  $T > T_0$ . В случае  $T < T_0$  между толчками укладывается кусок синусоиды меньший, чем одно полное колебание, в случае  $T > T_0$  — кусок синусоиды больший, чем одно полное колебание. Обратим внимание на то, что в случае  $T > T_0$  в момент толчка отклонение  $s$  положительно, а при  $T < T_0$  — отрицательно

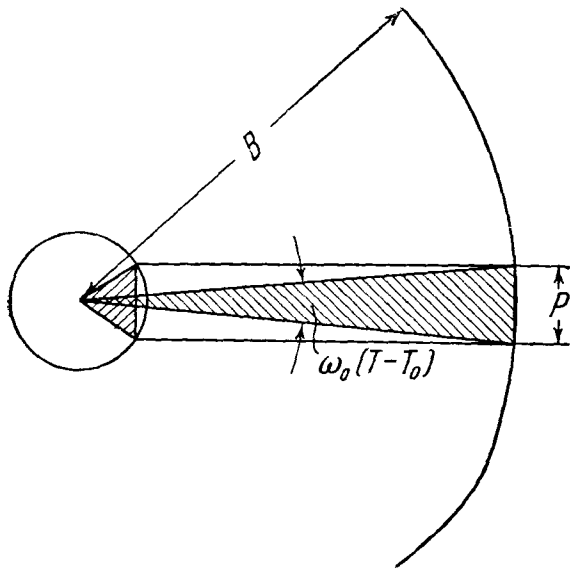


Рис. 83. Увеличение амплитуды периодического движения при уменьшении угла  $\omega_0(T - T_0)$ .

хорда  $MN$ , длина которой дана, тем больше должен быть радиус окружности  $B$  (рис. 83). Он стремится к бесконечности, когда  $T - T_0 \rightarrow 0$ . Найдем количественную зависимость между «амплитудой» вынужденного колебания и расстройкой. Из рис. 83 видно, что

$$P = 2B \sin \frac{\omega_0(T - T_0)}{2},$$

откуда

$$B = \frac{P}{2 \sin \frac{\omega_0(T - T_0)}{2}}$$

или

$$B = \frac{P}{2 \sin \pi \left( \frac{\omega_0}{\omega} - 1 \right)}, \quad \text{где } \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Пусть теперь  $T$  немного меньше  $T_0$  (рис. 80). Имеем аналогичным образом

$$P = 2B \sin \frac{\omega_0 T}{2} = 2B \left| \sin \frac{\omega_0(T - T_0)}{2} \right|,$$

откуда видно, что для обоих случаев, показанных на рис. 80, 81, справедлива формула

$$B = \frac{P}{2 \left| \sin \pi \left( \frac{\omega_0}{\omega} - 1 \right) \right|}$$

Нетрудно показать, что эта формула справедлива при любом  $T$ . Полученный результат показывает, что при приближении периода толчков к целому, кратному от периода собственных колебаний, амплитуда периодического вынужденного колебания неограниченно растет. Когда период

и имеет минимум. Это показывает, что существуют, в зависимости от соотношения периодов  $T$  и  $T_0$ , совершенно разные «фазовые соотношения» между толчками и колебаниями. При  $T_0 < T$  толчки направлены в ту же сторону, что отклонение, при  $T_0 > T$  — в противоположную.

Нетрудно вычислить «амплитуду» вынужденных колебаний. Мы называем так амплитуду  $B$  той синусоиды, из кусков которой складывается все колебание. Она равна радиусу окружности, по которой движется изображающая точка на рис. 80 между толчками.

Пусть (для определенности)  $T$  немного больше  $T_0$  (рис. 81). Ясно, что амплитуда будет расти с уменьшением расстройки  $T - T_0$ : чем меньше угол  $\omega_0(T - T_0)$ , который должна стягивать



толчков  $T$  равен или кратен собственному периоду  $T_0$ , величина  $B$  обращается в бесконечность, т. е. не существует периодического вынужденного колебания.

Здесь мы столкнулись с новым аспектом резонанса в незатухающем осцилляторе: неограниченным увеличением амплитуды вынужденного периодического колебания при приближении  $T$  к  $T_0$  или целому кратному  $T_0$ .

Вблизи резонанса, соответствующего  $T = T_0$ , имеем приближенно

$$\sin \pi \left( \frac{\omega_0}{\omega} - 1 \right) = \pi \left( \frac{\omega_0}{\omega} - 1 \right),$$

откуда

$$B = \frac{\omega P}{2\pi |\omega_0 - \omega|}.$$

На рис. 84 показана зависимость «амплитуды»  $B$  от отношения  $\omega_0/\omega$ .

Из рис. 82, а, б ясно видно, что среднее значение  $s$  за период вынужденного колебания положительно. Это связано с тем, что все толчки положительны (действуют в одну сторону).

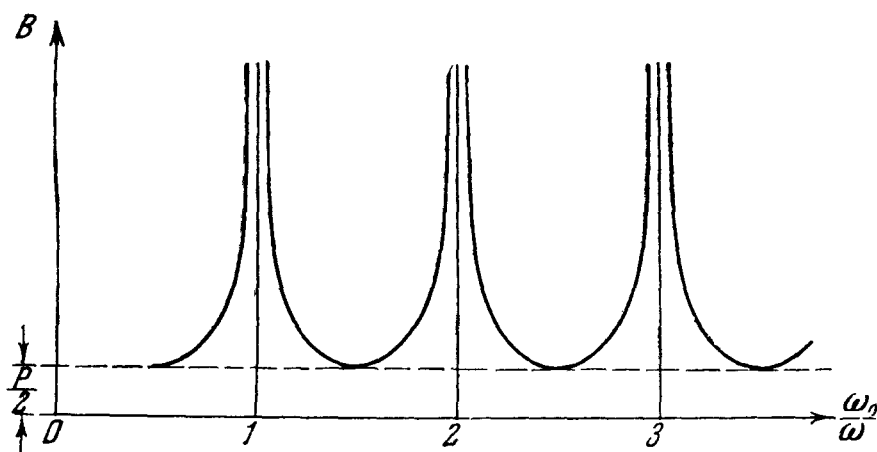


Рис. 84. Зависимость амплитуды периодического движения от отношения собственной частоты осциллятора к частоте чередования толчков.

Когда  $T$  значительно меньше  $T_0$ , величина  $B$  перестает характеризовать размахи колебаний величины  $s$  около ее среднего значения и ее уже нет смысла называть амплитудой вынужденного колебания. Поэтому график рис. 84 оборван на  $\omega_0/\omega = 1/2$ .

Предоставляем читателю исследовать, как изменяется характер периодического вынужденного колебания при  $T \rightarrow 0$ , и показать, что по мере уменьшения  $T$  (учащения толчков) растет среднее значение отклонения  $s$  и уменьшается размах колебаний около него.

## § 5. Действие периодических толчков на затухающий осциллятор

1. Трение ограничивает резонансное нарастание колебаний. Не следует заключать из результата, к которому мы пришли в § 4, пп. 2, 3, что реальную колебательную систему можно раскачать сколь угодно сильно сколь угодно малыми толчками (что можно, например, сломать стальной мост, если достаточно долго в подходящем темпе стрелять в него из рогатки). Это не верно, потому что, как мы сейчас увидим, сколь угодно малое затухание, — а затуханием обладает всякий реальный осциллятор, — при достаточно большой амплитуде начинает играть существенную роль и совершенно изменяет результат, полученный без его учета.

Принимая во внимание трение (сопротивление), мы должны заменить дуги окружности на рис. 77 дугами скручивающихся спиралей (ср. § 3), так как в промежутках между толчками происходит затухающее колебание. За один период амплитуда колебания убывает на *определенную долю* своей начальной величины, а именно в отношении  $1 : e^{-d}$ . Трение, если бы не было толчков, вызывало бы убывание амплитуды от «периода» к «периоду» по закону геометрической убывающей прогрессии со знаменателем  $e^{-d}$ . Если бы не было трения, толчки вызвали бы, как мы знаем (§ 4), рост амплитуды по закону, выражаемому арифметической прогрессией с разностью  $P$ . Нам предстоит решить, что будет, если есть и толчки, и затухание, к чему приведет «борьба» между возрастающей арифметической и убывающей геометрической прогрессиями.

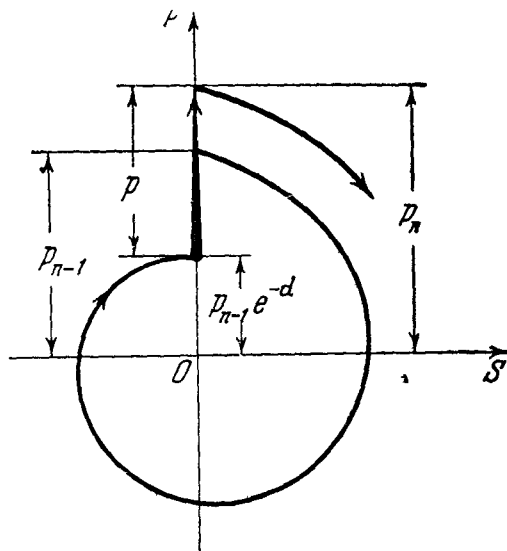


Рис. 85. «Борьба» между толчками и затуханием.

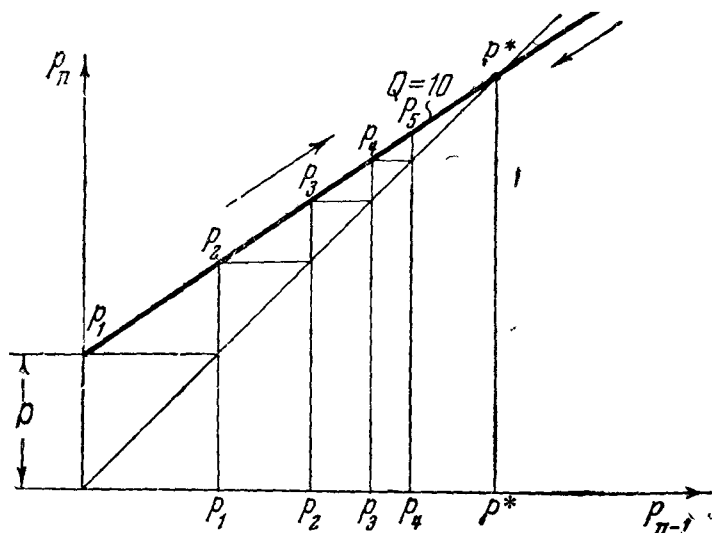


Рис. 86. Графическое исследование процесса установления.

Пока амплитуда  $A$  мала, ее убыль за период  $A(1 - e^{-d})$  мала по сравнению с  $P$ . Но по мере роста амплитуды эта убыль будет становиться все больше и в конце концов скомпенсирует приращение  $P$ . Наступит «равновесие» между обоими процессами, рост амплитуды прекратится, установится некоторая стационарная амплитуда.

Если начальные условия таковы, что амплитуда до толчков очень велика, величина  $A(1 - e^{-d})$  сначала *больше*, чем  $P$ , и колебания убывают, несмотря на толчки, до тех пор, пока влияния толчков и затухания здесь также взаимно не уравновесятся.

Выразим все это более точно (рис. 85).

Пусть  $r_{n-1}$  — ордината изображающей точки непосредственно после  $(n-1)$ -го толчка. Тогда ордината *перед* следующим  $n$ -м толчком будет

$$r'_n = r_{n-1} e^{-d},$$

а ордината непосредственно *после* этого  $n$ -го толчка

$$r_n = r'_n + P,$$

или

$$r_n = r_{n-1} e^{-d} + P. \quad (3.42)$$

Эта формула выражает каждое  $r_n$  через предыдущее и позволяет полностью описать процесс изменения амплитуды от толчка к толчку. Ее можно интерпретировать с помощью геометрического построения, показанного на рис. 86. Жирная прямая есть график уравнения (3.42); ее на-

чальная ордината равна  $P$ , угловой коэффициент равен  $e^{-d}$ . Тонкая прямая — биссектриса координатного угла.

После первого толчка амплитуда  $p_1 = P$ . Чтобы найти  $p_2$ , мы должны отложить на оси абсцисс  $p_1$  и найти соответствующую ординату, затем, зная  $p_2$ , мы найдем таким же образом  $p_3$ , и т. д.

Амплитуда  $B$  стационарных колебаний получается из условия

$$p_n = p_{n-1}. \quad (3.43)$$

Она изображается абсциссой (или ординатой, что в данном случае безразлично)  $p^*$  точки пересечения прямой (3.42) с биссектрисой координатного угла. Решая совместно (3.42), (3.43), получаем для нее

$$p^* = B = \frac{P}{1 - e^{-d}}.$$

Эта формула показывает, что амплитуда стационарных вынужденных колебаний при резонансе тем больше, чем сильнее толчки (чем больше  $P$ ) и чем меньше декремент  $d$ . Наибольший интерес представляет случай очень малого декремента,  $d \ll 1$ . Здесь можно считать приближенно

$$1 - e^{-d} = d,$$

откуда

$$B = \frac{P}{d},$$

или, введя добротность осциллятора  $Q$ ,

$$B = \frac{Q}{\pi} P.$$

Мы видим теперь, что логарифмический декремент или добротность имеют и такой физический смысл: они характеризуют, насколько сильно осциллятор раскачивается при резонансе.

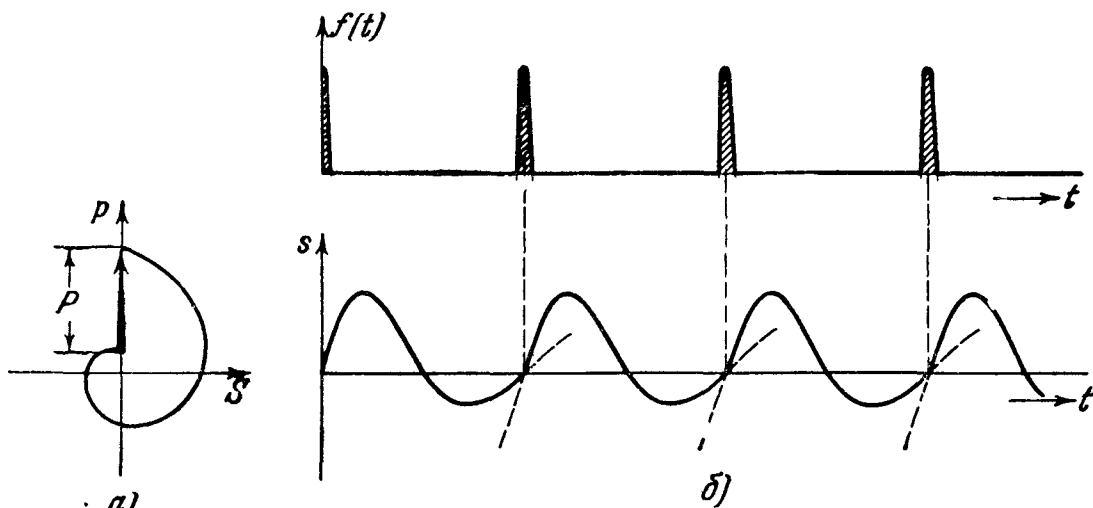


Рис. 87. Установившееся колебание при резонансе: а—картина на фазовой плоскости; б—осциллограмма.

Рассмотрим подробнее форму установившихся колебаний при резонансе.

Если затухание велико, стационарное колебание имеет вид, показанный на рис. 87; оно сильно отличается от синусоидального. Если же затухание мало, скачок той же абсолютной величины происходит между витками спирали очень большого радиуса. Дуга спирали, замыкаемая скачком, относительно очень мало отличается от окружности, и колебание очень мало отличается от синусоидального (рис. 88): изломы на осциллограмме, хотя имеют такую же абсолютную величину, как в случае

рис. 87, но почти незаметны. Обратим внимание (рис. 87, 88) на фазовое соотношение между толчками и вынужденным колебанием: в отличие от рис. 82 здесь в момент толчков осциллятор проходит через положение равновесия.

Пусть теперь толчки действуют с периодом не равным, а *кратным* собственному периоду осциллятора:

$$T = mT_0 \quad (m = 2, 3, 4, \dots).$$

Можно повторить все сказанное о случае  $m = 1$  с той разницей, что за время между двумя толчками изображающая точка обойдет  $m$  витков

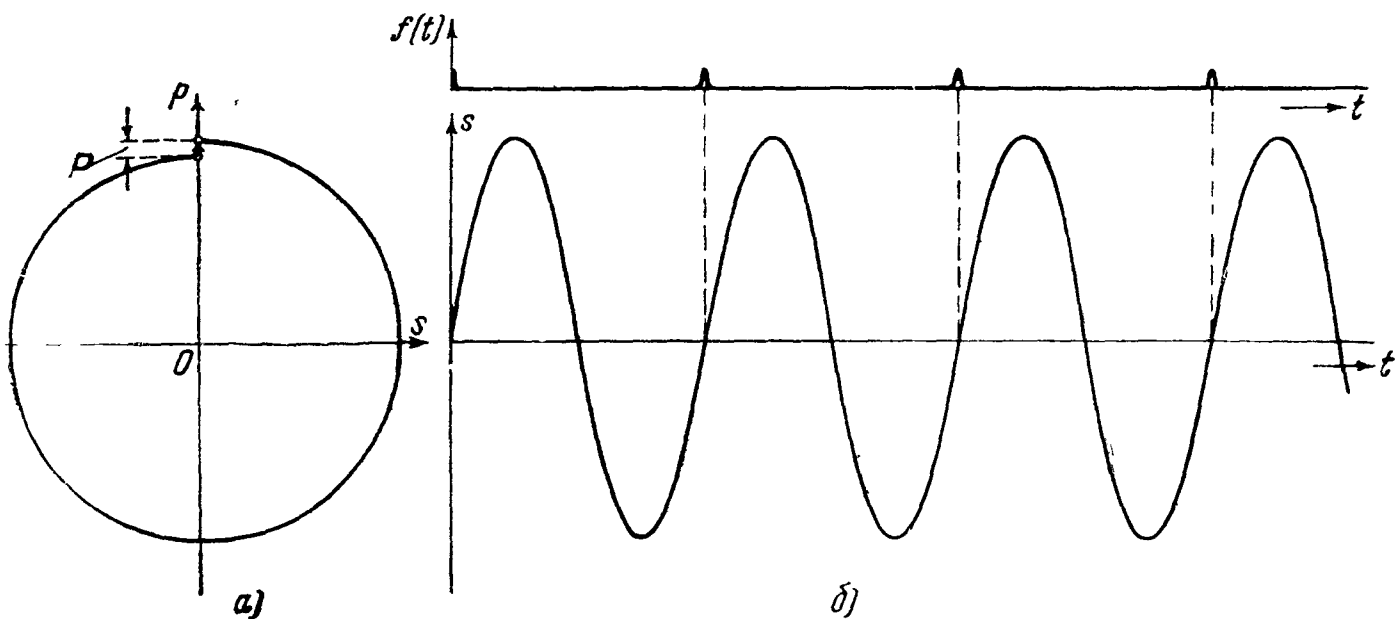


Рис. 88. То же при меньшем затухании; масштаб для  $f$ ,  $s$ ,  $p$  уменьшен по сравнению с рис. 87: а—фазовая плоскость, б—осциллограмма

спирали и ее амплитуда уменьшится до  $pe^{-md}$  вместо  $pe^{-d}$ , где  $p$ — амплитуда после первого из этих толчков. Стационарная амплитуда будет равна

$$p^* = \frac{P}{1 - e^{-md}}$$

или приближенно, если  $md \ll 1$  (более жесткое требование, чем было при  $m = 1$ ),

$$p^* = \frac{P}{md}.$$

Форма колебаний для  $m = 3$ ,  $d = 0,2$  и  $d = 0,02$  показана на рис. 89. Во втором случае отличие от синусоиды невелико. При еще меньшем  $d$  оно станет незаметным.

Мы приходим к важному выводу: если толчки действуют на систему с большой добротностью в резонанс, т. е. с периодом, кратным собственному, они поддерживают в ней при стационарном режиме колебание, практически не отличающееся от синусоидального колебания с частотой  $\omega_0$ . Можно это выразить и так: в случае резонанса при определенной амплитуде колебаний осциллятора толчки компенсируют затухание.

**2. Резонансная кривая.** Вернемся к периодическим вынужденным колебаниям, которые мы получили в § 4, п. 4 для случая, когда  $T \neq mT_0$ . Что здесь изменит учет затухания?

Обратимся к рис. 80. Если затухание очень мало, мы получим вместо дуги окружности дугу слабо скручивающейся спирали и рис. 80 придется заменить рис. 90, где пунктиром показана дуга окружности, проходящая

через точку  $N$ . В отличие от случая резонанса малое затухание не изменяет здесь существенно характера колебания. При этом ясно, что одно и то

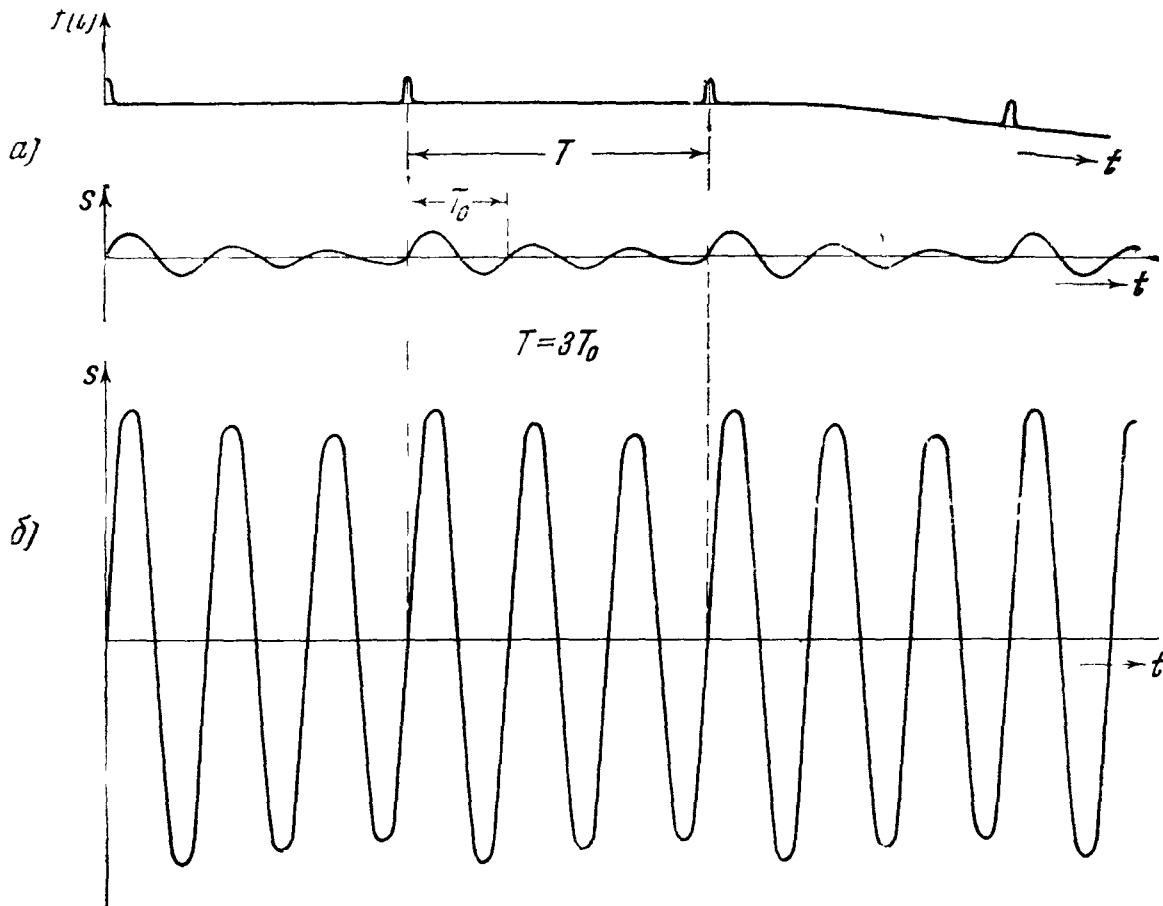


Рис. 89. Установившееся колебание при  $T=3T_0$ ; а—затухание велико; б—затухание мало.

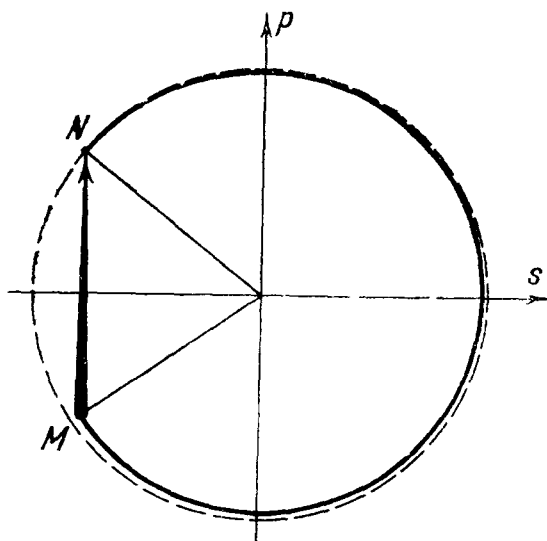


Рис. 90. Влияние затухания на установившееся колебание вдали от резонанса.

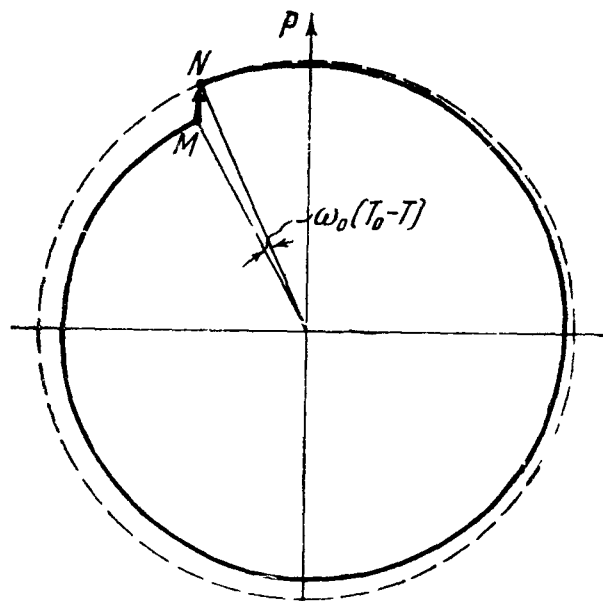


Рис. 91. Влияние затухания на установившееся колебание вблизи резонанса.

же затухание будет тем сильнее влиять на вид картин на плоскости  $s, p$ , чем больше размер дуги, т. е. чем ближе к резонансу. Наоборот, при любой заданной расстройке затухание может быть настолько слабым, что практически не будет сказываться. Аналогично обстоит дело для  $T > T_0$ .

На рис. 91 мы видим, что чем меньше расстройка, т. е. чем меньше угол, который должен стягиваться вертикальной хордой длины  $P$ , тем сильнее картина отличается от показанной на рис. 80. С уменьшением

расстройки не только постепенно растет амплитуда, но момент толчка постепенно продвигается вверх, изменяя и фазовое соотношение между толчками и вынужденным колебанием.

Если затухание мало, зависимость амплитуды  $R$  от  $\omega/\omega_0$  будет заметно отличаться от показанной на рис. 81 только в области, весьма близкой к резонансу. Мы можем отметить против абсцисс  $\omega_0/\omega = 1, 2, 3, \dots$  ординату, равную  $1/md$ , и закруглить кривую так, чтобы она проходила через

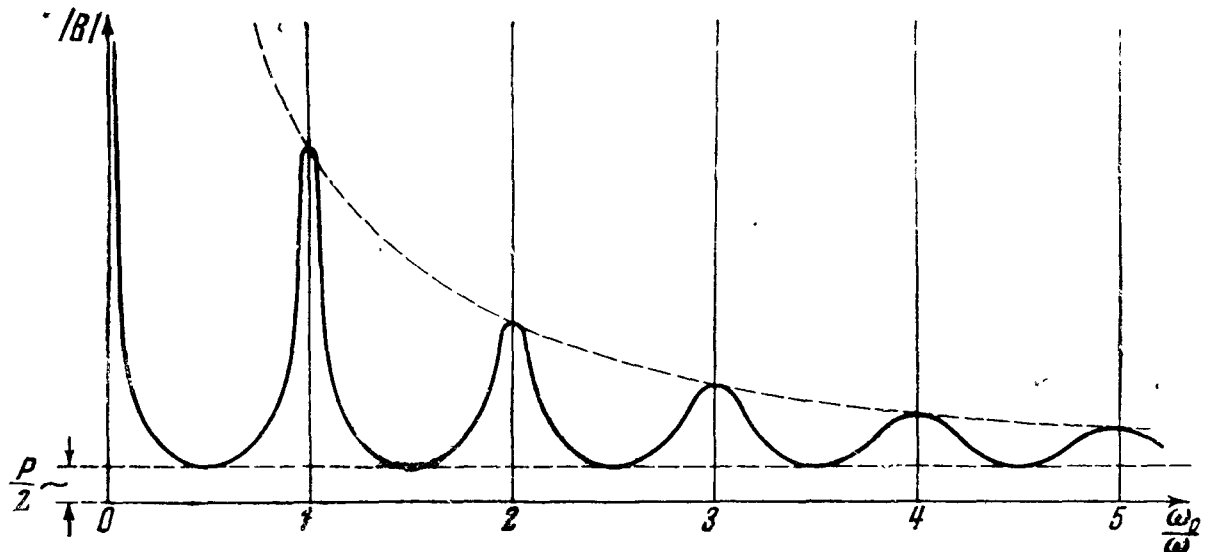


Рис. 92. Резонансная кривая затухающего осциллятора, находящегося под воздействием периодически следующих друг за другом толчков.

намеченные таким образом точки вместо того, чтобы уходить в бесконечность. Мы получим кривую, показанную на рис. 92. Она называется *резонансной кривой*.

При увеличении добротности осциллятора  $Q$  будут расти максимумы, но вдали от них резонансная кривая практически не будет меняться. Пики будут становиться все выше и острее (рис. 93).

**3. Острота резонанса и время установления.** При достаточно малом  $d$  мы можем получить сколь угодно большое вынужденное колебание и сколь угодно резкую резонансную кривую. Но не нужно забывать, что резонансная кривая относится только к установившемуся (стационарному) колебанию. Оно устанавливается не сразу, а постепенно. Более того, и это надо подчеркнуть с особой силой: *чем острее резонансная кривая, тем дольше нужно ждать установления стационарной амплитуды*.

Это ясно из п. 1. При малом  $Q$  уже после небольшого числа ступеней лестница рис. 86 приводит нас к амплитуде, которую практически можно считать установившейся. При большом  $Q$  лестница будет намного круче и намного *длиннее*, число ступеней, имеющих заметную величину, сильно возрастет (рис. 94). Так как переход со ступени на ступень длится одинаковое время  $T$ , это значит, что установление стационарного состояния длится гораздо дольше. Осциллограмма процесса нарастания показана на рис. 95 для двух значений  $Q$ .

## § 6. Действие синусоидальной силы на незатухающий гармонический осциллятор

**1. Постановка задачи.** Предположим теперь, что внешняя сила, действующая на гармонический осциллятор, по-прежнему периодична, но состоит не из отдельных кратковременных толчков, а имеет синусоидальную форму.

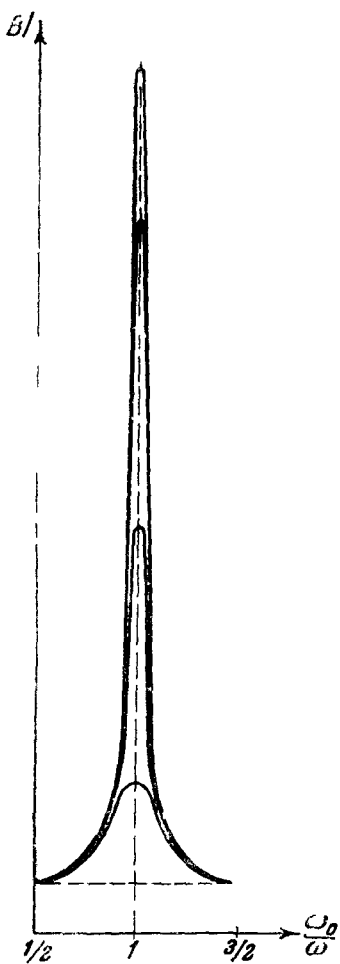


Рис 93 Изменение резонансной кривой при уменьшении затухания

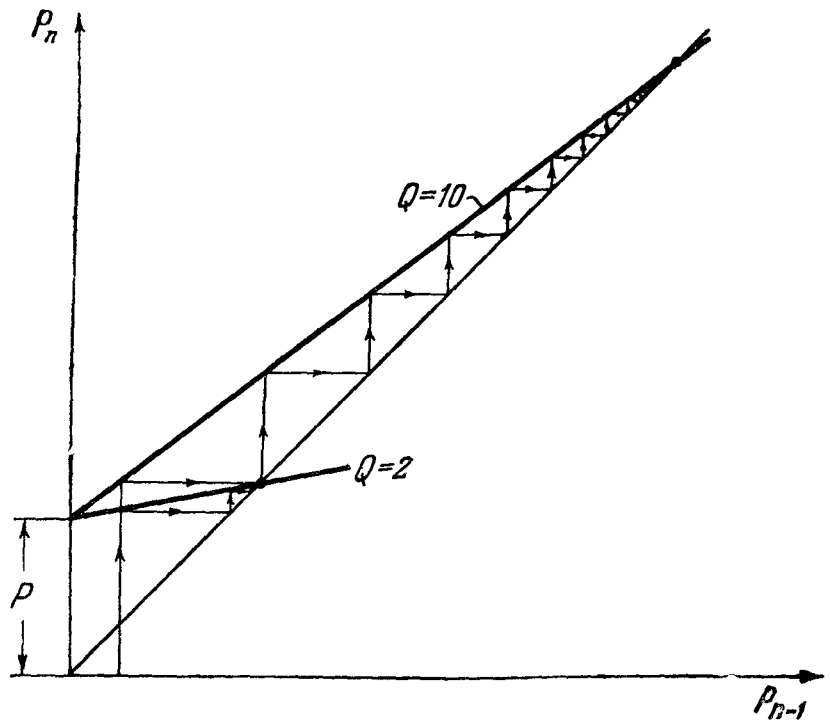


Рис 94 Зависимость процесса установления от добротности осциллятора

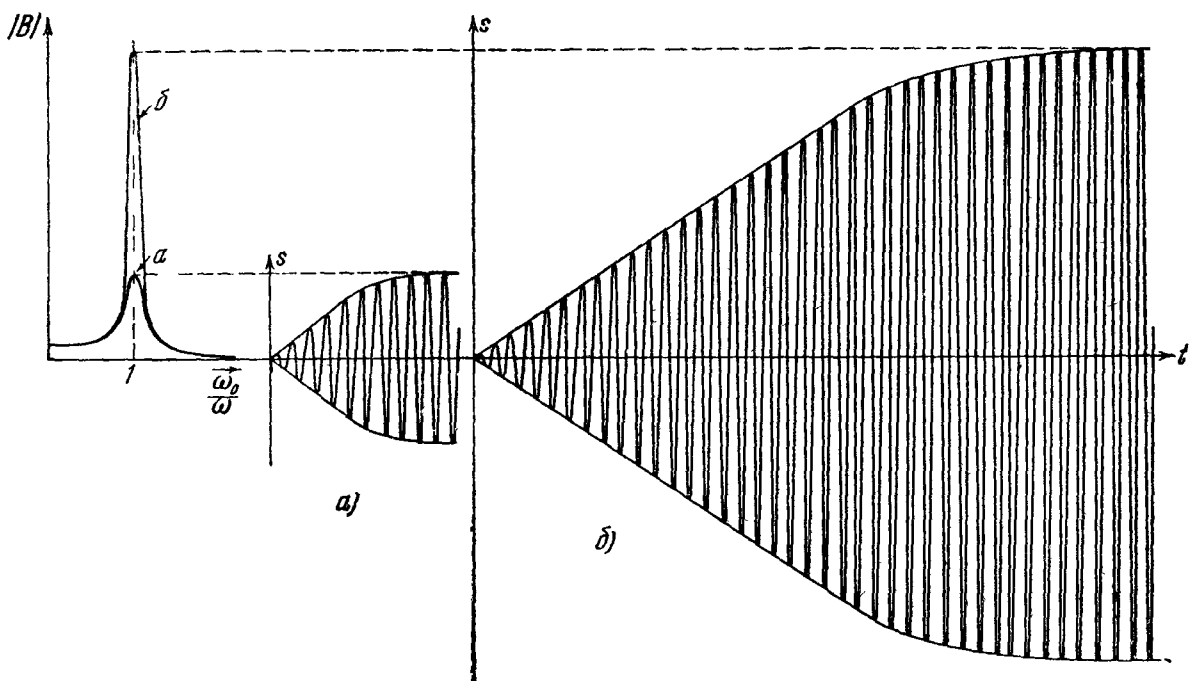


Рис 95 С увеличением остроты резонансной кривой растет время установления а—соответствует меньшему  $Q$ , б—соответствует большему  $Q$

Ее зависимость от времени выражается формулой

$$f(t) = F \cos \omega t, \quad (3.44)$$

где  $\omega$  — круговая частота изменения внешней силы, вообще говоря, отличная от частоты  $\omega_0$  собственных колебаний осциллятора. Дифференциальное уравнение движений, совершаемых им, когда на него действует сила (3.44), таково:

$$\ddot{s} + 2\delta\dot{s} + \omega_0^2 s = F_0 \cos \omega t. \quad (3.45)$$

где

$$F_0 = \frac{F}{m},$$

$m$  — масса осциллятора. В электрическом случае под  $f(t)$  надо понимать внешнюю э. д. с.,  $m$  надо заменить через  $L$ .

Мы будем считать  $F_0 > 0$ . В этом нет ограничения общности, так как  $F_0 < 0$  можно заменить на  $F_0 > 0$ , сдвинув на  $\pi/\omega$  начало счета времени.

Мы впоследствии увидим (гл. XI), что случай синусоидальной силы имеет особенно важное значение в связи со спектральными свойствами гармонического осциллятора.

Задача, выраженная уравнением (3.45), возникает, например, в случае рис. 68, если  $i_0 = I \sin \omega t$ . При этом в контуре  $LC$  возникает э. д. с.

$$-M \frac{di_0}{dt} = -M\omega I \cos \omega t,$$

и уравнение колебаний в нем имеет вид

$$\frac{q}{C} + R\dot{q} = -L \frac{di}{dt} - M \frac{di_0}{dt}$$

или

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = \mathcal{E} \cos \omega t,$$

где

$$\mathcal{E} = -M\omega I.$$

Разделив на  $L$  и введя обозначения  $F_0 = \frac{\mathcal{E}}{L}$ ,  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ ,  $2\delta = \frac{R}{L}$ , мы приведем уравнение к виду (3.45).

Как и для кратковременных периодических толчков, мы рассмотрим сначала идеализированный случай, когда  $\delta = 0$ . Мы решим для него сначала задачу о периодических движениях с периодом внешней силы, а уже затем задачу о том, как происходит раскачивание колебаний в системе, если в начальный момент она находится в покое.

**2. Периодические движения.** Мы получаем, полагая в (3.45)  $\delta = 0$ , уравнение

$$\ddot{s} + \omega_0^2 s = F_0 \cos \omega t. \quad (3.46)$$

Здесь, как и в случае толчков, возможно вынужденное колебание с частотой внешней силы, причем это колебание синусоидально. Оно выражается формулой

$$s = \frac{F_0 \cos \omega t}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (3.47)$$



Действительно, функция (3.47), как легко видеть, является одним из решений уравнения (3.46): дифференцируя (3.47), получаем:

$$\dot{s} = -\frac{\omega F_0 \sin \omega t}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (3.48)$$

Дифференцируя вторично, получаем:

$$\ddot{s} = -\frac{\omega^2 F_0 \cos \omega t}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (3.49)$$

Образуя, пользуясь (3.47), (3.49), выражение  $\ddot{s} + \omega_0^2 s$ , мы убеждаемся в том, что оно тождественно равно  $F_0 \cos \omega t$ .

Введем обозначение

$$B = \frac{F_0}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Тогда

$$s = B \cos \omega t. \quad (3.50)$$

$B$  есть амплитуда вынужденных колебаний. Зависимость  $B$  от частоты внешней силы при фиксированном  $\omega_0$  изображена на рис. 96. При  $\omega = 0$  имеем:

$$B = \frac{F_0}{\omega_0^2}.$$

Это — статическое отклонение  $F/k$  под действием постоянной силы  $F$ , или его аналог — постоянный заряд на конденсаторе, равный  $C\mathcal{E}$ . С ростом  $\omega$  амплитуда вынужденного колебания растет и обращается в бесконечность при  $\omega = \omega_0$ . Это — случай резонанса. При дальнейшем росте  $\omega$  амплитуда изменится от  $-\infty$  до нуля.

При отрицательном  $B$  формулу (3.50) можно переписать так:

$$s = |B| \cos(\omega t - \pi).$$

Отрицательную амплитуду можно истолковать, таким образом, как наличие сдвига фаз  $\pi$  между силой и смещением. При положительном  $B$  сила и смещение колеблются в одинаковой фазе. На рис. 96, б дан график зависимости абсолютной величины амплитуды от  $\omega$ .

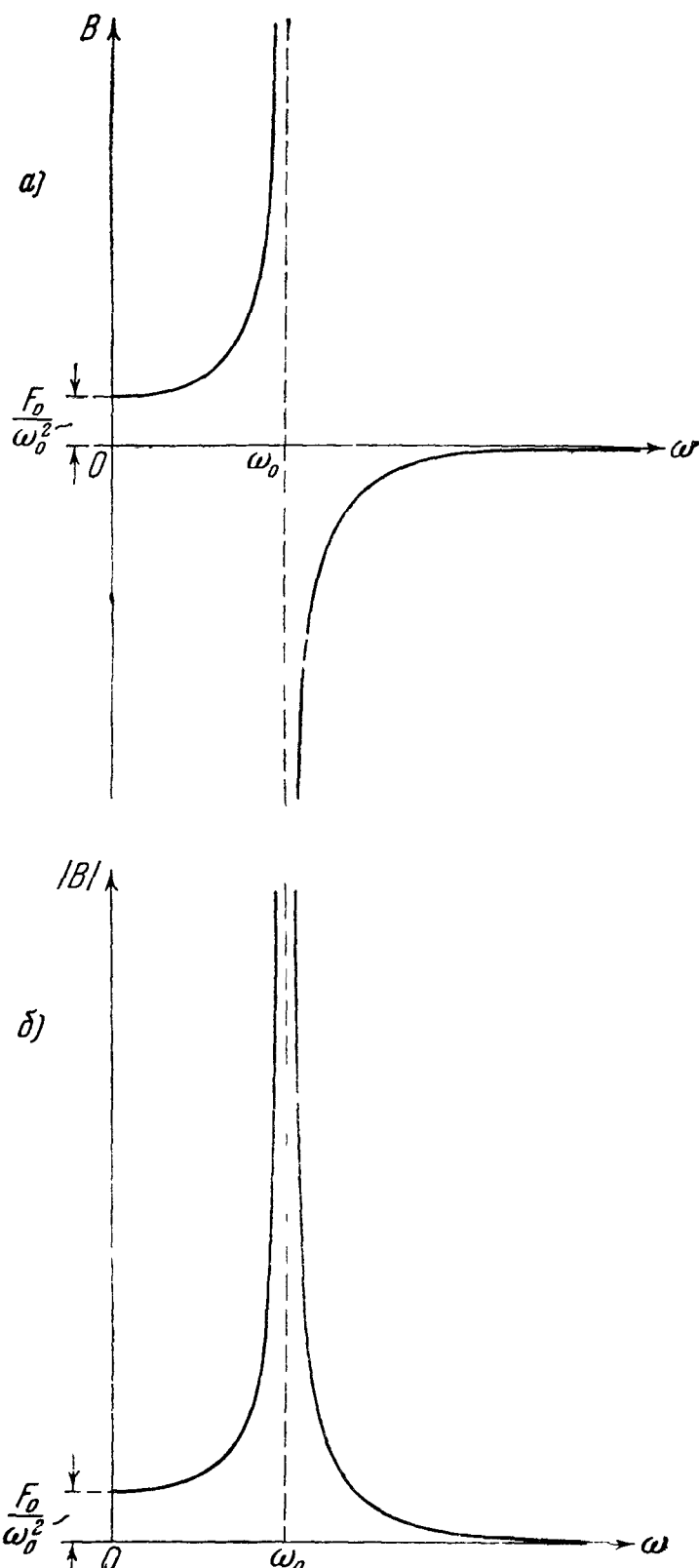


Рис. 96. Зависимость а—амплитуды и б—ее абсолютной величины от частоты синусоидальной внешней силы.

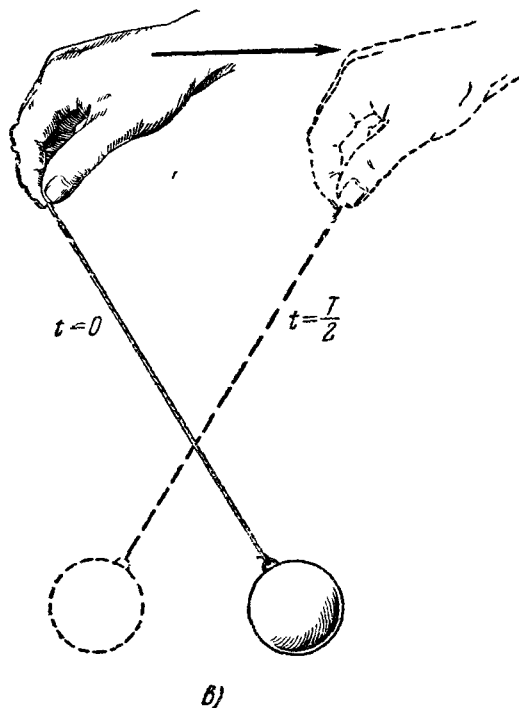
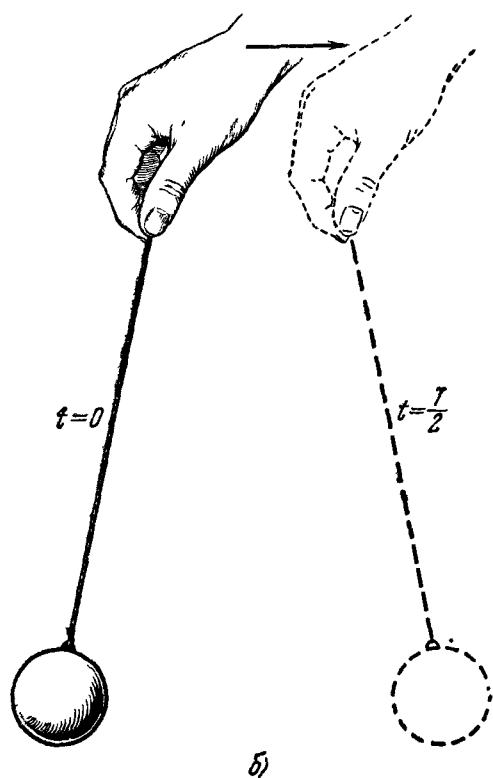
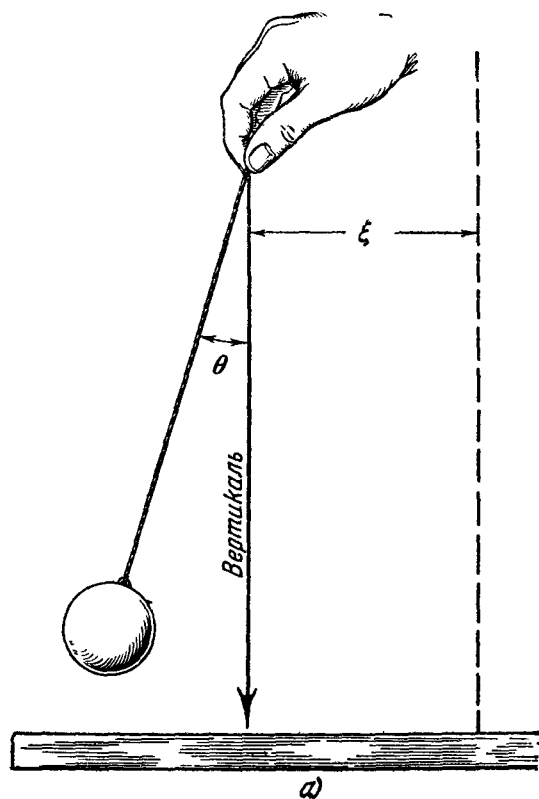


Рис. 97. а) К выводу уравнения движения маятника в «ускоренной» (гармонически колеблющейся) системе отсчета; б)  $T > T_0$ , смещения руки и маятника в фазе; в)  $T < T_0$  смещения руки и маятника в противофазе.

3. Иллюстрация фазовых соотношений. Изменение фазы на  $\pi$  при переходе через резонанс легко проиллюстрировать, раскачивая маятник рукой (рис. 97, а). Будем рассуждать в ускоренной системе координат, связанной с рукой. Относительно этой системы координат точка подвеса

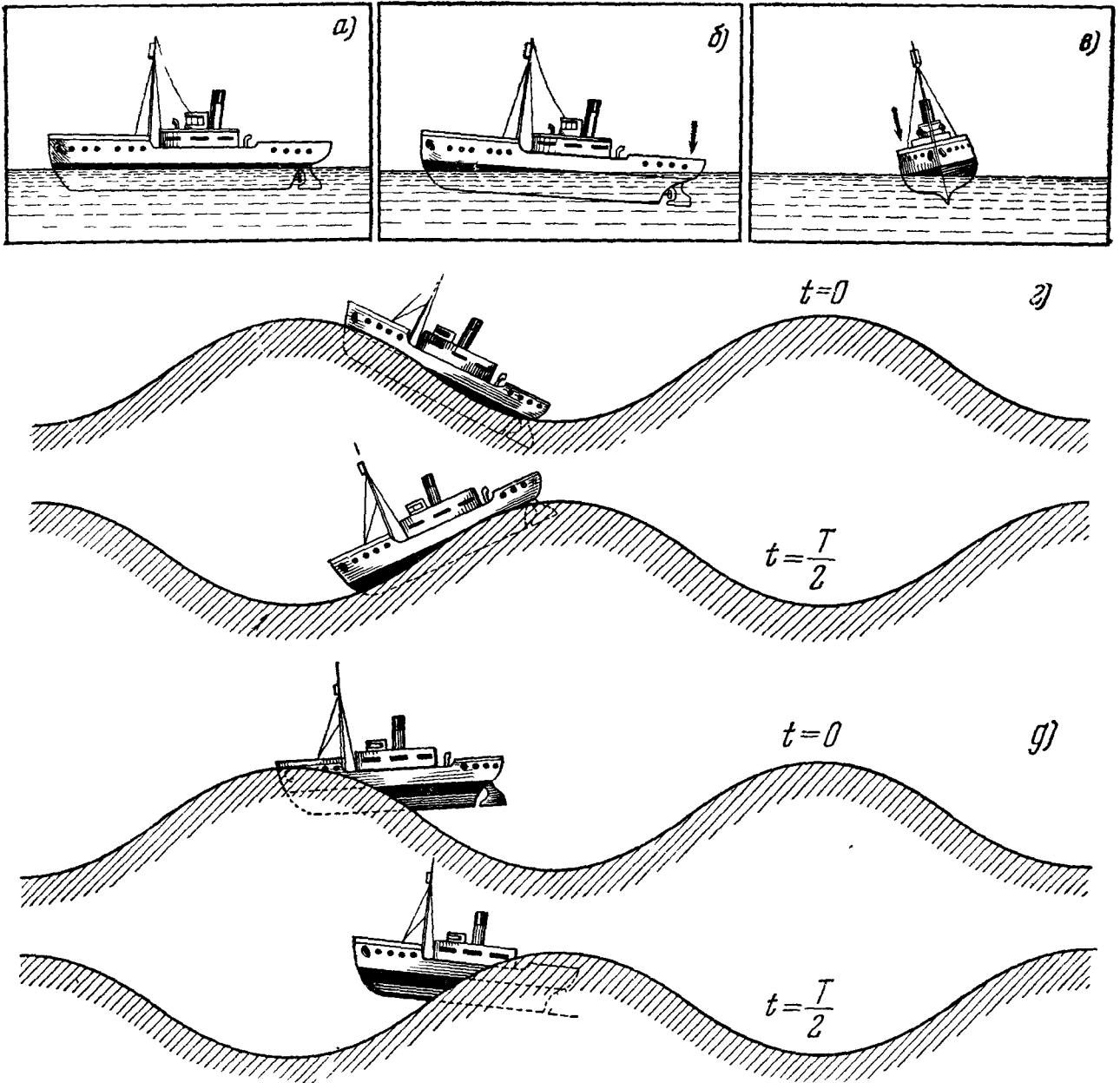


Рис. 98. а—положение равновесия корабля; б, в—два типа *собственных* колебаний; г, д—вынужденные колебания корабля (килевая качка). Период качки (г)—больше, (д)—меньше периода собственных продольных колебаний, показанных на рис. 98, б.

неподвижна. Тогда на маятник действует сила инерции (маятник рассматриваем как математическую точку массы  $m$ )

$$-m\ddot{\xi},$$

где  $\xi$  — смещение точки подвеса по отношению к «неподвижной» системе координат (связанной с аудиторией). Ее момент равен  $-lm\ddot{\xi}$ , и следовательно, уравнение колебаний маятника в нашей ускоренной системе координат таково:

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\theta = -m\ddot{\xi}. \quad (3.51)$$

Если рука смещается синусоидально, т. е.

$$\xi = A \cos \omega t, \quad (3.52)$$

имеем, подставив (3.52) в (3.51),

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = F_0 \cos \omega t,$$

где

$$F_0 = \frac{\omega^2 A}{l}, \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l}.$$

При  $\omega < \omega_0$  угол  $\theta$  и смещение  $\xi$  должны быть в фазе, при  $\omega > \omega_0$  — в противофазе. Это легко проверить, двигая один раз руку с частотой, немного меньшей, чем собственная частота маятника, другой раз — с частотой, немного большей. Получается то, что показано на рис. 97, б, в.

Другой замечательный пример дает теория качки корабля, разработанная знаменитым русским математиком и инженером А. Н. Крыловым (1863—1945). Если корабль, плавающий на спокойной воде, вывести из положения равновесия (ватерлиния горизонтальна, рис. 98, а), дав ему продольный наклон (рис. 98, б) или крен (рис. 98, в), корабль будет совершать *собственные* колебания с периодом (соответственно  $T_0$  и  $T'_0$ ), определяемым конструкцией корабля. Пусть теперь корабль плывет наперерез волнам. Волны создают периодически меняющийся с некоторым периодом  $T$  момент сил, стремящийся повернуть корабль в вертикальной плоскости. Под действием этого момента происходит периодическая килевая качка (*вынужденные* колебания). Если  $T > T_0$ , она имеет вид, показанный на рис. 98, г: наклон корабля  $\theta$  — в фазе с моментом сил. Если  $T < T_0$ , наклон корабля и момент сил изменяются в противофазе (рис. 98, д), нос зарывается в волну, винты при этом могут оголиться, что весьма опасно \*).

4. Раскачка из состояния покоя. Предположим, что сила начинает действовать в момент  $t = 0$ , причем до этого осциллятор был в покое. Мы имеем здесь начальные условия

$$t = 0, \quad s = 0, \quad \dot{s} = 0,$$

и нужно найти такое решение уравнения (3.46), которое удовлетворяет этим начальным условиям. Нетрудно видеть, что таким решением является

$$s = \frac{F_0 (\cos \omega t - \cos \omega_0 t)}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (3.53)$$

Действительно, при  $t = 0$  эта функция обращается в нуль, так же как и ее производная

$$\dot{s} = \frac{F_0 (-\omega \sin \omega t + \omega_0 \sin \omega_0 t)}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

В том, что (3.53) есть решение уравнения (3.46), мы убедимся, вычислив:

$$\ddot{s} = \frac{F_0 (-\omega^2 \cos \omega t + \omega_0^2 \cos \omega_0 t)}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

и составив выражение  $\ddot{s} + \omega_0^2 s$ ; оно тождественно равно  $F_0 \cos \omega t$ .

Если  $\omega$  и  $\omega_0$  близки между собой, процесс, изображаемый формулой (3.53), может быть описан как биения с частотой  $|\omega - \omega_0|$ . Это напоминает

\*) Более подробно о работах А. Н. Крылова по теории корабля и их связи с учением о колебаниях и волнах см. доклад Л. И. Мандельштама «О научных работах А. Н. Крылова» (Полное собрание трудов, т. III, стр. 268). «Я не думаю, — говорил в этом докладе Л. И. Мандельштам, — чтобы за все истекшее после Эйлера время можно было назвать ученого, который сделал бы для корабельной науки столько, сколько сделал для нее Алексей Николаевич». Работы Крылова, о которых идет здесь речь, помещены в X томе «Собрания трудов» А. Н. Крылова.

результат, полученный в § 4, пп. 2 и 3. Как будет меняться характер этих биений при приближении к резонансу, т. е. когда  $\omega - \omega_0 \rightarrow 0$ ? Частота биений будет неограниченно уменьшаться, а их амплитуда  $F_0/(\omega_0^2 - \omega^2)$  — неограниченно увеличиваться: будут получаться все более редкие и глубокие биения.

Найдем, что будет в пределе, когда  $\omega = \omega_0$ . Преобразуем для этого формулу (3.53)

$$s = \frac{F_0}{\omega_0 + \omega} \cdot \frac{\cos \omega t - \cos \omega_0 t}{\omega_0 - \omega} = \frac{F_0}{\omega_0 + \omega} \frac{2 \sin \left( \frac{\omega_0 - \omega}{2} t \right)}{\omega_0 - \omega} \sin \left( \frac{\omega_0 + \omega}{2} t \right).$$

При  $\omega \rightarrow \omega_0$  имеем:

$$s = \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \left[ \frac{F_0}{\omega_0 + \omega} \cdot \frac{2 \sin \left( \frac{\omega_0 - \omega}{2} t \right)}{\omega_0 - \omega} \sin \left( \frac{\omega + \omega_0}{2} t \right) \right] = \\ = \frac{F_0}{2\omega_0} \left[ \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \frac{2 \sin \left( \frac{\omega_0 - \omega}{2} t \right)}{\omega_0 - \omega} \right] \sin \omega_0 t.$$

Применяя ко второму множителю известную формулу

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin ax}{x} \right) = a,$$

получаем окончательно:

$$s = \frac{F_0}{2\omega_0} t \sin \omega_0 t. \tag{3.54}$$

Эта формула изображает неограниченно нарастающее колебание. Рис. 99 показывает, как при приближении к резонансу уменьшается частота и увеличивается размах биений, что и приводит в пределе ( $\omega = \omega_0$ ) к неограниченному нарастанию.

Все сказанное в этом параграфе очень напоминает результаты, к которым мы пришли в § 4, рассматривая толчки, за исключением одного обстоятельства: синусоидальная сила вызывает резонанс только в том случае, если ее период равен собственному периоду, в то время как толчки вызывали резонанс и тогда, когда их период кратен периоду собственных колебаний.

## § 7. Действие синусоидальной силы на затухающий осциллятор

**1. Резонанс, стационарный режим.** Как и в случае толчков, учет трения показывает, что в действительности при резонансе ( $\omega = \omega_r$ ) существует периодическое вынужденное колебание, т. е. вынужденное колебание с *постоянной* амплитудой. Каковы бы ни были начальные условия, колебания осциллятора приближаются с течением времени к этому периодическому колебанию. Мы сначала займемся самим периодическим вынужденным колебанием, а затем — процессом его установления.

При  $\omega = \omega_0$  уравнение (3.45) принимает вид

$$\ddot{s} + 2\delta\dot{s} + \omega_0^2 s = F_0 \cos \omega_0 t.$$

Посмотрим, может ли здесь происходить синусоидальное колебание с частотой  $\omega_0$ ? Если происходит такое колебание, выражение  $\ddot{s} + \omega_0^2 s$  равно нулю (в конкретном случае груза и пружины произведение массы

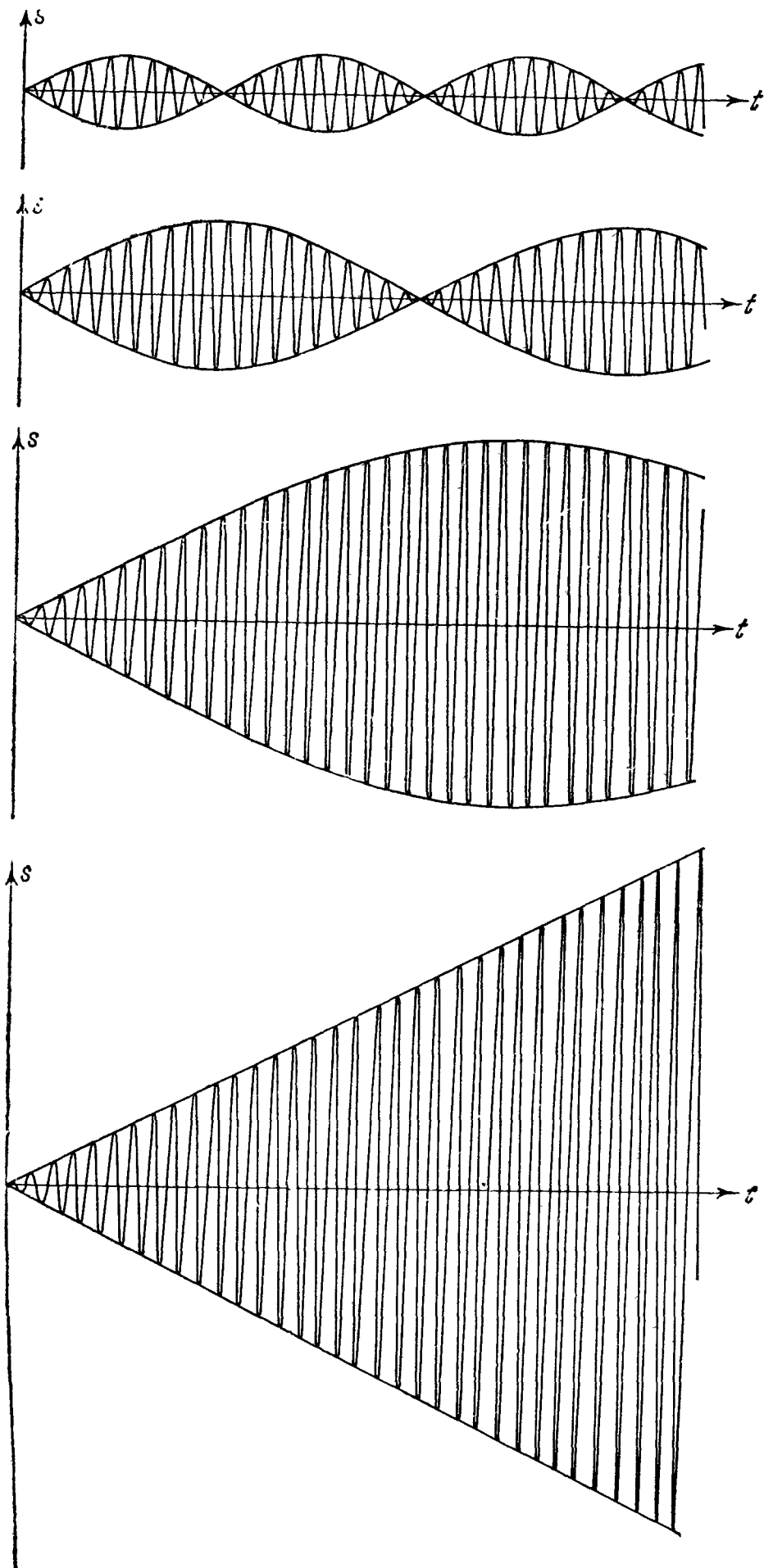


Рис. 99. Постепенный переход от биений к неограниченному нарастанию колебаний при  $\omega \rightarrow \omega_0$ .

на ускорение в точности равняется в каждый момент времени упругой силе) и, следовательно,

$$2\delta\dot{s} = F_0 \cos \omega_0 t;$$

внешняя сила должна в каждый момент в точности компенсироваться силой трения. Это будет при

$$\dot{s} = \frac{F_0}{2\delta} \cos \omega_0 t,$$

т. е. при

$$s = \frac{F_0}{2\delta\omega_0} \sin \omega_0 t. \quad (3.55)$$

Это — синусоидальное колебание частоты  $\omega_0$  \*). Таким образом, мы получили положительный ответ на поставленный вопрос и нашли амплитуду и фазу синусоидального колебания с частотой  $\omega_0$ .

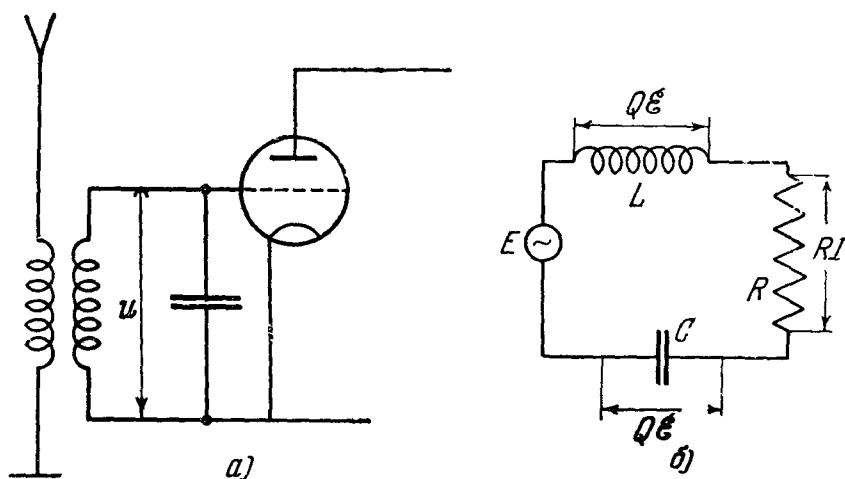


Рис. 100. *a*—входной контур радиоприемника; *b*—при резонансе  $\mathcal{E} = RI$  напряжения на  $L$  и  $C$  имеют противоположные фазы и амплитуды, равные  $Q\mathcal{E}$ .

При периодическом вынужденном колебании сила трения колеблется в противофазе, а скорость — в фазе с внешней силой, вследствие чего смещение отстает от внешней силы по фазе на  $\pi/2$ . Амплитуда обратно пропорциональна затуханию  $\delta$  и в согласии с § 6 обращается в бесконечность при  $\delta = 0$ .

Обсудим подробнее полученный результат в применении к электромагнитным вынужденным колебаниям. На рис. 100, *a* изображен колебательный контур, входящий в состав радиоприемника. Ток, возбуждаемый в антенне приходящими сигналами, наводит в контуре э. д. с. вида  $\mathcal{E} \cos \omega_0 t$  (контур настроен в резонанс с ней). Напряжение  $u$ , возникающее на конденсаторе, подается на вход усилителя (гл. IV, § 3, п. 2). Это напряжение представляет здесь наибольший интерес. Оно равно

$$u = \frac{q}{C}$$

или, воспользовавшись формулой (3.55), заменив  $F_0$  на  $\frac{\mathcal{E}}{L}$ ,

$$q = \frac{\mathcal{E}}{R\omega_0} \sin \omega_0 t, \quad \dot{q} = \frac{\mathcal{E}}{R} \cos \omega_0 t, \quad (3.55a)$$

\*) Легко убедиться подстановкой, что (3.55) удовлетворяет уравнению (3.45).

откуда

$$u = \frac{\mathcal{E}}{RC\omega_0} \sin \omega_0 t = Q\mathcal{E} \sin \omega_0 t,$$

где  $Q$  — добротность контура (ср. § 3). Амплитуда напряжения на конденсаторе  $U = Q\mathcal{E}$ . Таким образом, амплитуда напряжения на конденсаторе равна амплитуде внешней э. д. с., умноженной на добротность контура.

Если, например, контур имеет добротность  $Q = 100$ , то э. д. с. в  $10$  мв поддерживает на конденсаторе напряжение в  $1$  в. Это усиление напряжения с помощью резонанса играет существенную роль во всей радиоаппаратуре. Постараемся представить себе более наглядно его «механизм» (рис. 100, б). Вторая формула (3.55а) означает, что внешняя э. д. с. равна падению напряжения  $R\dot{q}$  на сопротивлении, откуда

$$\mathcal{E} = RI,$$

где  $I$  — амплитуда тока. Она неограниченно растет при заданном  $\mathcal{E}$  с уменьшением  $R$ . Но при этом неограниченно растет амплитуда напряжения на конденсаторе:

$$\frac{I}{\omega_0 C} = \frac{\mathcal{E}}{RC\omega_0}$$

(а также амплитуда напряжения на катушке  $\omega_0 LI$ ).

Заметим, что значительное повышение напряжения из-за резонанса может произойти и в цепи обычного (осветительного) переменного тока. Здесь в отличие от радиоконтура такое повышение напряжения является нежелательным и даже опасным явлением.

**2. Процесс установления при резонансе.** Разумеется, усиленное в  $Q$  раз напряжение появляется на конденсаторе не мгновенно, а в результате длящегося некоторое время процесса установления.

Пусть затухание осциллятора мало, и в начальный момент ( $t = 0$ ) колебаний нет ( $s = 0$ ,  $\dot{s} = 0$ ). Тогда на первой стадии процесса установления член  $2\delta\dot{s}$  не играет заметной роли (так же как в случае силы, состоящей из периодически повторяющихся толчков, § 5, п. 3), и эта первая стадия с большим приближением описывается формулой (3.54). Процесс установления имеет поэтому приблизительно такой же вид, как показанный на рис. 95. Точная формула, описывающая колебание, происходящее в затухающем осцилляторе при начальных условиях  $t = 0$ ,  $s = 0$ ,  $\dot{s} = 0$ , такова:

$$s = \frac{F_0}{2\delta\omega_0} \left[ \sin \omega_0 t - \frac{\omega_0}{\omega'} e^{-\delta t} \sin \omega' t \right], \quad \omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}. \quad (3.56)$$

Это легко проверить подстановкой значения  $s$  в уравнение (3.45) и начальные условия. При  $\delta \ll \omega_0$  можно без заметной погрешности положить в (3.56)  $\omega_0 = \omega'$ , что дает:

$$s = \frac{F_0}{2\delta\omega_0} (1 - e^{-\delta t}) \sin \omega_0 t. \quad (3.56a)$$

Формулы (3.56), (3.56а) показывают, что процесс установления длится тем дольше, чем меньше  $\delta$  (рис. 101). При  $\delta \rightarrow 0$  формула (3.56) переходит в (3.54).

**3. Общий случай (произвольные  $\omega$ ,  $\omega_0$ ).** Решим теперь задачу о периодическом вынужденном колебании в общем виде, не ограничиваясь случаем, когда  $\omega = \omega_0$ . Вернемся к уравнению (3.45) и покажем, что ему



удовлетворяет при любых  $\omega$ ,  $\omega_0$  определенная функция вида

$$s = B \cos(\omega t - \psi), \tag{3.57}$$

изображающая синусоидальное колебание, имеющее частоту внешней

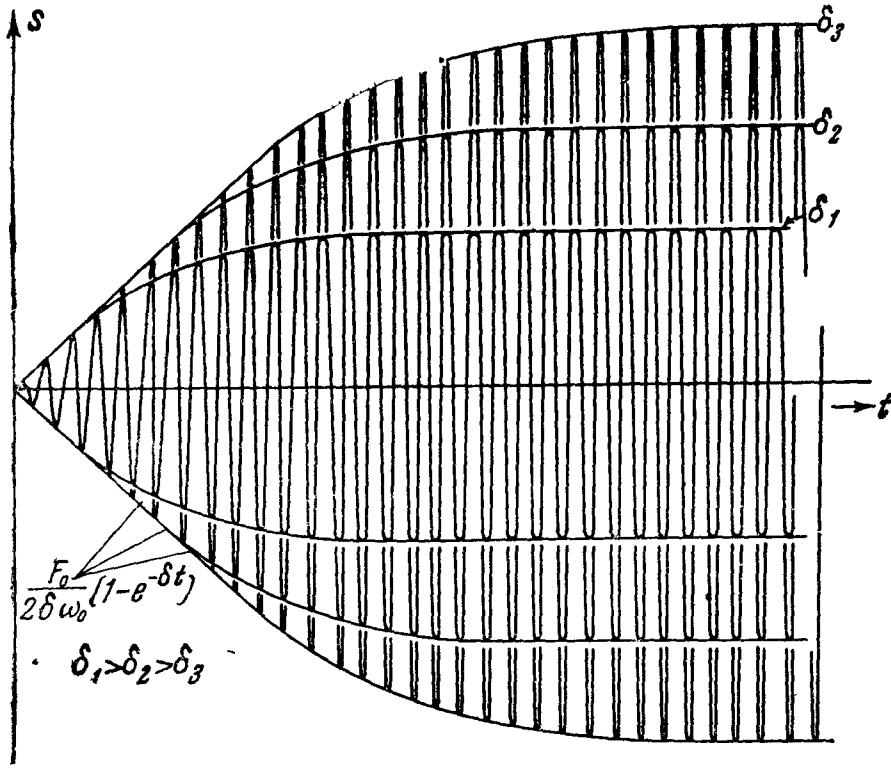


Рис. 101. Нарастание колебаний при резонансе длится тем дольше, чем меньше затухание.

силы. Действительно, подставляя в уравнение (3.45) функцию (3.57), а также ее производные

$$\dot{s} = -\omega B \sin(\omega t - \psi),$$

$$\ddot{s} = -\omega^2 B \cos(\omega t - \psi),$$

получаем соотношение

$$(\omega_0^2 - \omega^2) B \cos(\omega t - \psi) - 2\omega \delta B \sin(\omega t - \psi) = F_0 \cos \omega t,$$

которое должно удовлетворяться тождественно (при любом  $t$ ) для того, чтобы (3.57) было решением (3.45).

Это требование, как мы сейчас увидим, однозначно определяет (при заданных  $\omega$ ,  $\omega_0$ ,  $\delta$ ,  $F_0$ ) величины  $B$  и  $\psi$ .

Легче всего показать это с помощью графической интерпретации последнего соотношения (рис. 102). Левая часть изображается геометрической суммой вектора длины  $(\omega_0^2 - \omega^2)B$ , образующего угол  $\psi$  с начальным направлением, и вектора длины  $2\omega\delta B$ , образующего с этим направлением

угол  $\psi - \frac{\pi}{2}$ . Эта геометрическая сумма равна вектору длины  $F_0$ , расположенному вдоль начального направления. Из рисунка видно, что для этого должны выполняться равенства

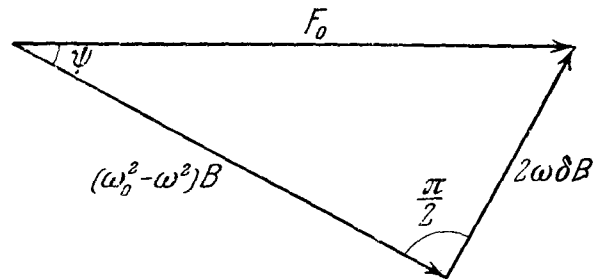


Рис. 102. Векторная диаграмма вынужденного колебания.

Из рисунка видно, что для этого должны выполняться равенства

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2\omega\delta}{\omega_0^2 - \omega^2}, \tag{3.58}$$

и

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 B^2 + (2\omega\delta B)^2 = F_0^2,$$

т. е.

$$B = \frac{F_0}{V(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\delta^2}. \quad (3.59)$$

Формула (3.58) определяет фазу, формула (3.59) — амплитуду вынужденного колебания (3.57). Эти формулы описывают изменение смещения или заряда. Легко получить формулы, относящиеся, например, к напряжению на конденсаторе колебательного контура или силе тока и т. д. (а также к механическим аналогам этих величин). Для амплитуды напряжения на конденсаторе  $U$  имеем:

$$U = \frac{B}{C} = \frac{\omega_0^2 \mathcal{E}}{V(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\delta^2}. \quad (3.60)$$

Фаза напряжения на конденсаторе совпадает с фазой заряда.

Амплитуда силы тока

$$I = \omega B = \frac{\omega \mathcal{E}}{LV(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\delta^2}.$$

Отсюда, выразив  $\omega_0$ ,  $\delta$  через  $C$ ,  $L$ ,  $R$ , получаем:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{V\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}. \quad (3.61)$$

Фаза тока опережает на  $\pi/2$  фазу заряда.

Вектор, длина которого  $Z$  равна отношению амплитуды напряжения на некоторой цепи к амплитуде тока в ней и который составляет угол  $\varphi$  с начальным направлением, равный разности фаз между напряжением и током, называется *импедансом* этой цепи.

Импеданс механической системы определяется аналогичным образом как вектор, длина которого  $Z$  равна отношению амплитуды внешней силы к амплитуде скорости, а угол с начальным направлением — разности фаз между силой и скоростью.

Импеданс, вообще говоря, — функция частоты. Пользуясь этим понятием, можно переписать формулу (3.61) в более сжатом виде:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{Z}, \quad (3.62)$$

формально напоминающем закон Ома. Здесь

$$Z = V\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2.$$

При  $\omega = \omega_0$  имеем на основании (3.60), (3.34), (3.36)

$$U = \mathcal{E} \frac{\omega_0}{2\delta} = Q\mathcal{E},$$

на основании (3.61)

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

и, наконец, на основании (3.58)

$$\operatorname{tg} \phi = \infty, \quad \phi = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = 0.$$

Все эти результаты находятся, как и следовало ожидать, в согласии с полученными в п. 1.

## § 8. Резонансные кривые

1. Зависимость интенсивности напряжения на конденсаторе от частоты внешней э. д. с. Выясним, как изменяется интенсивность (квадрат амплитуды) напряжения на конденсаторе в зависимости от частоты синусоидальной внешней э. д. с. при фиксированной ее амплитуде и фиксированных параметрах контура. На основании (3.60).

$$\frac{U^2}{\mathcal{E}^2} = \frac{\omega_0^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\delta^2}. \quad (3.63)$$

Разделив числитель и знаменатель на  $\omega_0^2$  и воспользовавшись соотношением

$$\frac{\omega_0}{2\delta} = Q,$$

получаем:

$$\frac{U^2}{\mathcal{E}^2} = \frac{Q^2}{Q^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}. \quad (3.64)$$

Графики зависимости  $U^2/\mathcal{E}^2$  от  $\omega$  для различных  $Q$  (семейство *резонансных кривых*) показаны на рис. 103. При  $\omega = 0$  имеем  $U = \mathcal{E}$ , что вполне естественно: в случае постоянной э. д. с. конденсатор заряжается до разности потенциалов, равной внешней э. д. с. При  $\omega = \omega_0$  (резонанс)  $U/\mathcal{E} = Q$ , при  $\omega \rightarrow \infty$  амплитуда напряжения на конденсаторе спадает и стремится к нулю ( $U \rightarrow 0$ ). Максимум отношения  $U^2/\mathcal{E}^2$  достигается при минимуме знаменателя дроби (3.64), т. е. при минимуме выражения

$$Q^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega_0^2\omega^2.$$

То значение  $\omega^2$ , при котором наступает этот минимум, легко найти обычным способом, из условия равенства нулю производной последнего выражения по  $\omega^2$ :

$$2Q^2(\omega^2 - \omega_0^2) + \omega_0^2 = 0,$$

откуда

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right).$$

При этом

$$\frac{U^2}{\mathcal{E}^2} = \frac{Q^2}{1 - \frac{1}{4Q^2}},$$

в то время как при  $\omega = \omega_0$

$$\frac{U^2}{\mathcal{E}^2} = Q^2.$$

Итак, максимум амплитуды напряжения на конденсаторе наступает при значении частоты внешней э. д. с., несколько *меньшем* собственной частоты контура. При тех больших добротностях, которыми обладают резонансные контуры, обычно употребляемые в радиоустройствах, это отличие совершенно незаметно и на практике им всегда можно пренебречь.

Весьма важен вопрос об *остроте* резонансной кривой: какое нужно отклонение  $\omega$  от значения  $\omega = \omega_0$  для того, чтобы квадрат амплитуды напряжения на конденсаторе упал, скажем, вдвое против его значения при резонансе?

Как показывает формула (3.64), это будет при

$$Q^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 2.$$

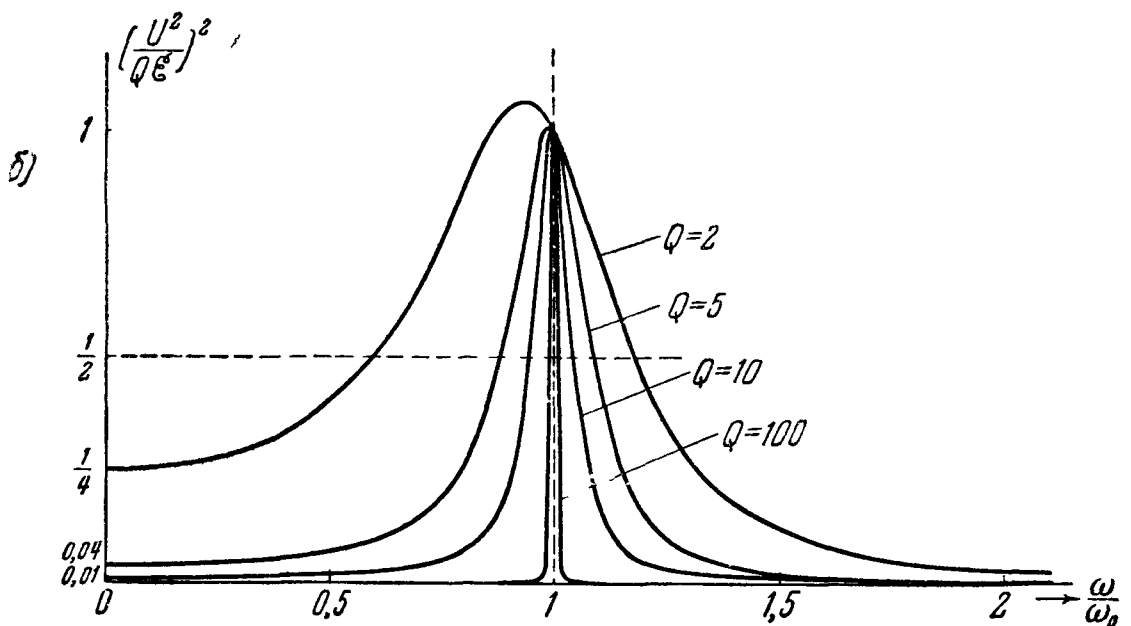
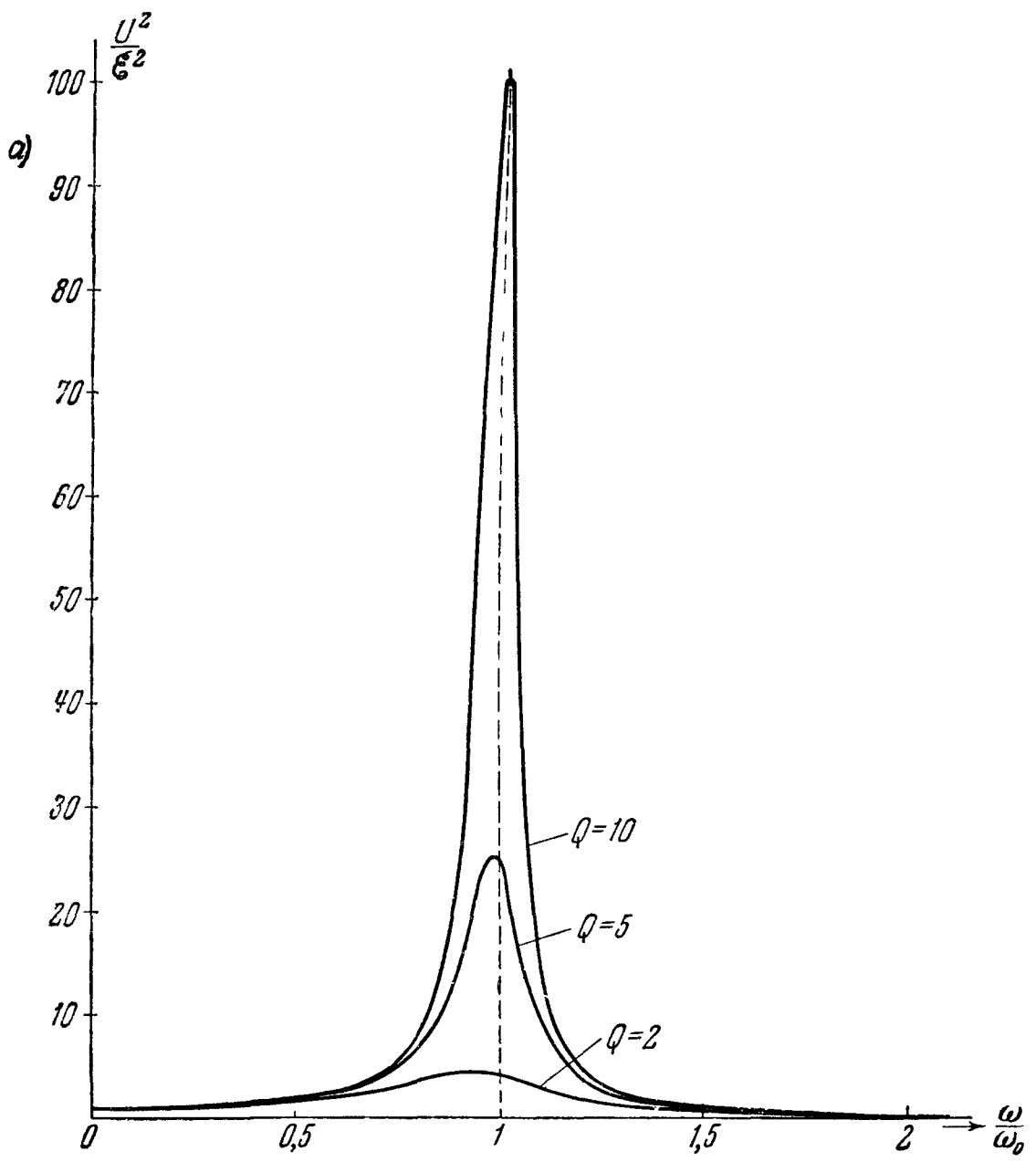


Рис. 103. а—зависимость  $U^2/\epsilon^2$  от  $\omega/\omega_0$  при фиксированных параметрах контура; здесь ясно видна зависимость интенсивности при резонансе от  $Q$ ; б—кривые, отличающиеся от а тем, что ординаты уменьшены в отношении  $1:Q^2$ ; здесь ясно видна зависимость остроты резонанса от  $Q$ .

Решая это квадратное уравнение относительно  $\omega^2/\omega_0^2$ , находим:

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 1 - \frac{1}{2Q^2} \pm \frac{1}{Q} \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}$$

или приближенно, отбрасывая малые величины порядка  $1/Q^2$ , по сравнению с единицей

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 1 \pm \frac{1}{Q}, \quad \frac{\omega}{\omega_0} = 1 \pm \frac{1}{2Q}, \quad \omega = \omega_0 \pm \delta.$$

Таким образом, при  $Q = 50$  (что не очень велико) интенсивность уменьшается вдвое уже при отклонении частоты э. д. с. на  $\pm 1\%$  от резонансного значения; при  $Q = 500$  — на  $\pm 0,1\%$ .

Уменьшению интенсивности вдвое по сравнению со значением при резонансе соответствует отклонение частоты  $\Delta\omega = \pm \delta$  от резонанса (рис. 103, б). Величину  $2\delta$  называют шириной резонансной кривой на уровне  $\frac{1}{2}$ .

Важно подчеркнуть, что добротность контура характеризует как *остроту* резонансной кривой, так и *время установления*. Последнее видно из (3.56), если вспомнить связь между  $\delta$  и  $Q$ . Чем острее резонансная кривая, тем больше время установления стационарного вынужденного колебания.

**2. Зависимость интенсивности напряжения на конденсаторе от настройки контура.** Будем теперь считать, что амплитуда и частота внешней э. д. с. фиксированы, но что мы поворачиваем ручку настройки контура, изменяя этим емкость конденсатора, а следовательно, и собственную частоту колебательного контура. Здесь неудобно пользоваться формулой (3.64), так как добротность контура, как показывает соотношение (3.36а), сама меняется во время опыта.

Вернемся к формуле (3.63). В ней

$$\delta = \frac{R}{2L}$$

— величина постоянная (дело обстоит бы иначе, если бы мы настраивали контур, меняя его индуктивность). Перепишем (3.63) в таком виде:

$$\frac{U^2}{\mathcal{E}^2} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2\delta}{\omega}\right)^2 \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2}. \quad (3.65)$$

Когда  $\omega/\omega_0$  мало (конденсатор полностью выведен), мы имеем приближенно

$$\frac{U}{\mathcal{E}} = 1,$$

т. е. напряжение на конденсаторе равно э. д. с. источника. С увеличением емкости конденсатора, т. е. с ростом  $\omega/\omega_0$ , интенсивность растет и проходит через максимум при таком значении  $\omega/\omega_0$ , при котором производная функция

$$\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2\delta}{\omega}\right)^2 \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^4$$

по аргументу  $\omega^2/\omega_0^2$  равна нулю, т. е. при

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2} = 1 + \frac{4\delta^2}{\omega},$$

или приближенно, если  $\delta \ll \omega$ , при  $\omega_0 = \omega$ . При дальнейшем росте отношения  $\omega/\omega_0$  интенсивность убывает и при  $\omega_0 \rightarrow 0$  (неограниченном увеличении емкости конденсатора) стремится к нулю.

Пусть  $\delta/\omega$  мало и  $\omega$  отличается от  $\omega_0$  на величину порядка  $\delta$ . В этом случае можно считать приближенно в (3.65) во втором члене знаменателя

$\omega = \omega_0$ , откуда (приближенно)

$$\frac{U^2}{\epsilon^2} = \frac{2}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2\delta}{\omega}\right)^2}.$$

Если  $\delta/\omega$  мало, интенсивность спадает вдвое при изменении  $\omega_0$  от  $\omega_0 = \omega$  до  $\omega_0 = \omega \pm \Delta\omega_0$  такого, что

$$\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 = \left(\frac{2\delta}{\omega}\right)^2,$$

откуда получаем приближенное соотношение

$$\Delta\omega_0 = \pm \delta,$$

не зависящее от частоты внешней силы, т. е. от того, при какой настройке конденсатора нашего контура наступает резонанс.

Предоставляем читателю исследование резонансных кривых, изображающих изменение  $I^2$  при изменении  $\omega$ ,  $C$  или  $L$ .

**3. Фазовые резонансные кривые.** Так называются кривые, изображающие зависимость фазы напряжения на конденсаторе, силы тока и т. д. от частоты внешней силы или собственной частоты контура (или аналогичные кривые для механического осциллятора). Рассмотрим два частных случая.

а) Зависимость фазы напряжения внешней силы.

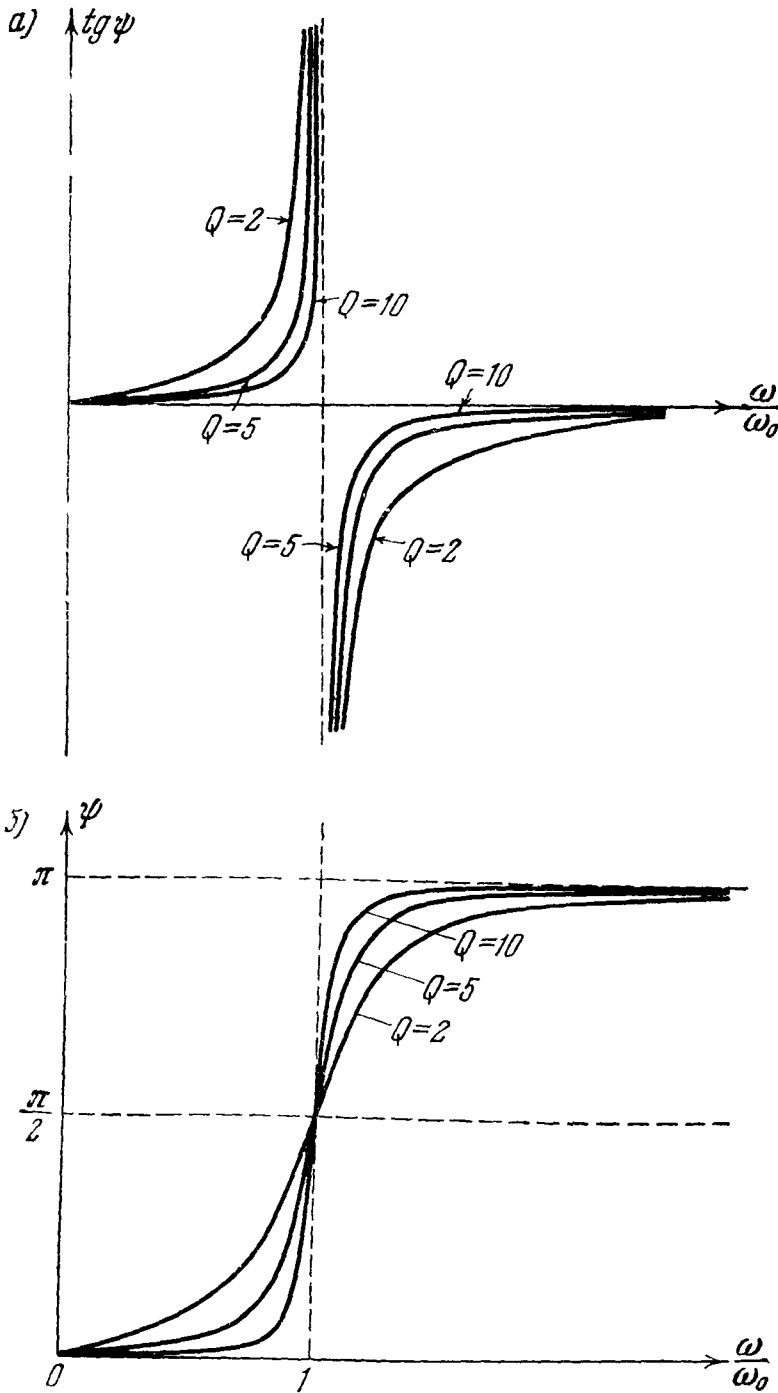


Рис. 104. Зависимость (а) тангенса сдвига фаз и (б) сдвига фаз между внешней э. д. с. и напряжением на конденсаторе от  $\omega/\omega_0$  при фиксированных параметрах контура.

на конденсаторе от частоты внешней силы.

Представим (3.58) в таком виде:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2\delta}{\omega_0} \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{1}{Q} \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}.$$

Зависимость  $\operatorname{tg} \psi$  от  $\omega/\omega_0$  при различных фиксированных  $Q$  показана на рис. 104, а, соответствующее семейство фазовых резонансных кривых — на рис. 104, б;  $\psi$  меняется от 0 при  $\omega/\omega_0 = 0$  до  $\pi$  при  $\omega/\omega_0 = \infty$ ,

проходя при резонансе ( $\omega = \omega_0$ ) через значение  $\pi/2$  (при этом ток — в фазе с внешней э. д. с.). Чем больше  $Q$ , тем круче меняется фаза около резонанса, тем больше фазовая резонансная кривая приближается к разрывной зависимости, полученной в § 6:  $\psi = 0$  при  $\omega < \omega_0$ ,  $\psi = \pi$  при  $\omega > \omega_0$ .

б) Зависимость фазы от настройки контура (настройка емкостью).

Здесь удобно представить (3.58) в виде

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2\delta}{\omega} \frac{1}{\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 - 1}$$

Зависимость  $\psi$  от  $\omega_0/\omega$  при постоянных  $\omega$  и  $\delta$  приближается при  $\delta \rightarrow 0$  к разрывной зависимости, полученной в § 6.

4. Резонансные кривые и процесс установления. Подчеркнем, что резонансные кривые относятся только к установившимся вынужденным колебаниям. Начало процесса установления имеет при  $\omega \neq \omega_0$  характер, близкий к показанному на рис. 99. Весь процесс установления имеет вид, показанный схематически на рис. 105.

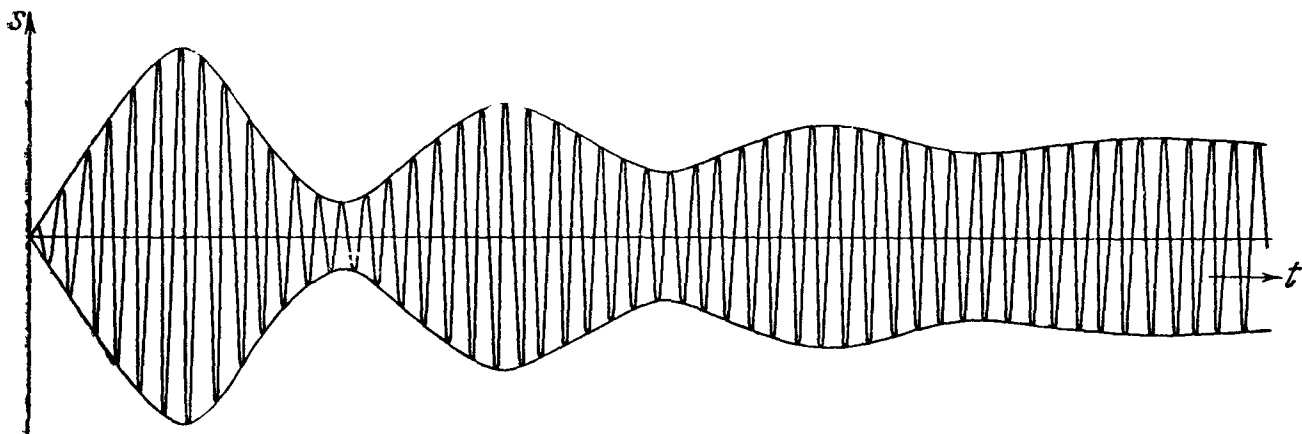


Рис. 105. Процесс установления вынужденных колебаний в затухающем осцилляторе при частоте внешней силы, заметно отличающейся от собственной частоты осциллятора.

Было бы грубой ошибкой (такая ошибка иногда делалась) считать, что если амплитуда внешней э. д. с. меняется со временем (модуляция, см. гл. IV), амплитуда напряжения на конденсаторе будет определяться формулой (3.60), т. е. меняться пропорционально амплитуде внешней э. д. с. В действительности после каждого изменения амплитуды внешней э. д. с. происходит сложный процесс установления. Формула (3.60) относится лишь к случаю, когда  $\xi$  постоянна. К этому мы еще вернемся в гл. XI.

## § 9. Параметрический резонанс

1. **Постановка вопроса.** В понятие резонанса можно вложить гораздо более широкий смысл, чем тот, который был разъяснен в предыдущих параграфах. Существует обширный класс явлений, где так же, как при действии периодической силы на гармонический осциллятор, результат воздействия на колебательную систему (ее «отклик») сильно зависит от темпа воздействия. Все эти явления целесообразно объединить понятием резонанса в обобщенном смысле\*). Мы здесь рассмотрим в качестве примера

\*) Ср., например, Л. И. Мандельштам и Н. Д. Папалекси и др., Новые исследования нелинейных колебаний, М., 1937, а также Л. И. Мандельштам, Полное собрание трудов, т. III, стр. 89; Н. Д. Папалекси, Эволюция понятия резонанса, Успехи физ. наук 31, стр. 447 (1947), а также Собрание трудов, стр. 343, 1948.

явления, происходящие в колебательном контуре при воздействии, заключающемся в следующем: с помощью механического устройства (например, мотора) периодически меняют емкость конденсатора; никакая э. д. с. при этом в контур не вносится.

Другой, чрезвычайно важный, пример резонанса, понимаемого в широком смысле: разгон ионов и электронов в *циклотроне* и *синхротроне* \*) под действием магнитного поля (постоянного в циклотроне, плавно нарастающего в синхротроне) и синусоидального электрического поля, изменяющегося в подходящем темпе.

**2. Исследование упрощенной схемы.** Будем считать для простоты, что емкость меняется скачкообразно (рис. 106). Изобразим процесс на фазовой плоскости  $q, p$ , где  $p = \dot{q}/\omega_0$ , причем мы будем здесь понимать под  $\omega_0$  собственную частоту колебаний, которые совершал бы контур, если бы

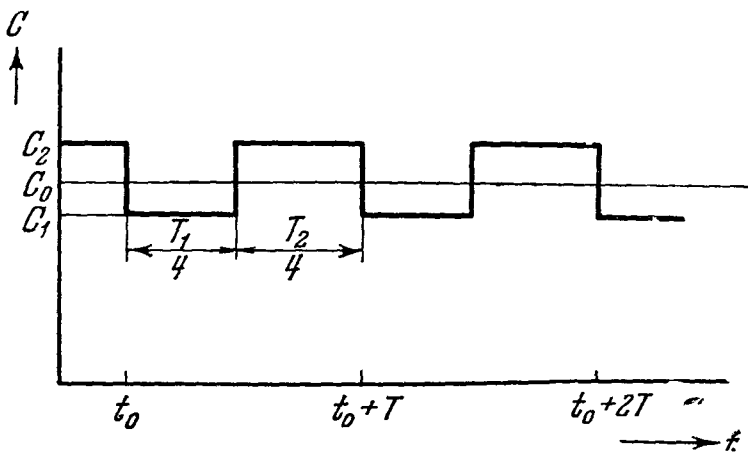


Рис. 106. График изменения емкости со временем.

емкость была постоянна и равна  $C_0 = \sqrt{C_1 C_2}$ . Сопротивлением пренебрегаем.

В течение промежутков времени, когда  $C = C_1 < C_0$ , имеем (ср. § 2):

$$q = A \cos(\omega_1 t - \varphi),$$

$$p = -\frac{\omega_1}{\omega_0} A \sin(\omega_1 t - \varphi),$$

где

$$\omega_1^2 = \frac{1}{LC_1} > \omega_0^2,$$

изображающая точка движется по дуге эллипса

$$\frac{p^2}{\omega_1^2} + \frac{q^2}{\omega_0^2} = \frac{A^2}{\omega_0^2},$$

вытянутого по оси  $p$ . В течение промежутков времени, когда  $C = C_2 > C_0$ , изображающая точка движется по дуге эллипса

$$\frac{p^2}{\omega^2} + \frac{q^2}{\omega_0^2} = \frac{A^2}{\omega_0^2}, \quad \omega^2 = \frac{1}{LC_2} < \omega_0^2,$$

вытянутого по оси  $q$ .

Пусть, кроме того (как показано на рис. 106), емкость равна  $C_1$  в течение времени  $T_1/4$  и  $C_2$  в течение времени  $T_2/4$ , где  $T_1 = 2\pi/\omega_1$ ,  $T_2 = 2\pi/\omega_2$ .

Предположим, что в момент  $t_0$  на конденсаторе имеется некоторый случайный малый заряд (хотя бы из-за тепловых флуктуаций, т. е. беспорядочного теплового движения электронов в металле, ср. гл. X). Пусть этот заряд положителен. Начнется разряд (дуга эллипса  $M_0 M_1$  рис. 107). Но в момент  $t_0 + \frac{T_1}{4}$  емкость принимает значение  $C_2$ , и дальнейший процесс пойдет по дуге эллипса  $M_1 M_2$ . Через время  $T_2/4$  емкость примет прежнее значение  $C_1$ , и дальнейший процесс пойдет по дуге эллипса  $M_2 M_3$  и т. д. Из рис. 107 сразу видно, что колебания будут неограниченно нарастать.

Мы видим, таким образом, что если емкость (один из параметров контура) меняется с периодом

$$T = \frac{T_1 + T_2}{4}$$

\*) Устройство для разгона частиц до скоростей, сравнимых со скоростью света (при этом масса сильно превышает массу покоя), впервые предложенное советским физиком В. И. Векслером.



( $T$  равно половине «среднего собственного периода» контура), происходит неограниченное нарастание колебаний в контуре. Это явление называется *параметрическим резонансом*.

Нетрудно проверить построением, что колебания нарастают неограниченно также и в том случае, если  $T$  не равно  $(T_1 + T_2)/4$ , но достаточно близко к этому значению.

Легко понять полученный результат и с энергетической точки зрения. Каждый раз, когда емкость уменьшается, конденсатор заряжен и на разведение его пластин мотор затрачивает работу, идущую на увеличение электрической энергии контура. Каждый раз, когда емкость увеличивается, конденсатор разряжен и сближение пластин происходит без возвращения энергии контура мотору.

В реальном контуре при наличии постоянного сопротивления  $R$ , как показывает довольно элементарный анализ (дуги эллипсов заменяются дугами скручивающихся спиралей), происходит одно из двух: либо колебания не нарастают вовсе, либо нарастают неограниченно. Первое имеет место, если  $R$  больше, второе, — если  $R$  меньше некоторой критической величины, тем большей, чем больше «глубина» изменений емкости  $C_2 - C_1$ .

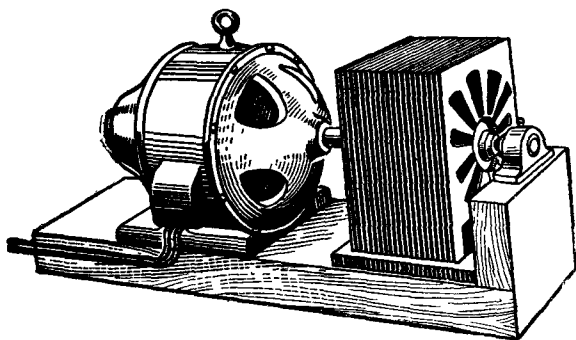


Рис. 108. Первая емкостная параметрическая машина Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси. Конденсатор (справа) состоит из двух систем обкладок: неподвижной (статор) и подвижной (ротор). Первую составляют 26 квадратных алюминиевых пластин, снабженных каждая 14 радиальными вырезами, вторую — 25 круглых алюминиевых пластин с аналогичными вырезами. Слева — мотор, вращающий подвижные пластины. При вращении мотора с угловой скоростью  $\nu$  об/сек емкость меняется с частотой  $14 \nu$  герц.

этом становится существенно *нелинейной*. Аналогичные явления получают-ся при периодическом изменении *индуктивности* контура.

За последние годы в Советском Союзе было осуществлено и доведено до значительной степени технического совершенства несколько типов

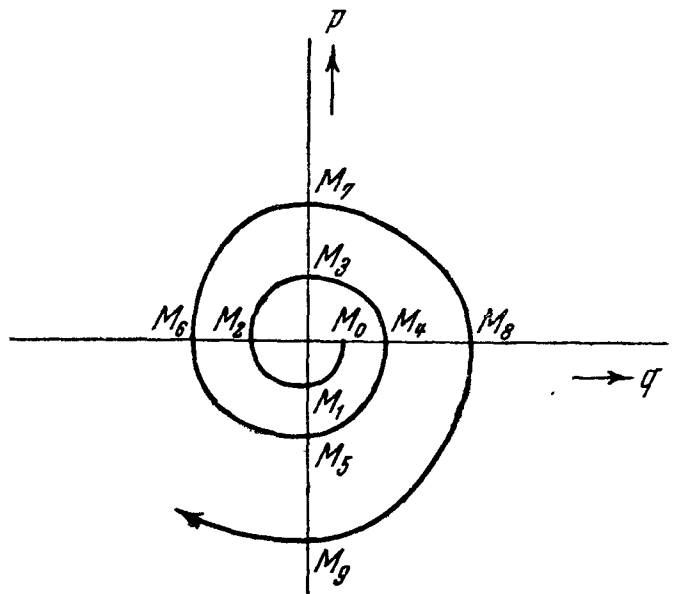


Рис. 107. Раскачивание колебаний вследствие периодического изменения емкости, показанного на рис. 106.

### 3. Параметрические машины.

Опыт вполне подтверждает сказанное выше. Если происходят достаточно глубокие изменения емкости с частотой, близкой к *удвоенной* средней собственной частоте контура, в нем (без всякой внешней э. д. с.) начинают нарастать колебания.

Этот опыт был впервые осуществлен Л. И. Мандельштамом и Н. Д. Папалекси. Если не принять специальных мер, напряжение на конденсаторе нарастает до пробоя (достигает десятков тысяч вольт). Но можно получать режим с регулируемой *стационарной* амплитудой, если включить параллельно контуру проводник, сопротивление которого сильно растет с ростом тока (например, электрические лампы накаливания). Система при

параметрических машин — генераторов переменного тока. На рис. 108 показана первая емкостная параметрическая машина (1933 г.).

4. Другие примеры параметрического возбуждения. Раскачка качелей обычным способом (периодическое приседание и выпрямление качающегося) есть типичный пример параметрического резонанса (а не «обычного резонанса под действием периодической внешней силы»). Здесь периодически меняются параметры  $l$  и  $J$  (ср. § 1) маятника, образованного качелями и стоящим на них человеком.

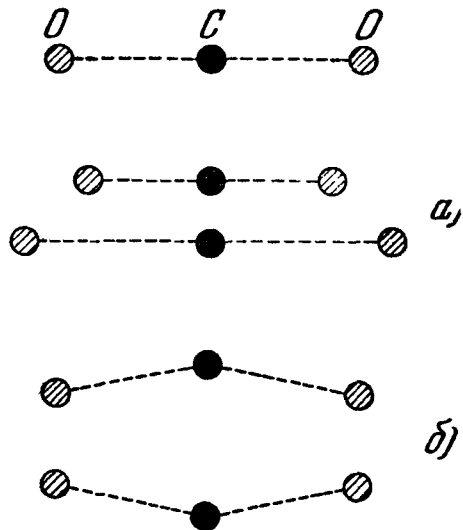


Рис. 109. Два типа колебаний молекулы  $\text{CO}_2$ .

Приведем еще такой пример параметрического резонанса. Подберем груз, висящий на пружине (рис. 64) так, чтобы частота  $\sqrt{k/m}$  вертикальных колебаний была приблизительно вдвое больше средней частоты  $\sqrt{mgl/J}$  колебаний груза около вертикали. Если отклонить груз по вертикали и отпустить его, сначала происходят вертикальные колебания. Но вследствие изменения параметров  $l$  и  $J$  груз постепенно начинает все сильнее колебаться около вертикали. Это угловое колебание может дойти до очень больших амплитуд. Здесь, правда, есть и существенное отличие от случая, к которому относились наши рассуждения: нет внешнего источника энергии и нарастание угловых колебаний сопровождается затуханием вертикальных колебаний.

После этого происходит обратное явление: раскачивание вертикальных колебаний за счет энергии, накопленной на предыдущей стадии процесса угловыми колебаниями. Затем весь процесс начинается сначала и т. д., до тех пор, пока то и другое колебания не затухнут из-за трения\*).

Только что описанный чрезвычайно простой опыт был предложен Л. И. Мандельштамом для иллюстрации некоторых особенностей колебаний молекул  $\text{CO}_2$  (рис. 109), в которых частота колебания типа а) приблизительно вдвое превышает частоту колебаний типа б). Эти особенности проявляются в комбинационном рассеянии — явлении, о котором будет идти речь в гл. XI.

\*) Рассмотрение взаимодействия вертикальных и угловых колебаний маятника относится к области нелинейных колебаний.

## Г Л А В А IV

# НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

### § 1. Автоколебания, автоколебательные системы

Эти термины возникли недавно. Они были предложены немногим более 20 лет назад А. А. Андроновым \*). Но само явление автоколебаний не ново. Оно встречается в природе на каждом шагу. Автоколебаниями являются, например, свист, издаваемый тонкой веткой под действием ветра, звучание человеческого голоса, а также (по всей вероятности) периодические пульсации блеска, характерные для обширного класса звезд (так называемые цефеиды).

Автоколебательными системами являются все духовые и смычковые музыкальные инструменты. В XVII в. появились часы с маятником (часы Галилея — Гюйгенса) — автоколебательная система, сыгравшая выдающуюся роль в развитии физики, астрономии и техники. В последнее время с механическими хронометрами, основанными на принципе маятниковых часов, начинают конкурировать в качестве эталонов времени радиофизические хронометры (кварцевые часы), также являющиеся автоколебательными системами \*\*). Автоколебательными системами являются все ламповые генераторы электромагнитных колебаний. Паровые машины и двигатели внутреннего сгорания можно также рассматривать в известном смысле как автоколебательные системы.

Каков тот общий признак, который позволяет выделить все перечисленные явления и устройства в особый класс? Ответ заключается в следующем.

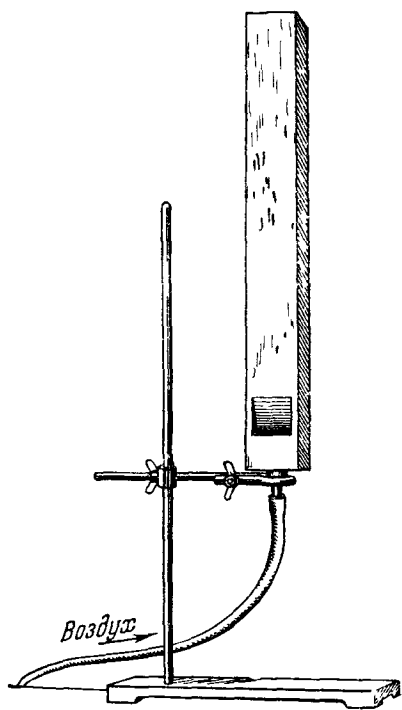
Во всех приведенных примерах мы имеем дело с системами, совершающими *незатухающие колебания*, и притом такими, которые сами являются *источниками* этих незатухающих колебаний, т. е. с системами, к которым колебания *не подводятся извне*. В этом — их коренное отличие от систем, совершающих *вынужденные колебания*, которые мы изучали в гл. III. Для того чтобы маятник часов совершал незатухающие колебания, мы не воздействуем на часы периодической внешней силой, а заводим их, т. е. поднимаем гирию (например, в случае примитивных «ходиков») или деформируем

---

\*) [Первое издание «Колебаний и волн» Г. С. Горелика вышло в 1950 г. Здесь имеется в виду работа А. А. Андронova «Предельные циклы Пуанкаре и теория автоколебаний», доложенная на IV съезде русских физиков в 1928 г. См. А. А. Андронов, Собрание трудов, Изд-во АН СССР, М., 1956, стр. 32 и 41.]

\*\*\*) [В 1952 г. Н. Г. Басовым и А. М. Прохоровым было предложено, а затем осуществлено еще более стабильное (в смысле постоянства частоты) автоколебательное устройство — так называемый *молекулярный генератор*, в котором вместо колебаний маятника или кварца используется излучение молекул при определенном типа квантовых переходах с верхнего на нижний энергетический уровень.]

пружину. К клеммам питания лампового генератора подводится не колебательное напряжение, а *постоянное* (от динамо, аккумулятора или выпрямителя). Свисток или флейта звучат под действием *равномерного*



дутья, никаких колебаний втекающая струя воздуха к ним при этом не подводит. Если воздуходувка посылает в органную трубу, т. е. свисток больших размеров (рис. 110), равномерную струю воздуха, труба звучит (т. е. воздух в ней совершает незатухающие колебания) сколь угодно долго, пока мы не остановим воздуходувку. Скрипичная струна звучит, когда мы равномерно ведем по ней смычком. Она звучит неопределенно долго под действием «бесконечного смычка» — трущегося о нее равномерно вращающегося колеса (рис. 111).

С другой стороны, существует коренное отличие между незатухающими колебаниями, о которых здесь идет речь, и теми незатухающими колебаниями, которые рассматривались в §§ 1 и 2 гл. III и при которых также нет периодического внешнего воздействия. Там незатухающие колебания были лишь *идеальным* предельным случаем, соответствующим полному отсутствию

трения или сопротивления. При сколь угодно малом трении их уже не может быть. Здесь незатухающие колебания получаются в *реальной* системе, обладающей трением (например, маятник часов) или сопротивлением (например, колебательный контур генератора), и не прекращаются при увеличении (до известного предела)

трения или сопротивления.

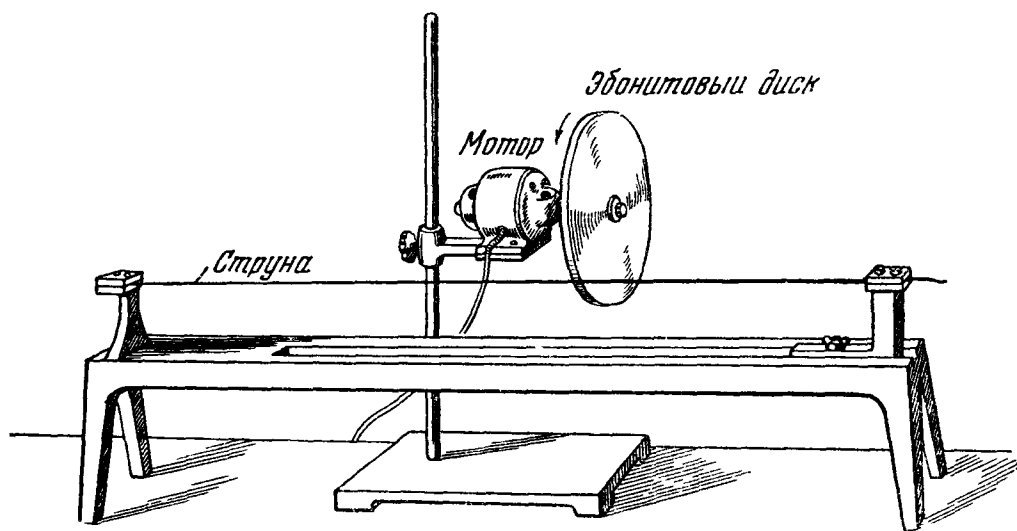


Рис. 111. Возбуждение струны равномерно вращающимся «бесконечным смычком».

Итак, под автоколебательной системой мы понимаем всякое реальное устройство, являющееся источником незатухающих колебаний, т. е. *систему, к которой колебания извне не подводятся и которая тем не менее совершает незатухающие колебания*. Эти колебания называются автоколебаниями. Слово «реальное» означает здесь, что исключается идеализированный (и вместе с тем тривиальный) случай, когда система не обладает трением или сопротивлением.

Маятник и колебательный контур, предоставленные самим себе, не являются автоколебательными системами, так как их колебания затухают, как бы ни было мало трение или сопротивление. Маятник, совершающий незатухающие колебания под действием периодических толчков, не является автоколебательной системой, так как колебания подводятся к нему извне в виде периодических толчков. То же самое относится к колебательному контуру, совершающему незатухающие колебания под действием внешней синусоидальной электродвижущей силы. В обоих последних примерах источник незатухающих колебаний надо искать *вне* рассматриваемой системы.

Первый вопрос, возникающий при изучении автоколебаний, — каким образом одностороннее постоянное дутье или опускание груза, или постоянное напряжение от источника питания и т. п. могут поддерживать колебания воздуха, маятника или колебательного контура? Второй вопрос — какими факторами определяются период и форма автоколебаний \*), в частности, при каких условиях автоколебания синусоидальны и от чего зависит в этом случае их амплитуда?

Характерные свойства автоколебательных систем находят, как мы увидим, свое математическое отображение в нелинейности дифференциальных уравнений, описывающих эти системы. Поэтому классификация, основанная на характере дифференциальных уравнений, относит автоколебательные системы к классу *нелинейных* колебательных систем. Кроме автоколебательных систем, мы познакомимся в этой главе также с некоторыми другими важнейшими типами нелинейных систем.

## § 2. Часы

**1. Конструктивный принцип.** Рис. 112 поясняет один из простейших вариантов маятниковых часов. Маятник снабжен изогнутым равноплечим рычагом — анкером; с анкером сцеплено ходовое колесо. Оно приводится в движение гирей, подвешенной к цепи, перекинутой через зубчатое колесо, сидящее на общей оси с ходовым колесом. Маятник совершает незатухающие колебания благодаря тому, что заставляет ходовое колесо подталкивать себя в подходящие моменты за счет энергии, освобождающейся при опускании гири.

Рассмотрим поверхности палетт (палеттами называются зубья, составляющие часть анкера), вступающие в контакт с зубьями ходового колеса. Поверхности  $a_1, a_2$  — это поверхности круговых цилиндров, осью которых является ось вращения маятника.

Когда зуб ходового колеса находится в контакте с любой из этих поверхностей, направление силы, с которой он давит на нее, проходит через ось маятника и ее момент относительно этой оси равен нулю. Ходовое колесо, а следовательно, и гиря при этом неподвижны. Поверхности  $b_1, b_2$  — плоские. Когда зуб ходового колеса скользит по ним, возникает момент

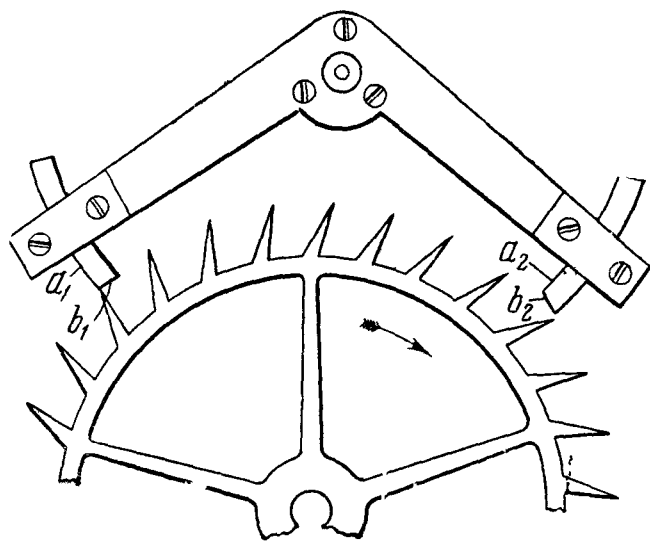


Рис. 112. Принцип действия маятниковых часов.

\*) Под «формой» автоколебаний здесь понимается вид их осциллограммы

относительно оси маятника, стремящийся отклонить его чечевицу влево (когда зуб касается  $b_1$ ) или вправо (когда он касается  $b_2$ ). При этом ходовое колесо поворачивается на определенный угол, гиря соответственно опускается. Таким образом, отвлекаясь от трения между зубьями ходового колеса и поверхностями  $a_1, a_2$ , можно сказать следующее: маятник колеблется свободно за исключением коротких (по сравнению с его собственным периодом) мгновений, когда наступает контакт между одним из зубьев ходового колеса и одной из плоскостей  $b_1, b_2$ . В эти мгновения маятник получает короткий импульс влево или вправо. Эти мгновения наступают при определенных положениях маятника; они задаются не извне, как при вынужденных колебаниях под действием толчков (гл. III, §§ 4, 5), а определяются движением самой колебательной системы: если придержать маятник рукой, то ходовое колесо остановится и никаких толчков маятник испытывать не будет. Толчки, вызывающие вынужденные колебания, действуют на маятник в определенные моменты независимо от того, свободен он или закреплен. Палетты и зубья ходового колеса сконструированы так, что поверхность  $b_1$  попадает под зуб, когда маятник проходит через вертикальное положение, идя справа налево, а поверхность  $b_2$  попадает под зуб, когда маятник также проходит через вертикальное положение, но идя слева направо. Таким образом, в обоих случаях момент направлен *по ходу* маятника, т. е. способствует его раскачиванию. Это станет особенно ясно, когда мы изобразим процесс на фазовой плоскости. Но сначала объясним, почему часы являются нелинейной системой.

**2. Нелинейность.** Момент  $M$ , действующий на маятник со стороны ходового колеса, не является заданной функцией времени, а некоторой задаваемой конструкцией часов функцией положения и скорости самого маятника:

$$M = M(\theta, \dot{\theta}),$$

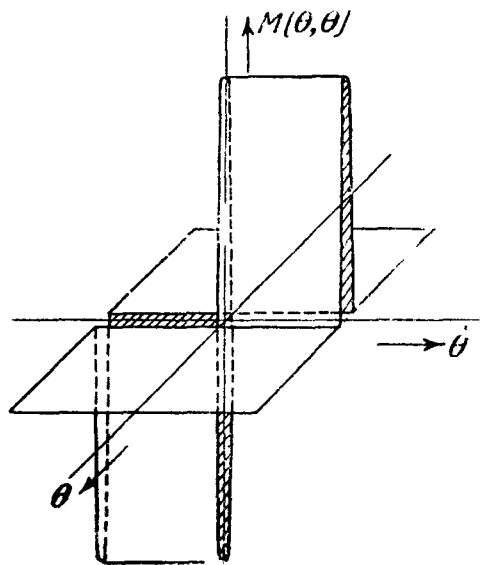


Рис. 113. Момент  $M(\dot{\theta}, \theta)$  отличен от нуля только вблизи  $\theta=0$ ; его знак совпадает со знаком  $\dot{\theta}$ , его абсолютная величина не зависит от  $\dot{\theta}$ .

где  $\theta$  — угол отклонения маятника,  $\dot{\theta}$  — его угловая скорость. Как было выяснено в п. 1, момент отличен от нуля лишь близ  $\theta=0$ . Он зависит, кроме того, от  $\dot{\theta}$ . Что особенно важно, *знак* момента зависит от знака  $\dot{\theta}$  ( $M > 0$  при  $\dot{\theta} > 0$  и  $M < 0$  при  $\dot{\theta} < 0$ ). Учитывая все сказанное, мы получаем пространственное графическое изображение функции  $M(\dot{\theta}, \theta)$ , данное на рис. 113. Линейная функция от  $\theta$  и  $\dot{\theta}$ , т. е. функция вида

$$M = a\theta + b\dot{\theta} + c,$$

где  $a, b, c$  — постоянные, изображалась бы на диаграмме  $\theta, \dot{\theta}, M$  плоскостью. Ясно, таким образом, что функция  $M(\theta, \dot{\theta})$  не линейна.

Дифференциальное уравнение движения маятника часов имеет вид

$$J\ddot{\theta} + h\dot{\theta} + mgl\theta = M(\theta, \dot{\theta}).$$

Так как функция  $M(\theta, \dot{\theta})$  не линейна, это уравнение является *нелинейным* дифференциальным уравнением в отличие от уравнения

$$J\ddot{\theta} + h\dot{\theta} + mgl\theta = 0,$$

описывающего свободное колебание маятника, и уравнения

$$J\ddot{\theta} + h\dot{\theta} + mgl\theta = M(t),$$

описывающего его вынужденные колебания, а также всех остальных дифференциальных уравнений, которые рассматривались в гл. III.

**3. Фазовая плоскость, предельный цикл.** Если бы не было трения, изображающая точка двигалась бы так, как показано на рис. 114. Пока маятник не проходит через вертикальное положение  $\theta = 0$ , он «не чувствует» присутствия ходового колеса и изображающая точка описывает полуокружность в правой или левой полуплоскости — «правое» или «левое» полукосебание. Проходя через положение  $\theta = 0$ , идя *вправо*, маятник испытывает толчок вправо, и  $p = \dot{\theta}/\omega_0$  возрастает на некоторую величину. Проходя через то же положение  $\theta = 0$ , идя *влево*, маятник испытывает толчок влево, и  $p$  снова растет по абсолютной величине и т. д.

В действительности, из-за трения, испытываемого маятником (трение на оси, трение поверхностей  $a_1, a_2$  палетт о зубья ходового колеса, трение о воздух), дуги окружностей должны быть заменены дугами скручивающихся спиралей. Ясно, что при этом колебания будут нарастать или затухать, смотря по тому, что берет верх: толчки или трение. Проанализируем «борьбу» этих двух факторов. Сделаем относительно толчков простейшее предположение: будем считать, что вращательный импульс  $\Delta(J\dot{\theta})$ , сообщаемый при толчках, есть величина постоянная, определяемая только конструкцией часов. (Это предположение не вполне верно и не годится для количественного расчета часов, но оно довольно хорошо передает некоторые их наиболее важные свойства.)

Мы приходим к математической задаче, аналогичной той, которую рассматривали в гл. III, § 5, п. 1\*). Обозначим через  $p_{n-1}$  значение  $p$  сразу после  $(n-1)$ -го толчка. Тогда значение  $p$  перед  $n$ -м толчком ( $p'_n$ ) определится уравнением

$$p'_n = p_{n-1}e^{-d},$$

откуда, обозначив через  $P$  приращение  $p$  в результате толчка,

$$p_n = p'_n + P = p_{n-1}e^{-d} + P.$$

Это уравнение может быть исследовано графически (рис. 86) совершенно так же, как при вынужденных колебаниях. Исследование показывает следующее: каковы бы ни были начальные условия, колебания нарастают или затухают, стремясь к определенной амплитуде, а именно,

$$p^* = \frac{P}{1 - e^{-d}}$$

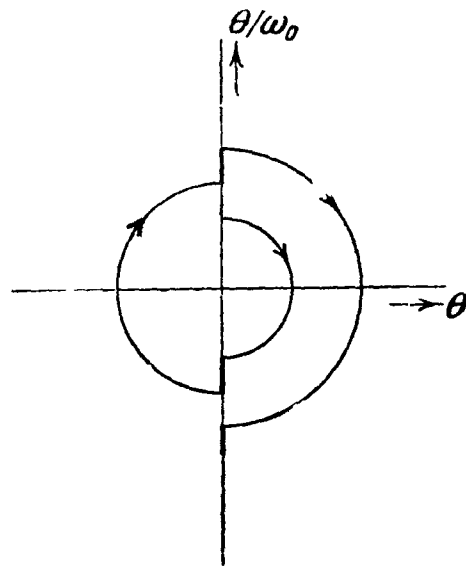


Рис. 114. Фазовая плоскость простейшей модели часов без учета трения (неограниченное раскачивание).

\*) Здесь, так же как в случае собственных колебаний (гл. III, §§ 1—3) и в отличие от случая осциллятора, испытывающего воздействие, заданное как явная функция времени (гл. III, §§ 4, 5, 9), положение изображающей точки на фазовой плоскости однозначно определяет ее дальнейшее движение.

или приближенно, если  $d \ll 1$ ,

$$p^* = \frac{P}{d}.$$

Это колебание изображается на фазовой плоскости замкнутой кривой, называемой *предельным циклом* (предельным потому, что к нему как к пределу стремятся траектории, заполняющие фазовую плоскость). Предельный цикл (рис. 115, б) состоит в данном случае из двух дуг спиралей и двух прямых отрезков. Чем меньше  $d$ , тем меньше предельный цикл отличен от окружности, тем меньше автоколебания отличаются от синусоидальных колебаний периода  $T_0 = 2\pi \sqrt{mgI/J}$ .

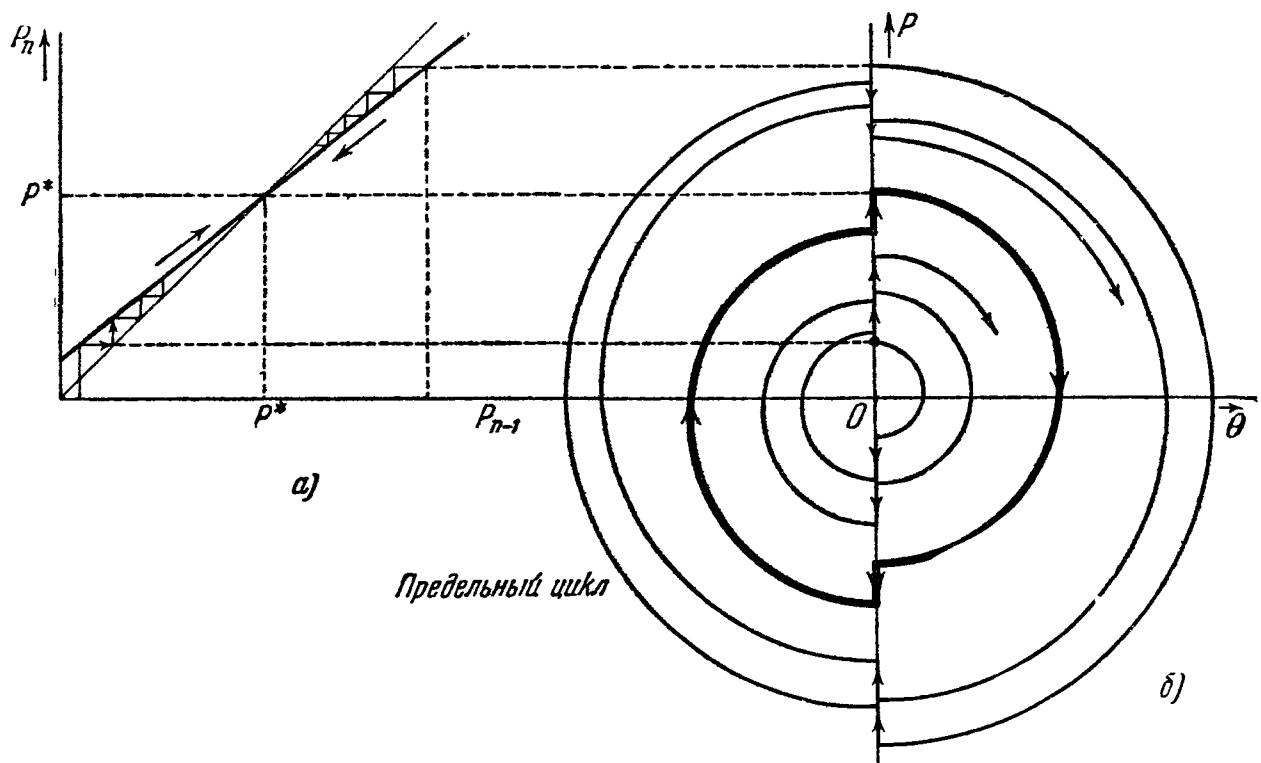


Рис. 115. Построение предельного цикла простейшей модели часов: а—график зависимости  $p_n$  от  $p_{n-1}$ ; б—фазовая плоскость. Заменяв  $\theta$  на  $q$ , мы получим предельный цикл модели лампового генератора, рассматриваемый в § 4.

Независимость амплитуды незатухающих колебаний, устанавливающихся в часах, от начальных условий легко проверить на опыте, запуская по-разному часы — сообщая маятнику в начальный момент большее или меньшее отклонение от положения равновесия или бóльший или меньший толчок. Независимость амплитуды незатухающих колебаний от начальных условий — характерное отличие автоколебательной системы от гармонического осциллятора без трения; в нем различным начальным условиям соответствуют всевозможные амплитуды незатухающих колебаний (рис. 62).

### § 3. Электронные лампы

1. Диод, триод, пентод. На рис. 116, а показаны условное обозначение и схема включения двухэлектродной электронной лампы, или *диода*. Раскаливаемый миниатюрной электрической печкой катод испускает электроны. Их улавливает анод, потенциал которого по отношению к катоду положителен. Если этот потенциал достаточно высок, ток в диоде  $i$  равен по абсолютной величине  $Ne$  (заряду электрона  $e$ , умноженному на число электронов  $N$ , вылетающих за 1 сек. из катода). Все испускаемые катодом электроны летят на анод и улавливаются им. Это — ток насыще-



ния  $I_s$ . Он тем больше, чем выше температура катода. Если потенциал анода равен потенциалу катода, поток электронов, вылетающих из катода, почти целиком компенсируется потоком электронов, влетающих в него обратно из-за отталкивания облачком электронов (объемным зарядом), образующимся около катода. На анод попадает ничтожное число наиболее быстрых электронов, ток через диод очень мал. Он практически полностью прекращается, если анод имеет хотя бы небольшой по абсолютной величине отрицательный потенциал по отношению к катоду, и постепенно растет до тока насыщения, если дать на анод положительный потенциал и постепенно его увеличивать. Этому соответствует начальный участок характеристики диода, изображенный на рис. 116, б. (Характеристикой называется график зависимости между током и напряжением.)

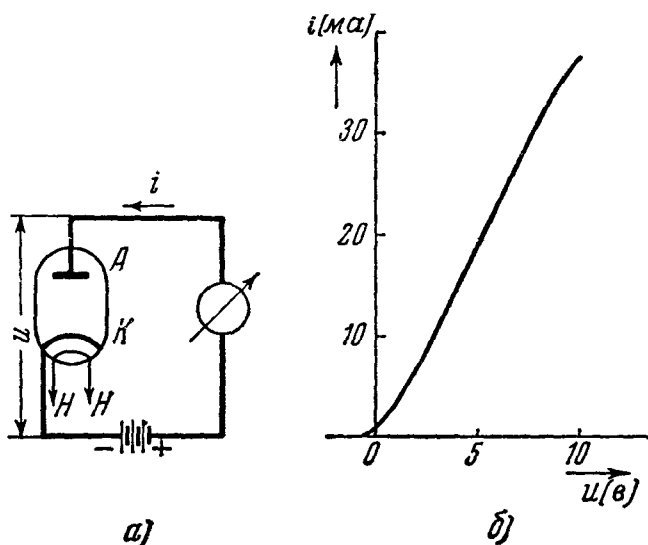


Рис. 116. а—условное обозначение и схема включения диода; К—катод, НН—цепь накала, А—анод; б—характеристика диода 6Х6.

Рис. 117 изображает триод — лампу, отличающуюся от диода тем, что между катодом и анодом помещен третий, так называемый *управляющий* электрод, или сетка.

Управляющее действие сетки заключается, грубо говоря, в следующем. Когда она заряжена отрицательно, она создает поле, отбрасывающее электроны *к катоду*, когда она заряжена положительно, она создает поле, отсасывающее их *от* катода. В первом случае ток через лампу прекращается, сетка, как говорят, «запирает» лампу. Во втором случае ток через лампу течет, причем если сетка — достаточно редкая, почти все электроны

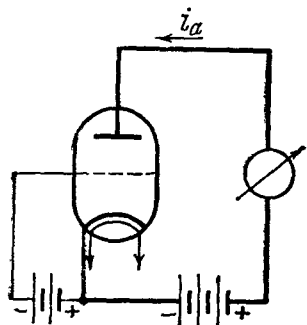


Рис. 117. Условное обозначение и схема включения триода.

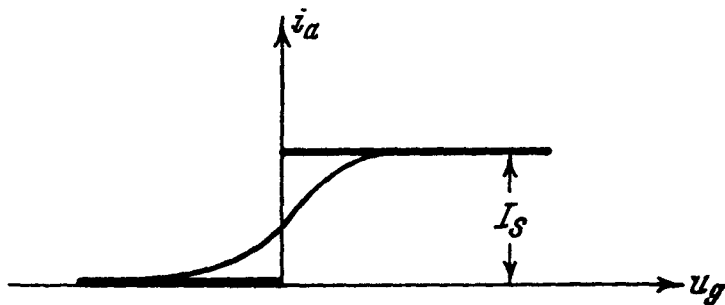


Рис. 118. Характеристика триода и ее идеализация Z-характеристикой.

попадают на анод. Такой грубой картине соответствовала бы зависимость анодного тока  $i_a$  от сеточного напряжения  $u_g$ , изображаемая жирными прямыми на рис. 118 — так называемая Z-характеристика (она напоминает зеркальное изображение буквы Z). В действительности, вследствие влияния объемного заряда (см. выше) характеристика имеет вид, показанный тонкой линией на рис. 118. В современных лампах крутизна характеристики (тангенс угла наклона) в наиболее крутом месте порядка от 1,5  $ма/в$  до 30  $ма/в$ . Ток насыщения варьирует в пределах от нескольких десятков миллиампер в малых триодах, употребляемых в радиоприемниках, до десятков ампер в мощных генераторных лампах.

Анодный ток триода зависит не только от напряжения на сетке  $u_g$ , но и от анодного напряжения  $u_a$ , как показывает рис. 119, изображающий семейство характеристик, соответствующих различным  $u_a$ . Во многих

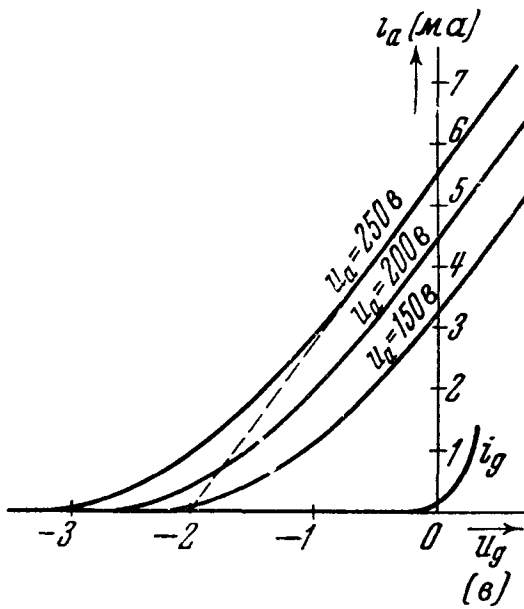


Рис. 119. Начальные участки характеристик маломощного триода 6Ф5, соответствующие трем значениям анодного напряжения  $u_a$ .  $i_g$ —сеточный ток.

случаях такая зависимость нежелательна и требуется, наоборот, чтобы анодный ток зависел исключительно от сеточного напряжения. Это достигается введением дополнительной сетки, играющей роль экрана, между управляющей сеткой и анодом. Получается четырехэлектродная лампа — тетрод. Но здесь возникает неприятность, связанная с так называемым динаatronным эффектом — выбиванием электронов из анода под действием электронов, прилетающих с катода. Динаatronный эффект вызывает в тетроде нежелательные явления при больших амплитудах колебаний напряжения на аноде. Эти нежелательные явления могут быть устранены с помощью еще одной (третьей), так называемой *противодинаatronной* сетки, помещенной между экранной сеткой и анодом. Мы приходим к *пентоду* или пятиэлектродной лампе, широко применяемой в радиосхемах различного рода (рис. 120).

Электроны попадают не только на анод, но и на сетки, если их потенциал положителен по отношению к катоду. Таким образом, возникают, помимо анодного тока, сеточные токи. Ток в цепи управляющей сетки обычно нежелателен. Он может быть устранен введением дополнительной батарейки (батарея смещения), плюс которой подается на катод, а минус — на управляющую сетку, как показано на рис. 117, 120.

В нашей стране первые радиолампы (триоды) были выпущены во время войны 1914—1917 гг. под руководством Н. Д. Папалекси. Огромное значение для развития советской радиотехники имели электронные лампы (в том числе мощные генераторные), разрабатывавшиеся и выпускавшиеся в знаменитой Нижегородской радиолaborатории им. Ленина, главным деятелем которой был выдающийся радиоинженер М. А. Бонч-Бруевич.

2. Усилители. Простейшее применение электронной лампы с тремя или большим числом электродов — ламповый усилитель. Мы рассмотрим два простейших типа лампового усилителя. Если  $u_g$  достаточно мало, можно считать, что

$$i_a = i_{a0} + Su_g,$$

где  $i_{a0}$ ,  $S$  — постоянные (замена реальной криволинейной характеристики прямой линией — касательной, см. пункт на рис. 119), откуда для напряжения  $u_R$  на сопротивлении  $R$  (рис. 121) получаем

$$u_R = Ri_a = Ri_{a0} + RSu_g.$$

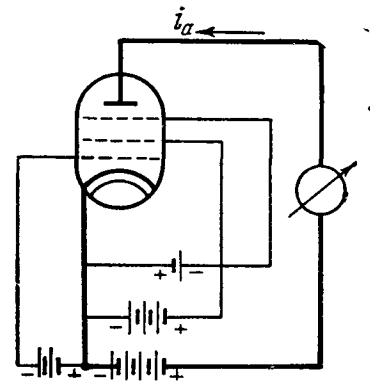


Рис. 120. Условное обозначение и схема включения пентода. Сетки (в порядке удаления от катода): управляющая, экранная, противодинаatronная.

Величина  $S$  (угловой коэффициент пунктирной прямой рис. 119) есть крутизна характеристики в точке  $u_g = 0$ .

Подведя ко *входу* усилителя переменное напряжение  $u_g$ , мы получим на *выходе* напряжение, имеющее переменную составляющую  $RSu_g$ .

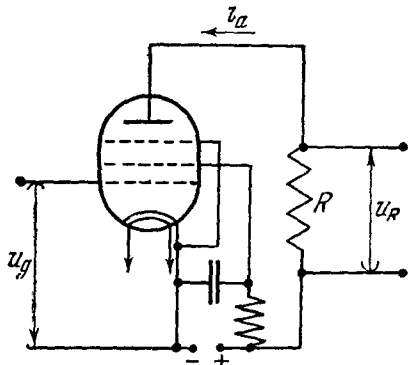


Рис. 121. Простейшая схема усилителя на пентоде. Напряжение на экранную сетку подается от анодной батареи (подключаемой к клеммам —, +).

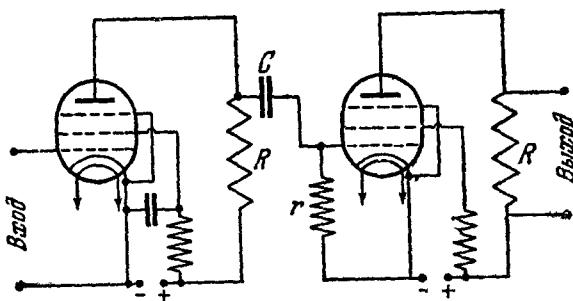


Рис. 122. Двухкаскадный усилитель на пентодах.  $r$  передает напряжение, усиленное первой лампой, на сетку второй лампы.  $C$  позволяет подавать на обе лампы анодное напряжение от одного источника.

Таким образом, здесь происходит усиление подводимого напряжения в  $RS$  раз. Например, при  $S = 2 \cdot 10^{-3} \text{ а/в}$ ,  $R = 5 \cdot 10^4 \text{ ом}$  получается усиление в 100 раз. Подведя с помощью подходящего переходного звена (рис. 122) напряжение с выхода устройства рис. 121 к выходу аналогичного устройства, мы получим «двухкаскадный» усилитель, усиливающий в  $100 \cdot 100 = 10\,000$  раз. Аналогично могут быть осуществлены усилители с большим числом каскадов.

В случае усилителя рис. 123 усиление синусоидального напряжения тем больше, чем ближе его частота к собственной частоте контура, включенного в анодную цепь (резонансный усилитель).

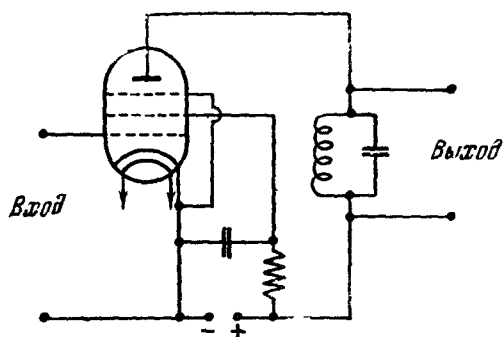


Рис. 123. Резонансный усилитель на пентоде.

## § 4. Ламповый генератор

**1. Предварительные замечания.** Электронная лампа и «катушка обратной связи» позволяют аккумуляторной батарее поддерживать колебания в контуре  $L, C$  (рис. 124), подобно тому как ходовое колесо и анкер позволяют гире поддерживать колебания маятника.

Если бы мы заставили гирю вращать непосредственно ось маятника, мы получили бы одностороннее вращение под действием постоянного момента. Точно так же, замкнув батарею непосредственно на контур, мы получили бы постоянный ток. Но маятник посредством анкера и ходового колеса сам управляет моментом, с которым на него действует гиря, и превращает его из постоянного в периодически меняющийся. Подобно этому посредством лампы колебательный контур при наличии в нем колебаний заставляет пульсировать разрядный ток батареи; вследствие этого катушка обратной связи наводит в контуре переменную э. д. с., поддерживающую колебания в контуре. Эта переменная э. д. с. исчезнет, если мы прекратим каким-либо способом колебания в контуре (например, введя в него большое сопротивление). Этого не было бы, если бы переменное воздействие задавалось посторонним источником.

2. Принцип лампового генератора. Схема, представленная на рис. 124, — одна из простейших схем лампового генератора. На ней отчетливо выступает принцип действия, общий для обширного класса схем. Колебательный контур включен между сеткой и катодом, и сеточное напряжение равно, таким образом, напряжению на конденсаторе колебательного контура

$$u_g = \frac{q}{C}.$$

Будем считать, что при данной температуре катода анодный ток есть функция только сеточного напряжения (т. е. не зависит от анодного напряжения):

$$i_a = f(u_g) = f\left(\frac{q}{C}\right). \quad (4.1)$$

В случае триода (рис. 124) это (как мы знаем) — довольно грубая идеализация. Но если заменить триод пентодом (рис. 125), — это условие очень хорошо выполняется.

Представим себе сначала, что будет, если мы развяжем цепи анода и сетки, выкинув катушку обратной связи (рис. 126). Предположим, что в контуре в результате какого-нибудь маленького начального толчка \*) начались колебания. Тогда заряд на конденсаторе и пропорциональное ему напряжение на сетке будут меняться так, как показано на рис. 127, а (изображенный на нем промежуток времени настолько мал по сравнению

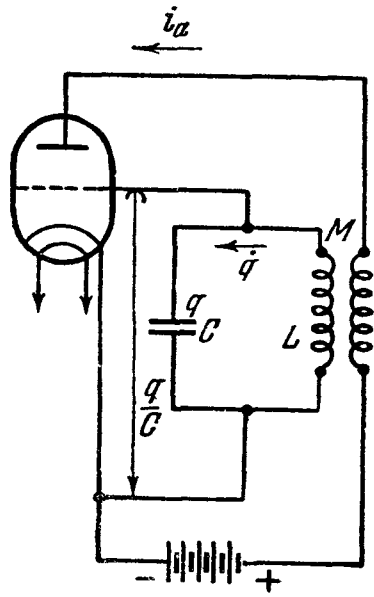


Рис. 124. Одна из простейших схем лампового генератора. В цепи анода — катушка обратной связи.

напряжением на сетке будут меняться так, как показано на рис. 127, а (изображенный на нем промежуток времени настолько мал по сравнению

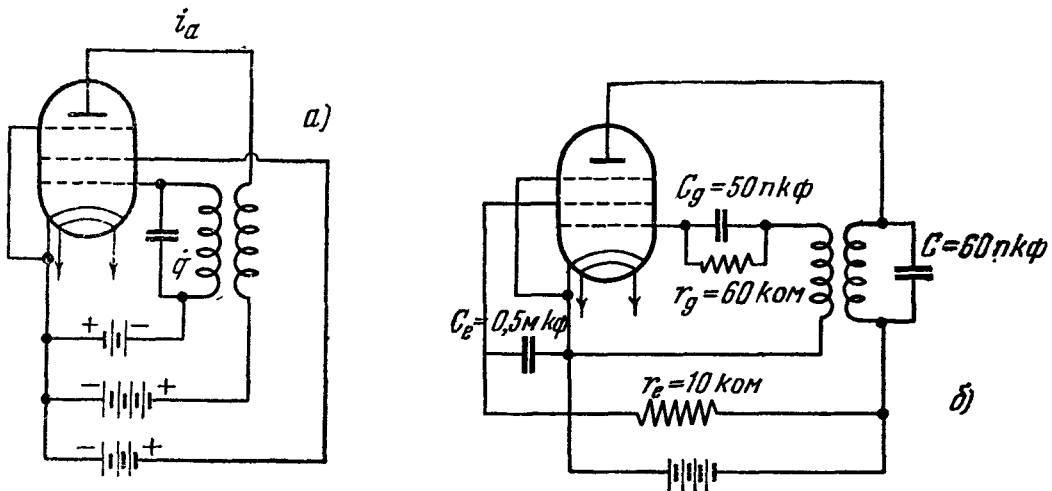


Рис. 125. Пентодный генератор: а — простейшая принципиальная схема; б — пример реальной схемы: сеточная батарея заменена сопротивлением  $r_g$ ; благодаря текущему по нему сеточному току  $i_g$  сетка получает отрицательный потенциал  $-r_g i_g$  по отношению к катоду. Напряжение на экранную сетку подается от анодной батареи; оно ниже напряжения анода на величину  $r_e i_e$  ( $i_e$  — ток в цепи экранной сетки). Конденсаторы  $C_g, C_e$  замыкают практически накоротко сопротивления  $r_g, r_e$  для колебательных токов, создаваемых генератором. Значения параметров рассчитаны на получение частоты около 30 килогерц. 1 ком (килоом) =  $10^3$  ом, 1 пкф (пикофарада) =  $10^{12}$  фарад.

с  $1/\delta$ , что затухание незаметно). Анодный ток будет меняться так, как показано на рис. 127, в, который легко построить, рассматривая одновременно

\*) Такие толчки неизбежны хотя бы из-за флуктуаций (ср. гл. III, § 9 и гл. X).

график зависимости сеточного напряжения от времени и характеристику лампы (рис. 128). Теперь становится ясным, каким образом под действием колебаний в контуре анодный ток, поддерживаемый источником постоянной электродвижущей силы, также начинает периодически изменяться со временем, о чем уже было сказано в п. 1.

Вернемся к схеме рис. 124 или 125: теперь анодный ток, меняющийся в соответствии с рис. 127, в, оказывает *обратное действие* на контур, вызывая в нем появление электродвижущей силы индукции (отсюда название — обратная связь),

$$e = -M \frac{di_a}{dt},$$

где  $M$  — взаимная индуктивность цепей анода и сетки.

Если, как показано на рис. 128, характеристика лампы близка к  $Z$ -характеристике, осциллограмма анодного тока имеет вид, показанный на рис. 127, в. Его производная, а следовательно, и пропорциональная ей э. д. с.  $e$ , представляет собой последовательность кратковременных импульсов чередующегося знака.

Предположим сначала, что если принять за положительные направления токов  $i_a$  и  $q$ , показанные стрелками на рис. 124, взаимная

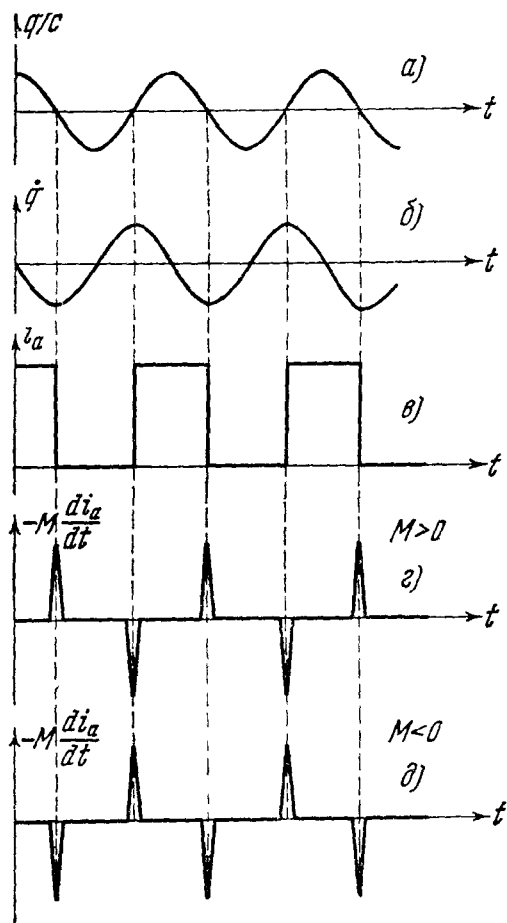


Рис. 127. Осциллограммы: а — сеточного напряжения; б — тока в колебательном контуре; в — анодного тока; г — э. д. с. обратной связи при  $M > 0$ ; д — э. д. с. обратной связи при  $M < 0$ .

индуктивность  $M$  положительна\*), т. е., например, что катушки намотаны и включены так, как показано на рис. 129, а. Положительный толчок будет

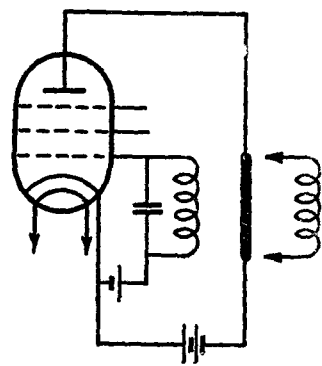


Рис. 126. Устранение обратной связи.

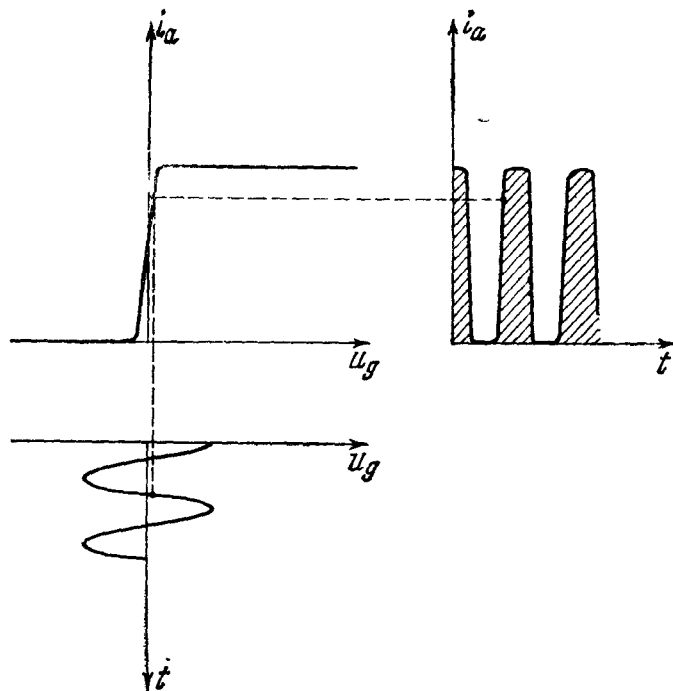


Рис. 128. Построение осциллограммы анодного тока, соответствующей синусoidalному изменению напряжения на управляющей сетке при заданной характеристике лампы.

\*) Понятие «знак взаимной индуктивности» имеет смысл только, если определены положительные направления токов в обеих катушках.

действовать на контур  $LC$  тогда, когда  $\dot{q}$  (сила тока в контуре) отрицательна, и наоборот (рис. 127,  $\varepsilon$ ). Картина на фазовой плоскости будет иметь вид,

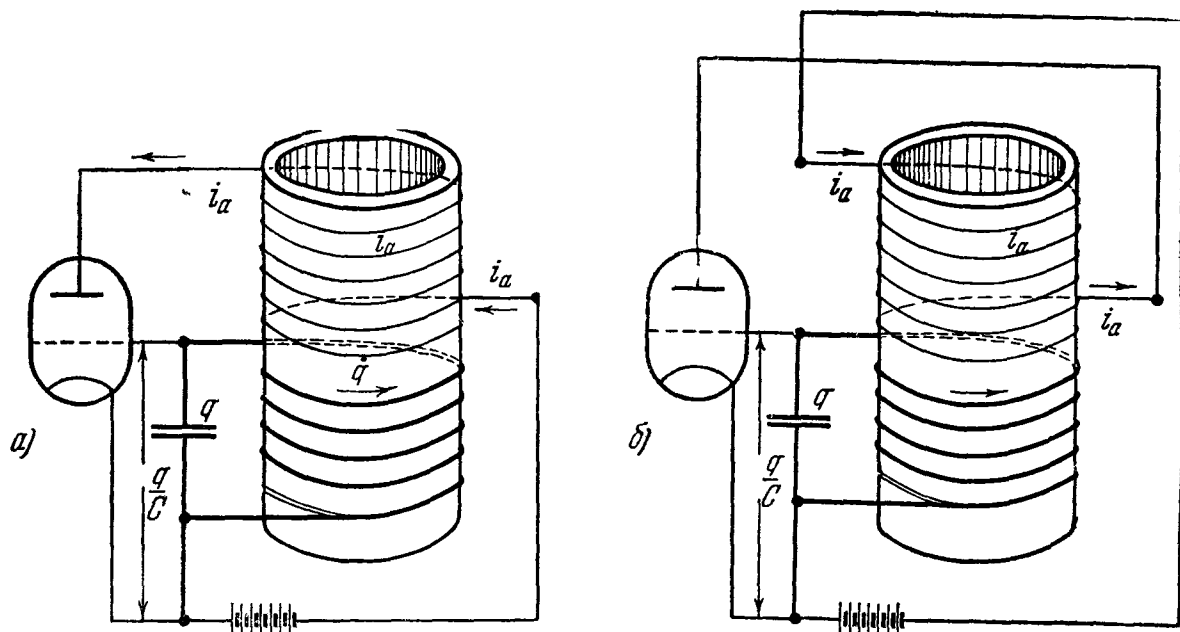


Рис. 129.  $a$ —схема не может генерировать:  $M > 0$ ;  $b$ —схема генерирует:  $M < 0$ .

показанный на рис. 130: в результате толчков колебания не только не будут нарастать, но будут затухать еще быстрее, чем без обратной связи.

Схема «не генерирует». Но если мы перепаяем «концы» катушки обратной связи в соответствии с рис. 129,  $b$ , то этим мы изменим знак взаимной индуктивности. Теперь  $M < 0$ , толчки имеют тот же знак, что ток  $\dot{q}$  в момент толчка (рис. 127,  $\partial$ ). Происходит раскачивание колебаний толчками — то же, что в часах (рис. 115, где теперь следует заменить обозначения  $\theta$ ,  $\dot{\theta}/\omega_0$  на  $q$ ,  $\dot{q}/\omega_0$ ).

Изображающая точка на фазовой плоскости движется по раскручивающейся траектории, наматывающейся на предельный цикл. (Если в начальный момент почему-либо в контуре уже существует большой заряд или ток, траектория скручивается к предельному циклу.) Устанавливаются автоколебания. Схема «генерирует». Это легко обнаружить опытами, описанными в гл. I, § 1. В действительности, разумеется, предельный цикл — непрерывная кривая (рис. 130).

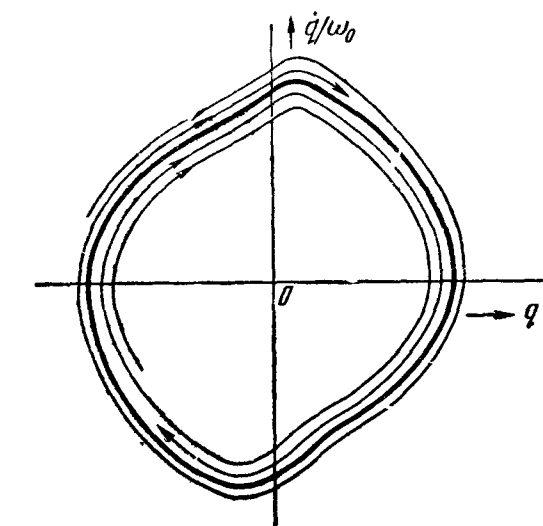


Рис. 130. Один из возможных видов предельного цикла лампового генератора. Предельный цикл можно увидеть на экране электронного осциллографа, подав на отклоняющие конденсаторы напряжения  $q/C$  с конденсатора колебательного контура и  $R\dot{q}$  с последовательно включенного с ним сопротивления.

**3. Упрощенный аналитический разбор.** Дифференциальное уравнение нашего лампового генератора имеет вид

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = -M \frac{di_a}{dt}$$

или

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = |M| \frac{di_a}{dt}, \quad (4.2)$$

так как согласно сказанному в п. 2.  $M = -|M| < 0$ . Анодный ток  $i_a$  есть функция сеточного напряжения, равного в данном случае  $q/C$ ; ее графическим изображением является характеристика лампы.

Уравнение (4.2) нелинейно, так как  $i_a$  не является линейной функцией от  $u_g = q/C$ , а следовательно, и от  $q$ .

Когда зависимость  $i_a$  от  $u_g$  изображается  $Z$ -характеристикой, задача аналогична рассмотренной в § 2, п. 3, если ввести обозначение  $p = \frac{\dot{q}}{\omega_0}$ .

Абсолютная величина  $P$  приращения  $p$  в результате отдельного индукционного толчка выражается на основании закона индукции (ср. гл. III, § 2, п. 5) формулой

$$P = \frac{|M| I_s}{L \omega_0}.$$

Радиус предельного цикла, т. е. амплитуда стационарных автоколебаний, выражается и здесь формулой

$$p^* = \frac{P}{1 - e^{-d}}.$$

Амплитуда автоколебаний тем больше, чем меньше  $d$  и чем больше  $P$ , т. е. чем больше обратная связь и ток насыщения. Чем меньше  $d$ , тем меньше предельный цикл отличен от окружности, т. е. тем ближе автоколебания к синусоидальным колебаниям (ср. § 2, п. 3).

Если  $d \ll 1$ , имеем приближенно

$$p^* = \frac{P}{d} = \frac{Q}{\pi} P,$$

где  $Q$  — добротность колебательного контура. При этом амплитуда напряжения на конденсаторе

$$U = \frac{QP}{\pi C} = \frac{Q}{\pi} \omega_0 |M| I_s.$$

**4. Почему существенна нелинейность.** Вследствие нелинейности характеристик лампы дифференциальное уравнение лампового генератора нелинейно. Но насколько *существенна* эта нелинейность? В случае усилителя мы заменяли (считая напряжение на входе малым) реальную характеристику лампы прямой линией. Нельзя ли построить приближенную теорию также и автоколебаний лампового генератора, заменив характеристику прямой линией, а следовательно, нелинейное дифференциальное уравнение — линейным?

На этот вопрос нужно ответить решительным *нет*. Действительно, пренебрежем нелинейностью уравнения (4.2), т. е. примем, как в § 3, п. 2, что  $i = i_{a0} + Su$ , где  $S$  — постоянная. Мы получим вместо (4.2) линейное уравнение

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = |M| S \frac{\dot{q}}{C}$$

или

$$\ddot{q} + 2\delta'\dot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad (4.3)$$

где

$$2\delta' = \frac{R - \frac{|M|S}{C}}{L}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}. \quad (4.3a)$$

Согласно гл. III решение уравнения (4.3) имеет вид (считаем, что  $\delta'^2 < \omega_0^2$ )

$$q = Ae^{-\delta't} \cos(\omega t - \varphi). \quad (4.4)$$

Это решение изображает колебание постоянной амплитуды только при

$$\delta' = 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{|M|S}{C} = R,$$

когда уравнение (4.3) превращается в

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0. \quad (4.5)$$

Но это решение совершенно не передает важнейших характерных свойств лампового генератора: колебания с постоянной амплитудой в ламповом генераторе возможны — в противоречии с (4.4) — не только при *одном* определенном значении  $\delta'$ , а в *целой области* значений  $\delta'$ , а именно, во всей области  $\delta' < 0$ ; амплитуда их *не* зависит от начальных условий, между тем как решениями уравнения (4.5) являются незатухающие колебания с *произвольной* амплитудой (ср. гл. III).

Вместе с тем, как мы видели, можно правильно передать оба эти свойства с помощью нелинейного уравнения. Поэтому всякая «точная» или приближенная теория, правильно передающая характерные черты автоколебательной системы, является нелинейной теорией.

Приведенная здесь трактовка схематизированного лампового генератора была дана А. А. Андроновым, открывшим связь между математическим понятием предельного цикла и физическим явлением автоколебаний. Впоследствии А. А. Андронов и его сотрудники (А. Г. Майер, Н. Н. Баутин) с помощью математических методов, элементарное представление о которых дают §§ 2, 3, смогли решить ряд весьма сложных задач теории нелинейных колебаний. Речь идет о теории часов, учитывающей (в отличие от § 2) «обратное действие» маятника на часовой механизм, а также о теории устройств, применяемых в технике для автоматического регулирования, основанной в 1876 г. И. А. Вышнеградским в получившей мировую известность работе «О регуляторах прямого действия»\*).

Здесь следует отметить большой размах и высокий научный уровень исследований по теории нелинейных колебаний, ведущихся в Советском Союзе\*\*). Среди математиков и физиков, работающих в этой области, назовем Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова (количественные математические методы), Б. В. Булгакова (теория автоматического регулирования), Ю. Б. Кобзарева (нелинейные системы в радиотехнике), К. Ф. Теодорчика (энергетическая трактовка нелинейных систем), С. М. Рытова (стабилизация частоты автоколебаний\*\*\*)).

**5. Синхронизация автоколебаний.** Если на ламповый генератор действует внешняя периодическая э. д. с., наступает замечательное явление. Пусть период  $T_0$  автоколебаний (в отсутствие внешней э. д. с.) *близок* к целому кратному  $nT$  периода внешней э. д. с. ( $n$  — целое). Тогда под действием внешней э. д. с. колебания происходят уже не с периодом  $T_0$ , а с периодом, в *точности равным*  $nT$ . Это явление называется *синхронизацией* генератора.

\*) Речь идет в этой работе об обычных центробежных регуляторах. В результате взаимодействия регулятора и машины могут возникать автоколебания, избежать которых — главная задача инженера, конструирующего регулятор.

\*\*) См., например, фундаментальную книгу А. А. Андропова и С. Э. Хайкина «Теория колебаний», 1937.

\*\*\*)) Частота автоколебаний лампового генератора зависит прежде всего от  $L$  и  $C$ . Как показывает более полное исследование, она зависит также от  $R$  и режима работы лампы. Случайные изменения температуры контура (при этом из-за изменения его геометрических размеров меняются  $L$  и  $C$ ) и питающих напряжений вызывает заметные изменения частоты автоколебаний. Их удастся существенно ослабить (стабилизация частоты), введя в схему генератора дополнительный гармонический осциллятор очень большой добротности — пьезокварцевую пластинку (см. гл. VI).



Подобное явление наблюдается во всякой автоколебательной системе, подвергающейся периодическому внешнему воздействию, например в часах, укрепленных на колеблющейся подставке, или в органной трубе, на которую действует другой источник звука.

Синхронизация в автоколебательной системе наблюдается и тогда, когда отношение  $T_0: T$  близко к отношению двух не слишком больших целых чисел  $n, m$ ; период автоколебательной системы принимает при этом значение, равное точно  $(n/m) T_0$ , например  $(3/2) T$  при  $n = 3, m = 2$ .

## § 5. Условие самовозбуждения. Регенерация.

1. Электрический пример. Как здесь подчеркивалось, главные свойства автоколебательной системы может отобразить только нелинейная теория. Этому не противоречит то, что некоторые вопросы, имеющие отношение к автоколебаниям, могут быть решены с помощью линейных уравне-

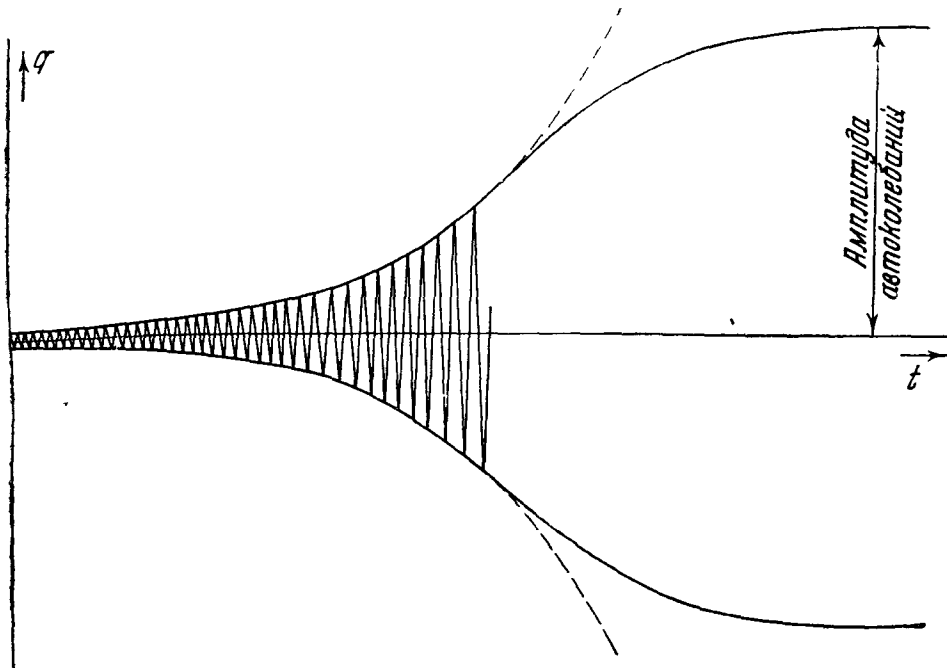


Рис. 131. Нарастание колебаний при  $\delta' < 0$ . Пунктиром показано, как шло бы нарастание при линейной характеристике крутизны  $S$ .

ний. Так, например, пока колебания в контуре очень малы и нет заметного отличия между характеристикой лампы и ее касательной, приблизительно справедливо линейное уравнение (4.3), где  $2, \omega_0^2$  определяются соотношениями (4.3а). Здесь, наоборот, не годится в качестве идеализации  $Z$ -характеристика. Уравнения (4.3), (4.3а), (4.4) показывают, что если

$$\frac{|M|S}{C} < R, \quad (4.6)$$

колебания в контуре затухают ( $\delta' > 0$ ), а если

$$\frac{|M|S}{C} > R, \quad M < 0, \quad (4.7)$$

— нарастают ( $\delta' < 0$ , рис. 131). Неравенство (4.7) называется *условием самовозбуждения* лампового генератора. Если оно выполнено, колебания, нарастая, перестают быть малыми, и уравнение (4.3) теряет силу. Дальнейшее нарастание и, в частности, *установление* стационарных автоколебаний могут быть описаны только нелинейными уравнениями\*).

\*) Мы считаем, что  $\delta'^2 < \omega_0^2$ . Автоколебания устанавливаются и при  $\delta' < 0, \delta'^2 > \omega_0^2$ , но установление носит другой характер.

Если имеет место неравенство (4.6), малые колебания затухают пропорционально  $e^{-\frac{R - \frac{|M|S}{C}}{L}t}$ , т. е. медленнее, чем в отсутствие обратной связи. Это ослабление затухания малых колебаний обратной связью называется *регенерацией* колебательного контура.

При регенерации «эффективная добротность контура»

$$Q' = \frac{1}{R - \frac{|M|S}{C}} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

больше, чем истинная добротность контура  $Q = (\sqrt{L/C})/R$ . Его резонанс острее (при достаточно малых амплитудах внешней э. д. с.), чем в отсутствие обратной связи.

2. Механический пример. Среди разнообразных исследований Н. Е. Жуковского (1847—1921), известного, прежде всего, как основателя теории полета, имеется работа\*), посвященная колебаниям маятника, насаженного с помощью муфты на равномерно вращающийся вал (рис. 132, а). Интерес задачи связан с тем обстоятельством, что трение между валом и муфтой (как и всякое трение между твердыми телами) уменьшается в известных пределах) с ростом их относительной скорости.

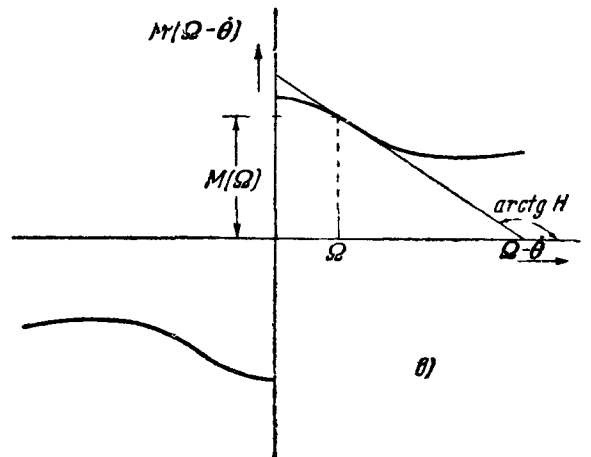
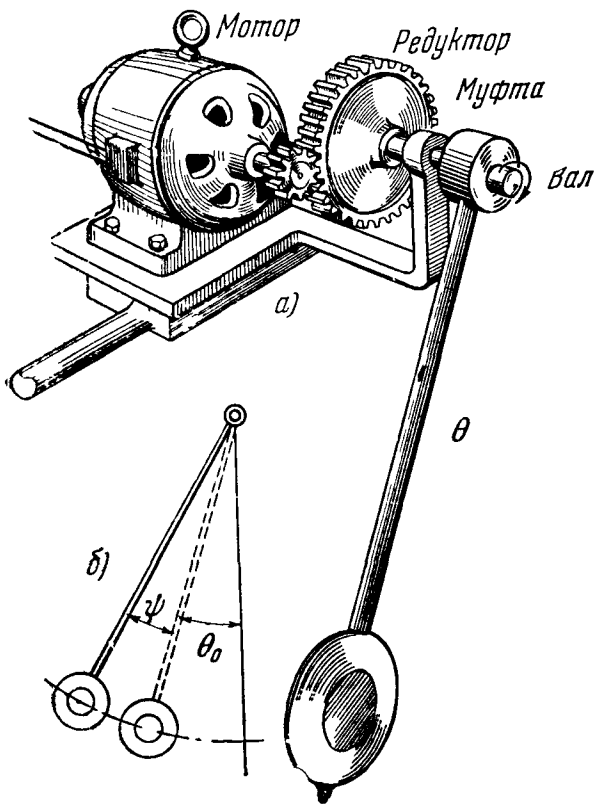


Рис. 132. а—маятник, скрепленный с муфтой, насаженной на равномерно вращающийся вал; б—схема; в—характеристика трения и ее касательная в точке, соответствующей положению равновесия маятника.

Уравнение движения маятника (рис. 132, б) имеет вид

$$J\ddot{\theta} + h\dot{\theta} + mgl\theta = M(\Omega - \dot{\theta}), \quad (4.8)$$

где  $M(\Omega - \dot{\theta})$  — момент сил трения в муфте, разность  $\dot{\theta} - \Omega$  ( $\Omega$  — угловая скорость вала) — относительная угловая скорость маятника и вала.

Определим, прежде всего, положение равновесия маятника. При равновесии  $\theta = \theta_0 = \text{const}$ ,  $\dot{\theta} = 0$ ,  $\ddot{\theta} = 0$  и, следовательно,

$$mgl\theta_0 = M(\Omega), \quad \theta_0 = \frac{M(\Omega)}{mgl}, \quad (4.9)$$

маятник отклонен от вертикали в сторону вращения вала.

\*) Н. Е. Жуковский, Полное собрание сочинений, т. I, 1937, стр. 379—383.

Рассмотрим теперь колебания около положения равновесия  $\theta_0$ . Положим для этого

$$\theta = \theta_0 + \psi, \text{ причем } \dot{\theta} = \dot{\psi}. \quad (4.10)$$

Здесь  $\psi$  — отклонение от положения равновесия.

Подставляя (4.10) в (4.8) и учитывая (4.9), имеем:

$$J\ddot{\psi} + h\dot{\psi} + mgl\psi = M(\Omega - \dot{\psi}) - M(\Omega). \quad (4.11)$$

Пока  $\dot{\psi}$  мало, имеем приближенно:

$$M(\Omega - \dot{\psi}) = M(\Omega) - H\dot{\psi}, \quad (4.12)$$

где  $H$  — крутизна характеристики трения (угловой коэффициент ее касательной) при  $\dot{\theta} = \Omega$  (рис. 132, *в*), или, так как  $H$  отрицательно,

$$M(\Omega - \dot{\psi}) = M(\Omega) + |H|\dot{\psi}.$$

Подставляя (4.12) в (4.11), получаем:

$$J\ddot{\psi} + \{h - |H|\}\dot{\psi} + mgl\psi = 0. \quad (4.13)$$

Если  $h > |H|$ , происходят затухающие колебания, но затухание *меньше*, чем если бы маятник находился на подвесе без трения (регенерация). Если  $h < |H|$ , происходит постепенное увеличение амплитуды колебаний. Если  $h$  очень близко к  $|H|$ , то колебания маятника затухают или нарастают очень медленно (начиная с амплитуды, определяемой начальными условиями). Этот случай и интересовал, прежде всего, Н. Е. Жуковского.

При  $h < |H|$  нарастание колебаний происходит до тех пор, пока не установятся вследствие *нелинейности* характеристики трения стационарные автоколебания, амплитуда которых не зависит от начальных условий. Это явление было подробно исследовано С. П. Стрелковым.

**3. Резонанс  $n$ -го рода.** Под действием периодической внешней э. д. с. в регенерированной системе происходит явление, находящееся в некотором родстве с явлением синхронизации (§ 4, п. 5). Оно заключается в следующем. Пусть в схеме рис. 124, 125 (или ей аналогичной) обратная связь слишком мала для существования автоколебаний. При действии на колебательный контур внешней э. д. с. частоты  $\omega$ , близкой к  $n\omega_0$  ( $n$  — целое,  $\omega_0$  — собственная частота контура), могут при определенных условиях возбуждаться сильные колебания частоты, равной в точности  $\omega/n$ . Это явление, открытое Л. И. Мандельштамом и Н. Д. Папалекси, было названо ими резонансом  $n$ -го рода.

## § 6. Автоколебательные системы, не содержащие гармонических осцилляторов

**1. Предварительные замечания.** Маятник часов,  $LC$ -контур лампового генератора являются гармоническими осцилляторами. Они могут совершать колебания в отсутствие часового механизма или электронной лампы. Последние нужны для того, чтобы превратить колебания из затухающих в незатухающие, в автоколебания. Но не следует думать, что всякая автоколебательная система построена по такому же образцу, т. е. содержит в качестве существенной части гармонический осциллятор. Так, например, многие акустические автоколебательные системы работают совсем

иначе. Здесь будет идти речь о некоторых автоколебательных системах без колебательных контуров, употребляемых в радиофизике и радиотехнике. Такие системы используются, в частности, в качестве генераторов пилообразных автоколебаний, входящих в состав электронных осциллоскопов.

**2. Простейшая схема с неоновой лампой.** Неоновая лампа имеет нелинейную характеристику, вид которой показан на рис. 133, а. При

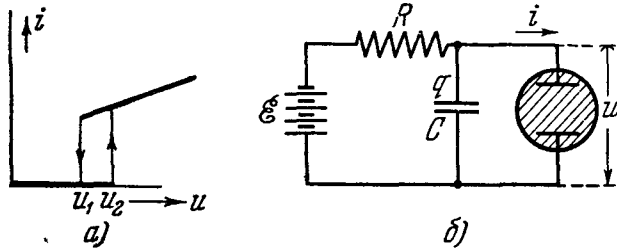


Рис. 133. Простейшая автоколебательная система с неоновой лампой: а—характеристика лампы; б—схема включения.

повышении приложенного к ней напряжения  $u$  лампа начинает проводить ток и «зажигается», т. е. в ней возникает разряд (она светится при этом красным светом) при  $u = u_2$ . При понижении напряжения до значения  $u = u_1$  ток прекращается и лампа гаснет ( $u_2 > u_1$ ).

Соберем схему рис. 133, б, причем э. д. с. батареи больше потенциала зажигания лампы  $u_2$ . Сначала приходится зарядка конденсатора и напряжение на нем  $u = q/C$ , равное напряжению на неоновой лампе, растет согласно уравнению

$$R\dot{q} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}, \text{ или } RC\dot{u} + u = \mathcal{E}.$$

Решение, удовлетворяющее начальному условию  $u = 0$  при  $t = 0$ :

$$u = \mathcal{E} (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (4.14)$$

(рис. 134, кривая а). Величина  $RC$  называется *временной постоянной* цепи  $R, C$ . Как только  $u$  достигает значения  $u_2$ , лампа зажигается. Если  $R$  велико, потенциал конденсатора будет падать (кривая б, разрядный ток через лампу будет значительно превышать ток, подводимый от аккумулятора). Через некоторое время  $u$  упадет до значения  $u_1$  и лампа погаснет. Тогда снова конденсатор начнет заряжаться, в момент достижения потенциала  $u_2$  лампочка снова вспыхнет и т. д. Дальше все будет повторяться периодически. Получается осциллограмма напряжения, начало которой показано на рис. 134. Если период — порядка секунды или больше, мы видим короткие вспышки света, разделенные более продолжительными паузами. Уменьшая  $R$  или  $C$ , можно сделать период гораздо короче, так что глаз уже не будет различать отдельных вспышек.

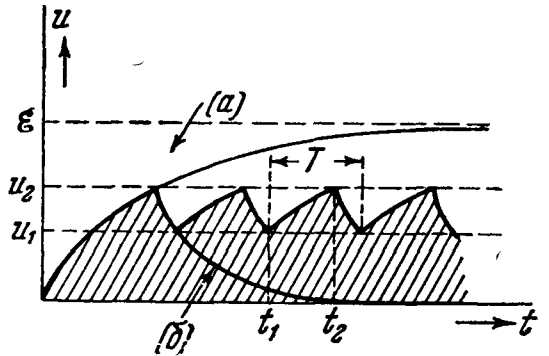


Рис. 134. Установление автоколебаний в схеме рис. 133: (а) изображает зарядку конденсатора при отключенной неоновой лампе, (б) разряд конденсатора через линейное сопротивление.

Нетрудно подсчитать приближенно период  $T$  автоколебаний (при установившемся процессе).

Обозначим  $t_1, t_2$  время начала и конца одного из процессов зарядки конденсатора (рис. 134). Имеем (сдвинув соответственно начало счета времени):

$$u_1 = \mathcal{E} (1 - e^{-\frac{t_1}{RC}}), \quad u_2 = \mathcal{E} (1 - e^{-\frac{t_2}{RC}}),$$

откуда

$$t_1 = -RC \ln \left( 1 - \frac{u_1}{\mathcal{E}} \right), \quad t_2 = -RC \ln \left( 1 - \frac{u_2}{\mathcal{E}} \right),$$

$$t_2 - t_1 = RC \left[ \ln \left( 1 - \frac{u_1}{\mathcal{E}} \right) - \ln \left( 1 - \frac{u_2}{\mathcal{E}} \right) \right].$$

Если вспышка неоновой лампы занимает небольшую часть периода, эта величина равна приблизительно периоду и, следовательно,

$$T = RC \ln \frac{\mathcal{E} - u_1}{\mathcal{E} - u_2}. \quad (4.15)$$

Здесь особенно важно отметить, что период пропорционален временной постоянной  $RC$ .

**3. Пилообразные автоколебания с линейным законом нарастания.** Колебания схемы рис. 133 пилообразны, но зубья пилы — не прямые. Напряжение растет не пропорционально времени. Для электронного осцил-

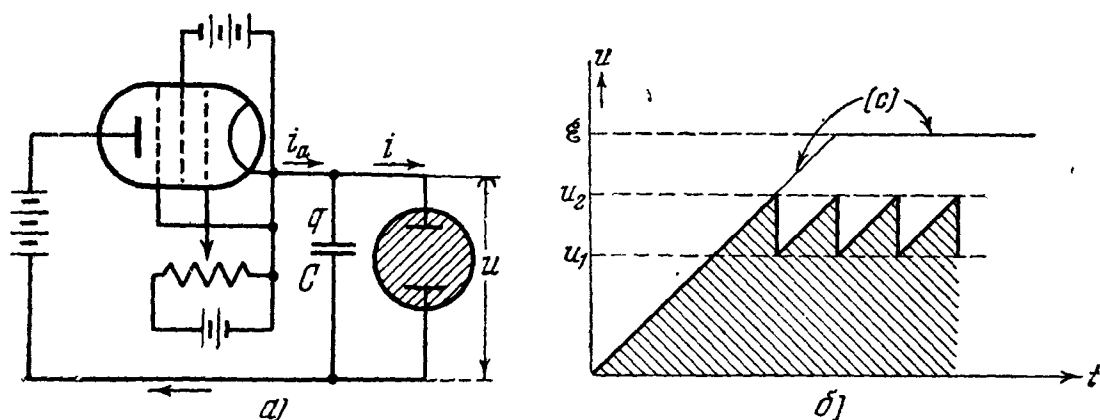


Рис. 135. а—схема, отличающаяся от рис. 133 заменой сопротивления  $R$  пентодом; б—установление автоколебаний в схеме. Ломаная (с) изображает зарядку конденсатора при отключенной неоновой лампе.

лоскопа необходима линейная развертка — пилообразное напряжение, изменяющееся со временем, на протяжении каждого зуба, по *линейному* закону. Такое напряжение можно получить, например, введя в схему подходящий второй нелинейный элемент (первым нелинейным элементом является неоновая лампа). В схеме рис. 135, а таким элементом является пентод, через который течет ток, практически не зависящий, как мы знаем (§ 3), от анодного напряжения. Поэтому конденсатор заряжается по закону

$$q - q_1 = i_a t,$$

откуда

$$u - u_1 = \frac{i_a}{C} t,$$

где  $i_a$  — анодный ток пентода,  $t$  — время, протекшее с момента, когда

$$u = u_1, \quad q = q_1.$$

Напряжение на конденсаторе растет пропорционально времени. По достижении значения  $u = u_2$  неоновая лампа вспыхивает, конденсатор быстро разряжается до  $u = u_1$  и т. д., — все происходит качественно так же, как в схеме рис. 134. Процесс показан на рис. 135, б.

Пренебрегая временем разряда через неоновую лампу, получаем для периода автоколебаний  $T$  уравнение

$$u_2 - u_1 = \frac{i_a}{C} T,$$

откуда

$$T = C \frac{u_2 - u_1}{i_a}. \quad (4.16)$$

Период можно изменить, варьируя  $C$  или  $i_a$ . Последнее достигается изменением (с помощью потенциометра) напряжения на управляющей сетке пентода.

4. *RC*-генераторы и *RC*-фильтры. Было бы ошибкой полагать, что автоколебания, близкие к синусоидальным, могут возникнуть только в автоколебательных системах, содержащих гармонический осциллятор большой добротности (*LC*-генераторы). В радиофизике и радиотехнике

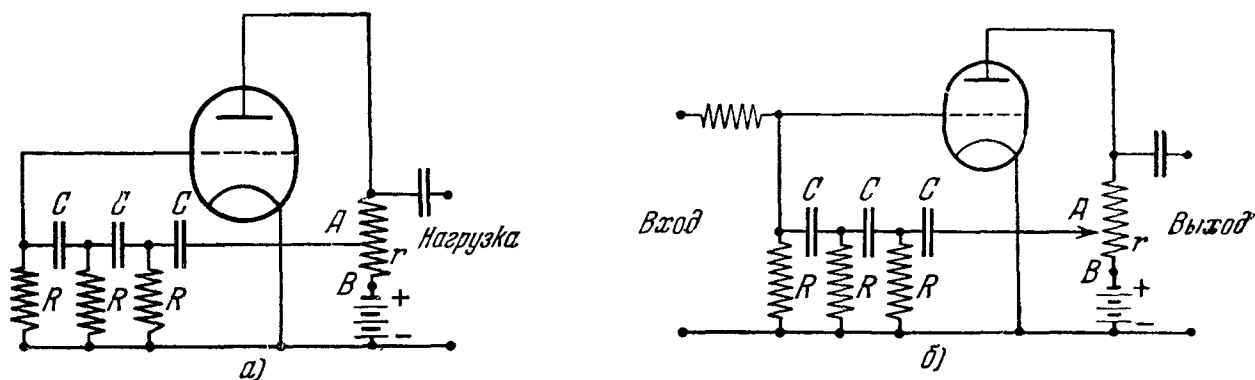


Рис. 136. а—*RC*-генератор; б—*RC*-фильтр.

все большее значение приобретают так называемые *RC*-генераторы синусоидальных колебаний. Одна из схем такого генератора показана на рис. 136, а. При надлежащем выборе параметров (а именно  $Sr > 29$ , где  $S$  — крутизна характеристики в амперах на вольт,  $r$  — сопротивление в омах между точками А, В) здесь происходят практически синусоидальные автоколебания частоты  $\omega = 1/(\sqrt{6}RC)$ .

Амплитуда автоколебаний определяется параметрами  $R$ ,  $r$  и характеристикой лампы. Такие *RC*-генераторы особенно удобны для получения большого диапазона частот — от нескольких герц до нескольких килогерц. (Получение очень низких частот с помощью *LC*-генераторов весьма неудобно, так как требует очень громоздких катушек.)

При соответствующем выборе параметров (при  $Sr < 29$ ) схема рис. 136, а превращается из автоколебательной в регенерированную систему, свойства которой аналогичны свойствам систем, рассмотренным в § 5. Так, схема, показанная на рис. 136, б, ведет себя по отношению к внешней э. д. с., подведенной к входным клеммам, как колебательный контур с большой добротностью. Такие системы называются *RC*-фильтрами и широко используются в различных радиотехнических устройствах.

Подробный анализ *RC*-генераторов и *RC*-фильтров выходит за рамки этой книги.

5. Синхронизация пилообразных колебаний. В генераторах автоколебаний, близких к синусоидальным (например, ламповом генераторе с контуром большой добротности), при больших  $n$  (см. § 4, п. 5) интервал синхронизации (интервал значений  $T_0$ , в котором происходит синхронизация) чрезвычайно узок, вследствие чего синхронизация трудноосуществима.

В генераторах пилообразных колебаний можно легко наблюдать синхронизацию даже при  $n$  порядка нескольких сотен. Это обстоятельство

имеет большое значение в измерительной технике (для точного сравнения периодов автоколебательных систем в случае, когда периоды — величины различного порядка).

Синхронизация генератора пилообразных автоколебаний применяется в электронных осциллоскопах для получения неподвижной картины: исследуемая периодическая э. д. с. (периода  $T$ ) синхронизирует генератор развертки, предварительно настроенный поворотом соответствующей ручки управления на период, близкий целому кратному  $T$ .

## § 7. Выпрямление колебаний

**1. Предварительные замечания.** Весьма важными и вместе с тем наиболее простыми по своему принципу нелинейными системами являются *выпрямители* — устройства для преобразования колебательного (чаще всего синусоидального) напряжения в постоянное напряжение. В большинстве современных радиоустройств постоянное напряжение подается на аноды и сетки ламп не от источников постоянной э. д. с. (аккумуляторов или элементов), а от сети переменного тока, через посредство выпрямителей. Выпрямители широко применяются во всевозможных электротехнических установках.

**2. Простейшая схема диодного выпрямителя.** Простейшая схема выпрямителя изображена на рис. 137, *а*. К диоду подводится синусоидальное напряжение

$$u = A \cos \omega t. \quad (4.17)$$

Если амплитуда этого напряжения достаточно велика, можно пользоваться той идеализацией характеристики диода, которая показана на

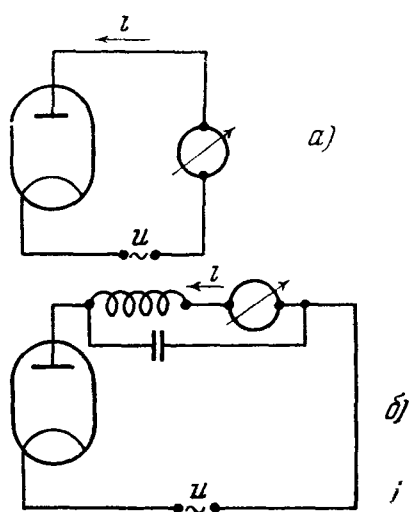


Рис. 137. *а*—диодный выпрямитель; *б*—то же с фильтрующим контуром.

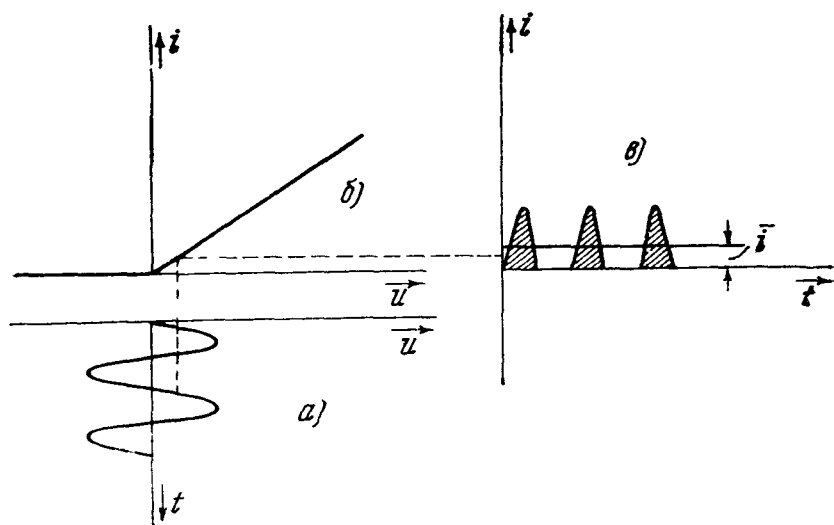


Рис. 138. Действие диодного выпрямителя. *а*—осциллограмма подводимого напряжения; *б*—идеализированная характеристика диода; *в*—осциллограмма тока в схеме рис. 137, *а*.

рис. 138, *б*. Пользуясь этой идеализацией, мы получаем для анодного тока осциллограмму рис. 138, *в*. Этот ток можно представить как сумму постоянного тока, равного среднему значению  $\bar{i}$ , и тока, колеблющегося с периодом  $T$ . Можно сгладить колебания тока около его среднего значения (т. е. получить ток, близкий к постоянному) с помощью подходящего фильтра, т. е. комбинации емкостей и индуктивностей или емкостей и сопротивлений (простейшая схема показана на рис. 137, *б*).

**3. Двухтактная схема.** Работу схемы рис. 139 поясняет рис. 140. «Положительные» полупериоды проходят через один диод, «отрицательные» — через другой. Здесь фильтрацию легче осуществить, так как переменная слагающая тока имеет вдвое более короткий период и меньше по величине, чем в «однотактной» схеме рис. 137. Широко применяются *двойные диоды* — лампы, где оба диода смонтированы в одном баллоне.

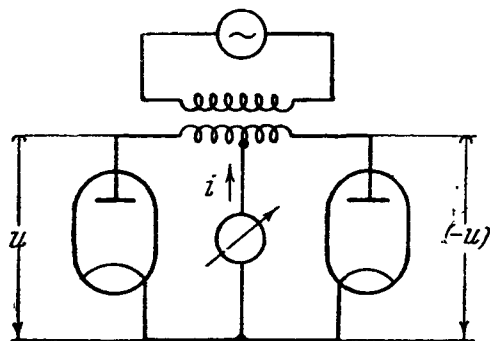


Рис. 139. Схема двухтактного диодного выпрямителя.

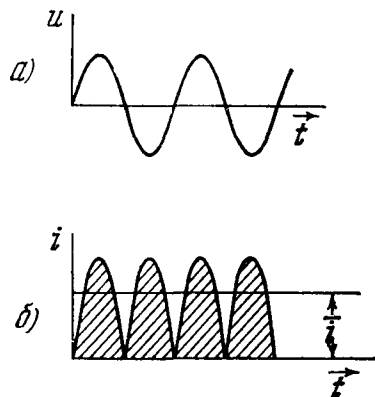


Рис. 140. Осциллограммы: а—напряжения, б—тока в схеме рис. 139.

**4. Схема с пентодом.** «Линейное» выпрямление. Полный анализ процесса выпрямления в схеме рис. 137 или рис. 139 затруднен тем, что напряжение на выходе зависит от тока  $i$  через диод, причем этот ток есть в свою очередь функция напряжения на аноде, являющегося суммой заданного подводимого (входного) напряжения и искомого напряжения на выходе. Гораздо проще анализ процесса выпрямления в схеме с пентодом, показанным на рис. 141. Простота здесь обусловлена тем, что анодный ток практически зависит только от подводимого к сетке входного напряжения. Хотя эта схема редко употребляется, мы рассмотрим ее подробно; благодаря простоте расчетов на ней легко будет выяснять ряд обстоятельств, имеющих важное значение для дальнейшего.

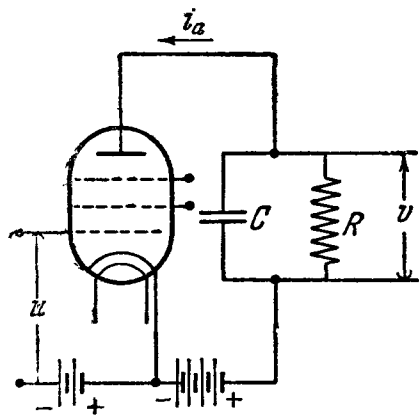


Рис. 141. Пентодный выпрямитель. Благодаря сеточному смещению пентод работает (в отличие от рис. 121) на изломе характеристики.

Постоянное смещение на управляющей сетке подбирается, например, так, чтобы пентод работал, как показано на рис. 142. Когда к сетке не подводится переменного напряжения, анодный ток практически равен нулю, а при наличии этого переменного напряжения представляет собой ряд «импульсов» одного

направления. Предположим, что используемый участок характеристики может быть хорошо аппроксимирован двумя прямыми линиями (рис. 142, б). Тогда эти импульсы изображаются дугами синусоиды (рис. 142, в).

Нас здесь интересует, как меняется со временем заряд  $q$  и напряжение на выходе  $v = \frac{q}{C} = R(i_a - \dot{q})$ .

При каждом импульсе тока заряд конденсатора получает некоторое приращение. Но наряду с этим непрерывно идет разряд конденсатора через утечку  $R$ . К чему приведет «борьба» этих двух процессов?

Заряд  $q$  на конденсаторе удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{q} + \frac{q}{RC} = i_a. \quad (4.18)$$



Проинтегрируем левую и правую части по времени от  $t_n$  до  $t_{n+1} = t_n + T$ , где  $t_n, t_{n+1}$  — моменты начала  $n$ -го и  $(n+1)$ -го импульса тока. Получаем:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{q} dt + \frac{1}{RC} \int_{t_n}^{t_{n+1}} q dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} i_a dt$$

или

$$q_{n+1} - q_n + \frac{1}{RC} q_n T = Q. \quad (4.19)$$

Здесь

$$Q = \int_{t_n}^{t_{n+1}} i_a dt = \bar{i}_a \cdot T$$

есть заряд, притекающий по анодной цепи за время одного импульса,  $q_n, q_{n+1}$  — значения заряда конденсатора в моменты  $t_n, t_{n+1}$ ,  $\bar{i}_a$  — заряд

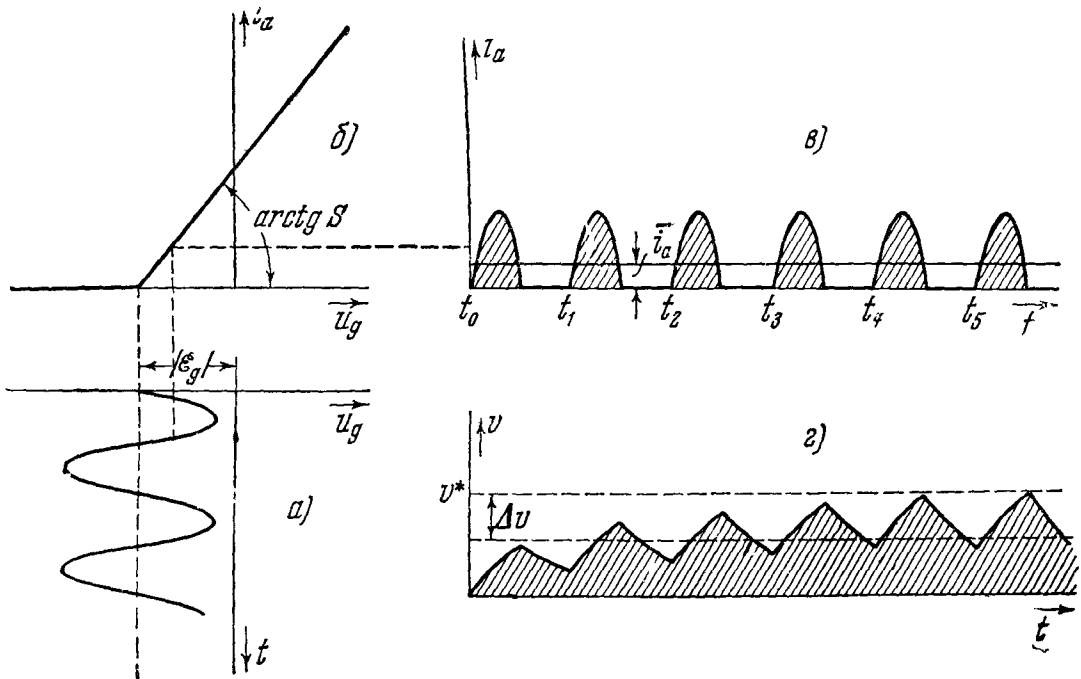


Рис. 142. а—осциллограмма сеточного напряжения  $u_g$  (оно отличается от подводимого синусоидального напряжения  $u$  на величину э. д. с.  $\mathcal{E}_g$  батареи смещения); б—идеализированная характеристика пентода; в—осциллограмма анодного тока; г—осциллограмма напряжения на выходе.

конденсатора в некоторый момент времени, промежуточный между  $t_n$  и  $t_{n+1}$

(мы имели право писать  $\int_{t_n}^{t_{n+1}} q dt = \bar{q}'_n T$  на основании теоремы о среднем),

$\bar{i}_a$  — среднее значение за период анодного тока.

Будем считать, что временная постоянная  $\tau_0 = RC$  во много раз больше периода  $T$  подводимого к сетке напряжения, т. е. что отношение  $T/RC$  мало по сравнению с единицей.

Вследствие малости  $T/\tau_0$  мы совершим незначительную ошибку, если заменим в (4.19)  $\bar{q}'_n$  через  $q_n$ , что дает:

$$q_{n+1} - q_n + \frac{T}{\tau_0} q_n = Q$$

или

$$q_{n+1} = \left(1 - \frac{T}{\tau_0}\right) q_n + Q. \quad (4.20)$$

Получилась такая же задача, как в §§ 2, 4. Построив диаграмму, аналогичную рис. 145, а, увидим, что заряд конденсатора растет от импульса к импульсу сначала быстро, потом медленнее и приближается к режиму, при котором

$$q_n = q_{n+1} = q^* = Q \frac{\tau_0}{T}. \quad (4.21)$$

При этом заряд колеблется в пределах от  $q^*$  (значение, которое он имеет по окончании импульса анодного тока) до  $q^* - \Delta q$ , где  $\Delta q$  — заряд, утекающий через  $R$  к моменту начала следующего импульса, равный

$$q^* - q^* e^{-\frac{T}{2\tau_0}},$$

откуда приближенно

$$\Delta q = q^* \frac{T}{2\tau_0} = \frac{Q}{2}. \quad (4.22)$$

Относительная величина пульсации заряда на конденсаторе

$$\frac{\Delta q}{q^*} = \frac{1}{2} \frac{T}{\tau_0}$$

тем меньше, чем больше временная постоянная  $RC$ .

Напряжение  $v$  колеблется в пределах от  $v^*$  до  $v^* - \Delta v$ , где

$$v^* = \frac{Q}{C} \frac{\tau_0}{T} = R \frac{Q}{T}, \quad \frac{\Delta v}{v^*} = \frac{1}{2} \frac{T}{\tau_0}. \quad (4.23)$$

Выразим  $v^*$  через амплитуду подводимого к сетке напряжения.

При положительных значениях  $u$  имеем:

$$i_a = Su = SA \sin \omega t,$$

где  $S$  — крутизна наклонной части идеализированной характеристики (рис. 142, б), при отрицательных значениях  $u$  имеем  $i_a = 0$ . Следовательно,

$$Q = T i_a = \int_0^{+\frac{T}{2}} i_a dt = \frac{2SA}{\omega} = \frac{SA}{\pi} T.$$

Подставляя это значение в (4.23), получаем:

$$v^* = \frac{1}{\pi} RSA. \quad (4.24)$$

Итак, на выходе устройства рис. 141 при  $\tau_0 = RC \gg T$  получается приблизительно постоянное напряжение, пропорциональное амплитуде подводимого к сетке лампы синусоидального напряжения. Здесь принято говорить о *линейном выпрямлении*. Это надо понимать как указание на линейную связь между  $v^*$  и  $A$ . Само явление линейного выпрямления — существенно *нелинейно*: характеристика рис. 142, б, состоящая из *двух* полупрямых, есть нелинейная характеристика.

Если  $\tau_0 \ll T$ , схема ведет себя так, как будто конденсатор отсутствует, напряжение  $v$  оказывается равным  $Ri_a$  и воспроизводит пульсацию анодного тока.

5. Схема с пентодом. Квадратичное выпрямление. Та идеализация характеристики, которой мы только что пользовались, допустима в случае, если амплитуда  $A$  достаточно велика. В случае же малых амплитуд  $A$

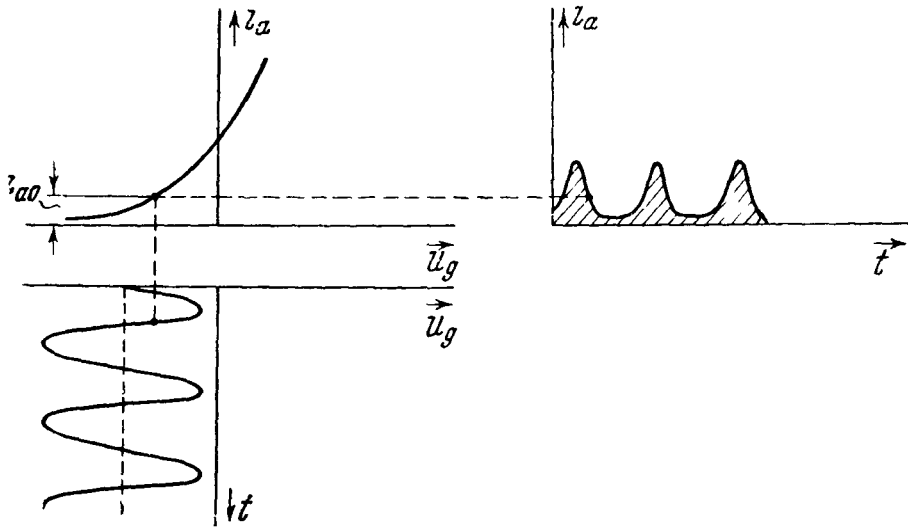


Рис. 143. То же, что на рис. 142, для случая квадратичной идеализации характеристики (амплитуда  $u$  мала).

характеристику можно приближенно изображать уравнением параболы вида

$$i_a = i_{a0} + \alpha u + \beta u^2, \quad (4.25)$$

где  $i_{a0}$  — значение тока при  $u = 0$ , а  $\alpha$  и  $\beta$  — постоянные коэффициенты (рис. 143). Если

$$u = A \cos \omega t,$$

где  $A$  — постоянная, имеем:

$$i_a = i_{a0} + \alpha A \cos \omega t + \frac{\beta A^2}{2} + \frac{\beta A^2}{2} \cos^2 2\omega t. \quad (4.26)$$

Ток состоит из *постоянной* слагающей

$$i_{a0} + \frac{\beta A^2}{2}$$

и двух синусоидальных слагающих, имеющих соответственно частоты  $\omega$  и  $2\omega$ . Если  $C$  достаточно велико, эти две синусоидальные слагающие будут замкнуты накоротко через конденсатор и напряжение  $v$  будет (при установившемся режиме) практически постоянным и равным

$$v = R i_{a0} + \frac{R \cdot \beta}{2} A^2. \quad (4.27)$$

Получается *квадратичное* выпрямление: колебание  $A \cos \omega t$  преобразуется в приращение  $(R\beta/2) A^2$  постоянного напряжения на контуре  $RC$ , пропорциональное квадрату амплитуды колебания \*).

\*) Можно было бы решить задачу п. 4, разлагая  $i_a$  с помощью теоремы Фурье на сумму синусоидальных слагаемых, а задачу о квадратичном выпрямлении, исследуя, как это делалось в п. 4, ход установления во времени. Рекомендуем вернуться к §§ 7—10 этой главы после ознакомления с гл. XI и, в частности, продумать со спектральной точки зрения преобразование колебаний  $RC$ -контуром.

## § 8. Модуляция

1. Некоторые типы модуляции. Уже в гл. I мы познакомились с двумя типами модулированных колебаний (рис. 17, *е* и 17, *ж*). Первый тип (рис. 17, *е*) называется амплитудно-модулированным колебанием, и только о нем мы здесь будем говорить, хотя второй тип (частотно-модулированное колебание) также приобрел в радиотехнике большое значение.

Широковещательный передатчик совершает синусоидальные колебания, т. е. напряжение на его выходных клеммах имеет вид

$$A \cos(\omega t - \varphi),$$

где  $A$ ,  $\omega$ ,  $\varphi$  — постоянные, только тогда, когда он включен, но ничего не передает, т. е. когда микрофон, установленный в радиостудии, выключен или не воспринимает никаких звуков. Когда микрофон включен и диктор

говорит или в студии исполняется музыкальное произведение, колебание передатчика принимает вид

$$u = A [1 + f(t)] \cos(\omega t - \varphi), \quad (4.28)$$

где  $f(t)$  — функция, пропорциональная звуковому давлению  $\Delta p$  около микрофона, причем  $|f(t)| < 1$ . «Несущая» частота  $\omega/2\pi$  при радиопередаче — порядка  $10^5 \div 10^8$  герц. Поэтому изменения функции  $f(t)$  происходят гораздо медленнее, чем изменения  $\cos(\omega t - \varphi)$ .

В частности, если по радио передается звук камертона, т. е.  $\Delta p$  синусоидально,

$$f(t) = m \cos(\Omega t - \Phi),$$

где  $m$  — постоянная (рис. 144),

причем частота модуляции  $\Omega$  мала по сравнению с несущей частотой  $\omega$ . Колебание передатчика имеет в этом случае вид

$$u = A [1 + m \cos(\Omega t - \Phi)] \cos(\omega t - \varphi)$$

или

$$u = [A + B \cos(\Omega t - \Phi)] \cos(\omega t - \varphi). \quad (4.29)$$

Величина

$$m = \frac{B}{A} < 1$$

называется *глубиной модуляции*.

Для передачи *радиотелеграфных* сигналов применяется тип модуляции, показанный на рис. 145. Здесь также колебание может быть описано формулой (4.28), если положить  $f(t) = -1$  в течение пауз (продолжительности  $\tau_1$ ) и  $f(t) = +1$  на протяжении промежутков времени продолжительности  $\tau_2$  или  $\tau_2 > \tau_1$ , когда передаются соответственно точки или тире;  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  должны охватывать достаточно большое число периодов  $T = 2\pi/\omega_0$  несущего колебания.

В *радиолокации* употребляются сравнительно короткие «импульсы», т. е. отрывистые вереницы колебаний, разделенные гораздо более длительными паузами (рис. 145 *в*, *г*). Например, импульсы делятся 1 микро-

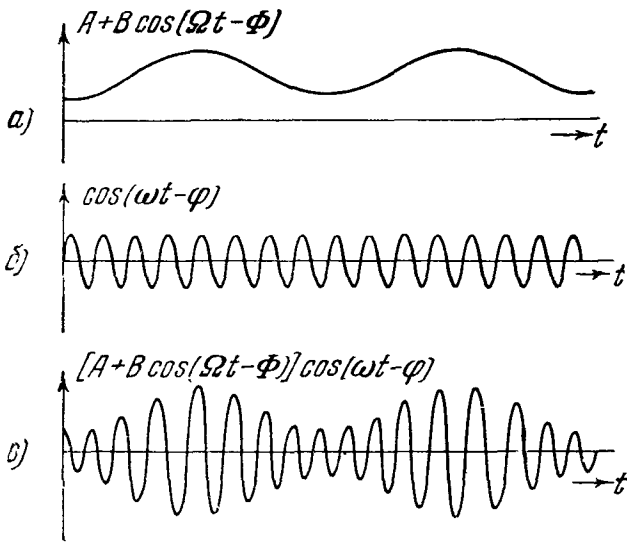


Рис. 144. *a*—модулирующее колебание; *б*—модулируемое колебание; *в*—модулированное колебание.

секунду ( $10^{-6}$  сек.) и повторяются через каждую миллисекунду ( $10^{-3}$  сек.). Несущая частота в радиолокации — порядка  $10^8 - 10^{11}$  герц.

**2. Принцип осуществления амплитудной модуляции.** В гл. II мы познакомились с суперпозицией, т. е. сложением двух заданных колебаний. При амплитудной модуляции мы также имеем дело с образованием комбинации из двух заданных колебаний. Но здесь эти колебания, например  $\cos \Omega t$  и  $\cos \omega t$ , не складываются, а *перемножаются*. Таким образом, для модуляции нужны устройства, которые образуют произведение, а не сумму подводимых к ним колебаний. Такие устройства принадлежат к классу нелинейных систем.

Принцип осуществления модуляции легко понять, рассматривая анодный ток как функцию напряжений  $u_1, u_2$ , подаваемых на какие-нибудь два электрода электронной лампы (например, две сетки пентода):

$$i_a = f(u_1, u_2).$$

Разложим функцию  $f(u_1, u_2)$  в ряд Тейлора по обоим аргументам:

$$i_a = i_{a0} + \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \beta_{11} u_1^2 + \underline{+ 2\beta_{12} u_1 u_2} + \beta_{22} u_2^2 + \dots,$$

где  $i_{a0}, \alpha, \beta$  — постоянные.

Члены второй и более высоких степеней всегда имеются вследствие нелинейности характеристики. Подчеркнутый член пропорционален произведению подводимых колебаний.

Пусть, например,

$$u_1 = A \cos \Omega t, \quad u_2 = a \cos \omega t.$$

Тогда

$$i_a = i_{a0} + \alpha_1 A \cos \Omega t + \alpha_2 a \cos \omega t + \beta_{11} A^2 \cos^2 \Omega t + 2\beta_{12} A a \cos \Omega t \times \\ \times \cos \omega t + \beta_{22} a^2 \cos^2 \omega t + \dots = i_{a0} + \underline{(\alpha_2 a + 2\beta_{12} A a \cos \Omega t) \cos \omega t} + \dots$$

Подчеркнутый член представляет собой требуемое модулированное колебание. Это колебание может быть выделено из анодного тока  $i_a$  с помощью резонансного контура, настроенного (но не слишком остро, ср. гл. XI, § 5) на частоту  $\omega$ .

**3. Получение коротких импульсов.** Существуют различные схемы для получения напряжений типа рис. 145, *в*. Получив такое напряжение, можно затем промодулировать им колебание высокой частоты и получить импульсно-модулированное колебание типа рис. 145, *г*. Ограничимся кратким описанием одной из этих схем. Синусоидальные колебания периода  $\tau$ ,

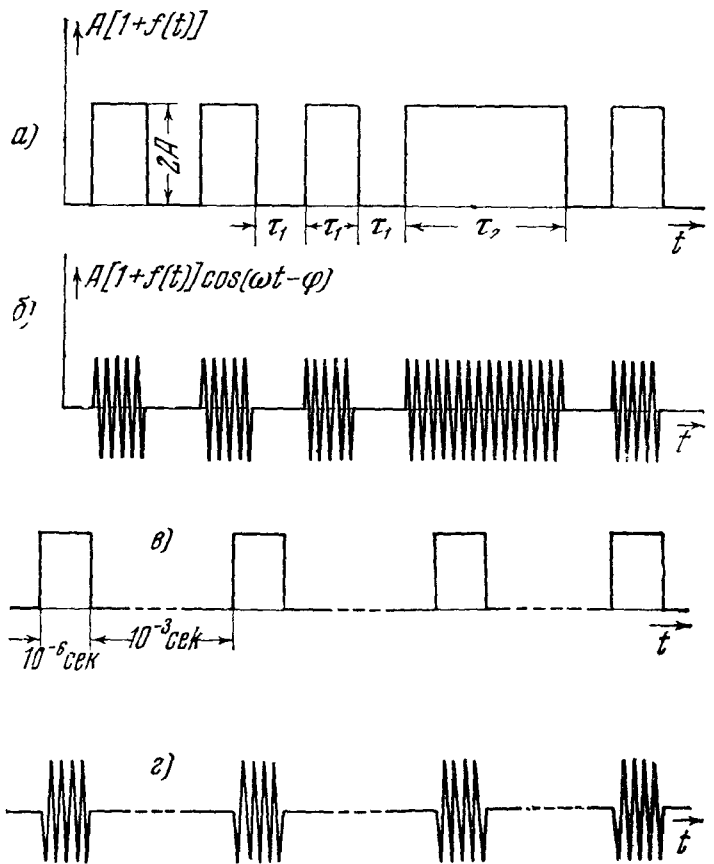


Рис. 145. *а*—модулирующее колебание; *б*—модулированное колебание при телеграфной передаче; *в*—модулирующее колебание; *г*—модулированное колебание для частного случая импульсной модуляции, применяемой в радиолокации.

создаваемые ламповым генератором, подаются на двухтактный линейный выпрямитель (§ 7, п. 3). Снимаемое с него напряжение подается на лампу, режим которой подобран так, как показывает рис. 146. Анодный ток этой лампы состоит из острых кратковременных импульсов. Такую же форму имеет напряжение, снимаемое с сопротивления, включенного в ее анодную цепь.

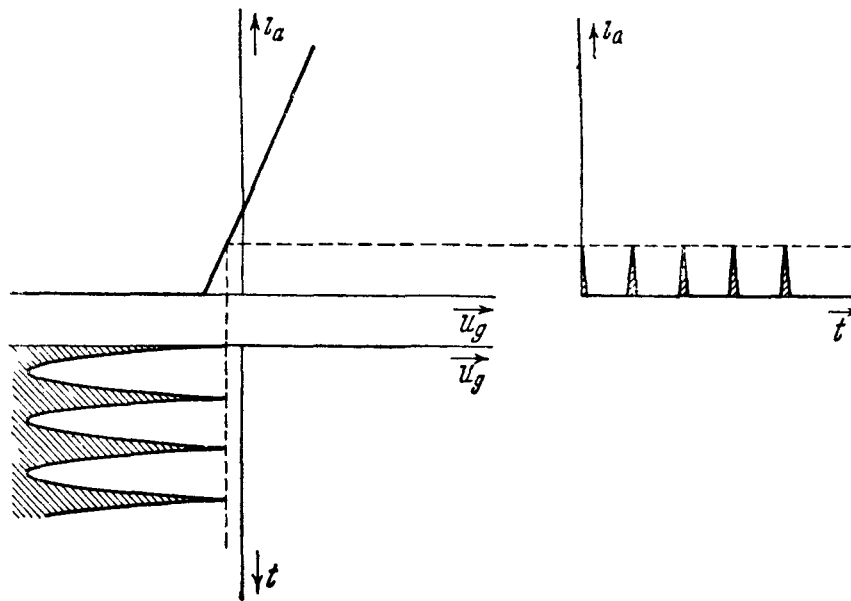


Рис. 146. Один из методов получения коротких импульсов

Если нужно получить не остроконечные, а прямоугольные импульсы, можно воспользоваться дальнейшим преобразованием; остроконечные импульсы подводят к «ограничителю» — лампе, работающей в таком же режиме, как на рис. 128. Ток насыщения срезает верхушки импульсов и придает им прямоугольную форму.

4. Радиопередатчики имеют в принципе структуру, которую поясняет рис. 147. Колебание несущей частоты создается ламповым генератором.

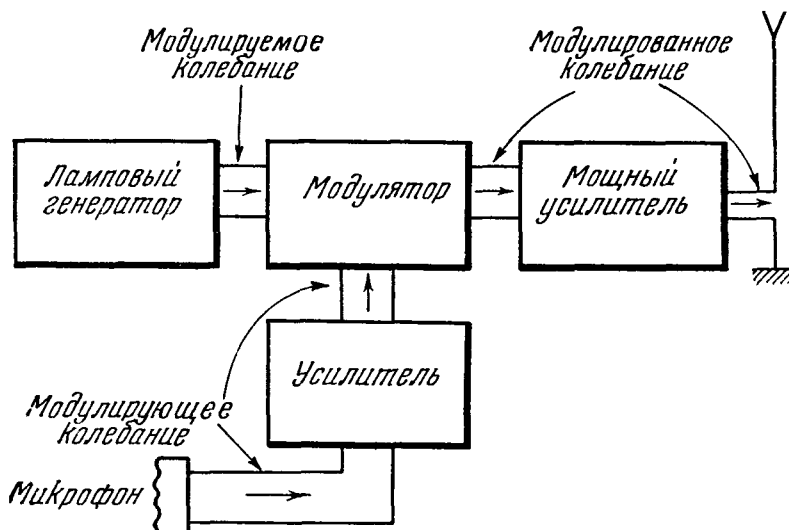


Рис 147. Блок-схема радиовещательного передатчика

Модулирующее колебание берется с выхода усилителя, на вход которого подается (в случае широковещательного передатчика) напряжение, снимаемое с микрофона. Колебание, полученное в результате процесса модуляции, происходящего в модуляторе (он работает по принципу, изложенному в п. 2), усиливается до нужной мощности и подводится к антенне. О том, как работает антенна, см. гл. VII и VIII.

## § 9. Демодуляция

**1. Постановка задачи.** Предположим, что удалось получить в колебательном контуре радиоприемника колебание, в точности воспроизводящее модулированное колебание, излучаемое передающей радиостанцией. Если мы это колебание, даже усиленное, заставим действовать на громкоговоритель, т. е. пошлем в обмотку последнего ток, пропорциональный нашему модулированному колебанию, мы *ничего не услышим*. Дело не только в том, что мембрана громкоговорителя, собственная частота которой расположена в звуковом диапазоне, неспособна заметно реагировать (в силу сказанного в гл. III, § 8) на колебания радиочастоты (например, частоты  $10^6$  герц). Пусть даже мы пользуемся электромеханическим преобразователем с очень малым собственным периодом, например пьезокварцем (см. гл. VI). Он будет при подходящих условиях создавать колебания давления  $\Delta p$ , воспроизводящие подводимое к кварцу модулированное электрическое колебание. Тем не менее ухо ничего не будет воспринимать, так как оно нечувствительно к акустическим колебаниям частоты  $2 \cdot 10^4$  герц и выше.

Для того чтобы ухо услышало тот звук, которым было промодулировано несущее колебание радиопередатчика, нужно осуществить нелинейное преобразование колебания, носящее название *демодуляции* — преобразование модулированного колебания радиочастоты в колебание звуковой частоты. При этом желательно, чтобы получающееся колебание звуковой частоты возможно точнее воспроизводило то колебание, которое действовало на микрофон радиопередатчика.

Узкорadiотехнический, казалось бы, вопрос о демодуляции колебаний имеет в действительности широкое значение. Он является частным случаем общего вопроса о том, как происходит восприятие колебаний (в том числе акустических, световых) физической аппаратурой и органами чувств. Разбор механизма демодуляции в радиотехнике помогает пониманию некоторых трудных вопросов оптики (ср. гл. X).

**2. Демодуляция импульсов.** Представим себе, что на вход устройства рис. 141 подается колебание, изображенное на рис. 145,  $z$  (импульсная модуляция). Пусть по-прежнему  $\tau_0 = RC \gg T$ . Здесь явления будут протекать совершенно по-разному в зависимости от соотношения времен  $\tau$  (периода модуляции) и  $\tau_0 = RC$ . Рассмотрим два характерных частных случая.

а) Временная постоянная мала по сравнению с периодом модуляции

$$\tau_0 \ll \tau.$$

Пока на сетку действует очередной импульс, происходит нарастание напряжения на контуре  $RC$ , рассмотренное в § 7, п. 4. Если импульс длится достаточно долго ( $\tau_1 \gg \tau_0$ ), успеет установиться напряжение

$$v = \frac{1}{\pi} RSA, \quad (4.30)$$

соответствующее согласно § 7, п. 4 установившемуся состоянию.

Затем, когда модуляционный импульс прекратится, напряжение на контуре упадет по закону  $e^{-\frac{t}{\tau_0}}$  до значения, практически равного нулю, еще задолго до того, как придет следующий импульс модуляции и т. д.

Напряжение на  $RC$ -контуре будет, таким образом, приблизительно воспроизводить (с точностью до небольшой волнистости, тем меньшей;

чем меньше отношение  $T/\tau_0$ , и небольших переходных явлений, занимающих тем меньше места, чем меньше  $\tau_0/\tau$  вид модулирующего напряжения в передатчике. Это и есть демодуляция. Схему демодулятора см., например, на рис. 141.

б) Временная постоянная велика по сравнению с периодом модуляции

$$\tau_0 \gg \tau.$$

В этом случае напряжение не успеет нарасти до величины, определяемой формулой (4.13), за время  $\tau_1$ , равное продолжительности импульса, и заметно упасть за время паузы  $\tau_2 = \tau - \tau_1$  между импульсами.  $RC$ -контур будет *затягивать* провалы между импульсами модуляции.

Здесь можно рассуждать так же, как в § 7, но рассматривать вместо  $Q$  заряд  $NQ$ , поступающий за время целого импульса модуляции, где  $N$  — число колебаний высокой частоты в одном импульсе модуляции, и понимать под  $q_n, q_{n+1}$  заряд на контуре соответственно после  $n$ -го и  $(n+1)$ -го импульсов модуляции. Можно воспользоваться формулами (4.21), (4.22), (4.23), заменив в них  $Q$  через  $NQ$ , а  $T$  через  $\tau$ . Напряжение на контуре будет постепенно нарастать от одного импульса модуляции к следующему, пока не установится режим, при котором заряд на конденсаторе равен

$$q^* = NQ \frac{\tau_0}{\tau} \quad (4.21a)$$

по окончании прихода каждого импульса модуляции, и спадает на

$$\Delta q = \frac{NQ}{2} \quad (4.22a)$$

к началу следующего импульса модуляции. Напряжение при этом слегка колеблется около значения

$$v^* = \frac{q^*}{C} = R \frac{NQ}{\tau} \quad (4.23a)$$

и притом в тем более малых (относительно) пределах, чем меньше  $\tau/\tau_0$ . Если эта величина достаточно мала, то не будет заметно, что напряжение, поступающее на вход нашего устройства, является модулированным. Демодуляции не получается.

**3. Демодуляция произвольно модулированного колебания.** Пусть теперь колебание, поступающее на сетку лампы, имеет вид

$$u = A(t) \cos \omega t,$$

где  $A(t)$  — произвольная, медленно меняющаяся периодическая функция.

По аналогии со сказанным в п. 2 здесь ясно без вычислений, что характер явлений будет определяться соотношением между периодом  $\tau$  функции  $A(t)$  и временной постоянной  $\tau_0$ . Если за время  $\tau_0$  функция  $A$  меняется незначительно, напряжение  $v$  будет хорошо воспроизводить изменение функции  $A(t)$ . Мы будем иметь приближенно

$$v(t) = \frac{1}{\pi} RSA(t), \quad (4.31)$$

и кривая напряжения на выходе будет воспроизводить приближенно кривую модулирующего напряжения в передатчике.

Рассмотрим среднее значение от  $|u|$  за период  $T$  несущего колебания:

$$\overline{|u(t)|} = \frac{1}{T} \int_0^T A(t) |\cos \omega t| dt.$$



Имеем приближенно, так как за период  $T$  высокой частоты  $A(t)$  меняется незначительно,

$$|u(t)| = \frac{A(t)}{T} \int_0^T |\cos \omega t| dt = \frac{2}{\pi} A(t),$$

и, следовательно, на основании (4.31), если  $\tau_0 \ll \tau$ ,

$$v(t) = \frac{RS}{2} \overline{|u(t)|}, \quad (4.32)$$

напряжение на выходе демодулятора пропорционально в каждый данный момент среднему от абсолютной величины напряжения на входе за период несущего колебания.

Если же  $\tau_0$  будет сравнимо с  $\tau$ , мы не будем получать правильной демодуляции, и, наконец, если  $\tau_0 \gg \tau$ , мы будем иметь на выходе почти постоянное напряжение, пропорциональное среднему значению  $A(t)$  за время, *большое по сравнению с периодом модуляции*. Это среднее в отличие от среднего за период высокой частоты мы будем обозначать двумя чертами сверху:  $\overline{\overline{A(t)}}$ . Имеем:

$$\overline{\overline{|u(t)|}} = \frac{1}{m\tau} \int_0^{m\tau} A(t) |\cos \omega t| dt,$$

где  $m \gg 1$ . Мы можем приближенно заменить под знаком интеграла  $|\cos \omega t|$  его средним значением  $2/\pi$  за период  $T$  несущего колебания, что дает

$$\overline{\overline{|u(t)|}} = \frac{1}{m\tau} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{m\tau} A(t) dt = \frac{2}{\pi} \overline{\overline{A(t)}}. \quad (4.33)$$

Таким образом, при  $\tau_0 \gg \tau$  напряжение на выходе пропорционально среднему значению абсолютной величины модулированного напряжения на входе за время, *большое по сравнению с периодом модуляции* (и тем более по сравнению с периодом несущего колебания).

Сделаем выводы. Для получения демодуляции необходимо, чтобы временная постоянная  $RC$ -контура была: 1) *велика* по сравнению с периодом модулируемого колебания  $\cos \omega t$ , 2) *мала* по сравнению с периодом модулирующего колебания  $A(t)$ .

**4. Квадратичная демодуляция.** В пп. 2 и 3 мы пользовались идеализированной ломаной характеристикой рис. 142. Тот тип демодуляции, который соответствует такой характеристике, принято называть «линейной демодуляцией» (по аналогии с линейным выпрямлением). Если амплитуда мала, нельзя пользоваться этой идеализацией, и мы получаем более близкий к истине результат, считая характеристику квадратичной, т. е. пользуясь формулой вида (4.25).

Пусть  $u$  — колебание, модулированное по амплитуде:

$$u = A(t) \cos \omega t,$$

причем амплитуда  $A(t)$  мала.

Подставляя это выражение в (4.25), имеем:

$$i_a = i_{a0} + \alpha A(t) \cos \omega t + \frac{\beta A^2(t)}{2} + \frac{\beta A^2(t)}{2} \cos 2\omega t.$$

Будем считать по-прежнему, что  $C$  настолько велико, что замыкает накоротко «быстрые слагающие»  $\alpha A(t) \cos \omega t$  и  $\frac{\beta A^2(t)}{2} \cos 2\omega t$ , так что они

практически не проявляются в напряжении на контуре  $RC$ . Тогда это напряжение — такое же, как если бы анодный ток имел вид

$$i_a = i_{a0} + \frac{\beta A^2(t)}{2}.$$

В частности, при синусоидальной модуляции, т. е.

$$A(t) = A_0(1 + m \cos \Omega t),$$

имеем:

$$\begin{aligned} i_a &= i_{a0} + \frac{\beta}{2} A_0^2(1 + 2m \cos \Omega t + m^2 \cos^2 \Omega t) = \\ &= i_{a0} + \frac{\beta}{2} A_0^2 \left( 1 + \frac{m^2}{2} + 2m \cos \Omega t + \frac{m^2}{2} \cos 2\Omega t \right). \end{aligned}$$

Напряжение  $v$  будет вести себя совершенно различно, как и в случаях пп. 2, 3, в зависимости от соотношения между периодом модуляции  $\tau$  и временной постоянной  $\tau_0$ .

Если  $\tau_0 \ll \tau$ , напряжение  $v$  будет следовать за изменениями слагающей анодного тока  $\beta A^2/2$  и, следовательно, иметь вид

$$v = Ri_{a0} + \frac{R\beta}{2} A^2(t).$$

Мы получим *квадратичную демодуляцию*, при которой модулированное колебание  $A(t) \cos \omega t$  преобразуется в колебание звуковой частоты

$$\frac{R\beta}{2} \cdot A^2(t).$$

Заметим, что среднее значение от  $u^2$  за период  $T$  несущего колебания

$$\overline{u^2(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T A^2(t) \cos^2 \omega t dt$$

равно приближенно (ср. п. 3)

$$\overline{u^2(t)} = \frac{A^2(t)}{2}$$

и, следовательно, если  $\tau_0 \ll \tau$ ,

$$v = Ri_{a0} + R\beta \overline{u^2(t)}; \quad (4.34)$$

переменная слагающая напряжения на выходе демодулятора пропорциональна в каждый данный момент среднему от квадрата напряжения на входе за период несущего колебания.

Если  $\tau_0 \gg \tau$ , колебание интенсивности  $A^2(t)$  будет сглаживаться  $RC$ -контуром и на нем будет практически *постоянное* напряжение. В частности, в случае синусоидально-модулированного колебания оно равно

$$Ri_{a0} + \frac{R\beta}{2} A_0^2 \left( 1 + \frac{m^2}{2} \right).$$

Демодуляции происходить не будет.

Можно показать (аналогично п. 3), что здесь напряжение на выходе пропорционально

$$\overline{\overline{u^2(t)}} = \frac{1}{2} \overline{\overline{A^2(t)}}, \quad (4.35)$$

т. е. среднему квадрату напряжения на входе за время, *большое по сравнению с периодом модуляции*.

Заметим, что в случае квадратичной демодуляции переменная слагающая  $v$ , вообще говоря, не пропорциональна переменной слагающей модулирующей функции  $A(t)$ , что приводит к искажению передаваемой по радио речи или музыки. Приближенная пропорциональность получается только в случае малой глубины модуляции, когда  $m \ll 1$  и (приближенно)

$$i_a = i_{a0} + \frac{\beta}{2} A_0^2 (1 + 2m \cos \Omega t).$$

5. Три метода наблюдения модулированного колебания. а) Подав модулированное колебание  $u(t)$  непосредственно на электронный осциллоскоп, мы можем увидеть во всех деталях осциллограмму этого колебания

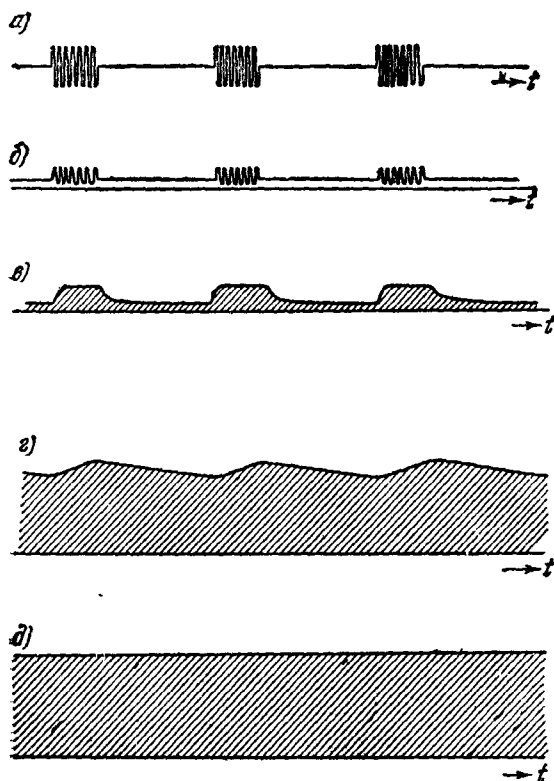


Рис. 148. а—безынерционное наблюдение на входе лампы; б—безынерционное наблюдение в анодной цепи; в—малоинерционное наблюдение; г—переходный случай; д—инерционное наблюдение (лампа работает в режиме рис. 142).

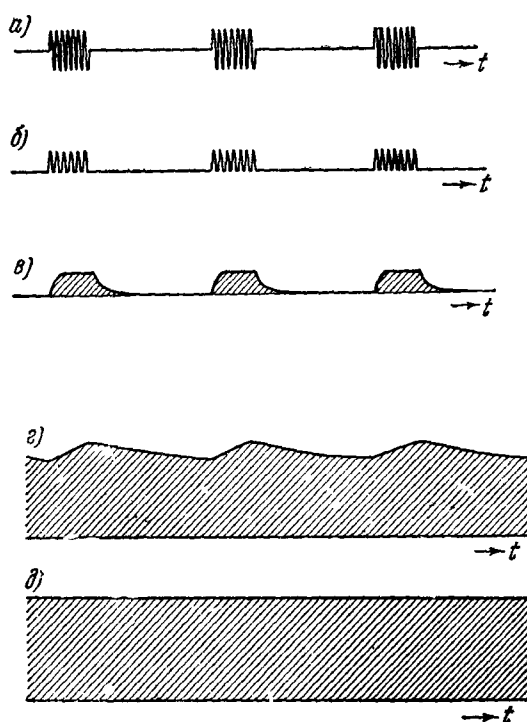


Рис. 149. а—безынерционное наблюдение на входе лампы; б—безынерционное наблюдение в анодной цепи; в—малоинерционное наблюдение; г—переходный случай; д—инерционное наблюдение (лампа работает в режиме рис. 143).

(рис. 148, а, 149, а) — осциллоскоп отмечает каждое отдельное значение  $u(t)$ . Такой метод наблюдения модулированного колебания мы назовем *безынерционным*.

б) Подадим теперь на осциллоскоп напряжение с выхода демодулятора, причем  $R$  и  $C$  подобраны так, что  $T \ll \tau_0 = RC \ll \tau$  (ср. пп. 2—4). Мы тогда увидим на экране осциллоскопа, например, то, что показано на рис. 148, в (при линейной демодуляции) или на рис. 149, в (при квадратичной демодуляции). В первом случае осциллоскоп отмечает последовательные значения  $A(t)$ , во втором случае — последовательные значения  $A^2(t)$ . Аппаратура здесь не успевает следить за изменением  $u(t)$ , но успевает следить за последовательностью значений  $|u(t)|$  (в первом случае) или  $u^2(t)$  (во втором случае).

Такой способ наблюдения модулированного колебания мы назовем *малоинерционным* \*).

в) Будем теперь постепенно увеличивать  $R$  или  $C$ . Картина на экране осциллоскопа будет меняться так, как показано на рис. 148,  $z$ , 149,  $z$ , и при  $\tau_0 = RC \gg \tau$  мы будем видеть просто горизонтальную черту (рис. 148,  $d$ , 149,  $d$ ): никаких следов демодуляции мы теперь не заметим. Аппаратура не успевает реагировать даже на изменения функций  $\overline{|u(t)|}$  или  $\overline{u^2(t)}$ . Отклонение горизонтальной линии от ее положения в отсутствие сигнала пропорционально среднему значению  $A(t)$  или  $A^2(t)$  за время, большое по сравнению с периодом модуляции, т. е.  $\overline{|u(t)|}$  или  $\overline{u^2(t)}$ . Тепловой вольтметр, на который непосредственно подается модулированное колебание, также показывает  $\overline{u^2}$ , если период модуляции настолько мал, что прибор не успевает реагировать на изменение амплитуды и его стрелка стоит практически неподвижно.

Методы наблюдения, при которых аппаратура отмечает  $\overline{|u(t)|}$  или  $\overline{u^2(t)}$ , мы будем называть *инерционными*.

## § 10. Комбинационные колебания

**1. Образование комбинационных колебаний.** Подведем к нелинейному устройству, характеристика которого изображается с достаточным приближением формулой

$$i = \alpha u + \beta u^2, \quad (4.36)$$

сумму двух синусоидальных напряжений

$$u = u_1 + u_2,$$

где

$$u_1 = A_1 \cos \omega_1 t, \quad u_2 = A_2 \cos \omega_2 t.$$

Подставляя в (4.36)

$$u = u_1 + u_2 = A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t, \quad (4.37)$$

получаем:

$$i = \alpha (A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t) + \beta (A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t)^2$$

или, после очевидных преобразований,

$$i = \alpha (A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t) + \beta \left[ \frac{A_1^2}{2} + \frac{A_2^2}{2} + \frac{A_1^2}{2} \cos 2\omega_1 t + \frac{A_2^2}{2} \cos 2\omega_2 t + A_1 A_2 \cos (\omega_1 - \omega_2) t + A_1 A_2 \cos (\omega_1 + \omega_2) t \right]. \quad (4.38)$$

Отсюда видно, что ток состоит из постоянной слагающей и колебаний шести различных частот:  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $2\omega_1$ ,  $2\omega_2$ ,  $\omega_1 - \omega_2$ ,  $\omega_1 + \omega_2$ . Каждое из этих колебаний может быть выделено с помощью настроенного на него резонансного контура. Колебания с частотами  $\omega_1 - \omega_2$ ,  $\omega_1 + \omega_2$ , возникающие только при наличии *обеих* слагающих  $u_1$ ,  $u_2$  подводимого колебания  $u$ , называются *комбинационными* колебаниями, а их частоты — комбинационными частотами. Частота  $\omega_1 - \omega_2$  называется *разностной* частотой, а частота  $\omega_1 + \omega_2$  — *суммовой*. Разностная частота представляет особый интерес.

\*) Если  $R$ ,  $C$  таковы, что  $\tau_0 = RC \ll T$ , мы увидим то, что показано на рис. 148,  $b$  или 149,  $b$ ; в этом случае можно снова говорить о *безынерционном* наблюдении.

Пусть частоты  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  — неслышимые, а разностная частота — слышимая. В этом случае, подводя к телефону или громкоговорителю колебания  $u_1$ ,  $u_2$  или их сумму  $u$ , мы ничего не будем слышать. Но если мы подадим на телефон или громкоговоритель напряжение, пропорциональное  $i$ , мы услышим тон разностной частоты.

Если характеристика имеет более сложный вид, чем (4.36), получаются более сложные комбинационные частоты вида  $m\omega_1 \pm n\omega_2$ , где  $m$ ,  $n$  — целые. Предоставляем читателю исследовать комбинационные частоты, получающиеся при  $i = \alpha u + \beta u^2 + \gamma u^3$ .

**2. Гетеродинарование.** Так называется метод, применяемый для приема на слух радиотелеграфных сигналов. На вход нелинейного устройства подается сумма колебания

$$u = A [1 + f(t)] \cos \omega t, \quad f(t) = \pm 1,$$

приходящего от передатчика, и колебания  $u_0 = A_0 \cos \omega_0 t$ , создаваемого местным маломощным ламповым генератором (так называемым *гетеродином*). Подбрав частоту его так, чтобы разностная частота  $|\omega - \omega_0|$  была слышимой, мы будем слышать в телефоне прерывистый свист. Телеграфным «точкам» соответствуют короткие свистки, «тире» — более длинные.

**3. Супергетеродин.** Образование разностного колебания лежит также в основе действия *супергетеродинного* приемника, наиболее широко применяемого в настоящее время типа радиоприемников. В нем приходящее модулированное колебание  $u = A [1 + f(t)] \cos \omega t$  и синусоидальное колебание  $u_0 = A_0 \cos \omega_0 t$ , создаваемое гетеродином, подводятся к двум электродам «смесительной» лампы. Посредством процесса, аналогичного описанному в § 8, п. 2, она образует колебание, пропорциональное

$$2uu_0 = AA_0 [1 + f(t)] \cos (\omega - \omega_0) t + AA_0 [1 + f(t)] \cos (\omega + \omega_0) t.$$

Оба слагаемых (колебание разностной частоты  $\omega_1 - \omega_2$  и суммовой частоты  $\omega_1 + \omega_2$ ) модулированы по амплитуде. Форма модуляции такая же,

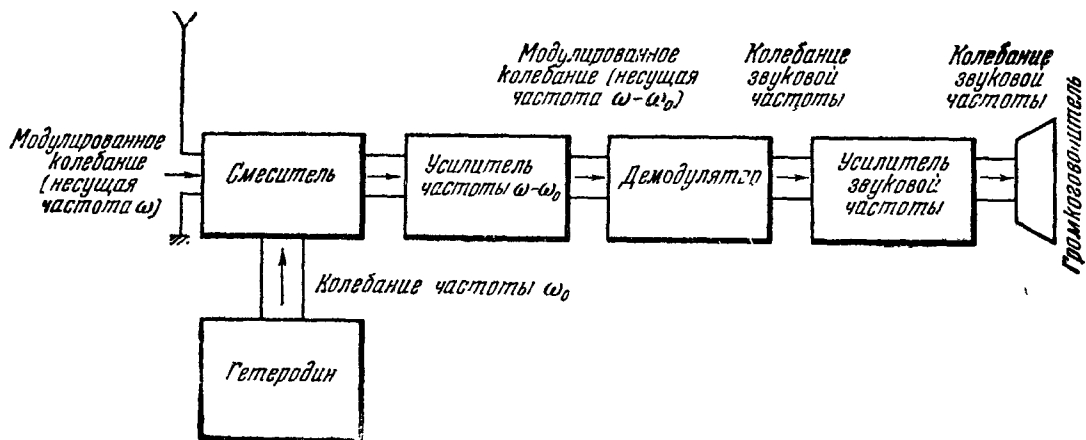


Рис. 150. Блок-схема супергетеродинного приемника.

как у приходящего колебания. Частота гетеродина изменяется при приеме той или иной станции. Ручка настройки приемника изменяет одновременно емкость конденсатора входного контура приемника (он настраивается на частоту  $\omega$ ) и емкость конденсатора гетеродина (подвижные пластины обоих конденсаторов насажены на общую ось). Контур сконструирован так, что разностная частота при повороте ручки настройки приемника остается постоянной. Дальше происходят выделение посредством резонанса (ср. гл. XI) и усиление разностного колебания и, наконец, его демодуляция, после чего демодулированное колебание усиливается и подается на громкоговоритель (рис. 150).

**4. Звуковые генераторы.** Очень трудно в конструктивном отношении осуществить по принципу, изложенному в § 4, генератор, покрывающий при повороте ручки настройки всю область звуковых частот. Звуковые генераторы, о которых шла речь в гл. I и II, осуществляются по принципу гетеродинирования.

К лампе, работающей в квадратичном режиме, т. е. таком, когда характеристика имеет вид (4.25), подводятся синусоидальные напряжения

$$u_1 = A_1 \cos \omega_1 t, \quad u_2 = A_2 \cos \omega_2 t,$$

причем частота  $\omega_1/2\pi$  постоянна и равна, скажем, 200 килogerц, а частота  $\omega_2/2\pi$  меняется поворотом ручки настройки в интервале от 200 до 220 килogerц, что конструктивно легко осуществить. При этом разностная частота меняется от 0 до 20 000 герц. Разностное колебание соответствующим образом усиливается и подается на выходные клеммы звукового генератора. Поворотом ручки регулировки громкости меняют усиление разностного колебания.

**5. Разностное колебание и биения.** Часто говорят, что при гетеродинировании или в звуковом генераторе, о котором только что шла речь, мы слышим биения между частотами  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ . Это *не верно*, если понимать под биениями явление, о котором шла речь в гл. II, возникающее при *суперпозиции* синусоидальных колебаний с близкими частотами. В гетеродинном приемнике или звуковом генераторе биения, т. е. процесс типа

$$u = A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t,$$

представляют собой колебание, подаваемое на *вход* нелинейного устройства. Эти биения неслышимы (ср. § 9, п. 1), если частоты  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  лежат за пределами слышимости. Мы слышим на *выходе* не биения, а *разностный тон*, возникающий вследствие того, что для устройства в целом не имеет места принцип суперпозиции. Смещению понятий «разностный тон» и «биения» способствует то, что частота изменения результирующей амплитуды при биениях (т. е. при *суперпозиции* двух колебаний) совпадает с частотой разностного колебания  $\beta A_1 A_2 \cos(\omega_1 - \omega_2)t$  (которое получается в результате *нарушения* суперпозиции).

**6. Комбинационные колебания в акустике.** Когда на ухо одновременно действуют два синусоидальных звуковых колебания большой интенсивности, имеющих различные частоты  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ , мы слышим не только тоны, соответствующие этим частотам, но и добавочные тоны частоты  $\omega_1 - \omega_2$  и  $\omega_1 + \omega_2$ . Эти *комбинационные тоны* образуются вследствие нелинейности в самом ухе. Нелинейность связана с тем, что смещение барабанной перепонки уха (и некоторых других его частей) не строго пропорционально давлению, т. е. не подчиняется в точности закону Гука.

В акустике возможен и другой механизм образования комбинационных тонов, совершенно не связанный с ухом. Он обусловлен нелинейностью среды, в которой происходит распространение звука, в частности воздуха (ср. гл. VI). Но эта нелинейность начинает играть роль лишь при интенсивностях гораздо бóльших, чем те, при которых уже ощущаются комбинационные тоны, образующиеся из-за нелинейности уха.

**7. Фазовые соотношения.** Чтобы не загромождать формулы, мы в пп. 1 — 6 писали гармонические колебания без начальной фазы. Есть, однако, случаи, где при исследовании комбинационных колебаний фазы представляют основной интерес.

Пусть имеются два идентичных устройства с квадратичными характеристиками. Пусть на вход одного подается сумма колебаний

$$u_0 + u_1,$$

а на вход другого — сумма колебаний

$$u_0 + u_2,$$

причем

$$u_0 = A_0 \cos(\omega_0 t - \varphi_0),$$

$$u_1 = A_1 \cos(\omega t - \varphi_1), \quad u_2 = A_2 \cos(\omega t - \varphi_2)$$

Проведя такое же вычисление, как в п. 1, мы увидим, что возникающие на выходах наших устройств разностные колебания таковы:

$$v_1 = \beta A_0 A_1 \cos[(\omega - \omega_0)t - (\varphi_1 - \varphi_0)],$$

$$v_2 = \beta A_0 A_2 \cos[(\omega - \omega_0)t - (\varphi_2 - \varphi_0)].$$

Разность фаз между  $v_1$ ,  $v_2$  равна, таким образом, разности фаз между  $u_1$ ,  $u_2$ .

Это «сохранение разности фаз» при гетеродинировании широко применяется при измерении разностей фаз.

## ГЛАВА V

### ВОЛНЫ

#### § 1. Предварительные замечания. Волны на поверхности воды

Мы познакомились с разнообразными источниками и приемниками колебаний. Теперь нам предстоит заняться тем, как происходит *распространение* колебаний — передача воздействия от источника к приемнику. Как доходят до нашего уха колебания давления воздуха, возникающие около звучащего камертона? Каким образом быстропеременный ток, текущий в антенне радиопередатчика, вызывает появление тока в антенне приемника? Каким образом свет, испускаемый звездами, достигает нашего глаза?

Для рассмотрения подобного рода вопросов необходимо ввести новое физическое понятие — понятие *волны*.

Слово «волна» возникло задолго до того, как родилась наука. Оно обозначает в своем первоначальном смысле, как всем известно, то чередование движущихся следом друг за другом горбов и впадин, которые видны почти всегда на поверхности моря или большого озера; волны легко вызвать на гладкой поверхности пруда, если бросить на нее камень или коснуться ее палкой. Проникновение слова «волна» в акустику, а затем в оптику можно считать началом создания того единого языка, о котором говорилось в гл. I. В физике волнами или волной \*) называют всякое изменяющееся со временем пространственное чередование максимумов и минимумов любой физической величины, например плотности вещества, напряженности электрического поля, температуры.

Волной часто называют также всякое явление, при котором в пространстве происходит распространение кратковременного электрического или механического «толчка». Таким образом, понятие «волна» охватывает весьма обширный круг явлений.

В дальнейшем нас будут интересовать главным образом упругие (акустические) волны и электромагнитные волны (радиоволны, свет). Но ввиду особой наглядности волн на поверхности жидкости, где глаз может отдельно следить за каждым горбом и впадиной\*\*), мы познакомимся сначала с их помощью с некоторыми фактами, существенными для волн любого вида. Воспользуемся для этого ванной с плоским стеклянным

---

\*) Когда речь идет о волнах на поверхности воды, волной (в единственном числе) называют обычно совокупность *одного* горба и *одной* (смежной с ним) впадины. Когда говорят (также в единственном числе) «звуковая (или электромагнитная) волна такой-то частоты», всегда имеют в виду бесконечную вереницу «горбов» и «впадин».

\*\*) Безынерционное наблюдение, если пользоваться терминологией гл. IV, § 9.



ным дном, в которую налита вода (глубина около 1 см). Электрическая дуга, помещенная под ванной, дает на потолке или на косом экране тенью движущуюся картину волн, бороздящих поверхность воды (рис. 151). Пляшущие тени, которые мы видим в солнечный день на песчаном дне реки, на мелком месте, — аналогичного происхождения.



Рис. 151. Демонстрация волн на поверхности воды.

Проведем несколько опытов.

Опыт 1. Коснемся палочкой поверхности воды или уроним на нее водяную каплю. Мы увидим картину, о которой дает представление рис. 151: ряд кругов, расходящихся, как из

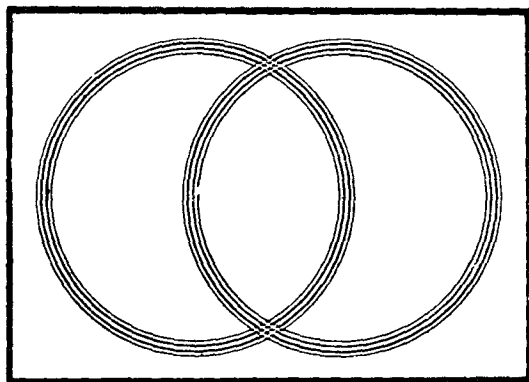


Рис. 152. Суперпозиция волн, расходящихся из двух точек, в которые упали водяные капли \*).

центра, из точки прикосновения палочки к воде или места попадания капли. Число кругов (т. е. число горбов и впадин) увеличивается по мере того, как волны расходятся.

Опыт 2. Уроним на поверхность воды одновременно несколько капель. Волны, расходящиеся из мест попадания капель, проходят «одна сквозь другую» без всяких взаимных влияний. Каждая волна распространяется так, как будто другой не существует (рис. 152). Это — явление *суперпозиции* волн: смещение частиц воды есть всюду сумма смещений, которые создавались бы каждым источником в отдельности. Эффектный случай суперпозиции волн осуществляется на поверхности реки или озера во время дождя.

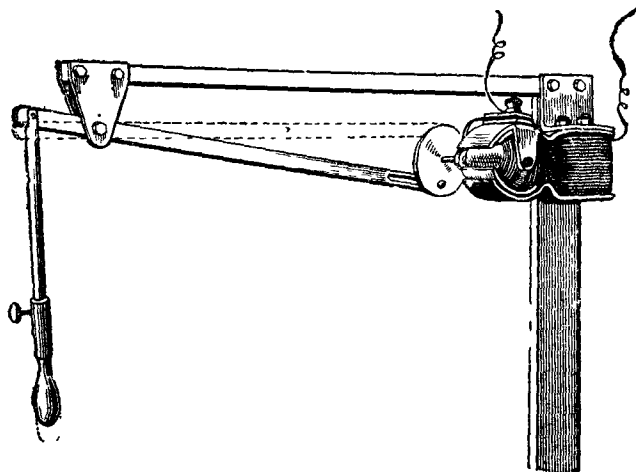


Рис. 153. Гармонически колеблющийся источник круговых волн.

Опыт 3. С помощью электрического моторчика и эксцентрика заставим металлический стерженек (рис. 153) совершать вертикальное гармоническое колебание, при котором он погружается в воду то на большую, то на меньшую глубину.

\*) Рис. 152, 154 и рис. 156—162 выполнены весьма схематично.

От стерженька разбегаются волны, имеющие вид концентрических кругов (рис. 154). Каждый круг равномерно расширяется. Расстояние между кругами (длина волны; более точное определение см. § 2) остается неизменным. Каждому периоду колебания стерженька соответствует появление нового круга (нового горба и впадины). Выведя реостат, вклю-

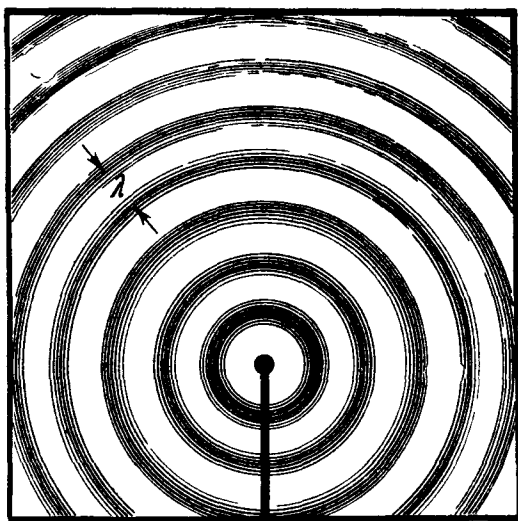


Рис. 154. Волны, создаваемые гармонически колеблющимся стерженьком.  $\lambda$ —длина волны.

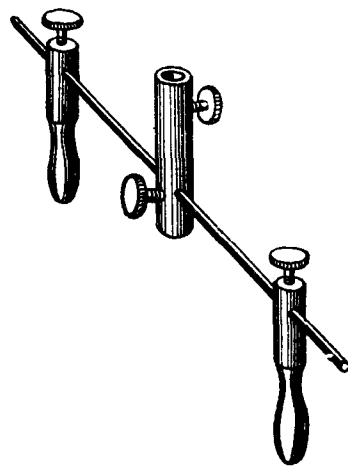
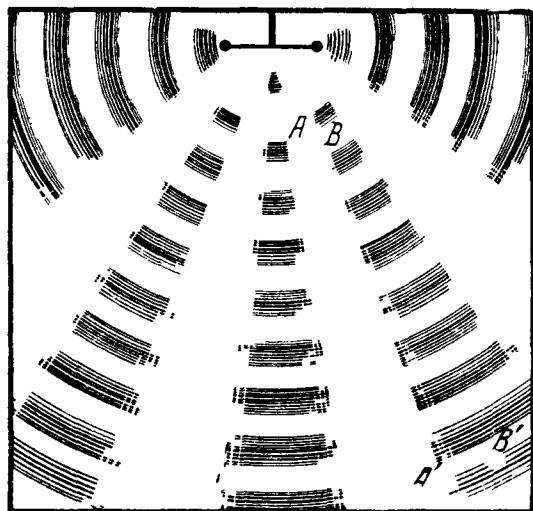


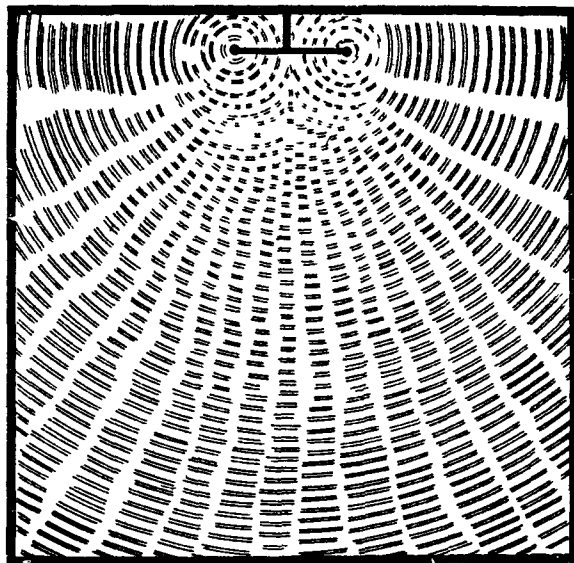
Рис. 155. Двойной источник круговых волн.

ченный последовательно с моторчиком, увеличим число его оборотов. Стерженьки колеблется с большей частотой. Расстояние между кругами (длина волны) становится меньше.

Опыт 4. Заменяем стерженьки двумя стерженьками, укрепленными, как показано на рис. 155. Когда мы пустим моторчик, они будут колебать-



а)



б)

Рис. 156. Суперпозиция волн, создаваемых двумя стерженьками, колеблющимися синфазно: а—соответствует меньшей, б—большей частоте.

ся с одинаковой амплитудой, частотой и фазой. Будет ли поверхность воды колебаться сильнее, чем в опыте 3? *Не везде.* Мы увидим на экране такую картину (рис. 156): в некоторых местах вода спокойна, т. е. суперпозиция волн от двух источников приводит к отсутствию колебаний ее поверхности, в других местах поверхность воды колеблется сильнее, чем в случае одного источника — здесь суперпозиция волн от двух источников приводит к уси-

лению волн. Видны «дорожки штиля» (например,  $AA'$ ) и «бурные дорожки» (например,  $BB'$ ). Если мы увеличим частоту колебаний двойного источника, дорожки будут расположены гуще (рис. 156, б). То явление, которое мы наблюдаем в опыте 4, называется *интерференцией волн*.

О п ы т 5. Поместим в нашу ванну какое-нибудь «препятствие» для волн — положим, например, на дно ванны крупную гайку (ее высота

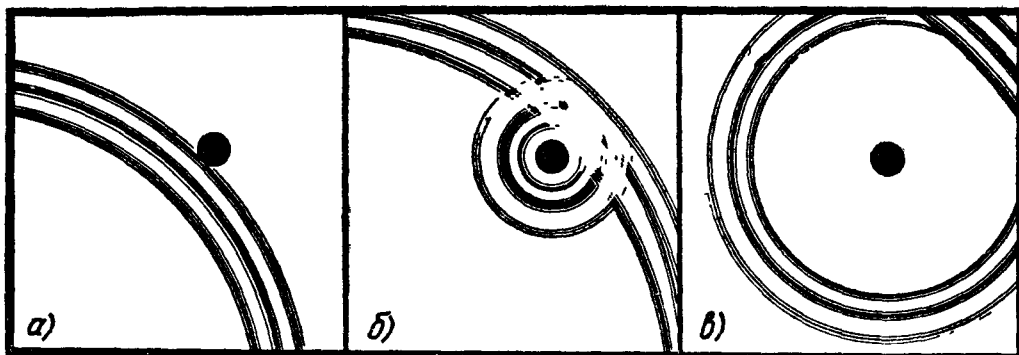


Рис. 157. Рассеяние волны, созданной прикосновением палочки к поверхности воды; а, б, в—картины, соответствующие трем последовательным моментам времени.

такова, что она выступает из воды). Создадим на поверхности воды волну таким же способом, как в опыте 1. Когда волна достигнет гайки, от нее начнет расходиться, как от нового источника, новая, гораздо более слабая, круговая волна (рис. 157). Это явление называют *рассеянием* первоначальной волны. Можно также наблюдать рассеяние, если источником служит непрерывно колеблющийся стерженек, как в опыте 3. И в этом случае наряду с сильными волнами, расходящимися непосредственно от стерженька, мы видим слабые, *рассеянные* волны, расходящиеся кругами от гайки (рис. 158), причем здесь и прямая и рассеянная вереницы волн делятся неопределенно долго.

Особенно большое значение для понимания волновых явлений (в частности, всей оптики) имеют опыты 4 и 5. Мы увидим, что, какова бы ни была природа волн, при наличии нескольких источников, колеблющихся с одинаковой частотой, посылаемые ими волны в одних местах усиливают, в других — ослабляют друг друга; степень усиления или ослабления, а также то, где оно происходит, зависит от расположения источников. Мы увидим также, что рассеяние на «препятствиях» — общее свойство волн любой природы. Препятствия становятся, таким образом, новыми источниками волн, которые накладываются друг на друга, а также на первоначальную волну.

О п ы т 6. Заменим в опыте 3 стерженек пластинкой (рис. 159); мы получим волны, показанные на рис. 160. Здесь линии горбов и впадин не окружности, а прямые.

О п ы т 7. Поставим на пути волн «плотину» — длинную прямую металлическую пластинку, опирающуюся на дно и торчащую из воды. Мы увидим

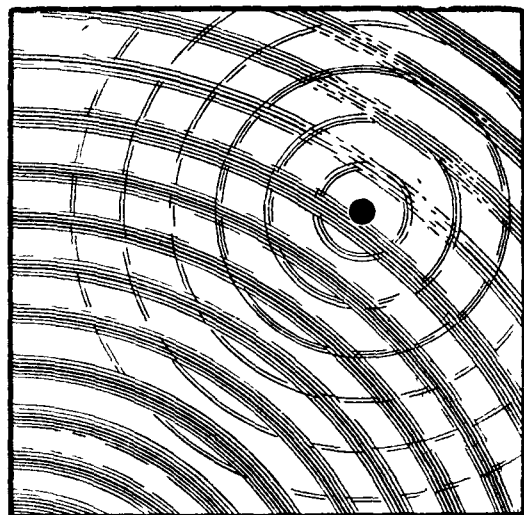


Рис. 158. Рассеяние волн, создаваемых гармонически колеблющимся стерженьком.

картину, показанную на рис. 161: волны *отражаются* от плотины\*); угол падения (между направлением распространения первоначальной волны и нормалью к «плотине») равен углу отражения (между этой нормалью и направлением распространения отраженной волны).

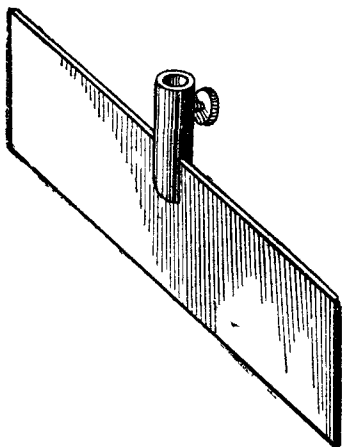


рис. 159. Пластика для создания волн, показанных на рис. 160.

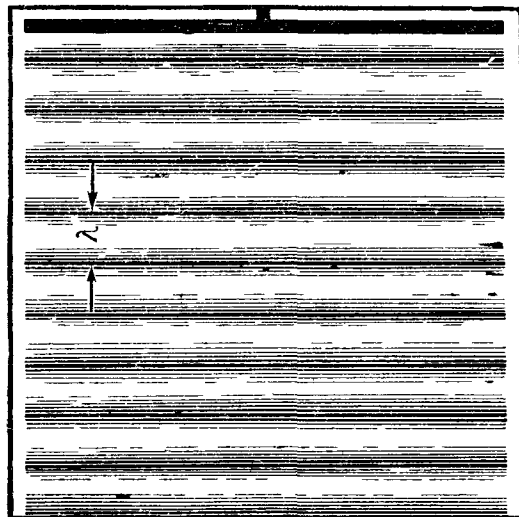


Рис. 160. Волны, создаваемые гармонически колеблющейся пластишкой.  $\lambda$ —длина волны.

**Опыт 8.** Устроим на пути волн прозрачную для света «мель»: положим на дно ванны стеклянную пластинку толщины меньшей, чем глубина воды в ванне. Если край пластинки—прямой, мы увидим явление, пока-

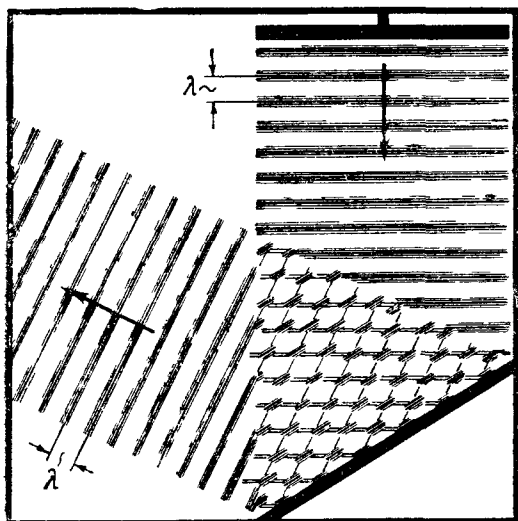


Рис. 161 Отражение волн от «плотины».

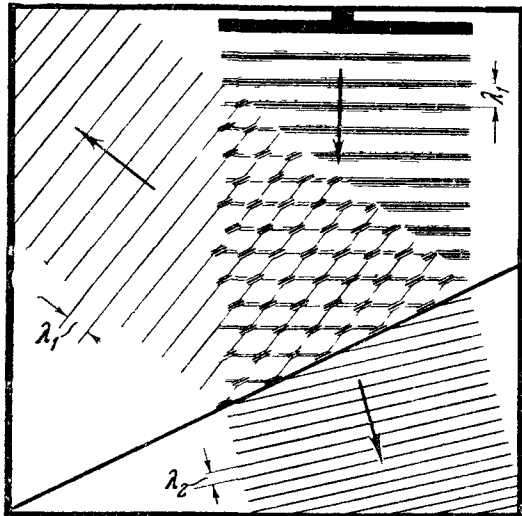


Рис. 162. Преломление волн на «мели». Длина волны  $\lambda_2$  на мелком месте *меньше* длины волны  $\lambda_1$  на глубоком месте, что указывает на меньшую скорость распространения (см. § 2).

занное на рис. 162: преломление волны (изменение направления распространения при переходе границы между «глубокой» и «мелкой» водой). Угол преломления (угол между направлением распространения преломленной волны и нормалью к границе мели) *меньше* угла падения (см. выше). Расстояние между соседними горбами или впадинами (длина волны) в преломленной волне *меньше*, чем в падающей.

\*) Во всех описываемых здесь опытах приходится принимать меры для того, чтобы избежать отражения волн от «берегов». Борты ванны делаются очень пологими; полезно вдобавок выложить их материей, образующей небольшие неправильные складки.

## § 2. Скалярные волны

1. **Плоская недеформирующаяся волна.** Пусть какая-нибудь скалярная физическая величина  $s$  зависит от времени  $t$  и от пространственной координаты  $x$ , но не от координат  $y, z$  (оси  $x, y, z$  образуют декартову систему координат):

$$s = F(t, x). \quad (5.1)$$

Эта формула означает, что величина  $s$  в каждый данный момент имеет одинаковое значение во всех точках любой плоскости  $x = \text{const}$  и, вообще говоря, различные значения в точках различных плоскостей  $x = \text{const}$ . С течением времени значение  $s$  на каждой из этих плоскостей меняется. Если график зависимости  $s$  от  $x$  имеет горбы и впадины и расположение их различно в различные моменты времени, то естественно назвать процесс, описываемый формулой (5.1), «плоской волной».

Рассмотрим частный случай плоской волны, когда аргументы  $x, t$  входят в выражение  $F(x, t)$  только через линейную комбинацию  $at - bx$ :

$$s = f(at - bx), \quad (5.2)$$

где  $a, b$  — положительные постоянные,  $f$  — произвольная однозначная функция. Такая волна обладает следующими свойствами.

А. Рассмотрим *осциллограммы* (т. е. графики зависимости  $s$  от  $t$ ) величины  $s$  в двух различных плоскостях  $x = 0$  и  $x = x_1$ . Имеем:

$$s(t, 0) = f(at), \quad (5.3)$$

$$s(t, x_1) = f(at - bx_1) = f\left[a\left(t - \frac{x_1}{u}\right)\right], \quad (5.4)$$

где

$$u = \frac{a}{b}. \quad (5.5)$$

Сравнение формул (5.3) и (5.4) показывает, что осциллограмма изменения  $s$  в точках плоскости  $x = x_1$  в точности воспроизводит осциллограмму изменения  $s$  в точках плоскости  $x = 0$ , но с опозданием на время  $\frac{x_1}{u}$  (рис. 163).

Б. Рассмотрим *моментальный снимок* волны в момент  $t = 0$ . (Мы называем моментальным снимком график зависимости  $s$  от  $x$  при фиксированном  $t$ .) В этом случае

$$s(0, x) = f(-bx). \quad (5.6)$$

Рассмотрим, далее, моментальный снимок той же волны в момент  $t = t_1$ . Его уравнение имеет вид

$$s(t_1, x) = f(at_1 - bx) = f[-b(x - ut_1)]. \quad (5.7)$$

Из формул (5.6), (5.7) видно, что моментальный снимок в момент  $t = t_1$  отличается от моментального снимка в момент  $t = 0$  только смещением вправо на расстояние  $ut_1$  (рис. 164).

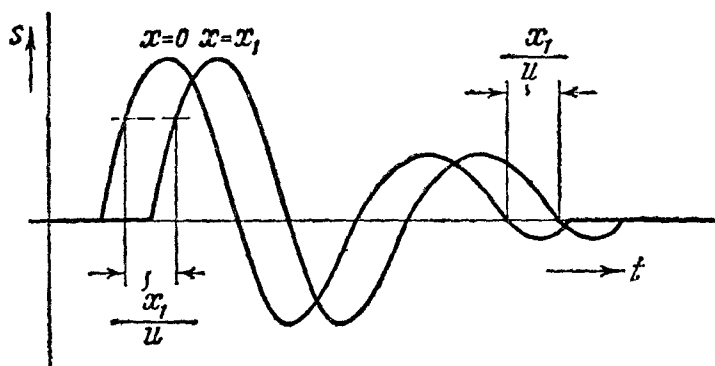


Рис. 163. Плоская недеформирующаяся волна. Осциллограммы, относящиеся к точкам  $x=0$ ,  $x=x_1 > 0$ . Волна распространяется сторону возрастающих  $x$ .

Таким образом, рассматриваемая волна перемещается, *не меняя своей формы*, в сторону возрастающих  $x$ , причем скорость перемещения волны, или, как обычно говорят, ее *скорость распространения*, равна  $u$ .

Аналогичным образом легко убедиться, что выражение

$$s = f(at + bx)$$

описывает волну, распространяющуюся со скоростью  $u = \frac{a}{b}$  справа налево

Подчеркнем, что введенное здесь понятие «скорость распространения»

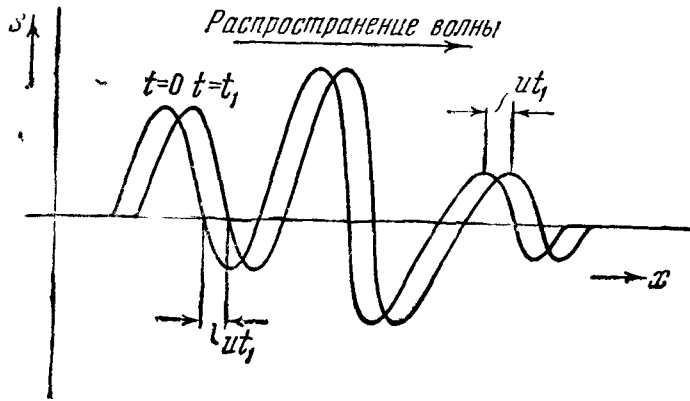


Рис. 164. Плоская недеформирующаяся волна. Моментальные снимки, относящиеся к мгновениям  $t=0$ ,  $t=t_1 > 0$ .

применимо не ко всякой волне вида (5.1), а только к тому частному случаю, которому соответствует уравнение (5.2). Если, например (рис. 165), при распространении волны ее горбы и впадины «размножаются», данное здесь определение скорости распространения неприменимо (подобно тому как нельзя охарактеризовать *одной* определенной скоростью движение тела, сопровождающееся изменением его формы).

С помощью уравнения вида (5.2) можно удовлетворительно описать волну смещения, бегущую по натянутому шнуру или жгуту (рис. 166), или натянутой длинной пружине, если создать в них поперечную

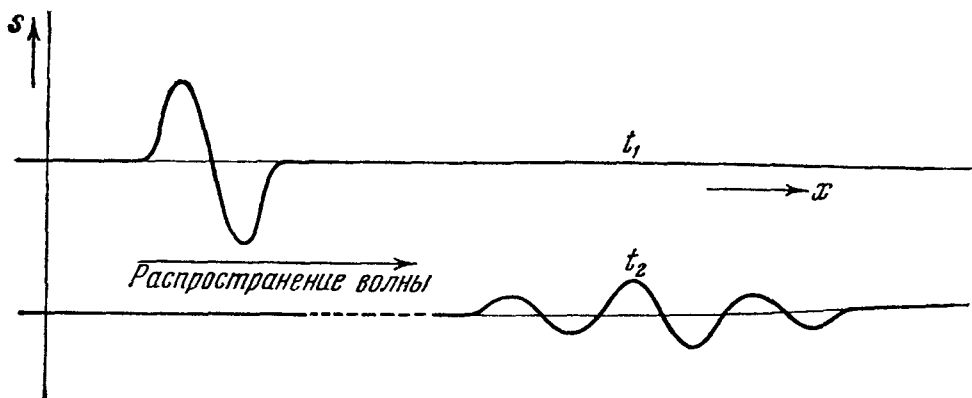


Рис. 165. Пример деформирующейся волны. Моментальные снимки  $t_2 > t_1$ .

деформацию (например, встряхиванием конца шнура или ударом). Теперь  $x$  в уравнении (5.2) означает расстояние частицы от начала шнура, измеренное



Рис. 166. Поперечная волна, бегущая по резиновому жгуту.

на недеформированном шнуре, а  $s$  — поперечное смещение в плоскости, проходящей через оси  $x$ ,  $y$ . (Не надо, конечно, смешивать направление и скорость движения *волны* и направление и скорость движения *частиц* шнура.) Однако, когда волна достигает конца шнура или пружины, воз-

никает явление, не описываемое уравнением (5.2): происходит *отражение*, т. е. появляется волна, бегущая в сторону, обратную первоначальной.

**2. Плоская синусоидальная волна.** Особый интерес представляет частный случай, когда функция  $f$  синусоидальна, т. е.

$$s = A \cos (at - bx)$$

или, в привычных обозначениях,

$$s = A \cos (\omega t - kx). \quad (5.8)$$

В каждой точке пространства ( $x$  фиксировано) величина  $s$  совершает гармоническое колебание. Его амплитуда равна  $A$ , его круговая частота равна  $\omega$ . Обе эти величины одинаковы для всех  $x$ . Фаза колебания равна  $kx$ . Она различна для различных  $x$  и пропорциональна расстоянию от плоскости  $x = 0$ . Коэффициент пропорциональности  $k$  между фазой и расстоянием называется *волновым числом*. При положительных  $\omega$ ,  $k$  выражение (5.8) описывает волну, распространяющуюся в сторону возрастающих  $x$  (слева направо), а выражение

$$s = A \cos (\omega t + kx)$$

— волну, распространяющуюся в сторону убывающих  $x$  (справа налево).

Моментальный снимок (см. п. 1) волны (5.8) есть синусоида в пространстве. Например, при  $t = 0$

$$s = A \cos kx.$$

Пространственный период, т. е. расстояние  $\lambda$ , такой, что при любом  $x$

$$s(x + \lambda) = s(x),$$

называют *длиной волны*. Длина волны связана с волновым числом соотношением (ср. соотношение между  $\omega$  и  $T$ , гл. I, § 1)

$$k\lambda = 2\pi,$$

т. е.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \lambda = \frac{2\pi}{k}. \quad (5.9)$$

Согласно формуле (5.5) скорость распространения

$$u = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T}, \quad (5.10)$$

где

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

— период колебания. Формула (5.8) может быть написана в таком виде.

$$s = A \cos \omega \left( t - \frac{x}{u} \right). \quad (5.11)$$

Из такой записи сразу видно, что колебание в плоскости  $x$  воспроизводит колебания в плоскости  $x = 0$  с опозданием на  $x/u$  сек.

На рис. 167 показаны моментальные снимки волны (5.9) в моменты  $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$ . За четверть периода волна продвигается на расстояние  $\frac{\lambda}{4}$ , за полпериода — на расстояние  $\frac{\lambda}{2}$  и т. д. Моментальный снимок для  $t = T$ , когда волна продвинется вперед на расстояние  $\lambda$ , совпадет с моментальным снимком для  $t = 0$ .

На рис. 168 показаны осциллограммы величины  $s$  для  $x=0, \frac{\lambda}{4}, \frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{4}, \lambda$ . Колебание в этих точках отстает по фазе от колебания в точке  $x=0$  соответственно на  $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$  и т. д. В точках  $x=\lambda, 2\lambda, 3\lambda, \dots$  колебание отстает по фазе от колебания в точке  $x=0$  на  $2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$

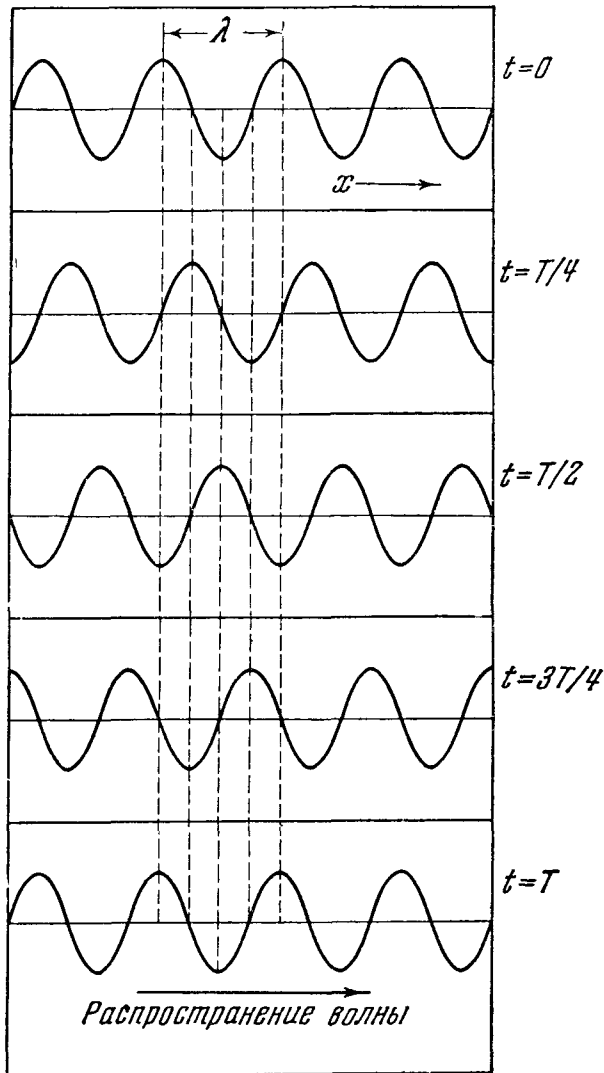


Рис. 167. Синусоидальная бегущая (ср. § 5) волна. Последовательность моментальных снимков (волна распространяется в сторону возрастающих  $x$ ).

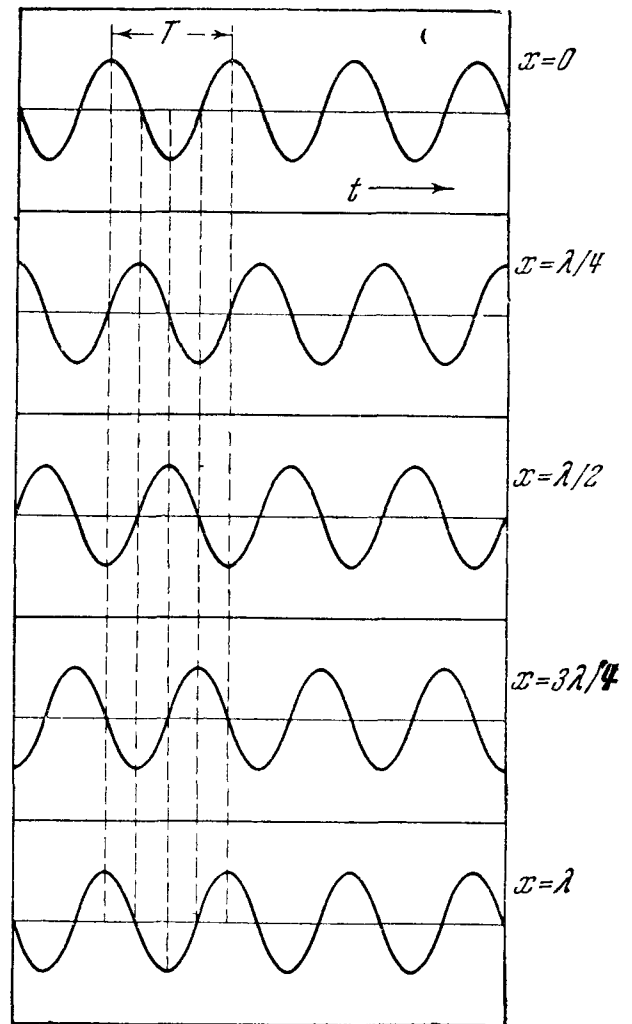


Рис. 168. Синусоидальная бегущая волна. Осциллограммы, относящиеся к различным  $t$  (волна распространяется в сторону возрастающих  $t$ ).

или, что то же самое (гл. I, § 4), находится с ним в *фазе*. В точках  $x = \frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \frac{5\lambda}{2}, \dots$  колебание находится в *противофазе* по отношению к колебанию в точке  $x=0$ .

**3. Другие геометрические типы синусоидальных волн.** Пусть волны распространяются в *плоскости* (как, например, волны на поверхности жидкости). Если они описываются уравнением вида

$$s = A \cos(\omega t - kx),$$

где  $\omega, k, A$  — постоянные, их можно назвать *прямолинейными* синусоидальными волнами: во всех точках любой прямой  $x = \text{const}$  амплитуды и фазы одинаковы. Волны, описываемые уравнением вида

$$s = \frac{A_0}{\sqrt{R}} \cos(\omega t - kR),$$



где  $A_0$ ,  $\omega$ ,  $k$  (как и в дальнейших формулах) — постоянные,  $R$  — расстояние от некоторой точки плоскости, называют *круговыми* синусоидальными волнами. Здесь во всех точках окружностей  $R = \text{const}$  величина  $s$  колеблется с одинаковой амплитудой и фазой.

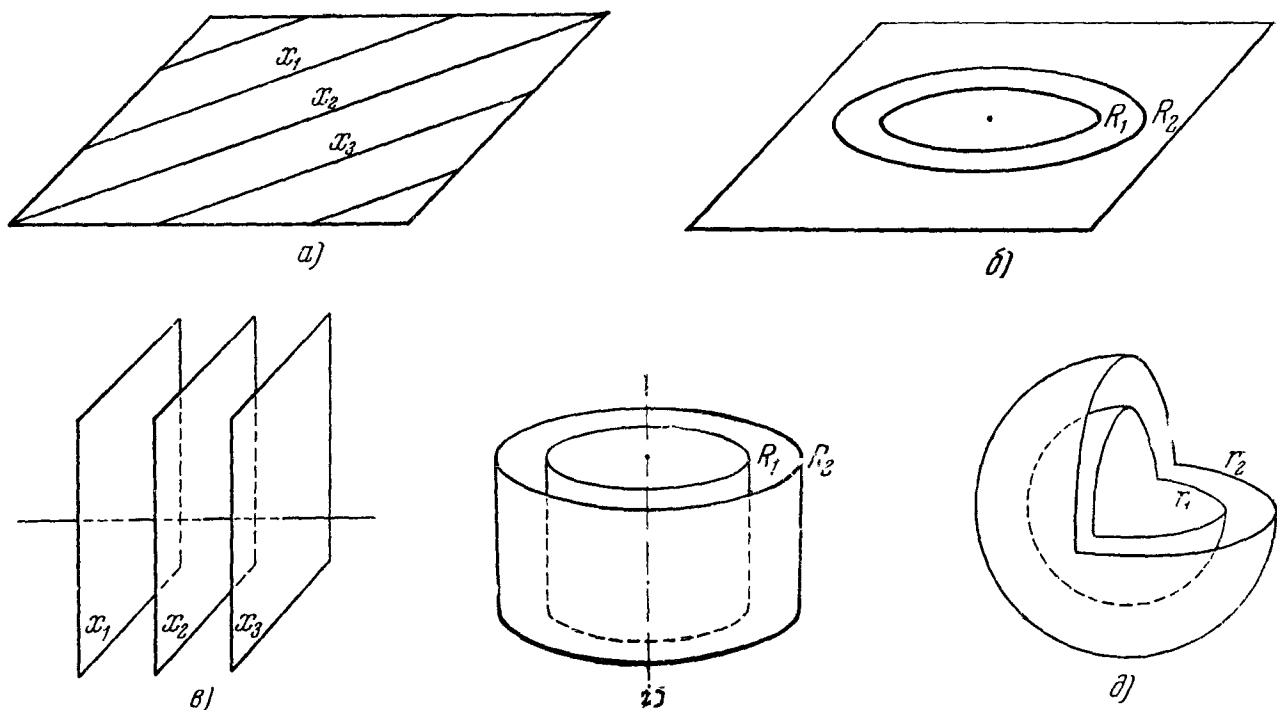


Рис. 169. Геометрические места точек\* равной фазы в случае: а—прямолинейной, б—круговой, в—плоской, г—цилиндрической, д—шаровой волн.

Пусть теперь волны распространяются в *пространстве*. Помимо рассмотренных в п. 2 плоских волн, здесь особенно важны следующие два типа волн:

*Цилиндрические* синусоидальные волны

$$s = \frac{A_0}{\sqrt{R}} \cos(\omega t - kR), \quad (5.12)$$

где  $R$  — расстояние от некоторой прямой. Поверхности равной амплитуды и равной фазы — круговые цилиндры\*).

*Шаровые* (или *сферические*) синусоидальные волны

$$s = \frac{A_0}{r} \cos(\omega t - kr), \quad (5.13)$$

где  $r$  — расстояние от некоторой точки. Поверхности равной амплитуды и равной фазы — сферы  $r = \text{const}$ .

В плоских волнах амплитуда всюду одинакова, в круговых и цилиндрических синусоидальных волнах амплитуда убывает пропорционально  $\sqrt{R}$ , в шаровых волнах амплитуда убывает обратно пропорционально  $r$ . Эти обстоятельства являются следствиями закона сохранения энергии. Подробнее мы это сможем пояснить в гл. VI.

Во всех рассмотренных случаях фаза колебания в данной точке пространства есть линейная функция некоторой пространственной координаты  $\xi$  (мы понимаем здесь под  $\xi$  величину  $x$ ,  $R$  или  $r$ ). Как и в случае

\* [Формула для круговых волн на плоскости, а также формулы (5.12) и (5.13) для цилиндрических волн в пространстве являются приближенными. Они справедливы при условии  $kR \gg 1$ .]

плоской волны, коэффициент пропорциональности  $k$  между фазой и  $\xi$  называют волновым числом, величину  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ , т. е. пространственный период функции  $\cos(\omega t - k\xi)$  \*, — длиной волны, отношение  $u = \frac{\omega}{k}$  — скоростью распространения. Во всех рассматриваемых случаях колебания в точках, отстоящих на  $\lambda$ , имеют разность фаз  $2\pi$ , т. е. синфазны.

Возможны волны более общего вида

$$s = A(\mathbf{R}) \cos(\omega t - kR), \quad (5.12a)$$

$$s = A(\mathbf{r}) \cos(\omega t - kr), \quad (5.13a)$$

где  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{R}$  — радиусы-векторы, проведенные в точку, к которой относится величина  $s$ , соответственно из некоторой точки или из некоторой прямой. Здесь сферы  $r = \text{const}$  (соответственно цилиндры  $R = \text{const}$ ) являются поверхностями равной фазы, но вообще говоря, *неравной* амплитуды.

Волны типа (5.12a) мы также будем называть цилиндрическими, а типа (5.13a) — шаровыми синусоидальными волнами.

Рис. 169 показывает линии (поверхности) равной фазы для описанных здесь типов волн.

### § 3. Звуковые волны (предварительные сведения)

Уже в гл. I был описан опыт (рис. 12), показывающий, что в пространстве, окружающем источник звука, давление воздуха колеблется около своего среднего значения  $p_0$ :

$$p = p_0 + \Delta p,$$

причем, если источником звука служит громкоговоритель, питаемый от звукового генератора,  $\Delta p$  меняется синусоидально:

$$\Delta p = A \cos(\omega t - \varphi).$$

Но в гл. I ничего не было сказано о том, как меняются (и меняются ли) амплитуда  $A$  и фаза  $\varphi$  звукового давления  $\Delta p$  от точки к точке. Мы сможем ответить на этот вопрос, если займемся исследованием «звукового поля», передвигая тележку, на которой установлен микрофон. Напомним, что возникающее на клеммах микрофона напряжение, пропорциональное  $\Delta p$ , подается на вертикально отклоняющие пластины осциллоскопа, а на его горизонтально отклоняющие пластины — напряжение с клемм громкоговорителя. Возникающий на экране эллипс позволяет судить об амплитуде и фазе  $\Delta p$  ( $A$  и  $\varphi$ ) в том месте, где находится микрофон (за нуль при этом удобно принять фазу напряжения на клеммах громкоговорителя).

Будем постепенно удалять микрофон от громкоговорителя по прямой линии. Рис. 170 дает представление о последовательности фигур, наблюдаемых при этом на экране осциллоскопа. Форма и вертикальный размер эллипса (т. е. его проекция на вертикальную ось) плавно меняются. Вертикальный размер монотонно убывает, что указывает на убывание амплитуды  $\Delta p$  с ростом расстояния  $r$  между центрами громкоговорителя и микрофона. Если не считать этого сплющивания, форма эллипса *периодически повторяется*. Пусть, например, при каком-то  $r = r_1$  эллипс вырождается в наклонный отрезок прямой, расположенный в первом и третьем квадрантах. Это повторится при положениях микрофона

$$r = r_2, \quad r = r_3, \dots,$$

\*) Не функции  $s$ ; она не периодична в пространстве, за исключением случая  $\xi = x$ .

причем

$$r_2 - r_1 = r_3 - r_2 = \dots$$

Последовательность картин, которую мы видим на отрезке  $r_1$ ,  $r_2$ , соответствует возрастанию фазы  $\Delta p$  на  $2\pi$ ; последовательность картин, получающихся на отрезке  $r_2$ ,  $r_3$ , соответствует новому возрастанию фазы на  $2\pi$  и т. д. Промер формы эллипсов при разных положениях микрофона показал бы, что  $\varphi$  растет линейно с ростом  $r$ . Таким образом, мы убеждаемся на опыте, что

$$\Delta p = A(r) \cos(\omega t - kr),$$

т. е. в том, что звуковое поле носит волновой характер и описывается формулой вида (5.13), т. е. что звуковое давление  $\Delta p$  распространяется в виде синусоидальной шаровой волны \*).

Расстояние между двумя ближайшими положениями микрофона, при котором форма эллипсов одинакова (если отвлечься от сплющивания), есть, очевидно, длина волны  $\lambda$ . При увеличении частоты звукового генератора (при повышении звука) расстояния между положениями микрофона, соответствующими одинаковой форме эллипса, становятся меньше: длина волны уменьшается.

Зная частоту  $\nu$  (она указана на шкале настройки звукового генератора) и измерив с помощью масштаба  $\lambda$ , мы можем вычислить скорость распространения звука  $u$  по формуле  $u = \lambda\nu$ .

Проделав опыт при различных частотах, мы получаем каждый раз с точностью до ошибки измерения одно и то же значение  $u$ , близкое к 340 м/сек (при температуре воздуха 20° С \*\*). Для увеличения точности нужно, конечно, измерить расстояние, соответствующее возможно большему целому числу длин волн.

#### § 4. Векторные волны. Поляризация

В § 2 речь шла об изменяющейся в пространстве и времени скалярной величине  $s$ . Предположим теперь, что некоторая векторная величина  $\mathbf{v}$  (скорость, напряженность электрического или магнитного поля и т. д.) является функцией координат и времени. Ограничимся случаем плоской недеформирующейся волны

$$\mathbf{v} = \mathbf{f}(at - bx).$$

Если вектор  $\mathbf{v}$  перпендикулярен к направлению распространения, т. е. к оси  $x$ , волна называется

\*) Это оправдывается тем точнее, чем меньше отражение звука от окружающих предметов и чем меньше размер громкоговорителя по сравнению с  $\lambda$ .

\*\*) Например, при частоте 1000 герц опыт дает  $\lambda$  около 34 см, при частоте 2000 герц —  $\lambda$  около 17 см.

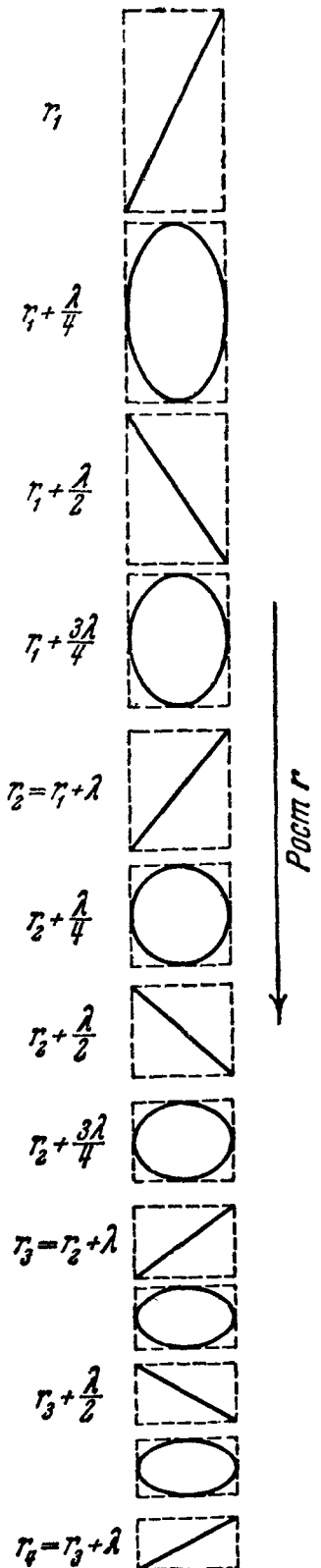


Рис. 170. Последовательность фигур, получающихся на экране осциллографа при увеличении расстояния  $r$  между микрофоном и громкоговорителем.

поперечной, если вектор  $\mathbf{v}$  параллелен направлению распространения, волна называется *продольной*. В общем случае вектор  $\mathbf{v}$  имеет и продольную и поперечную составляющие.

Случай продольной волны мало отличается от случая скалярной волны. Вместо вектора  $\mathbf{v}$  здесь можно рассматривать скаляр

$$s = v_x = v$$

( $v_x$  — проекция вектора  $\mathbf{v}$  на ось  $x$ ). Здесь, как и в случае скалярной волны, все направления, перпендикулярные к направлению распространения, физически равноправны между собой.

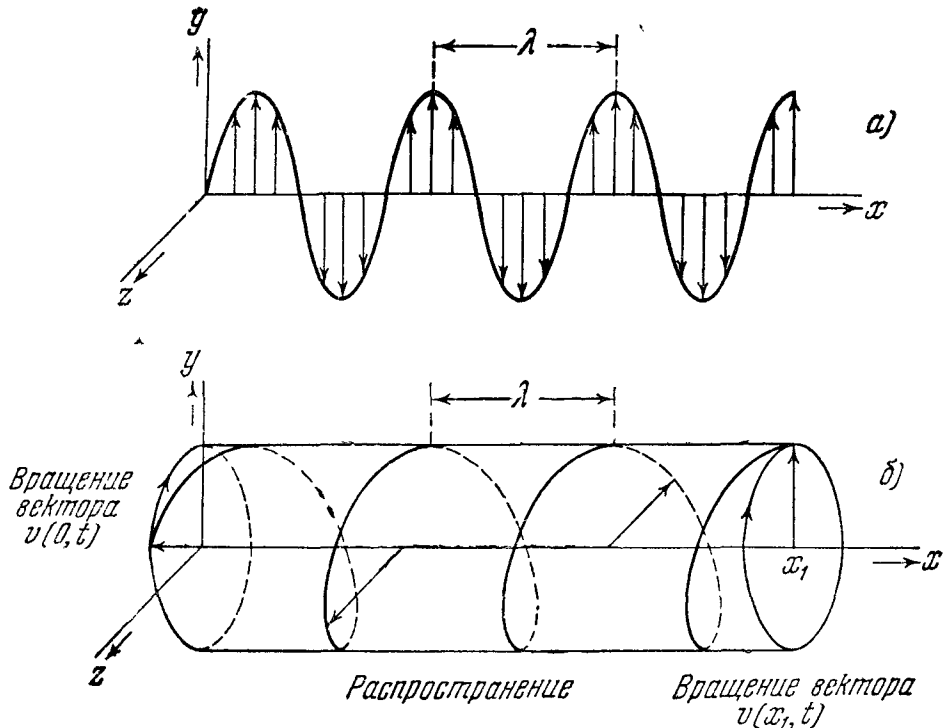


Рис. 171. *a*—линейно-поляризованная волна. Синусоида—геометрическое место концов векторов  $\mathbf{v}$ , относящихся к различным  $x$  при одном и том же  $t$ ; *б*—волна, поляризованная по кругу. Винтовая линия—геометрическое место концов векторов  $\mathbf{v}$ , относящихся к различным  $x$  при одном и том же  $t$ . Окружности (в перспективе—эллипсы)—траектории концов вектора  $\mathbf{v}$  в точках  $x=0$ ,  $x=x_1$  (направления вращения показаны стрелкой). Здесь  $\alpha-\beta=\pi/2$  (правая поляризация). Этот же рисунок может относиться к эллиптически поляризованной волне, в которой  $\alpha-\beta=\pi/2$ .

Частным случаем поперечной волны является тот, когда вектор  $\mathbf{v}$  имеет во всех точках пространства одинаковое и постоянное во времени направление, но, вообще говоря, различный знак (рис. 171, *a*). Расположим ось  $y$  по этому направлению. Изменение во времени и пространстве вектора  $\mathbf{v}$  может быть описано заданием, как функции  $t$  и  $x$ , скаляра

$$s = v_y = v.$$

Но этот случай коренным образом отличается от скалярной волны и от продольной векторной волны. Здесь различные направления, перпендикулярные к направлению распространения, *не* равноправны между собой (например, направление осей  $y$  и  $z$ ).

Рассмотрим более общий случай поперечной волны, когда не только величина, но и направление вектора  $\mathbf{v}$  зависит от  $t$  и  $x$ . Назовем *синусоидальной* поперечной волной такую, в которой проекции  $v_y$ ,  $v_z$  вектора  $\mathbf{v}$

на два взаимно перпендикулярных направления, перпендикулярные к направлению распространения  $x$ , выражаются формулами

$$v_y = A \cos(\omega t - kx - \alpha), \quad v_z = B \cos(\omega t - kx - \beta),$$

где  $A$ ,  $B$ ,  $\omega$ ,  $k$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  — постоянные; эти проекции образуют, таким образом, синусоидальные скалярные волны одинаковой частоты, распространяющиеся с одинаковой скоростью. Отсюда следует (см. гл. II, § 3), что конец вектора  $\mathbf{v}$  описывает во всех точках пространства (т. е. при любом фиксированном  $x$ ), вообще говоря, одинаковые и одинаково ориентированные эллипсы. Это свойство синусоидальной поперечной волны принято выражать словами: синусоидальная поперечная волна, вообще говоря, *эллиптически поляризована*.

В частности, если  $\alpha - \beta = \pm \frac{\pi}{2}$ , главные оси эллипсов совпадают с осями координат, а если, кроме того,  $A = B$ , эллипсы превращаются в окружности. В этом случае говорят: волна *поляризована по кругу*.

Другой весьма важный частный случай — тот, когда  $\alpha - \beta = 0$  или  $\alpha - \beta = \pm \pi$ , или  $A = 0$ , или  $B = 0$ .

В этом случае эллипс вырождается в прямую линию. Такую волну называют *линейно-поляризованной*.

Рассмотрим волну, поляризованную по кругу. В каждый момент времени концы векторов  $\mathbf{v}$ , относящихся к различным точкам любой прямой, параллельной оси  $x$ , расположены по винтовой линии (рис. 171, б). Шаг винта равен длине волны  $\lambda$ . С изменением  $t$  эта винтовая линия перемещается вперед, т. е. по направлению распространения, не вращаясь и не деформируясь. Наши оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  образуют *правую* систему. Если мы смотрим навстречу распространяющейся волне, то в случае  $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$  мы видим

векторы  $\mathbf{v}$  вращающимися всюду *по часовой стрелке*, в случае  $\alpha - \beta = -\frac{\pi}{2}$  — *против* часовой стрелки. В оптике для первого случая установилось название *правая*, для второго — *левая* поляризация.

В случае эллиптической поляризации в каждый момент времени концы векторов  $\mathbf{v}$ , относящихся к различным точкам любой прямой, параллельной оси  $x$ , лежат на винтовой линии, расположенной на эллиптическом цилиндре. Здесь для наблюдателя, смотрящего навстречу волне, конец вектора  $\mathbf{v}$  движется также *по часовой стрелке* (*правая* эллиптическая поляризация), если  $\alpha - \beta > 0$ , и *против* часовой стрелки (*левая* эллиптическая поляризация), если  $\alpha - \beta < 0$ .

## § 5. Стоячие волны

Представим себе, что скалярная величина  $s$  следующим образом зависит от координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  рассматриваемой точки и времени  $t$ :

$$s = F(x, y, z) \cos(\omega t - \varphi),$$

где  $F(x, y, z)$  — некоторая однозначная функция,  $\omega$  и  $\varphi$  — постоянные. Это значит, что величина  $s$  во всех точках пространства совершает гармоническое колебание с одинаковой частотой и фазой. Но амплитуда колебания различна для различных точек пространства.

Такого рода явление называется *стоячей волной*. Те волны, которые рассматривались в §§ 2 и 3, называют, если нужно подчеркнуть их отличие от стоячей волны, *бегущими волнами*.

Нас здесь будет интересовать только весьма частный случай стоячих волн — *плоские* стоячие волны, где амплитуда зависит только от одной

координаты, скажем  $x$ :

$$s = F(x) \cos(\omega t - \varphi). \quad (5.14)$$

На рис. 172 показан ряд моментальных снимков плоской стоячей волны (т. е. графиков зависимости  $s$  от  $x$  при фиксированных  $t$ ) для случая

$$s = F(x) \cos \omega t = F(x) \cos \frac{2\pi}{T} t$$

частный случай предыдущей формулы). В тех точках, где  $F(x) = 0$  при

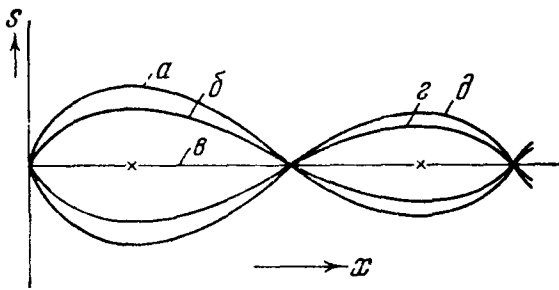


Рис. 172. Стоячая волна. Последовательность моментальных снимков: а)  $t=0, T$ ; б)  $t=1/8T, 7/8T$ ; в)  $t=1/4T, 3/4T$ ; г)  $t=3/8T, 5/8T$ ; д)  $t=T/2$ .

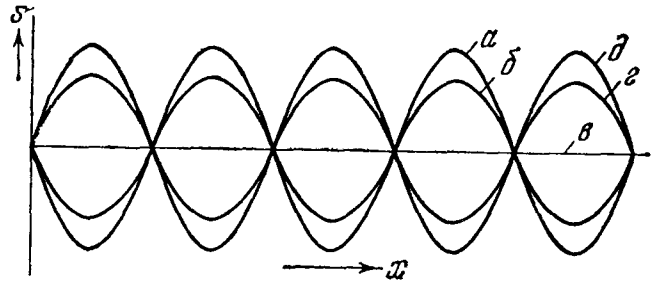


Рис. 173. Синусоидальная стоячая волна  $A \sin kx \cos \omega t$ . Последовательность моментальных снимков: а)  $t=0, T$ ; б)  $t=1/8T, 7/8T$ ; в)  $t=1/4T, 3/4T$ ; г)  $t=3/8T, 5/8T$ ; д)  $t=T/2$ .

любом  $t$ ,  $s = 0$ . Эти точки называются *узлами* стоячей волны. В тех точках, где  $F(x)$  имеет максимум (или минимум), амплитуда колебания наибольшая.

Эти точки называются *пучностями* стоячей волны.

Интересен случай, когда

$$F(x) = A \cos(kx - \psi), \quad (5.14a)$$

т. е.

$$s = A \cos(kx - \psi) \cos(\omega t - \varphi),$$

где  $A$ ,  $k$ ,  $\psi$  — постоянные, т. е. когда распределение амплитуды в пространстве синусоидально. Такая стоячая волна называется *синусоидальной* стоячей волной (рис. 173).

Рис. 174. Последовательные моментальные снимки: а, а' — стоячая б, б' — бегущая синусоидальная волна.

Но последовательность двух моментальных снимков, относящихся к близким моментам времени, легко позволяет обнаружить отличие (рис. 174). Период  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$  функции  $F(x)$ , т. е. пространственный период функции  $s$ , называется *длиной* стоячей волны.

Докажем, что *суперпозиция двух бегущих плоских синусоидальных волн одинаковой амплитуды, длины и частоты, распространяющихся в противоположных направлениях, есть стоячая плоская синусоидальная волна.*

Действительно, пусть

$$s_1 = A \cos(kx - \omega t - \alpha_1), \quad s_2 = A \cos(kx + \omega t - \alpha_2).$$

Тогда

$$s = s_1 + s_2$$

может согласно известной тригонометрической формуле

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

быть представлена в виде

$$s = 2A \cos\left(kx - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\right). \quad (5.15)$$

Это — уравнение стоячей волны.

Амплитуда результирующей стоячей волны в пучности вдвое больше амплитуды каждой из бегущих волн. Длина и частота стоячей волны равны соответственно длине и частоте бегущих волн.

Стоячую волну типа, показанного на рис. 173, легко получить на шнуре (рис. 166), раскачивая по синусоидальному закону его конец. Здесь стоячая волна образуется в результате суперпозиции синусоидальной волны, бегущей от руки к точке закрепления шнура, и волны, бегущей в обратную сторону, т. е. отраженной синусоидальной волны.

Рассмотрим более общий случай суперпозиции двух бегущих плоских волн одинаковой амплитуды, длины и частоты, распространяющихся навстречу друг другу, — случай, когда их амплитуды не равны:

$$s_1 = A_1 \cos(kx - \omega t - \alpha_1), \quad s_2 = A_2 \cos(kx + \omega t - \alpha_2).$$

Напишем

$$A_2 = A, \quad A_1 = A + a.$$

Легко видеть, что  $s = s_1 + s_2$  есть суперпозиция стоячей волны, описываемой формулой (5.15), и бегущей волны

$$a \cos(kx - \omega t - \alpha_1).$$

Величина  $(a/A)^2$  называется коэффициентом бегучести.

## § 6. Суперпозиция двух шаровых или круговых синусоидальных волн

1. **Общее описание явлений.** Пусть точки  $S_1$  и  $S_2$  (рис. 175) являются источниками шаровых волн. Пусть эти источники колеблются с одинаковой амплитудой, частотой и фазой и излучают равномерно во всех направлениях, т. е.  $A$  зависит только от  $r$  (а не от направления). Тогда создаваемые ими волны описываются уравнениями

$$s_1 = \frac{A_0}{r_1} \cos(\omega t - kr_1), \quad s_2 = \frac{A_0}{r_2} \cos(\omega t - kr_2). \quad (5.16)$$

Здесь  $r_1, r_2$  — соответственно расстояния рассматриваемой точки пространства от источников  $S_1, S_2$ .

Разность фаз между колебаниями  $s_1, s_2$  в некоторой точке  $P$  есть

$$k(r_2 - r_1) = k\Delta, \quad (5.17)$$

где

$$\Delta = r_1 - r_2$$

Длина  $\Delta$  называется разностью хода волн, приходящих в точку  $P$ .

Рассмотрим суперпозицию

$$s = s_1 + s_2$$

волн  $s_1, s_2$ , заданных функциями (5.16).

Согласно теории суперпозиции скалярных колебаний (гл. II, § 2) результирующая интенсивность в точке  $P$  (квадрат амплитуды  $A$  результирующего колебания) существенно зависит от разности фаз  $k\Delta$  в этой точке:

$$A^2 = A_0^2 \left[ \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{2}{r_1 r_2} \cos k\Delta \right]. \quad (5.18)$$

В тех точках, где

$$k\Delta = \pm 2n\pi, \text{ т. е. } \Delta = \pm n\lambda \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (5.19)$$

амплитуда результирующего колебания будет равна сумме

$$\frac{A_0}{r_1} + \frac{A_0}{r_2}$$

амплитуд колебаний  $s_1$  и  $s_2$ . В тех точках, где

$$k\Delta = \pm (2n + 1)\pi, \text{ т. е. } \Delta = \pm (2n + 1)\frac{\lambda}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (5.20)$$

амплитуда результирующего колебания равна их разности, или, если

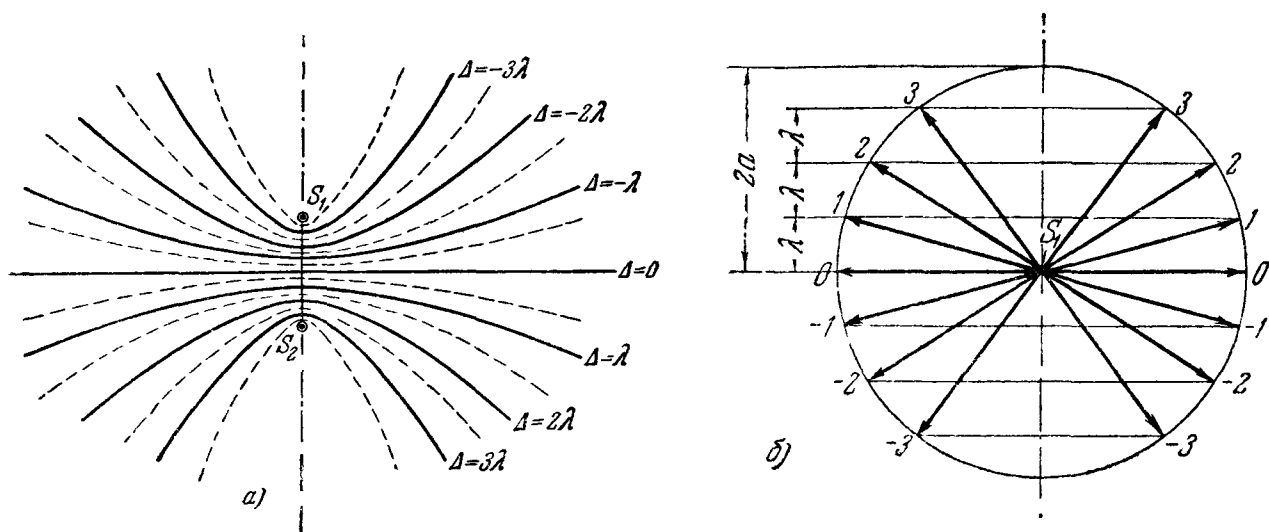


Рис. 175.  $a$ —следы гиперboloидов  $\Delta = \pm n\lambda$  и  $\Delta = \pm (2n + 1)\lambda/2$  на плоскости, содержащей  $S_1, S_2$ . Картина в пространстве получается вращением чертежа около оси  $S_1 S_2$ . Здесь  $3\lambda < 2a < 4\lambda$ ,  $m=3, 2a=S_1 S_2$ ;  $b$ —тот же случай. Построение направлений максимального излучения в соответствии с формулой  $2a \sin \theta = n\lambda$ .

условиться считать амплитуду существенно положительной (относя знак к фазе), — абсолютной величине

$$\left| \frac{A_0}{r_1} - \frac{A_0}{r_2} \right|$$

этой разности.

Геометрическим местом точек, для которых  $\Delta = \text{const}$ , является в случае  $\Delta = 0$  плоскость, перпендикулярная к отрезку  $S_1 S_2$  и делящая его пополам, а в случае  $\Delta \neq 0$  — гиперboloид вращения, ось которого проходит через  $S_1 S_2$ . Плоскость  $\Delta = 0$  и гиперboloиды  $k\Delta = \pm 2n\pi$  являются геометрическим местом максимумов амплитуды, гиперboloиды  $k\Delta = \pm (2n + 1)\pi$  — геометрическим местом минимумов.

Общее число гиперboloидов, соответствующих максимумам амплитуды, равно, очевидно, целой части от числа полуволи, содержащихся в отрезке



$\frac{S_1 S_2}{2}$  (т. е. целой части  $m$  от числа длин волн, содержащихся в  $S_1 S_2$ ).

Рассмотрим произвольную плоскость, содержащую  $S_1 S_2$ . Число направлений, соответствующих максимумам амплитуды, равно  $4m + 2$  (по два на каждую из двух полостей каждого из  $m$  гиперboloидов и два направления в плоскости  $r_1 = r_2$ ).

Сказанное выше легко перенести (положив  $\Delta = R_1 - R_2$ ) на случай круговых волн, создаваемых источниками одинаковой амплитуды и фазы. Вместо гиперboloидов равной разности хода мы получим здесь *гиперболы* равной разности хода. Этот случай мы уже встретили в опыте 4 § 1. «Бурные дорожки» — это гиперболы  $\Delta = n\lambda$  ( $n$  — целое), «дорожки штиля» — это гиперболы  $\Delta = n \frac{\lambda}{2}$  ( $n$  — нечетное).

Рост числа дорожек с увеличением частоты (рис. 156, б), т. е. с уменьшением  $\lambda$ , теперь понятен.

**2. Картина на большом расстоянии от источников.** Если расстояния  $r_1, r_2$  настолько велики, что  $\Delta \ll r_1$  и  $\Delta \ll r_2$ , то относительное отличие между амплитудами  $A_0/r_1, A_0/r_2$  незначительно.

Формула (5.18) принимает вид

$$A^2 = \frac{2A_0^2}{r^2} [1 + \cos k\Delta], \quad (5.18a)$$

где под  $r$  в первом множителе можно понимать как  $r_1$ , так и  $r_2$ . Разумеется, условия  $\Delta \ll r_1, \Delta \ll r_2$  не дают нам права пренебрегать отличием между  $r_1$  и  $r_2$  в выражении для  $\Delta$ , т. е. положить  $\Delta = 0$ . Можно считать приближенно  $\Delta = 0$  только в том случае, если  $\Delta$  мало по сравнению с длиной волны, так как только в этом случае  $k\Delta \ll 2\pi$  и  $\cos k\Delta$  близок к единице. С тем приближением, с которым верна формула (5.18), можно считать, что на четных гиперboloидах, как и на плоскости  $\Delta = 0$ , амплитуда в результате суперпозиции удваивается (интенсивность учетверяется), а на нечетных гиперboloидах амплитуда равна нулю.

Обратим внимание также на другое упрощение, возникающее при наблюдении на больших расстояниях от источников.

Выразим разность хода  $\Delta$  через полярные координаты  $r, \theta$ , где  $r$  — расстояние точки наблюдения от середины  $S$  отрезка  $S_1 S_2$ , а  $\theta$  — угол между направлением  $SP$  и перпендикуляром к направлению  $S_1 S_2$  (рис. 176).

Имеем, очевидно,

$$\begin{aligned} \Delta &= r_2 - r_1 = \sqrt{r^2 + a^2 + 2ra \sin \theta} - \sqrt{r^2 + a^2 - 2ra \sin \theta} = \\ &= r \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 + 2\frac{a}{r} \sin \theta} - \sqrt{1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 - 2\frac{a}{r} \sin \theta} \right\}. \end{aligned}$$

Разлагая радикалы в степенные ряды по формуле

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \dots,$$

причем здесь

$$x = \left(\frac{a}{r}\right)^2 \pm 2\frac{a}{r} \sin \theta,$$

получаем:

$$\Delta = r \left\{ 2\frac{a}{r} \sin \theta - \frac{1}{4} \left(\frac{a}{r}\right)^3 (\sin \theta + \sin 3\theta) + \dots \right\}$$

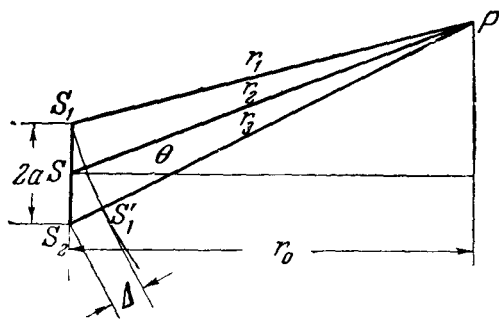


Рис. 176. К вычислению разности хода. Формула  $\Delta = 2a \sin \theta$  соответствует замене дуги  $S_1 S'_1$  с центром в  $P$  проекцией отрезка  $S_1 S_2$  на перпендикуляр к  $SP$ . Отличие между дугой  $S_1 S'_1$  и этой проекцией тем меньше, чем больше расстояние  $SP$ .

Отсюда видно, что когда  $r \rightarrow \infty$ , разность хода  $\Delta$  стремится к значению

$$\Delta = 2a \sin \theta, \quad (5.21)$$

зависящему от *направления* наблюдения, но не зависящему от расстояния  $r$  между точкой наблюдения и центром источника. Таким образом, если речь идет о достаточно больших расстояниях  $r$  (таких, что отброшенная часть выражения для  $\Delta$  мала по сравнению с длиной волны  $\lambda$ ), мы можем говорить, что наш сложный источник дает сильное излучение по одним направлениям, слабое или нулевое излучение — по другим. Ясно, что направления

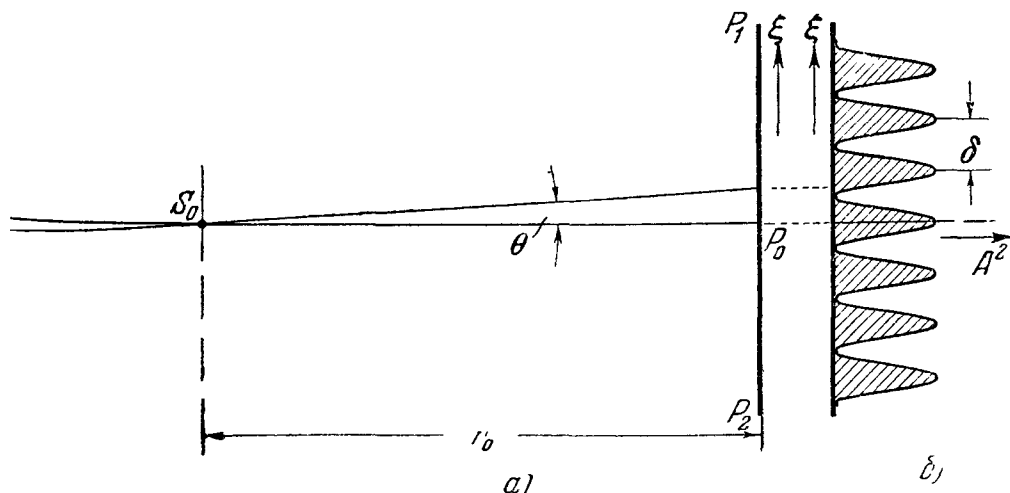


Рис. 177. *a*—к вычислению разности хода на удаленной прямой  $P_1P_2$ , параллельной  $S_1S_2$  (см. рис. 176), *б*—распределение интенсивности на прямой  $P_1P_2$ .

максимального и нулевого излучения совпадают с направлениями асимптот гиперboloидов, рассмотренных в п. 1.

Направления наиболее сильного излучения определяются условием

$$2a \sin \theta = \pm n\lambda, \quad \text{т. е. } \sin \theta = \pm n \frac{\lambda}{2a} \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (5.19a)$$

направления нулевого излучения—условием

$$2a \sin \theta = \pm \left( n + \frac{1}{2} \right) \lambda, \quad \text{т. е. } \sin \theta = \pm \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{2a} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (5.20a)$$

Если  $\lambda/2a$  мало, имеем (для не очень больших  $n$ ):  $\theta = \pm n \frac{\lambda}{2a}$  (максимумы),  $\theta = \pm \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{2a}$  (нули).

Рассмотрим распределение интенсивности на прямой  $P_1P_2$  (рис. 177), параллельной отрезку  $S_1S_2$  (рис. 175) и находящейся на большом расстоянии  $r_0 = P_0S_0$  от него ( $S_0$  — середина отрезка  $S_1S_2$ ). Тогда при малых  $\theta$  имеем приближенно:

$$\theta = \frac{\xi}{r_0},$$

где  $\xi = P_0P$ ,  $P$  — произвольная точка прямой  $P_1P_2$ ,

$$\Delta = 2a\theta = 2a \frac{\xi}{r_0},$$

откуда

$$A^2 = \frac{2A_0^2}{r_0^2} [1 + \cos 2ka\theta] = \frac{2A_0^2}{r_0^2} \left[ 1 + \cos \frac{2ka\xi}{r_0} \right]. \quad (5.186)$$

Зависимость  $A^2$  от  $\xi$  имеет вид, показанный на рис. 177, б. Расстояние  $\delta$  между ближайшими максимумами или минимумами интенсивности определяется уравнением

$$\frac{2ka\delta}{r_0} = 2\pi, \quad \text{откуда } \delta = \frac{r_0\lambda}{2a}. \quad (5.22)$$

## § 7. Световые волны (предварительные сведения)

**1. Исторические замечания.** В XVII в. уже было известно, что свет есть «нечто», распространяющееся во все стороны от светящегося предмета, рассеивающееся от остальных предметов и вызывающее при попадании в глаз специфическое зрительное ощущение\*). Но не было ясности относительно природы этого распространяющегося «нечто». Шла ожесточенная борьба двух представлений—корпускулярного и волнового.

Мы хорошо знаем, что возможны два типа передачи механического движения: путем переноса вещества и путем распространения упругой волны. Первый тип осуществляется, например, тогда, когда стена рушится в результате прямого попадания снаряда, второй—когда стена падает в результате землетрясения.

В то время физики старались свести все явления природы к механическим движениям. При этом одни физики были склонны уподобить свет потоку каких-то очень маленьких пуль или стрел—частиц, вылетающих из источника света, а другие—упругим волнам, излучаемым источником. Виднейшим представителем второй, волновой, теории того времени был Гюйгенс. Первая (корпускулярная) теория связана, прежде всего, с именем Ньютона.

Ньютон глубже, чем кто-либо, владел волновыми представлениями, доступными тому времени, но отвергал их потому, что они противоречили ряду уже известных тогда экспериментальных фактов\*\*).

XVIII в. отмечен почти безраздельным господством в Западной Европе корпускулярной теории света. Замечательным фактом в истории физики является то, что М. В. Ломоносов (1711—1765) горячо отстаивал волновые представления о свете.

Один из доводов, которые выдвигал М. В. Ломоносов в пользу этих представлений, состоял в том, что свет беспрепятственно проходит сквозь свет наподобие того, как ведут себя звуковые волны (а также, как мы видели, волны на поверхности воды, см. рис. 152). Ломоносов писал\*\*\*): «Поставим алмаз между двумя свечами. Лучи с обеих сторон пройдут сквозь алмаз равною силою, и одна свеча с одной стороны в то же время сквозь алмаз таково же явственно, как с другой стороны другая, видна будет. Что ж здесь? уничтожить ли нам Механику? положить ли, что когда с обеих сторон равною силою и равным количеством жидкие материи встречаются в узкой скважине, каковы сквозь алмаз быть должны, чтоб одна с другою не встретилась, и оную не удержала?». Ломоносов яркими словами выражает свою мысль об аналогии между светом и звуком: «Имеем ясный пример [явлений, подобных световым] в зыблющемся

\*) В древности существовало такое представление: зрение подобно осязанию—глаз выпускает нечто вроде «щупальцев», с помощью которых он может исследовать окружающие предметы.

\*\*) См. доклад Л. И. Мандельштама «Оптические работы Ньютона», Успехи физических наук 18, 103 (1945), а также Полное собрание трудов, т. III.

\*\*\*) «Слово о происхождении света, новую теорию о цветах представляющее, в публичном собрании Академии Наук июля 1 дня 1756 г. говоренное Михаилом Ломоносовым». Сочинения М. В. Ломоносова, т. IV, стр. 392, изд. Академии наук, 1898 г., а также М. В. Ломоносов, Физико-химические работы, серия «Классики естествознания», книга восьмая, Москва—Петроград, 1923.

движении воздуха, в котором голос от места на место простирается. Сколько есть разных голосов, всяк себе удобно представит, как только подумает о разных музыкальных тонах разной громкости, от разных инструментов, также о голосах птиц и других животных; еще о громе, звоне, стуке, треске, свисте, визге, скрипении, журчании и разных их напряжениях и возвышениях. Сверх сего о разных букв выговорах на разных языках. Все сии бесчисленные различия голоса простираются прямою линиею; друг друга пересекают не токмо по всякому возможному углу, но и прямо встречаются, один другого не уничтожая. Стоя близ звенящих гуслей, слышу в одной стороне пение соловья, в другой певцов голос и речи; там звон колокольный, инде топот конской: все голоса к моему слуху и к другим многих приходят, и которому из них больше внимаем, то яснее слышим».

Приверженцем волновой теории света был и Леонард Эйлер (1707 — 1783), долго живший и работавший в России.

На рубеже XIX в. произошло коренное перевооружение волновой теории света. Юнг и Френель внесли в нее чуждые Гюйгенсу идеи об интерференции и поперечности световых волн (во времена Гюйгенса еще не могли себе представить в сплошной среде иных волн, кроме продольных).

Это позволило объяснить с волновой точки зрения прямолинейное распространение света (точнее об этом см. гл. IX) и свойства поляризованного света (см. п. 3) — явления, которые Ньютон считал противоречащими волновой теории. Это позволило также объяснить ряд новых явлений, противоречащих корпускулярной теории (см., например, п. 2). Обновленная волновая теория света одержала решительную победу над корпускулярной теорией\*).

В этой главе мы ограничимся упрощенным изложением одного из опытов, обосновывающих представление о свете, как о волнах, и одного из опытов, доказывающих поперечность световых волн. Более глубокий разбор будет дан в гл. X.

**2. Опыт Френеля с двойным зеркалом.** Опишем один из опытов, в которых осуществляется явление интерференции для света.

Свет, излучаемый электрической дугой через узкую щель, проходит через светофильтр (скажем, красный, зеленый и т. д.) и отражается в двух соприкасающихся плоских зеркалах, угол между которыми очень близок к  $180^\circ$  (рис. 178). Ребро, образованное зеркалами, параллельно освещающей щели. Свет, отраженный от зеркал, образует два накладывающихся друг на друга пучка. На пути света, отраженного от зеркал, ставится матовый экран. Части экрана  $E_1$ ,  $E_2$  освещены светом, отраженным только от первого или только от второго зеркала. Часть экрана  $E_{12}$  освещается светом, отраженным от обоих зеркал\*\*).

Освещенность поверхности тем больше, чем больше энергии падает на единицу площади. Станем на мгновение на точку зрения корпускулярной теории. Согласно корпускулярной теории энергия, приходящаяся на единицу площади, пропорциональна числу световых частиц, падающих на единицу площади. Число световых частиц, попадающих на единицу площади части экрана  $E_{12}$ , вдвое больше числа частиц, по-

\*) Продолжение этих исторических замечаний, см. гл. VII, § 1.

\*\*\*) Пучки начерчены в соответствии с законом отражения геометрической оптики, известным читателю из средней школы (ср. рис. 161). В действительности на краях пучков заметны отступления от геометрической оптики. Они здесь несущественны. О такого рода явлениях будет идти речь в гл. IX.

падающих на единицу площади частей  $E_1$  и  $E_2$ . Поэтому  $E_{12}$  должна иметь всюду вдвое большую освещенность, чем  $E_1$  и  $E_2$ .

В действительности наблюдается совсем другое, а именно то, что показано на рис. 178, б: часть экрана  $E_2$  испещрена равноотстоящими темными и светлыми полосами (красными, зелеными и т. д. в зависимости от светофильтра), параллельными ребру между зеркалами. Зависимость освещенности от положения точки на экране имеет вид, показанный на рис. 178, в. Если устранить дополнительным экраном свет, отраженный от одного из зеркал, освещенность в наиболее светлых местах уменьшается, а в наиболее темных — увеличивается; экран оказывается освещенным равномерно.

Результат опыта находится, таким образом, в вопиющем противоречии с корпускулярной теорией. Но он получает непринужденное объяснение, если принять, что свет, выходящий из светофильтра (такой свет мы будем называть *монохроматическим* \*)), есть синусоидальная волна, причем освещенность в каждой точке пропорциональна *квадрату амплитуды* этой волны. (О физической природе величины, распространяющейся в виде волны, данный опыт ничего не говорит.)

В самом деле, рассмотрим свет, испускаемый отдельной точкой  $S$  освещающей щели (рис. 178, а).

Отражение от зеркал дает два пучка света, распространяющихся так, как будто они исходят от *двух* источников  $S_1, S_2$ , являющихся изображениями точки  $S$ , даваемыми каждым из зеркал. Мы можем применить всю теорию, развитую в § 6. Из нее следует, что экстремумы освещенности расположены на пересечениях плоскости экрана с гиперболоидами

$$\Delta = \pm n\lambda, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{максимумы}),$$

$$\Delta = \pm \left( n + \frac{1}{2} \right) \lambda, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{минимумы}).$$

Зеркала (а следовательно, и размер картины на экране) настолько малы, что эти пересечения практически не отличаются от прямых, перпендикулярных к  $S_1S_2$ . Положение этих прямых практически не зависит от положения точки  $S$  в пределах щели, и мы наблюдаем наложение одинаковых и одинаково расположенных картин (распределений освещенности), соответствующих различным точкам щели. Наличие темных полос, т. е. мест, где

*свет + свет = темнота,*

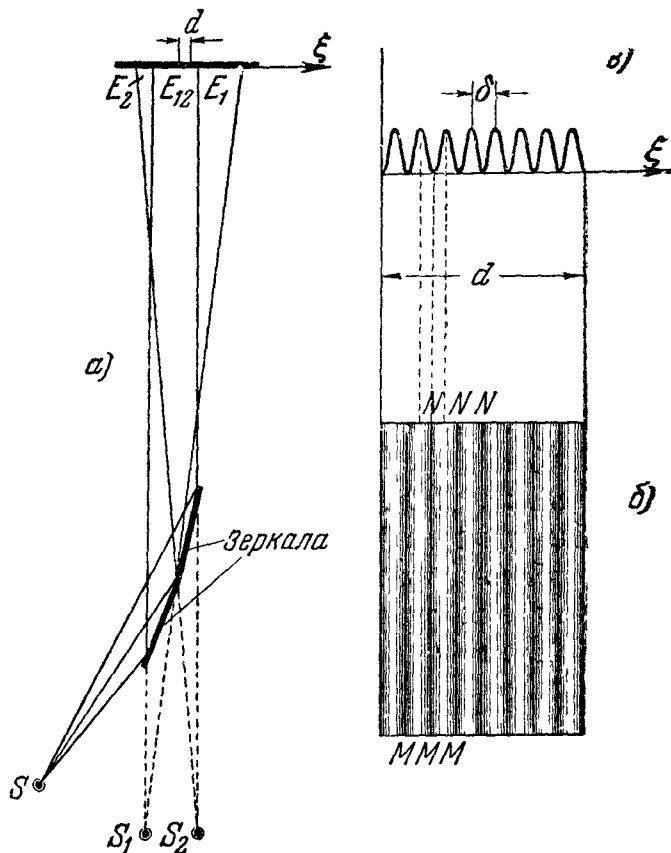


Рис. 178. Интерференционный опыт Френеля с двойным зеркалом: а—ход световых пучков (проекция на плоскость, перпендикулярную к освещающей щели, к ребру между зеркалами и к экрану); б—интерференционные полосы на экране (показана часть области  $E_{12}$ ; плоскости рис. а и б взаимно перпендикулярны); в—график распределения освещенности в интерференционной картине.

\*) Более подробное обсуждение содержания этого понятия см. в гл. X.

является наиболее замечательным подтверждением волновой теории. Измерив при данном светофилтре расстояние  $\sigma$  между смежными максимумами (или минимумами) освещенности, мы можем вычислить по формуле (5.22) длину световой волны  $\lambda$ . Опыт дает величины  $\lambda$ , изменяющиеся приблизительно от  $8 \cdot 10^{-5}$  см для красного света до  $4 \cdot 10^{-5}$  см для фиолетового \*).

Обратим внимание на кажущуюся непоследовательность в нашем рассуждении. Рассматривая обе волны, идущие от *одной* точки щели  $S$ , мы складывали их с учетом разности фаз; это и привело к выводу о том, что освещенность, создаваемая обеими волнами, может быть либо больше, либо меньше создаваемой каждой волной в отдельности. Рассматривая же пары волн, идущие от *различных* точек щели, мы просто сказали, что всюду происходит сложение создаваемых ими освещенностей. И действительно, опыт показывает, что если мы закроем непрозрачным экраном часть освещающей щели, освещенность всюду уменьшится пропорционально уменьшению площади щели. Возникающий здесь круг вопросов может быть разрешен лишь после знакомства с последующими разделами книги (гл. X).

Мы умышленно не касаемся явлений, наблюдаемых без светофилтра (в белом свете). В них гораздо труднее разобраться. Подобного рода явления мы также рассмотрим в гл. XI.

**3. Поперечность световых волн.** О ней свидетельствует следующий эксперимент (рис. 179). Возьмем два *поляроида* (т. е. два листа из полупрозрачного вещества, также называемого поляроидом) и поставим их последовательно на пути светового пучка, расположив их плоскости перпендикулярно к направлению пучка \*\*). Поворачивая второй поляроид вокруг оси, совпадающей с осью пучка, мы обнаружим, что интенсивность света, выходящего из второго поляроида, меняется: при повороте на  $360^\circ$  наступают два положения (отличающихся друг от друга на  $180^\circ$ ), при которых свет *не проходит* через второй поляроид, и два положения (повернутых относительно первых на  $90^\circ$ ), при которых свет *почти полностью* проходит.

О том, что представляет собой поляроид, будет сказано позднее (гл. VII, § 9). Но, даже не вникая в этот вопрос, можно сделать из описанного эксперимента далеко идущий вывод: пучок света, вышедший из первого поляроида, *не обладает осевой симметрией*; в различных направлениях, перпендикулярных к оси этого пучка, свет обладает различными физическими свойствами.

Таким образом, явление, наблюдающееся при повороте второго поляроида, несовместимо с предположением, что свет, вышедший из первого поляроида, есть скалярная волна или продольная векторная волна. Но это явление получает непринужденное толкование, если принять, что: 1) световая волна, вышедшая из первого поляроида, есть *линейно-поляризованная векторная волна*, т. е. волна типа, изображенного на рис. 171, а; о физической природе, присущей в данном случае вектору  $\mathbf{v}$ , наш опыт ничего не говорит; 2) поляроид является анизотропным веществом, т. е. таким, свойства которого различны по разным направлениям, а именно: он прозрачен для света, если вектор  $\mathbf{v}$ , колеблющийся в свете, вышедшем из другого поляроида, параллелен некоторому направлению,

\*) Существуют гораздо более точные способы измерения длины световой волны (см. гл. VIII и X).

\*\*\*) Повторение опыта, описанного в п. 2, показало бы, что свет, прошедший через поляроид, дает интерференционную картину, отличающуюся от получаемой без него лишь меньшей освещенностью.

жестко связанному с данным поляроидом, и непрозрачен, если  $v$  перпендикулярен к этому направлению.

Здесь возникает следующий существенный вопрос. Зачем понадобятся *два* поляроида? Не получим ли мы те же явления, если уберем один

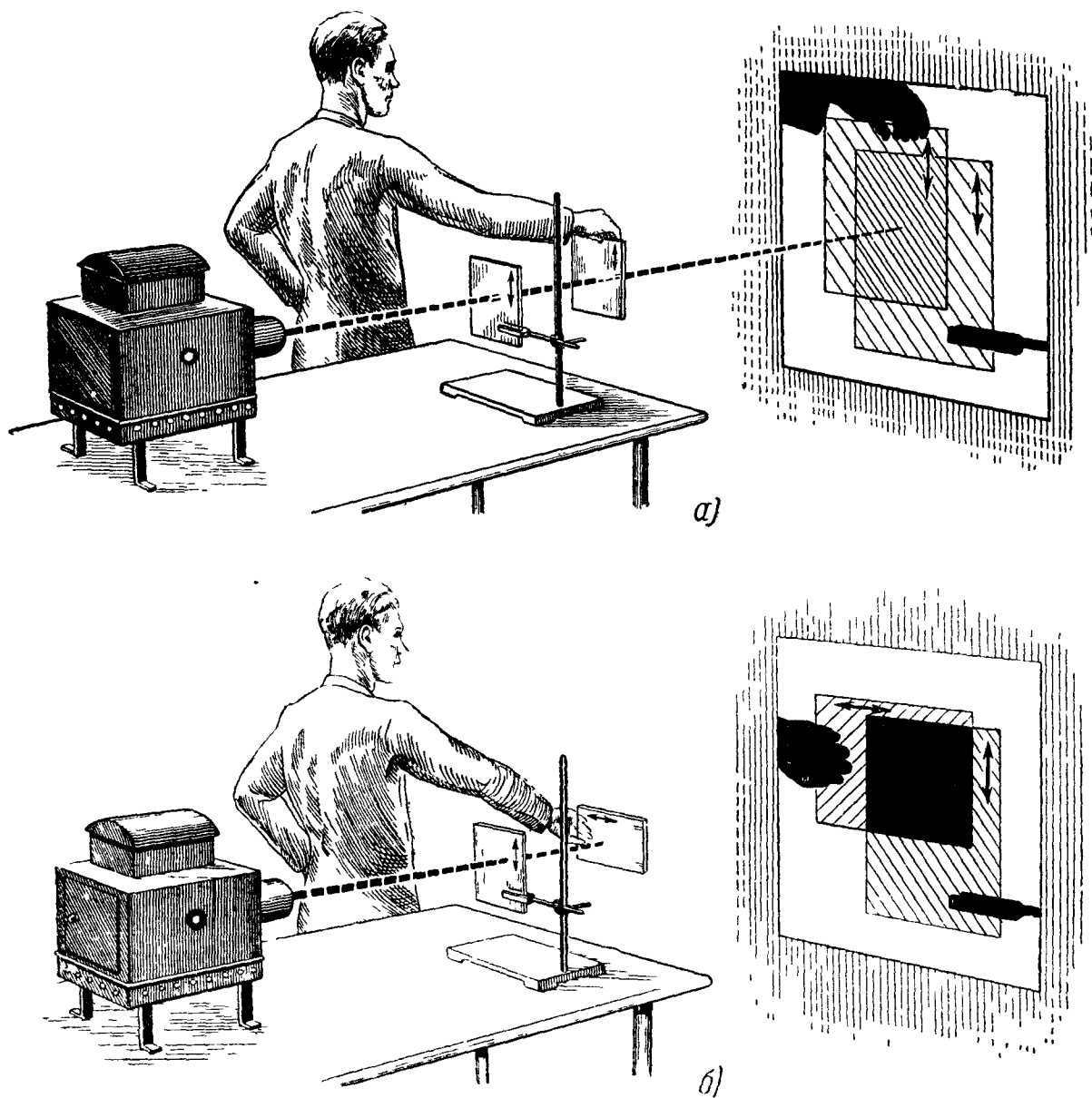


Рис. 179. *а*—стрелки, начерченные на поляроидах, параллельны; второй поляроид *прозрачен* для света, прошедшего через первый; *б*—стрелки перпендикулярны (поляроиды скрещены); второй поляроид *непрозрачен* для света, прошедшего через первый поляроид.

поляроид и будем поворачивать другой вокруг оси луча? Опыт показывает, что *это не так*. Интенсивность света, прошедшего через *один* поляроид, совершенно не зависит от его ориентации. Таким образом, свет, выходящий непосредственно из источника (он называется *естественным светом* \*)), существенно отличается по своим свойствам от света, выходящего из поляроида.

\*) Начинаящие часто смешивают совершенно различные понятия «белый» свет и «естественный» свет. Свет от электрической дуги, прошедший через светофильтр, но не через поляроид, не является белым, но является естественным (подробнее см. гл X и XI).

Естественный свет обладает, как мы убедились, осевой симметрией относительно оси пучка. В том, какова структура волны в естественном свете, мы сможем разобраться лишь позднее (гл. X). Этот вопрос тесно связан, как мы увидим, с кажущимся противоречием, отмеченным в конце п. 2.

### § 8. Волновое уравнение

Этот параграф является математическим введением к тому *динамическому* рассмотрению волн\*), которое будет дано в гл. VI и VII.

Рассмотрим произвольную функцию

$$f(at - bx) \quad (5.23)$$

от аргумента  $at - bx$ . Продифференцируем ее дважды по  $t$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= f'(at - bx) \cdot a, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= f''(at - bx) \cdot a^2. \end{aligned} \right\} \quad (5.24)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по аргументу  $at - bx$ . Продифференцируем теперь нашу функцию дважды по  $x$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= -f'(at - bx) \cdot b, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= f''(at - bx) \cdot b^2. \end{aligned} \right\} \quad (5.25)$$

Сравнивая (5.24) и (5.25), мы убеждаемся, что функция (5.23) удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad (5.26)$$

где

$$u = \frac{a}{b}.$$

Легко видеть, что этому же уравнению удовлетворяет произвольная функция

$$f(at + bx) \quad (5.27)$$

аргумента  $at + bx$ , а также сумма функций вида (5.23) и (5.27).

Функции (5.23) и (5.27) изображают при положительных  $a$ ,  $b$  плоские волны, распространяющиеся, не деформируясь, со скоростью  $u$  в сторону соответственно возрастающих или убывающих значений  $x$ \*\*).

Уравнение (5.26) — дифференциальное уравнение в частных производных, играющее в физике очень важную роль. Оно называется *волновым уравнением*. В математических курсах доказывается, что оно не имеет

\*) В отличие от проводившегося до сих пор кинематического, ср. начало гл. III.

\*\*) [Из сравнения (5.24) и (5.25) можно заключить, что функция (5.23) удовлетворяет уравнению первого порядка  $\frac{\partial f}{\partial t} = -u \frac{\partial f}{\partial x}$ . Однако такому уравнению не удовлетворяет функция (5.27), для которой  $\frac{\partial f}{\partial t} = u \frac{\partial f}{\partial x}$ . Только уравнение второго порядка (5.26) охватывает волны обоих встречных направлений распространения, т. е. не зависит от знака  $u$ .]



решений, отличных от тех, которые могут быть представлены функциями вида (5.23) и (5.27) или суперпозицией таких функций, например,

$$f_1(at - bx) + f_2(at + bx).$$

Всякий раз, когда из физических соображений можно установить, что та или иная физическая величина  $s$  удовлетворяет уравнению вида

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}, \quad (5.26a)$$

мы сможем на основании сообщенных здесь математических сведений заключить, что процесс изменений этой величины носит характер плоской волны, распространяющейся в ту или другую сторону со скоростью  $u$ , или суперпозиции таких волн.

Вид функций  $f_1$ ,  $f_2$  определяется характером движения источника волн, а также явлениями, происходящими на границе среды (см. гл. VI, § 6; гл. VII, § 8).

Пусть источником волн является плоскость  $x = 0$ , причем на этой плоскости величина  $s$  колеблется по закону  $s = A \cos \omega t$ . В этом случае от плоскости  $x = 0$  распространяются вправо и влево волны

$$s = A \cos(\omega t \mp kx), \quad k = \frac{\omega}{u}.$$

Из линейности волнового уравнения следует, что если ему удовлетворяют функции  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $s_3$ , ... в отдельности, то ему удовлетворяет также функция

$$s = s_1 + s_2 + s_3 + \dots$$

(принцип суперпозиции).

Рассмотрим несколько примеров.

а) Волновому уравнению удовлетворяют синусоидальные бегущие волны

$$s_1 = A \cos(\omega t - kx), \quad s_2 = A \cos(\omega t + kx).$$

На основании принципа суперпозиции волновому уравнению удовлетворяет стоячая волна

$$s = 2A \cos kx \cos \omega t,$$

являющаяся суперпозицией только что рассмотренных синусоидальных бегущих волн.

б) Волновому уравнению на основании принципа суперпозиции удовлетворяет всякая функция вида

$$s = A_1 \cos \omega_1 \left( t - \frac{x}{u} \right) + A_2 \cos \omega_2 \left( t - \frac{x}{u} \right) + A_3 \cos \omega_3 \left( t - \frac{x}{u} \right) +$$

Это — функция вида  $f(at - bx)$ ; она изображает несинусоидальную волну, распространяющуюся без деформации в сторону возрастающих  $x$ .

в) Пусть волны  $s_1$ ,  $s_2$ , имеющие вид коротких импульсов, распространяются навстречу одна другой. В некоторый момент моментальный

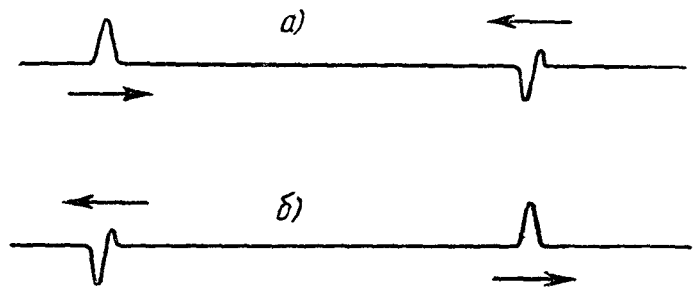


Рис. 180. Суперпозиция: волны проходят «одна сквозь другую» без взаимного влияния (ср. рис. 152).

снимок суперпозиции  $s_1 + s_2$  этих волн имеет вид, показанный на рис. 180, а. Через некоторое время моментальный снимок волны будет иметь вид, показанный на рис. 180, б, — волны пройдут «одна сквозь другую» и притом каждая так, как будто другой не существует (ср. рис. 152).

### § 9. Дисперсия. Групповая скорость

1. Постановка вопроса. Не все волны удовлетворяют волновому уравнению вида (5.26). Морские волны деформируются, набегаая на берег. Гребни обгоняют впадины и опрокидываются. Это явление наступает только при достаточно *больших* амплитудах. При этом волны не обладают свойством суперпозиции.

Здесь будет идти речь о другом типе деформирующихся волн.

Пусть некоторый волновой процесс, характеризуемый величиной  $s$ , обладает следующими свойствами:

(I) Имеет место *суперпозиция* волн, создаваемых отдельными источниками.

(II) Если волна *синусоидальна*, она распространяется, не деформируясь.

(III) Скорость распространения *и* синусоидальных волн *зависит от частоты* (или, что сводится к тому же, от длины волны или волнового числа  $k$ ).

Свойства (I), (II) совпадают со свойствами волн, удовлетворяющих волновому урав-

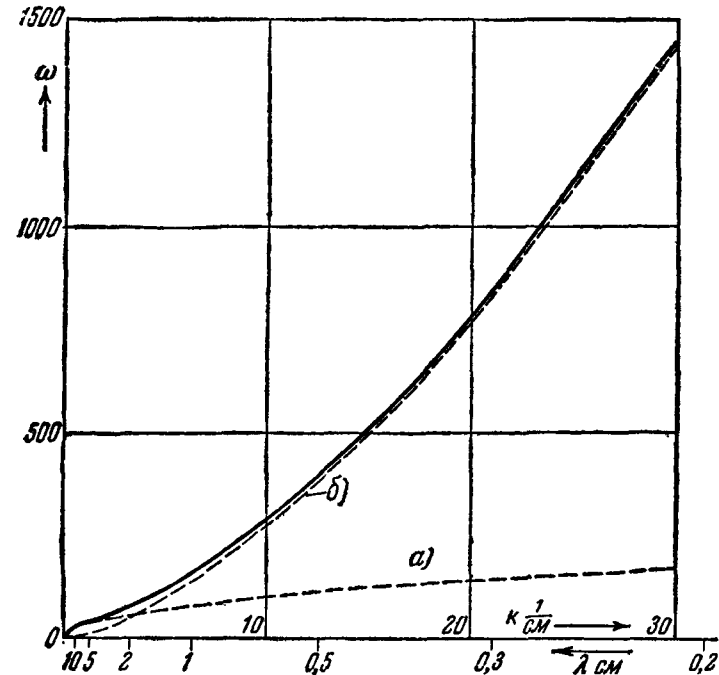


Рис. 181. Зависимость между  $\omega$  и  $k$  для волн на поверхности глубокой воды. Пунктирные кривые соответствуют воображаемым случаям: а)  $\alpha=0$  (чисто гравитационные волны), б)  $g=0$  (чисто капиллярные волны). Сплошная кривая соответствует формуле (5.28). При очень длинных волнах она сливается с а), при очень коротких — с б).

нению (5.26). Свойство (III) является существенным отличием от них. Явление, состоящее в том, что  $u$  зависит от частоты, называется *дисперсией*.

Свойствами (I), (II), (III) обладают, в частности, волны очень *малой* амплитуды на поверхности жидкости. В свойствах (I), (II) мы уже убедились на опыте (рис. 152 и 154). Наличие дисперсии также легко обнаружить. При увеличении частоты в опыте рис. 154 длина волны уменьшается, но *не* обратно пропорционально частоте. Динамическая теория показывает в согласии с опытом, что в случае большой глубины жидкости \*)

$$u = \sqrt{\frac{g}{k} + \frac{k\alpha}{\rho}}, \quad \omega = ku = \sqrt{kg + \frac{k^3\alpha}{\rho}}, \quad (5.28)$$

где  $g$  — напряженность поля тяжести,  $\rho$  — плотность жидкости,  $\alpha$  — ее поверхностное натяжение. Графики этих функций для воды ( $\alpha = 75$  дин/см) даны на рис. 181.

\*) Мы знаем, что при небольшой глубине  $u$  заметно уменьшается с уменьшением глубины (см. рис. 162).

Нас будут интересовать волны, создаваемые источниками, совершающими *модулированные* колебания (см. гл. IV, § 8). Речь идет, например, о волнах, создаваемых на поверхности воды гармонически колеблющимся стерженьком или пластинкой (см. § 1), если периодически меняется уровень, около которого они колеблются.

**2. Волна, создаваемая синусоидально-модулированным источником.** Мы рассмотрим случай, когда источник ( $x=0$ ) колеблется по закону

$$A(1 + m \cos \Omega t) \cos \omega t, \quad \Omega \ll \omega, \quad m < 1. \quad (5.29),$$

Было бы грубой ошибкой считать на основании свойств (II), (III), что возникает волна, распространяющаяся без деформации со скоростью  $u$ , соответствующей частоте  $\omega$ : колебание (5.29) не есть синусоидальное колебание.

Выражение (5.29) можно переписать в виде

$$A \cos \omega t + \frac{mA}{2} \cos \omega_1 t + \frac{mA}{2} \cos \omega_2 t,$$

где

$$\omega_1 = \omega + \Omega; \quad \omega_2 = \omega - \Omega.$$

На основании свойства (I) волна, создаваемая нашим модулированным источником, не отличается от суперпозиции трех волн, которые создавали бы три независимых источника, колеблющихся соответственно по закону

$$A \cos \omega t, \quad \frac{mA}{2} \cos \omega_1 t, \quad \frac{mA}{2} \cos \omega_2 t.$$

На основании свойства (II) каждый из этих трех источников создавал бы синусоидальную волну соответственно

$$A \cos(\omega t - kx), \quad \frac{mA}{2} \cos(\omega_1 t - k_1 x), \quad \frac{mA}{2} \cos(\omega_2 t - k_2 x),$$

и следовательно, волна, создаваемая модулированным источником имеет вид

$$s = A \cos(\omega t - kx) + \frac{mA}{2} \cos(\omega_1 t - k_1 x) + \frac{mA}{2} \cos(\omega_2 t - k_2 x). \quad (5.30)$$

На основании свойства (III) скорости распространения волн (5.29), а именно

$$u = \frac{\omega}{k}, \quad u_1 = \frac{\omega_1}{k_1}, \quad u_2 = \frac{\omega_2}{k_2},$$

не равны между собой.

Формула (5.29) написана для плоских волн в пространстве или прямолинейных волн на плоскости. Все рассмотрение легко обобщается на случай других геометрических типов волн. (Например, для сферических волн достаточно заменить  $x$  на  $r$  и  $A$  на  $A_0/r$ .)

Выражение (5.30) для волны, излучаемой синусоидально-модулированным источником, легко преобразуется в такое:

$$s = A \cos(\omega t - kx) + mA \cos(\Omega t - Kx) \cos(\omega t - k'x), \quad (5.31)$$

где

$$K = \frac{k_1 - k_2}{2}, \quad k' = \frac{k_1 + k_2}{2}. \quad (5.32)$$

**3. Первое приближение. Групповая и фазовая скорости.** Пренебрежем сначала отличием между  $k$  и  $k'$  (в каких случаях это допустимо,

будет выяснено в п. 4). Тогда (5.31) можно представить в виде

$$s = A [1 + m \cos (\Omega t - Kx)] \cos (\omega t - kx). \quad (5.33)$$

Величина  $s$  представляет собой в каждой точке пространства модулированное колебание. Колебания, относящиеся к различным  $x$ , отличаются только фазами модулирующей и модулируемой функции. Волну (5.33) можно назвать бегущей волной, синусоидально-модулированной по амплитуде.

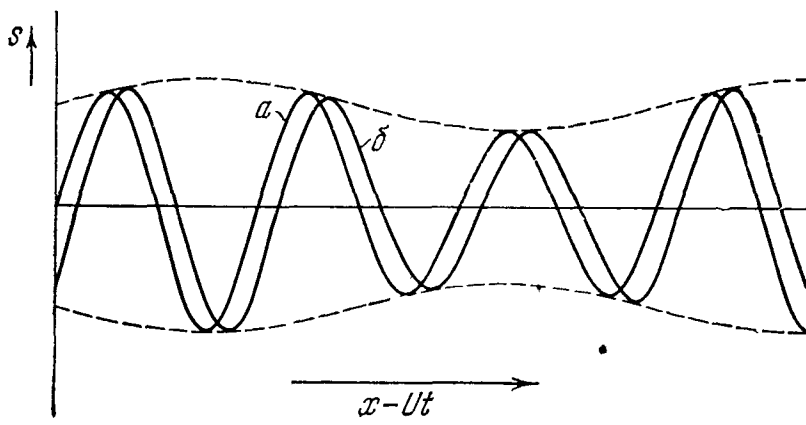


Рис. 182. Последовательные моментальные снимки модулированной волны в системе координат, движущейся по направлению распространения волны со скоростью  $U$ . Если  $a$  относится к более раннему (позднему) моменту, чем  $b$ , фазовая скорость больше (меньше) групповой.

Распространение этой волны может быть описано следующим образом. Она представляет собой *произведение* «модулирующей» (или «огibaющей») волны

$$A [1 + m \cos (\Omega t - Kx)],$$

распространяющейся, не деформируясь, со скоростью

$$U = \frac{\Omega}{K}, \quad (5.34)$$

и «модулируемой» волны

$$\cos (\omega t - kx),$$

распространяющейся, также не деформируясь, со скоростью

$$u = \frac{\omega}{k}$$

(вообще говоря, отличной от  $U$ ). Произведение  $s$  этих волн представляет собой волну, *деформирующуюся* при распространении (за исключением случая  $U = u$ ). Ее движение нельзя охарактеризовать *одной* скоростью.

Отдельные части волны (5.33), имеющие длину

$$\Delta = \frac{2\pi}{K}, \quad (5.35)$$

называются *волновыми группами* (или группами волн). Скорость  $U$  называется *групповой* скоростью волн (5.33), скорость  $u$  — ее фазовой скоростью. На рис. 182 мы видим два моментальных снимка волны, сделанных в близкие моменты времени наблюдателем, движущимся параллельно оси  $x$  со скоростью  $U$ .

Нули функции  $s$  движутся со скоростью  $u$ ; можно считать (приближенно), что ее максимумы и минимумы движутся также со скоростью  $u$ .

Будем следить за движением какого-нибудь экстремума функции  $s$ . Он переходит, поочередно возрастая и уменьшаясь, из одной группы в другую. Если  $U < u$ , он перегоняет движение групп (т. е. движение «огнивающей»). Если  $U > u$ , он отстает от движения групп.

4. Связь между групповой и фазовой скоростями. Пусть дано соотношение

$$\omega = f(k). \quad (5.36)$$

Тогда фазовая скорость

$$u = \frac{\omega}{k} = \frac{f(k)}{k}. \quad (5.37)$$

Для групповой скорости

$$U = \frac{\Omega}{K} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}$$

имеем приближенно, если  $\omega_1 - \omega_2 = 2\Omega$  достаточно мало,

$$U = \frac{d\omega}{dk} \text{ или } U = f'(k). \quad (5.38)$$

Если нет дисперсии, т. е.  $\omega = uk$ , где  $u$  не зависит от  $k$ , групповая и фазовая скорости совпадают.

Угловым коэффициентом секущей, проведенной из начала координат в точку  $(\omega, k)$  графика функции (5.36), изображает фазовую скорость,

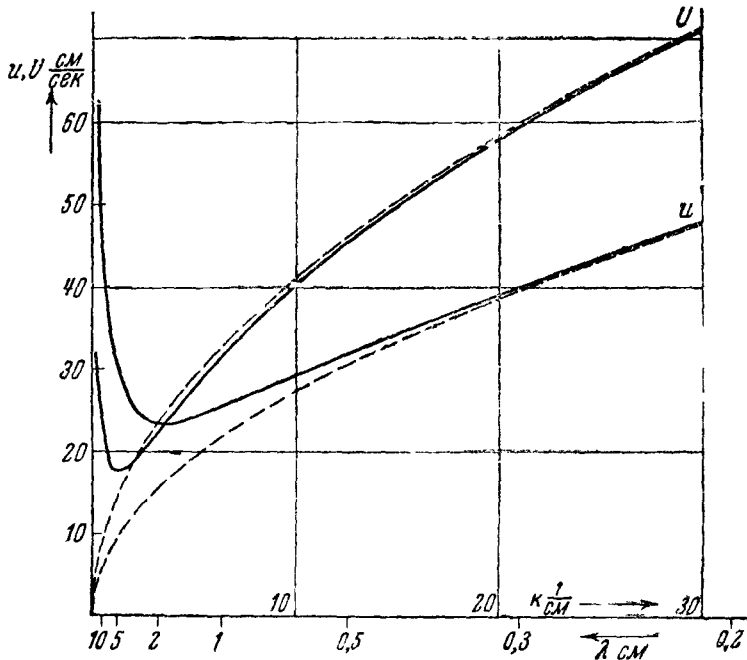


Рис. 183. Зависимость фазовой и групповой скоростей волн на поверхности глубокой воды от волнового числа  $k$  (или длины волны  $\lambda$ ). При  $k=3,7 \text{ см}^{-1}$ ,  $\lambda=1,7 \text{ см}$   $U=u$ . В области более длинных волн  $U < u$ , в области более коротких  $U > u$ . Пунктирные кривые соответствуют  $g=0$ .

соответствующую частоте  $\omega$  и волновому числу  $k$ , а угловым коэффициентом касательной в этой точке — групповую скорость модулированной волны (5.33). Если угловым коэффициентом касательной меньше, чем угловым коэффициентом секущей, групповая скорость меньше фазовой, в обратном случае групповая скорость больше фазовой. Возможен случай, когда групповая и фазовая скорости имеют противоположные знаки: это будет

тогда, когда  $\omega$  — убывающая функция  $k$ . Такой случай встречается, как показал Л. И. Мандельштам, при рассмотрении упругих волн очень высокой частоты (сравнимой с собственными частотами колебаний атомов) в кристаллах.

На рис. 183 показана зависимость фазовой и групповой скоростей волн на поверхности глубокой воды от  $k$  (или  $\lambda$ ). Пересечение графиков  $U$  и  $u$  следует из наличия точки перегиба на графике зависимости  $\omega$  от  $k$  (рис. 181).

**5. Предел применимости приближения.** Вернемся к точной формуле (5.31). Напишем тождество

$$\begin{aligned} \cos(\omega t - k'x) &= \cos(\omega t - kx) + [\cos(\omega t - k'x) - \cos(\omega t - kx)] = \\ &= \cos(\omega t - kx) + 2 \sin\left(\frac{k-k'}{2}x\right) \sin\left(\omega t - \frac{k+k'}{2}x\right), \end{aligned}$$

откуда

$$s = s_0 + 2mA \cos(\Omega t - Kx) \sin\left(\frac{k-k'}{2}x\right) \sin\left(\omega t - \frac{k+k'}{2}x\right),$$

где  $s_0$  совпадает с приближенным выражением (5.33). Появившийся при точном рассмотрении дополнительный член является произведением бегущей волны  $\cos(\Omega t - Kx)$  на функцию, представляющую собой некоторую «помесь» бегущей и стоячей волн. Этот член не играет существенной роли, лишь пока

$$\left| \sin\left(\frac{k-k'}{2}x\right) \right| \ll 1, \text{ т. е. } \left| \frac{k-k'}{2}x \right| \ll \pi. \quad (5.39)$$

Там, где он заметен,  $s$  уже не является синусоидально-модулированной бегущей волной. Структура волны при больших  $x$  сложнее, чем описанная в п. 3. Не будем подробно исследовать структуру волны  $s$  при больших  $x$ . Ограничимся исследованием условия (5.39).

Рассматривая  $k$  как функцию  $\omega$ :

$$k = F(\omega),$$

где  $F$  — функция, обратная  $f$  (см. п. 4), и разлагая

$$k_1 = F(\omega + \Omega), \quad k_2 = F(\omega - \Omega)$$

в ряды по степеням  $\Omega$ :

$$\begin{aligned} k_1 &= F(\omega) + \Omega F'(\omega) + \frac{1}{2} \Omega^2 F''(\omega) + \dots, \\ k_2 &= F(\omega) - \Omega F'(\omega) + \frac{1}{2} \Omega^2 F''(\omega) - \dots, \end{aligned}$$

имеем с точностью до малых членов порядка  $\Omega^3 F'''(\omega)$

$$k' - k = \frac{k_1 + k_2}{2} - k = \frac{1}{2} F''(\omega) \Omega^2. \quad (5.40)$$

Подставляя (5.40) в (5.39), получаем:

$$x \ll \frac{4\pi}{|\Omega^2 F''(\omega)|}. \quad (5.41)$$

Таково условие, при котором результаты п. 2 являются хорошим приближением. Условию (5.41) можно придать более наглядный вид, воспользовавшись соотношением

$$F'(\omega) = \frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{U},$$

откуда

$$F''(\omega) = -\frac{1}{U^2} \frac{dU}{d\omega}$$

или приближенно, так как  $\Omega$  мало,

$$F''(\omega) = -\frac{1}{U^2} \frac{\Delta U}{\Omega}, \quad (5.42)$$

где  $\Delta U$  — разность значений  $U$ , соответствующих частотам  $\omega$ ,  $\omega + \Omega$ . Подставив (5.42) в (5.41) и воспользовавшись (5.35), получаем:

$$x \ll \Delta \frac{U}{|\Delta U|}. \quad (5.43)$$

Величина  $U/|\Delta U|$  при достаточной малости  $\Omega$  может быть настолько велика, что условие (5.43) нарушается лишь при  $x$ , намного превосходящем длину группы  $\Lambda$ .

Рассмотрим в качестве примера волны на поверхности воды при  $U = u$ . Здесь (рис. 183)  $\lambda = 1,7$  см,  $\nu = k\omega/2\pi = 13,7$  герц,  $U = u = 23,5$  см/сек. Вычисление по формуле (5.28) дает  $F''(\omega) = -0,38 \cdot 10^{-3}$  см·сек<sup>2</sup>. Вычислим длины групп  $\Lambda$  и расстояния  $L = 1/|\Omega^2 F''(\omega)|$  для нескольких значений частоты модуляции. Получаем таблицу:

$\Omega$	$\Lambda$ (см)	$L$ (см)	$L/\Lambda$
$\omega/3$	5,1	3,1	0,6
$\omega/10$	17	35,6	2,1
$\omega/30$	51	310	6
$\omega/100$	170	3560	21

Ясно, что при  $\Omega = \omega/3$  теория п. 3 неприменима: искажение формы волны заметно уже на расстоянии меньшем, чем длина группы. При  $\Omega = \omega/30$  мы уже не заметим искажения в пределах демонстрационной ванны (рис. 151).

[Обойденный выше вопрос о структуре волны на расстояниях  $x$ , при которых нарушается неравенство (5.41) или (5.43), представляет значительный интерес.

Если в точное выражение (5.30) подставить  $\omega_1 = \omega + \Omega$ ,  $\omega_2 = \omega - \Omega$  и приведенные в тексте разложения  $k_1$  и  $k_2$  по степеням  $\Omega$ , сохранив в них члены порядка  $\Omega^2$ , то получим:

$$s = A \cos(\omega t - kx) + mA \cos \left[ (\omega t - kx) - \frac{F''(\omega) \Omega^2}{2} x \right] \cos(\Omega t - Kx), \quad (a)$$

где  $K = F'(\omega) \Omega = \frac{\Omega}{U}$ . На всяком фиксированном расстоянии  $x$  от излучателя мы имеем модулированное колебание с несущей частотой  $\omega$  и можем записать его в виде

$$s = B(t) \cos[(\omega t - kx) - \alpha(t)]. \quad (б)$$

Сравнивая коэффициенты при косинусе и синусе  $\omega t - kx$  в (а) и (б), нетрудно убедиться, что с точностью до первого порядка относительно  $m$  переменная амплитуда  $B(t)$  есть

$$B(t) = A \left[ 1 + m \cos \left( \frac{F''(\omega) \Omega^2}{2} x \right) \cos(\Omega t - Kx) \right], \quad (в)$$

а переменная фаза  $\alpha(t)$  определяется формулой

$$\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha = m \sin \left( \frac{F''(\omega) \Omega^2}{2} x \right) \cos(\Omega t - Kx). \quad (г)$$

Величину  $D = F''(\omega) = \frac{d^2k}{d\omega^2}$  Г. С. Горелик предложил называть *дисперсионным параметром*. В отсутствие дисперсии (т. е. при линейной зависимости  $k$  от  $\omega$ )  $D=0$ .

Условие (5.43) означает, что можно пренебречь фазой  $\alpha$  и считать  $\cos\left(\frac{D\Omega^2}{2}x\right) = 1$ . При столь малых расстояниях  $x$  колебание (б) еще сохраняет характер амплитудно-модулированного, каким оно задано на источнике ( $x=0$ ) Формулы (в) и (г) показывают, однако, что колебание будет таким же не только вблизи  $x=0$ , но и вблизи всех точек  $x$ , для которых  $\frac{D\Omega^2}{2}x = n\pi$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ )

Напротив, на расстояниях, для которых  $\frac{D\Omega^2}{2}x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ , мы получаем  $B(t) = A$  (амплитудной модуляции нет) и  $\alpha = \pm m \cos(\Omega t - Kx)$ , т. е. колебание (б) оказывается модулированным с частотой  $\Omega$  только *по фазе*. Таким образом, с увеличением расстояния  $x$  периодически (с периодом  $2\pi L = \frac{2\pi}{D\Omega^2}$ ) будут повторяться места, где модуляция — амплитудная, чередуясь с местами, где она превращается в фазовую. Условие (5.41) можно переписать как  $x \ll 2\pi L$ , или даже  $x \ll \pi L$ , поскольку речь идет о порядках величин.

На существование указанного явления обратил внимание В. А. Зверев (см. Сборник статей памяти А. А. Андропова, Изд-во АН СССР, 1955, стр. 657), отметивший, что оно дает прямой метод нахождения по величине  $L$  дисперсионного параметра  $D = F''(\omega) = \frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{U}\right) = 2\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{u}\right) + \omega\frac{d^2}{d\omega^2}\left(\frac{1}{u}\right)$ , т. е. позволяет непосредственно измерять дисперсию скорости распространения волн на частоте  $\omega$ . Он применил этот метод к продольным ультразвуковым волнам в проволоке, где дисперсия обусловлена связью продольных волн с поперечной деформацией, определяемой коэффициентом Пуассона  $\sigma$ .]

**6. Произвольная модуляция. Распространение импульса.** На основании теоремы Фурье (см. гл. X) всякое модулированное колебание может быть представлено в виде суперпозиции синусоидальных колебаний с частотами  $\omega \pm n\Omega$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ), где  $\omega$  — частота модулируемого,  $\Omega$  — модулирующего колебания (частоты тем более близки, чем медленнее модуляция). Отсюда путем вычислений, аналогичных приведенным выше для синусоидальной модуляции, можно заключить следующее. Источник, модулированный по произвольному закону, создает модулированную волну, состоящую из групп, перемещающихся с групповой скоростью  $U$ , соответствующей частоте  $\omega$  модулируемого колебания и определяемой формулой (5.38). Форма «огibaющей» воспроизводит кривую изменения амплитуды источника. Отдельные горбы и впадины волн бегут с фазовой скоростью  $u$ , соответствующей  $\omega$ . Такая картина верна вплоть до расстояний, определяемых условием (5.41).

Теорема Фурье позволяет провести аналогичные рассуждения также для случая, когда колебание источника представляет собой отдельный импульс (рис. 184; мы пользуемся здесь радиолокационной терминологией; ср. гл. VII, § 6). Здесь посылаемая источником волна представляет собой *одну* группу, бегущую с групповой скоростью  $U$ , между тем как отдельные составляющие ее горбы и впадины перемещаются с фазовой скоростью  $u$ . Если  $U < u$ , в группе возникают сзади новые горбы и впадины, которые затем перемещаются вперед вдоль группы и, дойдя до ее «переднего края», исчезают (рис. 184, а). Если  $U > u$ , новые горбы и впадины появляются в группе спереди, проходят в «тыл» группы и там исчезают (рис. 184, б). То, что группа волн движется с другой скоростью, чем отдельные составляющие ее горбы и впадины, можно пояснить таким сравнением: группа людей, идущих гуськом, перемещается медленнее (быстрее), чем каждый человек в отдельности, если время от времени



к группе сзади (спереди) присоединяется новый человек, а человек, идущий в голове (хвосте) группы, уходит из нее.

Здесь роль  $\Omega$  играет  $2\pi/\tau$ , где  $\tau$  — продолжительность импульса. Как показывает более полное исследование, начиная с расстояний, где нарушается условие (5.41), появляется заметное изменение формы огибающей, импульс постепенно *расплывается* наподобие того, что показано на рис. 165.

**7. Измерение групповой скорости звука осуществляется очень просто — методом эха.**

Заставим звучать в течение очень короткого промежутка времени источник синусоидальных звуковых колебаний и измерим промежуток времени  $t$  между началом звучания и приходом эха — звука, отраженного от достаточно удаленного «препятствия». Время  $t$  есть время, за которое группа волн, излученная источником, прошла удвоенное расстояние  $2l$  от источника до препятствия. Следовательно, разделив  $2l$  на  $t$ , мы получим групповую скорость.

Для того чтобы измерение было достаточно точным, необходимо, чтобы продолжительность группы была велика по сравнению с продолжительностью отдельного колебания (во избежание расплывания) и мала по сравнению с  $t$ . Опыт дает для воздуха, воды и ряда других сред  $U = u$ , причем эти величины не зависят от частоты: в этих средах не наблюдается дисперсии звука. Но есть и такие вещества, где наблюдается заметная дисперсия звука (чаще всего в области ультразвуковых частот, например в газе  $\text{CO}_2$ ). В таких веществах групповая скорость звука не равна фазовой.

**8. Измерение групповой скорости света.** Все методы измерения скорости света, подробно описываемые в учебниках оптики, являются методами измерения его *групповой* скорости. Особенно это ясно на примере метода Физо, являющегося полным аналогом метода эха, о котором шла речь в п. 7: свет, испускаемый источником, рассекается быстро вращающимся зубчатым колесом на отдельные группы волн; подбирается

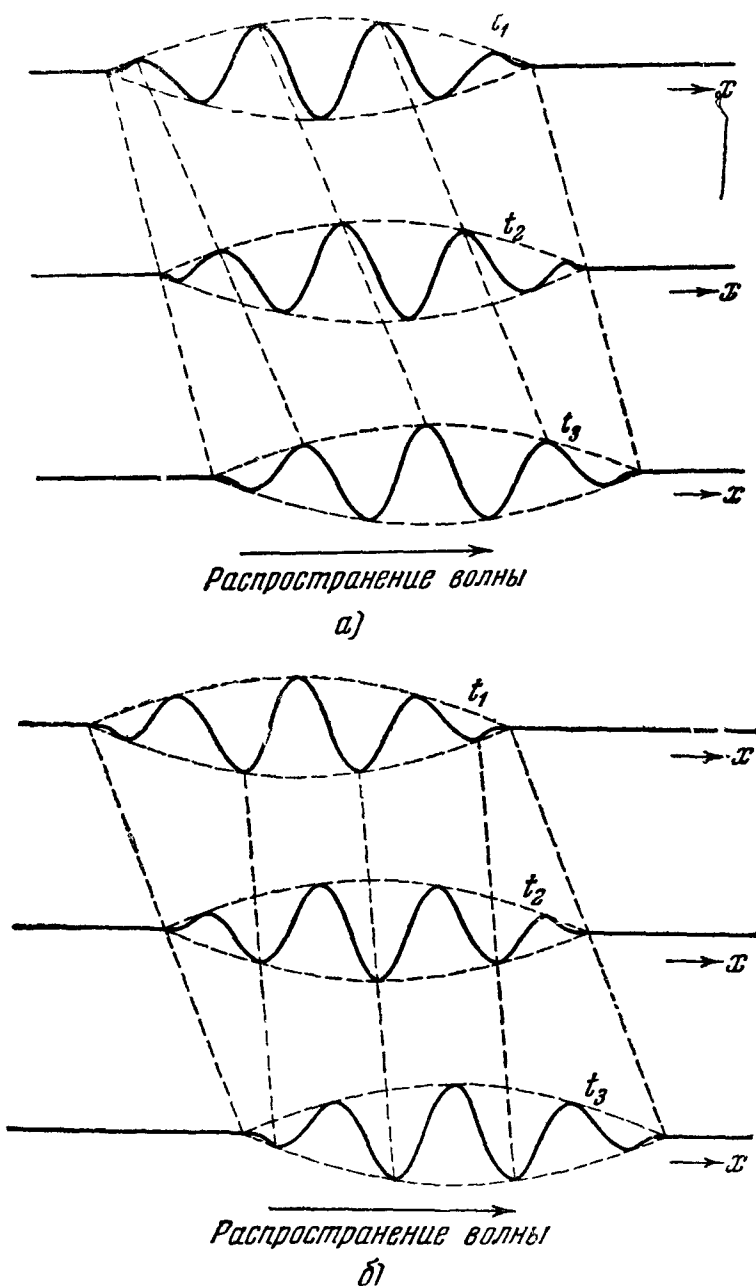


Рис. 184. Последовательные моментальные снимки группы волн:  $t_2 - t_1 = t_3 - t_2 > 0$ ; а)  $U < u$ ; б)  $U > u$ .

угловая скорость колеса, при которой группа, вышедшая через одну прорезь между зубьями, возвращается после отражения от удаленного зеркала через соседнюю прорезь. Тогда, зная угловую скорость колеса, легко определить время  $t$ , за которое группа проходит путь  $2l$  из источника до зеркала и обратно. Отношение  $2l/t$  есть групповая скорость света в воздухе. Она близка к  $300\,000$  км/сек. Частота модуляции света зубчатым колесом не может быть больше чем порядка  $10^4$  герц. Поэтому опыт Физо требует расстояний порядка  $10$  км.

Современная экспериментальная техника позволяет осуществить на столе опыт, аналогичный опыту Физо. Для этого вместо механического затвора, каким является зубчатое колесо, применяется электрический затвор, открывающий и закрывающий путь для света с частотой порядка  $10^8$  герц. Таким затвором может служить плоский конденсатор, содержащий в качестве диэлектрика нитробензол (жидкость  $C_6H_5NO_2$ ), помещенный между скрещенными поляроидами. Такое устройство пропускает свет только тогда, когда на пластины конденсатора подано напряжение: нитробензол становится при этом двоякопреломляющим (ср. гл. VII, § 9). Это явление называется эффектом Керра. Интенсивность проходящего света пропорциональна квадрату напряжения. Подведя к пластинам напряжение от лампового генератора, мы получаем затвор, модулирующий свет с частотой  $2\nu$ , где  $\nu$  — частота колебаний генератора.

Фазовая скорость света не может быть определена из опыта, подобно фазовой скорости звука, с помощью соотношения  $u = \lambda\nu$ . Она всегда определяется косвенным образом (см. гл. VII, § 9). Невозможность использовать соотношение  $u = \lambda\nu$  для определения  $u$  связана с невозможностью непосредственного измерения частоты света. Это обстоятельство имеет глубокие причины, связанные с квантовыми свойствами света (их изучение выходит за рамки этой книги). Наоборот, частоту света вычисляют, зная  $u$  и  $\lambda$ .

Опыт дает для групповой скорости света в воздухе значение, не зависящее с точностью до ошибки измерения от частоты (что указывает на незначительность дисперсии) и равное согласно измерениям Майкельсона  $299\,670$  км/сек\*). В сероуглероде (жидкость  $CS_2$ ), где дисперсия весьма сильно выражена, групповая скорость  $U$  значительно меньше фазовой скорости  $u$ :

$$U = \frac{U_0}{1,76}, \quad u = \frac{U_0}{1,64},$$

где  $U_0$  — групповая скорость света в воздухе.

## § 10. Явление Допплера

Представим себе, что стерженек, вертикальное движение которого создает волны на поверхности воды (рис. 153), перемещается, кроме того, в горизонтальной плоскости (вдоль поверхности воды). Или представим себе, что источник звука перемещается по отношению к окружающей его среде, например к воздуху. Распространение упругой волны, а также волны на поверхности жидкости обусловлено исключительно взаимодействием соседних частиц вещества. Ясно поэтому, что каждый отдельный гребень или впадина волны, после того как они отошли от источника, ведут себя так же, как если бы источник не перемещался по отношению к среде.

\*) Не смешивать со скоростью света в вакууме  $c$  (см. гл. VII).

Пусть источник колеблется синусоидально и, кроме того, перемещается по отношению к среде равномерно и прямолинейно. Тогда в силу сказанного выше геометрические места последовательных гребней (или впадин) образуют совокупность эксцентрических окружностей (сферических поверхностей), показанных на рис. 185, а. В направлении движения источника гребни расположены гуще (длина волны меньше), в направлении, обратном движению источника, — реже (длина волны больше), чем если бы источник покоился.

Легко найти приближенное соотношение, связывающее длину волны, фазовую скорость  $u$ , скорость движения источника  $v$  и угол  $\theta$  между направлением наблюдения и направлением движения источника (рис. 185, б).

Пусть  $S_1, S_2$  — положения источника в моменты  $t = 0$  и  $t = T_0$ , где  $T_0$  — период колебания источника. Пусть точки  $P_1, P_2$ , находятся на гребнях, вышедших соответственно из  $S_1, S_2$ . Тогда

$$S_2P_2 = S_1P_1 - uT_0.$$

и (приближенно)

$$S_2P_1 = S_1P_1 - S_1S_2 \cos \theta = S_1P_1 - vT_0 \cos \theta,$$

откуда

$$P_1P_2 = S_2P_1 - S_2P_2 = (u - v \cos \theta) T_0.$$

На большом расстоянии от источника касательные к окружностям в точках  $P_1, P_2$  можно считать параллельными, а расстояние  $P_1P_2$  — равным длине волны, излучаемой по направлению  $\theta$ :

$$\lambda = (u - v \cos \theta) T_0 = uT_0 \left( 1 - \frac{v \cos \theta}{u} \right).$$

Для частоты  $\omega$  волны, распространяющейся по направлению  $\theta$  получаем:

$$\omega = \frac{2\pi u}{\lambda} = \frac{\omega_0}{1 - \frac{v \cos \theta}{u}}, \quad (5.44)$$

где  $\omega_0$  — частота колебаний источника. При  $\theta = 0, \pi$  имеет соответственнс:

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 \mp \frac{v}{u}},$$

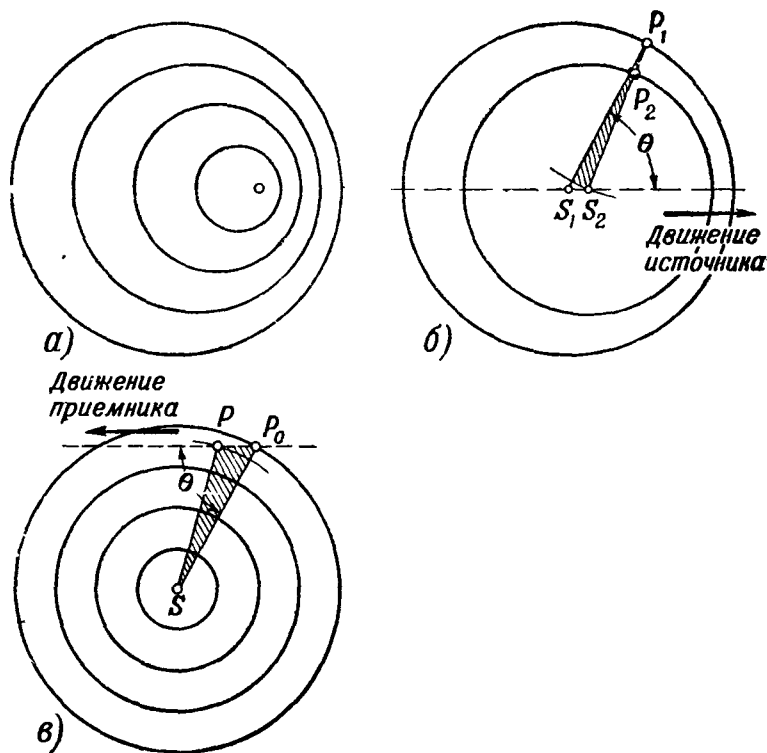


Рис. 185. а — геометрические места последовательных гребней (впадин), создаваемых источником, равномерно движущимся слева направо; б — к вычислению изменения длины волны, излучаемой под углом  $\theta$  к направлению движения источника; в — к вычислению изменения частоты колебания в приемнике, движущемся относительно среды,  $P_0P = vt$ .

при  $\theta = \pm \pi/2$  имеем:

$$\omega = \omega_0.$$

Если скорость источника мала по сравнению с  $u$ , можно писать приближенно вместо (5.44)

$$\omega = \omega_0 \left( 1 + \frac{v}{u} \cos \theta \right). \quad (5.45)$$

Описываемое полученными формулами изменение частоты вследствие движения источника называется *явлением Допплера*. Классический пример явления Допплера: когда мимо наблюдателя, стоящего около полотна железной дороги, проходит свистящий паровоз, наблюдатель слышит резкое понижение звука. Здесь  $\cos \theta$  быстро пробегает практически весь интервал значений от  $+1$  до  $-1$ .

Пусть теперь источник синусоидальных волн неподвижен, а приемник (например, микрофон в опыте, показанном на рис. 12) движется равномерно со скоростью  $v$  по направлению, образующему угол  $\theta$  с прямой, соединяющей источник и приемник (рис. 185, в). Тогда, если  $r_0$  велико на протяжении малого промежутка времени  $t$ , расстояние между ними  $r$  выражается формулой

$$r = r_0 - (v \cos \theta) t$$

( $r_0$  — расстояние в начальный момент). Подставив эту формулу в уравнение волны

$$s = A \cos \omega_0 \left( t - \frac{r}{u} \right),$$

где  $\omega_0$  — частота колебания источника, имеем:

$$s = A \cos \left[ \omega_0 \left( 1 + \frac{v}{u} \cos \theta \right) t - \frac{r_0}{u} \right] = A \cos \left( \omega t - \frac{r_0}{u} \right). \quad (5.46)$$

где

$$\omega = \omega_0 \left( 1 + \frac{v}{u} \cos \theta \right). \quad (5.47)$$

Формула (5.46) показывает, что изменение фазы колебания в приемнике вследствие его перемещения по отношению к среде равносильно изменению частоты. Изменение частоты колебания в приемнике вследствие движения последнего по отношению к среде также называется явлением Допплера.

Формулы (5.44), (5.47) являются *точными* формулами в том смысле, что содержащаяся в них погрешность стремится к нулю с увеличением расстояния  $r$  между источником и приемником.

Сравнение формулы (5.44), с (5.47) показывает, что не безразлично, что движется по отношению к среде — источник или приемник. Однако отличие перестает быть заметным при  $u \ll v$ , когда вступает в силу приближенная формула (5.45).

К световым волнам предыдущее рассмотрение неприменимо. В самом деле, свет распространяется не только в телах, но и в вакууме. Теория относительности утверждает в согласии с опытом, что здесь лишены смысла выражения: движение источника (или движение приемника) по отношению к среде, в которой распространяется свет. Можно говорить лишь о движении источника или приемника по отношению к другим телам. Если источник и приемник движутся равномерно и прямолинейно по отношению к инерциальной системе отсчета, то оптическое явление

Допплера определяется исключительно относительным движением источника и приемника. Согласно теории относительности при этом

$$\omega = \omega_0 \frac{1 + \frac{v}{c} \cos \theta}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (5.48)$$

где  $\omega$  — частота света, распространяющегося под углом  $\theta$  к направлению движения источника,  $\omega_0$  — ее значение при  $\theta = 0$ ,  $v$  — относительная скорость источника и приемника,  $c$  — скорость света в вакууме. Если, как это обычно имеет место,  $v$  настолько мало по сравнению с  $c$ , что можно пренебречь величиной  $v^2/c^2$ , формула (5.48) практически совпадает с (5.47).

Обычно в оптике условия опыта таковы. Аппаратура, с помощью которой определяется частота света, неподвижна по отношению к Земле, источник света (земной, например, атом, входящий в состав пламени, или неземной — звезда или туманность) движется по отношению к аппаратуре со скоростью  $v$ .

Оптическое явление Допплера имеет огромное значение для астрономии. Оно является источником всех наших знаний о движении звезд и туманностей.

Оптический эффект Допплера с лабораторным (земным) источником, движущимся как целое (в отличие от обычного случая, когда движутся атомы источника, но источник в целом неподвижен относительно лаборатории), впервые был исследован в 1900 г. А. А. Белопольским (1854 — 1934), а затем в 1907 г. Б. Б. Голицыным (1862 — 1919). Результаты опытов находятся в согласии с формулой (5.47).

## ГЛАВА VI

### УПРУГИЕ ВОЛНЫ

#### § 1. Продольные волны в твердом теле

**1. Предварительные замечания.** В гл. V волны изучались с кинематической точки зрения. Эта глава посвящена *динамическому* рассмотрению упругих волн. Учение об упругих волнах лежит в основе акустики (термины *упругие волны* и *акустические волны* являются синонимами).

Без динамического рассмотрения упругих волн нельзя понять, как происходит передача механических воздействий телами, например, передача толчка металлическим стержнем или возникновение натяжения в проволоке, когда к ней подвешен груз.

Динамическое исследование упругих волн необходимо для того, чтобы понять, как происходит распространение звука—процесс, кинематику которого мы изучали в гл. IV. Оно необходимо также для понимания действия таких источников звука, как, например, струны, органные трубы, кварцевые пластинки, применяемые для превращения электромагнитных колебаний в ультразвуковые, и т. д.

Динамическое исследование упругих волн необходимо также в качестве ключа для понимания «механизма» теплового движения тел. В этом—одна из самых замечательных сторон учения об упругих волнах.

Акустика как раздел физики достигла высокой степени совершенства уже в XIX столетии. Последние десятилетия отмечены бурным ростом прикладной акустики—разнообразных технических применений акустических волн и акустической аппаратуры. О некоторых из них будет сказано в этой главе.

**2. Деформация.** Мы начнем изучение динамики упругих волн с продольных волн в стержнях и пластинках (пластинку мы будем рассматривать как очень короткий стержень).

Будем описывать движение стержня с помощью «неподвижной» системы координат, ось  $x$  которой параллельна длине стержня (предполагается, что стержень не изгибается). Представим себе, что в некоторый момент  $t = 0$  мы измерили абсциссы материальных точек, составляющих отдельные поперечные сечения стержня (т. е. сечения, перпендикулярные к оси  $x$ ). Представим себе далее, что мы выгравировали на стержне в качестве *меток* около сечений, имевших в момент  $t = 0$  абсциссы  $x_1, x_2, x_3, \dots$ , обозначения чисел  $x_1, x_2, x_3, \dots$  (рис. 186).

Пусть материальные точки, составляющие стержень, перемещаются, и притом так, что материальные точки, составлявшие при  $t = 0$  плоскость, перпендикулярную к оси  $x$ , образуют также в любой момент  $t \neq 0$  плоскость, перпендикулярную к оси  $x$ .

Абсцисса сечения с меткой  $x$  будет в момент  $t = t'$  иметь значение, отличное (вообще говоря) от  $x$ ; назовем его  $x'$ . Величину (положительную или отрицательную)

$$\xi = x' - x$$

мы будем называть *смещением* сечения  $x$ .

Рассмотрим (рис. 186, в) участок стержня, ограниченный плоскостями с метками  $x, x + \Delta x$ ; длина этого участка была вначале (рис. 186, а) равна

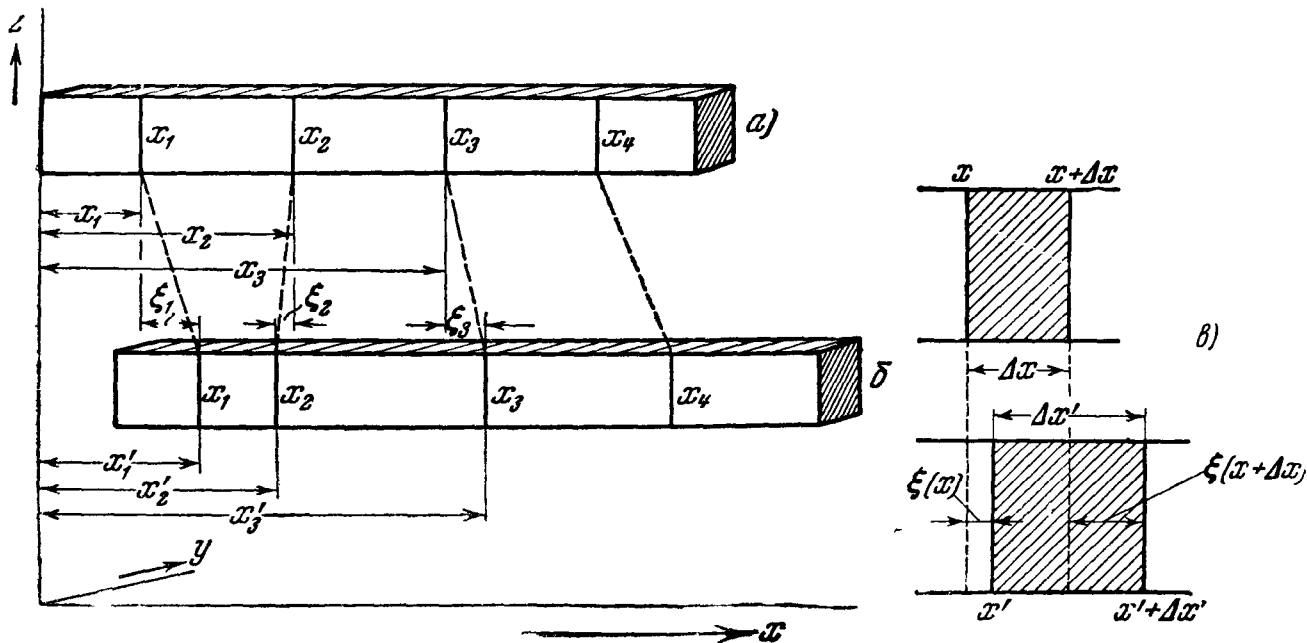


Рис. 186. К геометрическому описанию продольной деформации стержня: а—конфигурация стержня при  $t = 0$ ; б—конфигурация стержня при  $t = t'$  (для ясности чертежа она показана *ниже* первой, что не соответствует рассматриваемой задаче); метки  $x_1, x_2, \dots$  смещаются вместе с соответствующими плоскостями стержня; в—к определению деформации.

$\Delta x$ . Плоскости с метками  $x, x + \Delta x$  имеют после перемещения абсциссы  $x', x' + \Delta x'$ , вообще говоря, отличные от  $x, x + \Delta x$ .

Пусть (рис. 186, б)

$$\begin{aligned} x' &= x + \xi(x), \\ x' + \Delta x' &= x + \Delta x + \xi(x + \Delta x). \end{aligned}$$

$\xi(x)$  есть смещение плоскости с меткой  $x$ ,  $\xi(x + \Delta x)$  — смещение плоскости с меткой  $x + \Delta x$ . Длина рассматриваемого участка равна теперь

$$(x' + \Delta x') - x' = \Delta x'.$$

Удлинение, т. е. приращение длины этого участка, равно

$$\Delta x' - \Delta x = \xi(x + \Delta x) - \xi(x).$$

Отношение удлинения к первоначальной длине, т. е. величина

$$\frac{\xi(x + \Delta x) - \xi(x)}{\Delta x},$$

называется *средней продольной деформацией* участка  $x, x + \Delta x$ . *Продольной деформацией в данной точке* называется предел, к которому стремится это отношение при  $\Delta x \rightarrow 0^*$ ), т. е. величина

$$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (6.1)$$

\*) При этом, разумеется, мы рассматриваем стержень как сплошную среду, т. е. отвлекаемся от его атомистической структуры (ср. § 10, п. 3).

Мы пишем знак *частной* производной потому, что  $\xi$  есть функция не только  $x$ , но и  $t$ ; под  $\xi(x + \Delta x)$ ,  $\xi(x)$  подразумевается  $\xi(x + \Delta x, t')$ ,  $\xi(x, t')$ .

Если в данном месте  $\varepsilon > 0$ , то это означает, что в этом месте произошло удлинение или *растяжение* (рис. 187, а); смещение правого конца очень малого отрезка  $\Delta x$  больше, чем смещение левого. Если в данном месте

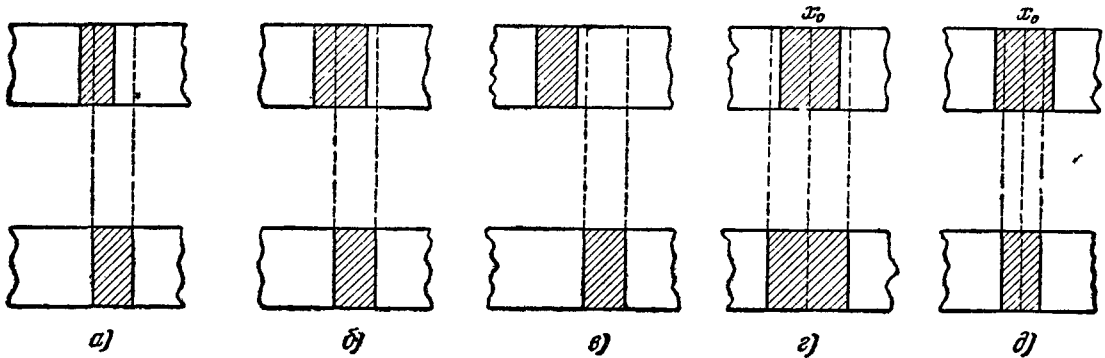


Рис. 187. а—растяжение; б—сжатие; в—смещение без деформации; г—растяжение без смещения плоскости  $x_0$ ; д—сжатие без смещения плоскости  $x_0$ .

$\varepsilon < 0$ , то это значит, что в этом месте произошло уменьшение длины или *сжатие* (рис. 187, б): смещение правого конца очень малого участка  $\Delta x$  меньше, чем смещение левого.

Надо приучиться не смешивать смещение и деформацию. Некоторый малый участок стержня может быть сильно смещен ( $\xi$  велико), но совсем не деформирован ( $\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$ ) (рис. 187, в). Может быть и обратное: смещение  $\xi = 0$ , но  $\frac{\partial \xi}{\partial x}$  велико; это значит, что две соседние плоскости по обе стороны от плоскости  $x$  отошли в противоположные стороны (растяжение,

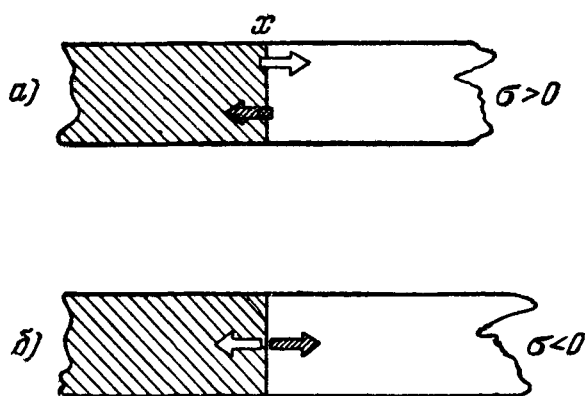


Рис. 188. К определению напряжения: а—натяжение,  $\sigma > 0$ ; б—давление,  $\sigma < 0$ . Стрелки заштрихованы так же, как части стержня, от которых исходят изображаемые ими силы; их точки приложения показаны для наглядности внутри тех частей стержня, к которым они приложены.

$\frac{\partial \xi}{\partial x} > 0$ ) или придвинулись друг к другу (*сжатие*,  $\frac{\partial \xi}{\partial x} < 0$ ).

Если на графике изображена зависимость смещения  $\xi$  от  $x$  (моментальный снимок), то деформация в каждой точке изображается угловым коэффициентом касательной в этой точке.

**3. Напряжение.** Разделим мысленно стержень на две части, расположенные одна слева, другая справа от плоскости с меткой  $x$  (рис. 188). Между этими частями действуют некоторые силы, приложенные к очень тонким слоям вещества, примыкающим к плоскости раздела. Согласно третьему закону Ньютона эти силы равны друг другу по величине и противоположны по направлению.<sup>5</sup> Обозначим  $\sigma$  величину одной из этих сил взаимодействия, деленную на поперечное сечение, которое имел стержень



до деформации \*). Эту величину мы будем называть механическим напряжением или просто *напряжением*.

При интересующих нас деформациях стержня возможны два случая. Силы взаимодействия направлены так, как на рис. 188, а, или так, как на рис. 188, б. В первом случае каждая из частей, на которые мы мысленно разделили стержень, *тянет* другую. Во втором случае каждая из этих частей *давит* на другую.

Условимся считать величину  $\sigma(x)$  *положительной* (*отрицательной*), если сила, действующая на часть стержня, расположенную слева от плоскости  $x$ , со стороны части стержня, расположенного справа от плоскости  $x$ , направлена *вправо* (*влево*), т. е. положительна (*отрицательна*). При этом сила, действующая на часть стержня, расположенную справа от плоскости  $x$ , направлена *влево*, т. е. *отрицательна* (*вправо*, т. е. *положительна*). Величина

$$p = -\sigma$$

называется *давлением* в рассматриваемой плоскости.

На рис. 188, а  $\sigma > 0$ ,  $p < 0$ ; в этом случае говорят: напряжение в плоскости  $x$  носит характер *натяжения*. На рис. 188, б  $\sigma < 0$ ,  $p > 0$ ; в этом случае говорят: напряжение носит характер *давления*.

4. **Связь между напряжением и деформацией.** Основным закон упругих взаимодействий состоит в следующем: напряжение в данном месте зависит только от деформации *в этом же месте*. В п. 2 мы определили деформацию по отношению к некоторой *произвольной* конфигурации, имевшей место при  $t = 0$ . Теперь мы будем считать исходным такое состояние, при котором напряжение всюду отсутствует ( $\sigma = 0$ ). Тогда, как учит опыт, если деформация не очень велика ( $\varepsilon \ll 1$ ), то напряжение с большим приближением можно считать пропорциональным деформации (*закон Гука*):

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (6.2)$$

где  $E$  — константа, характеризующая материал. Ее называют модулем упругости.

Согласно (6.2) всюду, где имеет место растяжение ( $\varepsilon > 0$ ), напряжение имеет характер натяжения ( $\sigma > 0$ ), всюду, где имеет место сжатие ( $\varepsilon < 0$ ), напряжение имеет характер давления ( $\sigma < 0$ ).

5. **Волновое уравнение.** Применим теперь второй закон Ньютона и закон сложения сил к движению куска стержня, заключенного между двумя плоскостями с метками  $x$  и  $x + \Delta x$  (рис. 189). Масса этого куска равна  $\rho_0 S_0 \Delta x$ , где  $\rho_0$  и  $S_0$  — соответственно плотность и сечение в отсутствие деформации. Пусть  $\xi$  — смещение центра тяжести рассматриваемого куска. Тогда

$$\rho_0 S_0 \Delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = S_0 \sigma(x + \Delta x) - S_0 \sigma(x).$$

Слева стоит произведение массы куска на ускорение  $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$  его центра тяжести, справа — результирующая внешних сил, действующих на кусок.

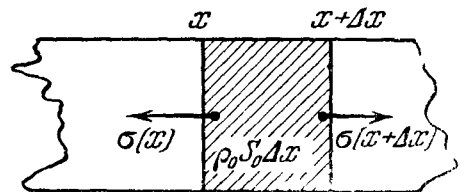


Рис. 189. К составлению уравнения движения куска стержня.

\*) Эта оговорка необходима. Как учит теория упругости, при рассматриваемых здесь деформациях поперечное сечение стержня уменьшается в местах растяжения и увеличивается в местах сжатия.

Разделим уравнение на  $S_0 \Delta x$ :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\sigma(x + \Delta x) - \sigma(x)}{\Delta x}.$$

Перейдя к пределу при  $\Delta x \rightarrow 0$ , получим уравнение

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad (6.3)$$

справедливое в каждой точке стержня. (Знак *частной* производной по  $x$  здесь пишется на том же основании, что и для деформации, см. п. 2.) Оно указывает, что ускорение данной точки пропорционально частной производной напряжения по  $x$  в этой точке.

Подставляя в (6.3) соотношение (6.2), получим:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = E \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}. \quad (6.4)$$

Вспомнив теперь формулу (6.1), содержащую определение деформации, и подставив ее в (6.4), получаем:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho_0} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (6.5)$$

Это — *волновое уравнение*. Оно указывает, что смещение распространяется по стержню в виде волн

$$\xi = f(x \mp ut) \quad (6.6)$$

или образует суперпозицию таких волн (ср. гл. V, § 8). Скорость распространения этих волн (*скорость звука* в стержне)

$$u = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (6.7)$$

(мы опускаем для краткости индекс 0 у  $\rho$ ). Эта скорость тем больше, чем жестче и чем легче материал. Формула (6.7) — одна из основных формул акустики.

Наряду со смещением  $\xi$  нас интересуют скорость  $v = \frac{\partial \xi}{\partial t}$ , с которой движутся отдельные плоскости  $x = \text{const}$  (не смешивать с  $u$ ), деформация  $\varepsilon$  и напряжение  $\sigma$ . Дифференцируя (6.6) по  $t$  и по  $x$ , получаем:

$$v = \mp u f'(x \mp ut), \quad (6.6a)$$

$$\varepsilon = f'(x \mp ut), \quad (6.6b)$$

$$\sigma = E f'(x \mp ut). \quad (6.6b)$$

Таким образом, смещение, скорость, деформация и напряжение распространяются в виде связанных определенным образом между собой недеформирующихся волн, имеющих одну и ту же скорость и одинаковое направление распространения.

На рис. 190 показан пример «моментальных снимков», относящихся к одному и тому же моменту времени, смещения, деформации и скорости в одной и той же упругой волне. Там, где смещение имеет максимум или минимум, деформация и скорость равны нулю, так как они обе пропорциональны производной  $f'(x \mp ut)$ . Физическая интерпретация здесь очевидна: около максимума или минимума смещения соседние (бесконечно близкие) точки одинаково смещены и, следовательно, нет ни растяжения, ни сжатия; в тот момент, когда смещение достигает максимума (минимума), его возрастание сменяется убыванием (или наоборот).

Сравнивая формулы (6.6а), (6.6в) и принимая во внимание (6.7), мы видим, что

$$v = \frac{P}{\mathfrak{z}}, \quad (6.8)$$

где

$$\mathfrak{z} = \frac{E}{u} = \sqrt{E\rho} = \rho u \quad (6.9)$$

есть величина, не зависящая от вида функции  $f$  и целиком определяемая свойствами материала. Эта величина называется *удельным акустическим сопротивлением* материала. Она является, как мы увидим, наряду с  $u$  его важнейшей акустической характеристикой. Название величины  $\mathfrak{z}$  связано с формальной аналогией между уравнением (6.8) и законом Ома ( $\rho$  аналогично разности потенциалов,  $v$  — силе тока).

**6. Синусоидальные бегущие волны.** Очень важным случаем волны, удовлетворяющей уравнению (6.5), является *синусоидальная упругая бегущая волна*

$$\begin{aligned} \xi &= A \cos(\omega t \mp kx) = \\ &= A \cos \omega \left( t \mp \frac{x}{u} \right), \end{aligned} \quad (6.10)$$

причем  $u$  не зависит от частоты и определяется формулой (6.7).

Для скорости частиц и для деформации мы получаем, дифференцируя (6.8) по  $t$  и по  $x$ ,

$$v = -\omega A \sin(\omega t \mp kx), \quad (6.10а)$$

$$\varepsilon = \pm kA \sin(\omega t \mp kx); \quad (6.10б)$$

для напряжения получаем:

$$\sigma = \pm EkA \sin(\omega t \mp kx); \quad (6.10в)$$

для давления

$$p = -\sigma = \mp EkA \sin(\omega t \mp kx). \quad (6.10г)$$

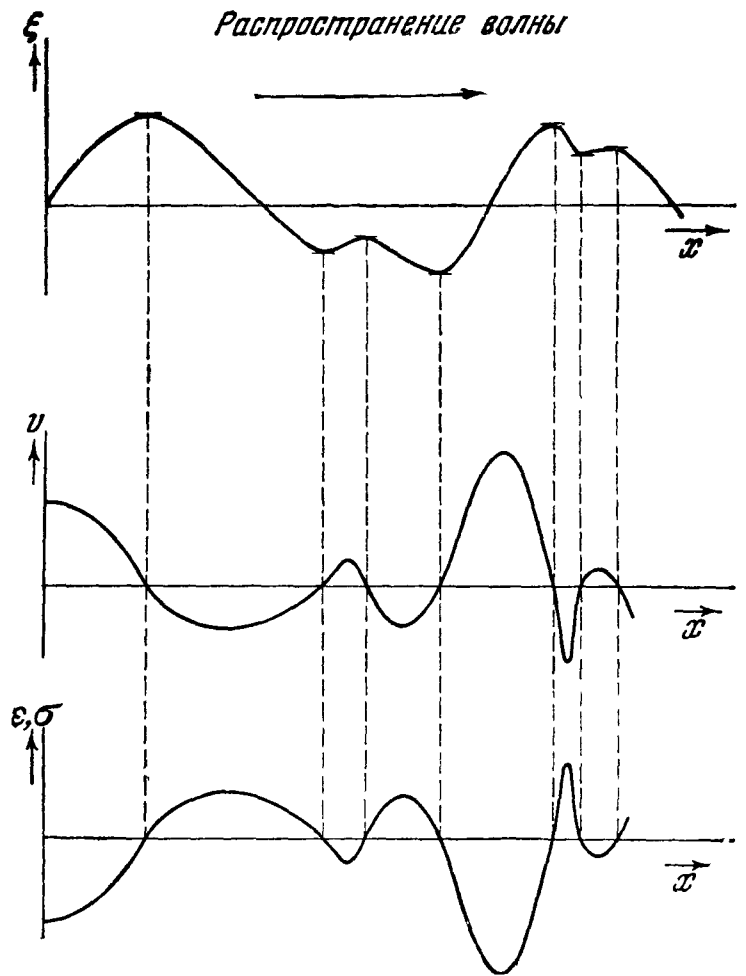


Рис. 190. Моментальные снимки смещения, скорости и деформации (напряжения) в волне, бегущей слева направо.

На рис. 191,а показаны относящиеся к одному и тому же значению  $t$  моментальные снимки смещения, скорости и деформации. Здесь ясно видны общие соотношения, указанные в конце § 1: деформация и скорость равны нулю там, где абсолютная величина смещения имеет максимум. Кроме того, они максимальны по абсолютной величине там, где смещение равно нулю.

Моментальный снимок волны напряжения совпадает (при надлежащем масштабе по оси ординат) с моментальным снимком волны деформации.

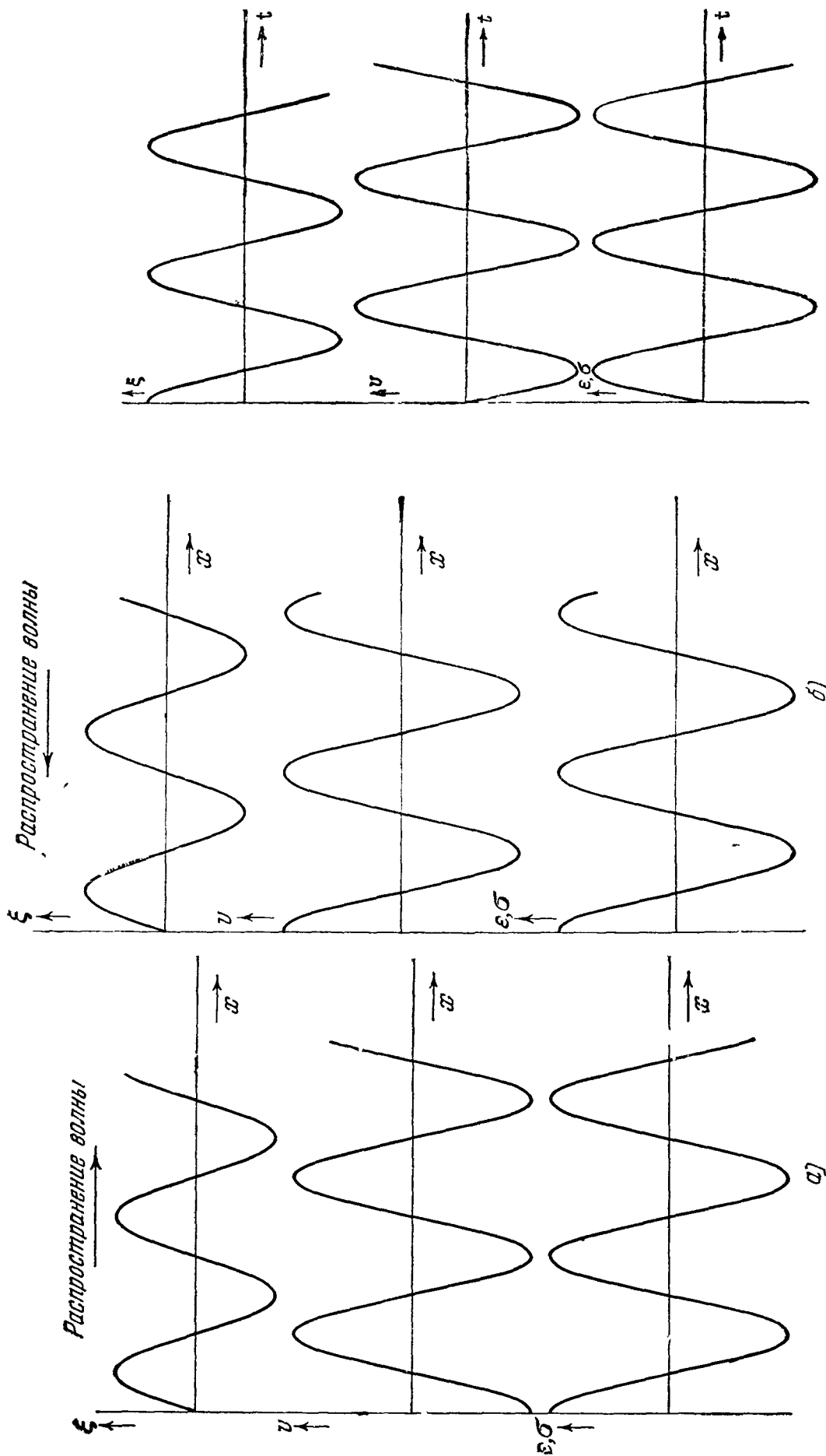


Рис. 191. Моментальные снимки смещения, скорости и деформации (напряжения) в синусоидальной волне, бегущей: а—слева направо, б—справа налево.

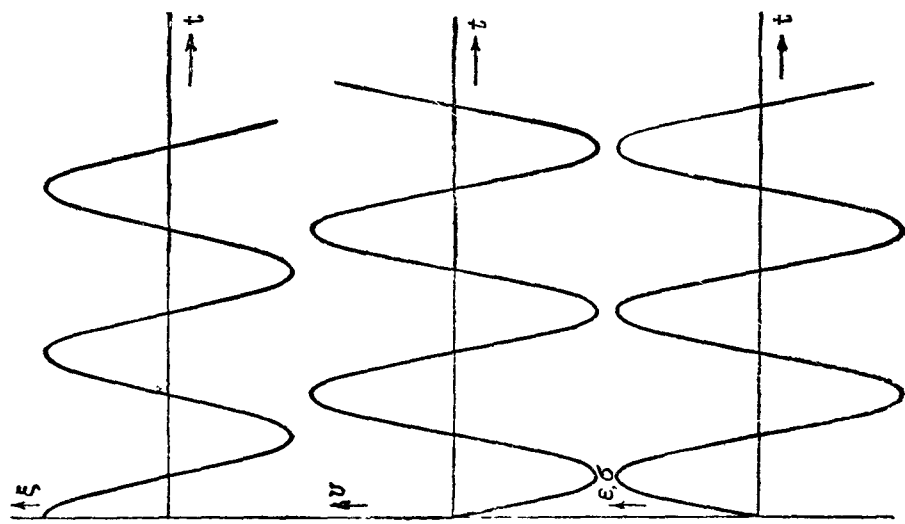


Рис. 192. Осциллограмма смещения, скорости и деформации (напряжения) в синусоидальной волне, бегущей слева направо.

Для волны, бегущей справа налево (рис. 191, б), соотношение между моментальными снимками  $\xi$  и  $\varepsilon$  такое же, как для волны, бегущей слева направо, но волна скорости является зеркальным изображением относительно оси  $x$  той, которая показана на рис. 191, а.

На рис. 192 изображены осциллограммы  $\xi$ ,  $v$  и  $\varepsilon$  для одного и того же места стержня (одного и того же  $x$ ). Как и всегда, при гармоническом колебании скорость опережает по фазе смещение на  $\pi/2$ . Если волна бежит слева направо, деформация изменяется в противофазе по отношению к скорости.

7. Стоячие волны. Суперпозиция бегущих волн

$$\xi_1 = A \cos(\omega t - kx).$$

$$\xi_2 = A \cos(\omega t + kx),$$

т. е. стоячая волна смещения

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A \cos kx \cos \omega t \quad (6.11)$$

удовлетворяет волновому уравнению (6.5), т. е. также является одним из процессов, возможных в нашем стержне. Дифференцируя (6.9) по  $t$  и по  $x$ , мы получим для скорости частиц и для деформации выражения

$$v = -2\omega A \cos kx \sin \omega t, \quad (6.11a)$$

$$\varepsilon = -2kA \sin kx \cos \omega t \quad (6.11б)$$

(стоячие волны скорости и деформации).

Рис. 193 изображает ряд последовательных моментальных снимков стоячей волны. В каждой точке деформация достигает максимума (т. е. становится равной своей амплитуде) тогда же, когда и смещение: деформация и смещение колеблются в фазе. Скорость опережает их по фазе на  $\pi/2$ . Амплитуда деформации  $|2kA \sin kx|$  максимальна там, где амплитуда смещения  $|2A \cos kx|$  равна нулю, и наоборот. Амплитуда скорости пропорциональна в каждой точке амплитуде деформации. Узлы деформации совпадают с пучностями смещения и скорости; пучности деформации совпадают с узлами смещения и скорости.

Напряжение

$$\sigma = -E \cdot 2kA \sin kx \cos \omega t \quad (6.11в)$$

образует стоячую волну, моментальный снимок которой совпадает при надлежащем масштабе с моментальным снимком стоячей волны деформации.

## § 2. Энергетические соотношения. Вектор Умова

1. Плотность энергии. Выделим мысленно маленький кусок стержня, объем которого в недеформированном состоянии равен  $S_0 \cdot \Delta x$ , а его масса  $\rho_0 S_0 \Delta x$ , где  $\rho_0$  — плотность в отсутствие деформации. Если этот кусок стержня движется параллельно оси  $x$ , он обладает кинетической

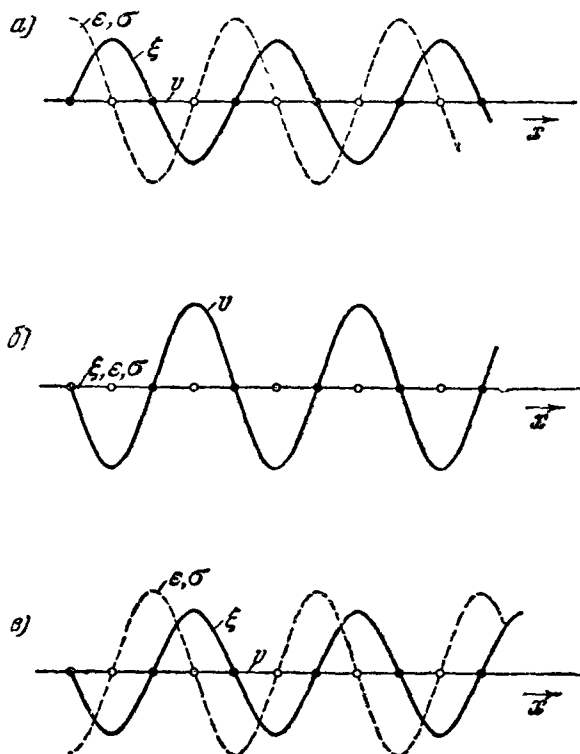


Рис. 193. Моментальные снимки смещения, скорости и деформации (напряжения) в стоячей упругой волне в моменты а)  $t=0$ ; б)  $t=T/4$ ; в)  $t=T/2$ .

энергией

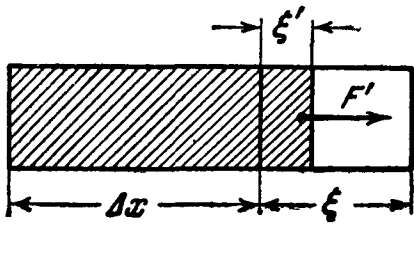
$$\frac{1}{2} \rho_0 S_0 \Delta x \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2,$$

где  $\frac{\partial \xi}{\partial t} = v$  — его скорость в рассматриваемый момент времени. На единицу объема (точнее: на вещество, занимавшее в недеформированном состоянии единицу объема) приходится кинетическая энергия

$$\omega_k = \frac{1}{2} \rho_0 v^2.$$

Эта величина называется *плотностью кинетической энергии*.

Аналогично этому можно ввести понятие плотности потенциальной (упругой) энергии. Представим себе участок стержня, имеющий в недеформированном состоянии длину  $\Delta x$ . Вычислим работу, которую совершают упругие силы, действующие на выделенный участок, при изменении его длины на  $\varepsilon \Delta x$ , где  $\varepsilon$  по определению — его деформация (§ 1).



Можно считать без нарушения общности, что левая граница участка  $\Delta x$  остается неподвижной, а правая смещается на расстояние  $\xi = \varepsilon \Delta x$ . Тогда работа выражается интегралом

Рис. 194. К вычислению работы деформации.

$$A = \int_0^{\varepsilon} F' d\xi',$$

где  $\xi'$ ,  $F'$  — соответственно значения, пробегаемые смещением конца участка  $\Delta x$  и действующей на него упругой силой (рис. 194). Согласно (6.1), (6.2)

$$F' = S_0 \sigma' = S_0 E \varepsilon', \quad \xi' = \varepsilon' \Delta x,$$

где  $\varepsilon'$  обозначает промежуточные значения, пробегаемые деформацией в интервале от 0 до  $\varepsilon$ , откуда

$$A = \int_0^{\varepsilon} S_0 E \varepsilon' \Delta x d\varepsilon' = S_0 E \Delta x \int_0^{\varepsilon} \varepsilon' d\varepsilon' = S_0 \Delta x \frac{E \varepsilon^2}{2}.$$

Эта работа равна потенциальной энергии, запасенной в рассматриваемом участке стержня. Единица объема (точнее, вещество, занимавшее в недеформированном состоянии единицу объема) обладает потенциальной энергией

$$\omega_n = \frac{E \varepsilon^2}{2}. \quad (6.12)$$

Эта величина и есть *плотность потенциальной энергии*. Общая плотность энергии

$$\omega = \omega_k + \omega_n = \frac{1}{2} (\rho_0 v^2 + E \varepsilon^2).$$

В бегущей упругой волне плотность энергии в каждый момент равна нулю в тех местах, где смещение максимально, так как в них и скорость и деформация равны нулю; плотность потенциальной и плотность кинетической энергии, а следовательно, и общая плотность энергии максимальны в каждый момент времени в одних и тех же точках, — там, где деформация и скорость максимальны (по абсолютной величине). В слу-

чае синусоидальной волны эти точки совпадают с теми, где смещение равно нулю.

Полная энергия, содержащаяся в куске стержня, ограниченного сечениями  $x = x_1$  и  $x = x_2$ ,

$$W = \int_{x_1}^{x_2} \omega S_0 dx = \frac{S_0}{2} \int_{x_1}^{x_2} (\rho_0 v^2 + E \varepsilon^2) dx. \quad (6.13)$$

2. Поток энергии. Изменение энергии, содержащейся в куске стержня  $x_1 \leq x \leq x_2$ , равно работе, совершенной силами, действующими на рассматриваемый кусок со стороны частей стержня, находящихся слева и справа от него. Будем обозначать индексами 1, 2 величины, относящиеся соответственно к сечениям  $x = x_1$  и  $x = x_2$ . Вместо  $S_0$  будем для краткости писать просто  $S$ . Слева действует сила  $F_1 = -S\sigma_1$  (знак минус потому, что если  $\sigma_1$  положительно, то по условию сила  $F_1$  направлена влево, т. е. отрицательна), справа — сила  $F_2 = \pm S\sigma_2$  (если  $\sigma_2$  положительно, то эта сила направлена вправо). Работа сил  $F_1, F_2$  за время  $dt$  равна соответственно  $F_1 v_1 dt, F_2 v_2 dt$ , следовательно, общая работа равна

$$(F_1 v_1 + F_2 v_2) dt = -(\sigma_1 v_1 - \sigma_2 v_2) S dt.$$

Эта работа равна изменению  $dW$  энергии  $W$  за время  $dt$ , откуда

$$\frac{dW}{dt} = Q_1 - Q_2, \quad (6.14)$$

где

$$Q_1 = -S\sigma_1 v_1, \quad Q_2 = -S\sigma_2 v_2.$$

Это уравнение выражает для рассматриваемого случая закон сохранения энергии. Ему можно дать следующее наглядное толкование: увеличение  $dW$  энергии, заключенной в куске стержня  $x_1 \leq x \leq x_2$ , равно избытку энергии  $Q_1 dt$ , проникшей через сечение  $x = x_1$ , над энергией  $Q_2 dt$ , утекшей через сечение  $x = x_2$ . Это аналогично тому, как увеличение массы газа, заключенной между двумя сечениями трубы (рис. 195), равно согласно закону сохранения материи избытку массы газа, протекшей через одно сечение, над массой газа, протекшей через другое сечение. Величина

$$Q = -S\sigma v \quad (6.15)$$

называется *потоком энергии* через площадку  $S$ , величина

$$q = -\sigma v = pv \quad (6.16)$$

— *плотностью потока энергии*.

Понятие потока энергии было введено в физику знаменитым русским физиком Н. А. Умовым (1846—1915). Оно легло в основу его докторской диссертации «Уравнения движения энергии в телах», защищенной в Московском университете в 1874 г. В ней доказывается общая теорема о потоке энергии в любой среде.

Идея Умова о потоке энергии оказалась весьма плодотворной не только в акустике, но и в учении об электромагнитных волнах (см. гл. VII, § 4).

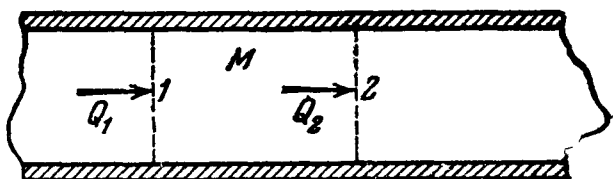


Рис. 195. К аэродинамической аналогии соотношения (6.14).

В общем случае плотность потока энергии есть некоторый вектор  $q$  (вектор Умова), направление и величина которого в различных точках пространства, вообще говоря, различны.

3. Поток энергии в волне сжатия или растяжения. Рассмотрим стержень, по которому бежит упругая волна. Моментальные снимки смеще-

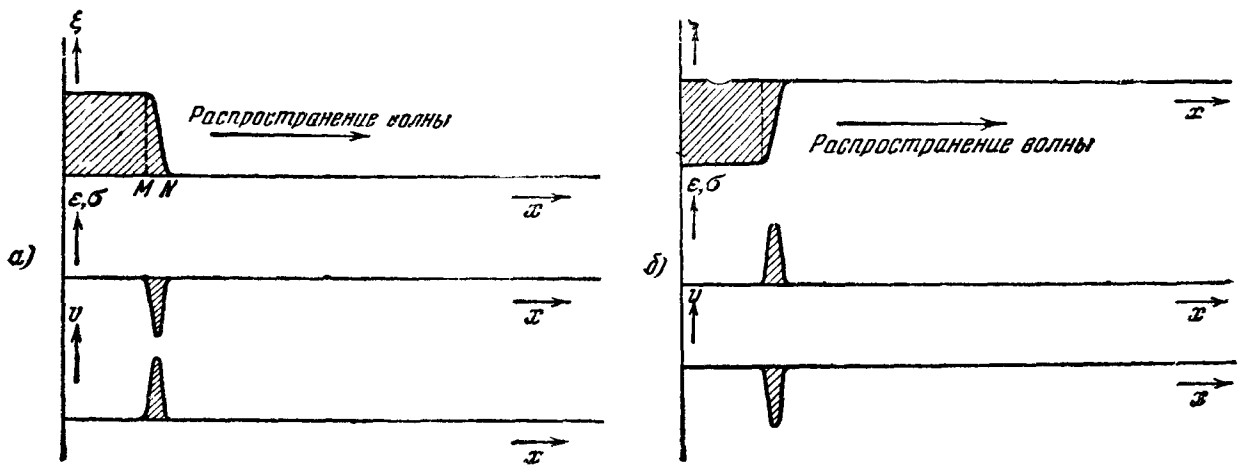


Рис. 196. Моментальные снимки смещения, деформации (напряжения) и скорости: а—в волне сжатия, б—в волне растяжения.

ния, деформации и скорости имеют вид, показанный на рис. 196, а: точки, находящиеся правее  $N$ , в рассматриваемый момент еще не сместились, точки левее  $M$  уже сместились настолько же, насколько смещен левый

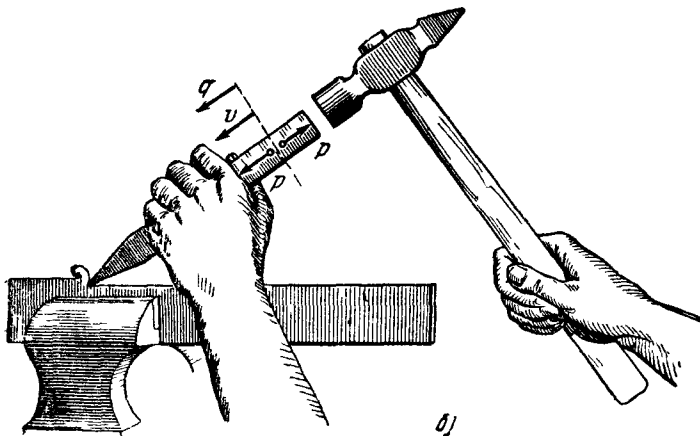
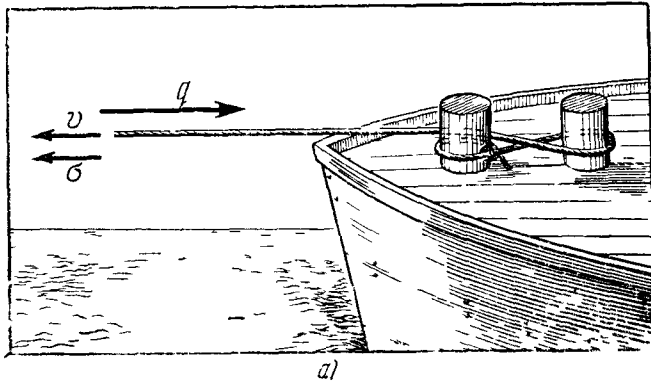


Рис. 197. а—направление вектора Умова в буксирном тросе; б—направление вектора Умова в зубиле.

конец стержня. (Все рассмотрение имеет смысл только, если левый конец стержня сместился за время, пока начало волны не успело добежать до правого конца, т. е. если отрезок  $MN$  меньше длины стержня.) В том участке стержня  $MN$ , где в данный момент  $\varepsilon \neq 0$ , деформация носит характер сжатия. Поэтому мы называем рассматриваемую волну *волной сжатия*. Плотность и поток энергии равны нулю всюду, кроме участка  $MN$ . Так как на нем  $v \neq 0$ ,  $\sigma < 0$ , поток энергии положителен: энергия течет слева направо. Если вместо того чтобы толкнуть, *потянем* резко левый конец стержня, то по стержню побежит *волна растяжения*. Моментальные снимки волн  $\xi$ ,  $v$ ,  $\sigma$  имеют вид, показанный на рис. 196, б. Теперь распространяется не

давление, а натяжение,  $\sigma$  имеет знак, обратный по отношению к предыдущему примеру. Но  $v$  имеет тоже обратный знак. Поэтому поток энергии снова положителен; энергия и здесь течет слева направо.



Последние примеры раскрывают механизм передачи энергии тросом буксируемому судну (рис. 197, а) или зубилом обрабатываемому материалу (рис. 197, б). Зубило и трос можно рассматривать как упругие стержни (провисание троса под действием тяжести несущественно). Энергия в обоих случаях передается посредством упругой (акустической) волны.

4. Поток энергии в синусоидальной бегущей волне. На основании соотношения  $q = -\sigma v$  и рис. 191 мы заключаем, что в каждой точке поток энергии равен нулю, когда в этой точке абсолютная величина смещения достигает максимума. Поток энергии достигает максимума, когда скорость и деформация в данной точке максимальны по абсолютной величине. Поток энергии при этом всегда направлен в ту сторону, куда бежит волна: в случае рис. 191, а  $v$  и  $\sigma$  имеют разные знаки и  $q > 0$ , в случае рис. 191, б  $v$  и  $\sigma$  имеют одинаковые знаки и  $q < 0$ . Поток энергии достигает максимума дважды за период волны; частота его изменения в каждой точке стержня равна  $2\omega$ .

Количественно

$$q = -\sigma v = EkA \sin(\omega t - kx) \omega A \sin(\omega t - kx) = Ek\omega A^2 \sin^2(\omega t - kx).$$

В акустике всегда представляет интерес энергия, передаваемая за время, охватывающее большое число периодов. Мы легко найдем ее, зная среднее значение от  $q$  за период:

$$\bar{q} = \frac{1}{T} \int_0^T q(t) dt = \frac{1}{2} Ek\omega A^2,$$

или на основании (6.9)

$$\bar{q} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2. \quad (6.17)$$

Среднее значение за период от плотности потока энергии пропорционально, таким образом, квадрату частоты, квадрату амплитуды смещения и удельному акустическому сопротивлению материала. Энергия, протекающая за 1 период через 1  $см^2$ ,

$$\bar{q}T = \bar{q} \frac{2\pi}{\omega} = \pi \rho \omega A^2. \quad (6.18)$$

Формула (6.17) может быть легко преобразована в следующие удобные для расчетов формулы:

$$\bar{q} = \frac{1}{2} \rho v_m^2, \quad \bar{q} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_m^2}{\rho}, \quad (6.19)$$

где  $v_m$ ,  $\sigma_m$  — соответственно амплитуда скорости и напряжения.

5. Превращения энергии в стоячей волне. Здесь поток энергии равен нулю тождественно (т. е. при любом  $t$ ) в узлах напряжения (и деформации), где  $\sigma = 0$ , и в узлах скорости (и смещения), где  $v = 0$ . Таким образом, каждый участок стержня длины  $\lambda/4$ , заключенный между узлом  $\sigma$  и ближайшим к нему узлом  $v$ , не обменивается энергией с соседними участками. Его энергия постоянна. При этом в каждом таком участке происходит дважды за период превращение кинетической энергии, сосредоточенной преимущественно около пучности скорости (узла напряжения), в потенциальную, сосредоточенную преимущественно около пучности деформации (узла скорости). Действительно, в моменты, когда  $v = 0$ , энергия — целиком потенциальная, в те моменты, когда  $\varepsilon = 0$ , энергия —

целиком кинетическая. Это напоминает превращения энергии при собственных упругих колебаниях системы, состоящей из груза и пружины (гл. III, § 2). Аналогичной грузу является область, близкая к пучности скорости; область, близкая к пучности деформации, аналогична пружине.

Пусть в стержне имеется стоячая волна

$$\xi = A \sin kx \cos (\omega t - \varphi).$$

Подсчитаем энергию  $W$ , заключенную в участке

$$0 \leq x \leq \frac{\lambda}{4},$$

находящемся между узлом смещения  $x=0$  и узлом напряжения  $x=\lambda/4$ .  $W$  равна, очевидно, потенциальной энергии выбранного участка в тот момент, когда  $\cos(\omega t - \varphi) = 1$ ,  $\dot{\xi} = v = 0$ , а именно,

$$\frac{S}{2} \int_0^{\frac{\lambda}{4}} E \varepsilon^2 dx, \quad \text{где } \varepsilon = kA \cos kx, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Интеграл легко вычисляется, и мы получаем:

$$W = \frac{\pi}{8} S E k A^2 \quad (6.20)$$

или на основании (6.10)

$$W = \frac{\pi}{8} S \zeta \omega A^2. \quad (6.20a)$$

Мы пришли бы к этому же результату, подсчитывая  $W$  как кинетическую энергию, в момент, когда  $\cos(\omega t - \varphi) = 0$ , т. е.  $\varepsilon = 0$ .

Отмеченная здесь аналогия между стоячей волной и собственным колебанием осциллятора весьма полезна при исследовании собственных колебаний стержней и пластин (§ 3), а также столбов газа или жидкости (§ 7).

### § 3. Продольные собственные колебания стержней и пластин

**1. Стержень, закрепленный в середине. Основное колебание.** Будем говорить для определенности о стержне; все рассуждения применимы и к пластинке, колеблющейся по толщине (ср. § 1). Предположим, что стержень находится в вакууме; будем считать, кроме того, что внутреннее трение и другие внутренние причины затухания (см. § 10) в нем отсутствуют.

Пусть каким-нибудь способом удалось создать в стержне продольную стоячую волну (рис. 198, а):

$$\xi = A \sin kx \cos (\omega t - \varphi). \quad (6.21)$$

Каждый участок от узла смещения до узла деформации образует, как мы выяснили, энергетически замкнутый «отсек»: он не обменивается энергией с остальными частями стержня. Предположим (рис. 198, б), что в некоторое мгновение мы наглухо закрепили двумя ножами сечение стержня  $x=0$  (узел смещения). Движение, описываемое формулой (6.11), при этом не нарушится, так как сечение уже раньше было неподвижным. Предположим, далее, что в какое-то мгновение от стержня отпали части

$x < -\frac{\lambda}{4}$  и  $x > \frac{\lambda}{4}$ , вследствие чего в плоскостях  $x = \pm \frac{\lambda}{4}$  образовались свободные концы (рис 198, в). При этом для участка стержня

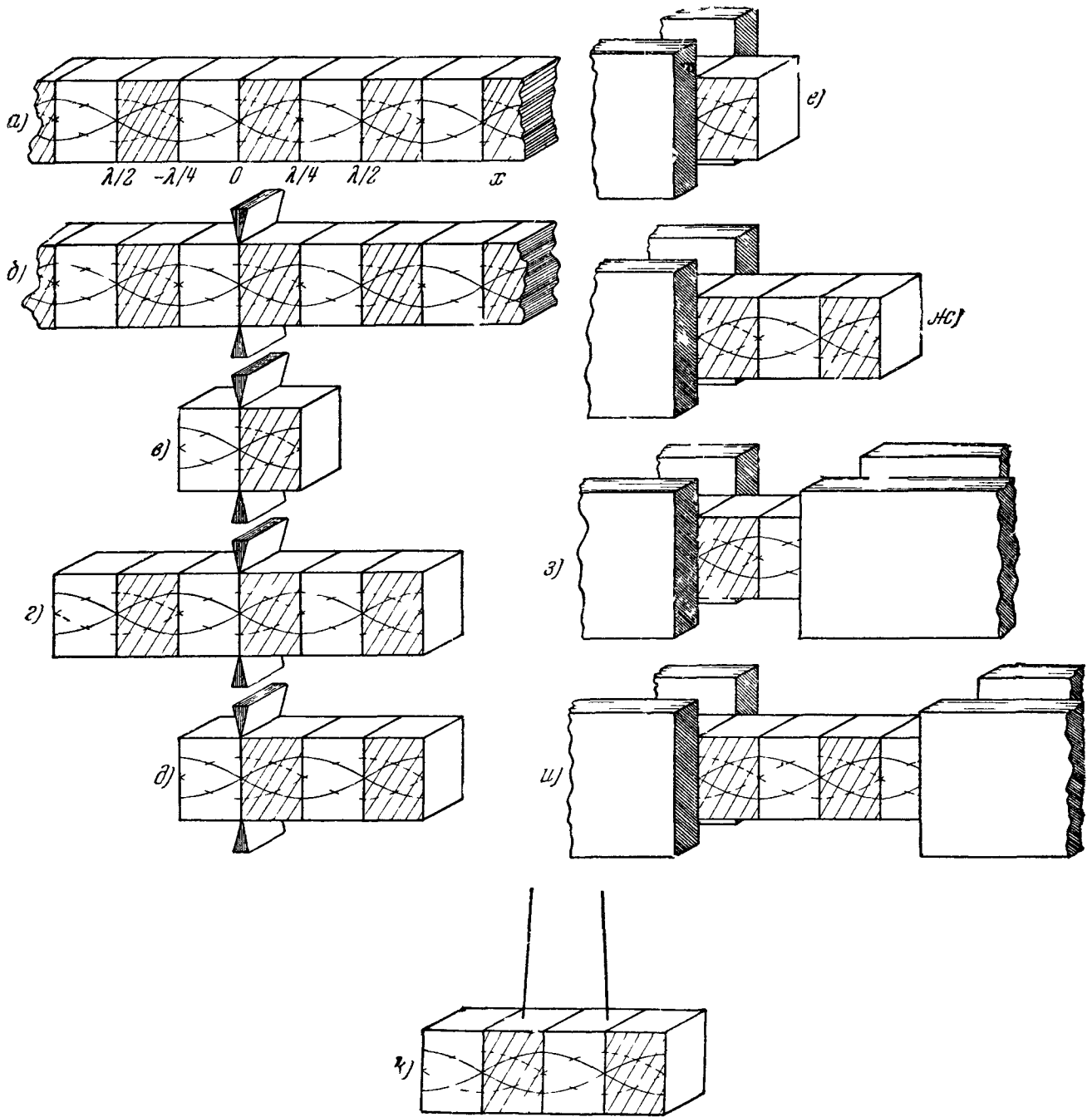


Рис 198 а—стоячая продольная упругая волна в стержне, как и на следующих рисунках, штриховка выделяет «энергетически замкнутые» куски стержня длины  $\lambda/4$ , сплошные синусоиды показывают распределение смещения, пунктирные—распределение деформации б—закрепление плоскости  $x=0$  оставляет распределение смещений и деформации таким же, как в случае а в—основное собственное колебание  $n=1$  стержня, закрепленного в середине г—колебание  $n=3$  стержня, закрепленного в середине, д—основное собственное колебание стержня, разделенного плоскостью закрепления в отношении 1/3, е—основное собственное колебание стержня, один конец которого закреплен, другой—свободен, жс—колебание  $n=3$  стержня, один конец которого закреплен, другой—свободен, з—основное собственное колебание стержня, закрепленного на обоих концах и—колебание  $n=2$  стержня, закрепленного на обоих концах, к—колебание  $n=2$  свободно подвешенного стержня

$-\frac{\lambda}{4} \leq x < \frac{\lambda}{4}$  опять ничто не изменится как до, так и после отпадения частей  $|x| > \frac{\lambda}{4}$  напряжение в сечениях  $x = \pm \frac{\lambda}{4}$  равно нулю. Они были и остаются узлами напряжения (и деформации)

Итак, оставшийся кусок стержня длины  $L = \frac{\lambda}{2}$  «не почувствует» проделанной над стержнем операции. Он будет колебаться, как и вначале, согласно уравнению (6.11), причем теперь имеют место соотношения

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{L}, \quad \omega = ki = \frac{\pi}{L} u. \quad (6.21a)$$

Движение, описываемое формулами (6.21), (6.21a), естественно называть *собственным колебанием* стержня длины  $L$ , закрепленного в середине и свободного на концах. Более полное название рассмотренного колебания — *основное собственное колебание* — станет понятным из п. 2.

Рассмотрим полученный результат с энергетической точки зрения. На концах нашего стержня длины  $L$  напряжение, а следовательно, и поток энергии равны нулю. Обмена энергией с закрепляющими ножами также нет, так как они неподвижны. Следовательно, стержень не получает и не теряет энергии. Это и позволяет сохраниться неопределенно долго *незатухающему* колебанию (6.21). Как и при собственном колебании гармонического осциллятора дважды за период кинетическая энергия превращается в потенциальную и наоборот.

Для возбуждения этого колебания нет никакой необходимости сначала создать стоячую волну в более длинном стержне, а потом из него выделить кусок длиной  $L$ . На самом деле, само собой разумеется, поступают наоборот: сначала изготавливается стержень (или пластинка) нужных размеров и закрепляется в середине, а затем возбуждают в них колебания.

На основании (6.21a) и (6.7) имеем для частоты основного собственного колебания

$$\omega = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (6.22)$$

Так, для пластинки из пьезокварца ( $\rho = 2,65 \text{ г/см}^3$ ) имеем, если направление смещений (ось  $x$ ) ориентировано определенным образом по отношению к направлению, характеризующему кристаллическую структуру \*),  $E = 85,46 \cdot 10^{10} \text{ дин/см}^2$ , откуда

$$\nu = \frac{285\,500}{L} \quad (L \text{ — в см, } \nu \text{ — в герцах}).$$

Для железа ( $\rho = 7,7 \text{ г/см}^3$ ,  $E = 21\,000 \text{ кг/мм}^2$ ) имеем:

$$\nu = \frac{258\,000}{L} \quad (L \text{ — в см, } \nu \text{ — в герцах}).$$

Мы здесь вычисляем  $\nu$ , пользуясь значением  $E$ , полученным из измерений статических деформаций и напряжений. В физике большое значение приобрел *обратный* подход: модуль упругости (и другие упругие константы, например модуль сдвига) вычисляется по измеряемым (с большой точностью) собственным частотам упругих колебаний (продольных колебаний, крутильных колебаний).

**2. Стержень, закрепленный в середине (продолжение). Обертоны.** Рассуждения п. 1 остаются в силе, если стержень закреплен и вырезан так, как показано на рис. 198,  $g$ ,  $d$ , и вообще всякий раз, когда как слева, так и справа от плоскости закрепления (где  $\xi = 0$ ) расположено по нечетному числу четвертей волны.

\*) Именно, совпадает с так называемой пьезоэлектрической осью

Пусть стержень закреплен в середине. Здесь возможны собственные колебания, в которых соотношение между длиной стержня и длиной стоячей волны таково:

$$\frac{L}{2} = n \frac{\lambda}{4} \quad (n = 1, 3, 5, \dots).$$

Случай  $n = 1$  соответствует рассмотренному в п. 1 *основному* собственному колебанию. Собственные колебания, соответствующие  $n = 3, 5, \dots$ , называются обертонами номера  $n$ . Для общности можно назвать основное колебание обертоном  $n = 1$ . Рис. 198, *г* показывает обертоном  $n = 3$  стержня, закрепленного в середине.

Для частоты  $n$ -го собственного колебания имеем, очевидно,

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad \nu_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (n = 1, 3, 5, \dots). \quad (6.23)$$

Наряду с термином *собственные колебания* стержня часто употребляется термин *нормальные колебания*.

Предоставляем читателю вычислить частоты собственных колебаний стержня, закрепленного на  $1/3$ ,  $1/5$  и т. д. расстояния между концами.

**3. Стержень, закрепленный на одном конце и свободный на другом.** Рассуждения п. 1 могут быть перенесены на случай, когда сначала закрепляется вся часть стержня, находящаяся левее  $x = 0$ , а затем отпадает часть стержня, находящаяся правее сечения:

$$x = n \frac{\lambda}{4} \quad (n = 1, 3, 5, \dots)$$

(рис. 198, *е, ж*). Мы приходим, таким образом, к собственным колебаниям стержня, имеющего один закрепленный и один свободный конец. Они описываются формулой (6.11), причем теперь

$$L = n \frac{\lambda_n}{4}, \quad k_n = \frac{n\pi}{2L}, \quad \omega_n = \frac{n\pi}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad \nu_n = \frac{n}{4L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (n = 1, 3, 5, \dots). \quad (6.24)$$

Как и в случае стержня, закрепленного в середине, собственные частоты пропорциональны последовательным *нечетным* числам  $1, 3, 5, \dots$

Здесь плоскость закрепления стержня — узел смещения, свободный конец — узел деформации (пучность смещения).

**4. Стержень, закрепленный на обоих концах.** Рассуждения п. 1 можно применить и к случаю, когда закрепляют часть стержня, лежащую слева от сечения  $x = 0$ , и часть стержня, лежащую справа от сечения  $x = n\lambda/2$  (рис. 198, *з, и*). Мы приходим к собственному колебанию стержня с закрепленными концами  $x = 0$ ,  $x = L$ , описываемому формулой (6.11), причем здесь

$$L = n \frac{\lambda_n}{2}, \quad k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad \omega_n = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad \nu_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (n = 1, 2, 3, 4, \dots). \quad (6.25)$$

Здесь собственные частоты пропорциональны числам натурального ряда как нечетным, так и четным. Оба конца колеблющейся части стержня — узлы смещения и пучности напряжения.

Все рассмотрение, при котором места закрепления стержня полагаются полностью неподвижными ( $\xi = 0$ ), является, конечно, идеализацией. Оно применимо только при условии, что устройство, используемое для закрепления концов, испытывает при напряжении  $\sigma = EkA$  смещения, очень малые по сравнению с амплитудой смещения  $A$  в пучности смещения.

5. Собственные частоты свободно подвешенного стержня. Речь идет о стержне, подвешенном, как показано на рис. 198, *к*. Здесь нити практически не влияют на упругие колебания стержня. В нем возможны синусоидальные колебания, при которых

$$L = n \frac{\lambda}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

как и в случае стержня, закрепленного на обоих концах, но с тем отличием, что здесь концы — узлы напряжения и пучности смещения.

Для собственных частот здесь, как и в случае стержня с закрепленными концами, имеют место формулы (6.25), причем здесь также  $n$  принимает все (не только нечетные) целочисленные значения. На рис. 198, *к* показан случай  $n = 2$ . Следует добавить, что здесь возможно в отличие от стержня с закрепленными концами еще одно собственное колебание, не охватываемое формулой (6.25), — то, при котором стержень колеблется параллельно оси  $x$ , не деформируясь, наподобие маятника.

6. Затухание. В действительности собственные колебания стержня или пластинки затухают из-за внутреннего трения, теплообмена в материале и ряда других явлений, происходящих в нем при колебаниях (см. § 10). Если стержень или пластинка колеблются не в вакууме, имеется и другая причина затухания, которая часто является наиболее существенной. Эта причина — излучение акустических волн в окружающую среду. Мы ее рассмотрим в § 5.

7. Резонанс. Аналогия между колеблющимся стержнем (пластинкой) и гармоническим осциллятором (см. п. 1) может быть продолжена. Если на стержень действует синусоидальная внешняя сила, стремящаяся попеременно его растянуть или сжать, в нем возникают вынужденные синусоидальные колебания. Их частота равна частоте внешней силы. При совпадении частоты внешней силы с одной из собственных частот стержня (пластинки) наступает резонанс. Если затухание мало, колебание при резонансе имеет вид синусоидальной стоячей волны с тем же расположением узлов и пучностей, что при соответствующем собственном колебании. Ее амплитуда пропорциональна амплитуде внешней силы и добротности стержня (пластинки) при соответствующем собственном колебании (см. § 5).

Особенно легко возбудить (с помощью радиофизических средств) вынужденные колебания в ферромагнитных стержнях и пьезоэлектрических пластинках. Этим широко пользуются в технике ультразвука.

8. «Магнитострикционные» колебания. В ферромагнитных стержнях имеет место явление магнитострикции: при внесении стержня в продольное магнитное поле  $H$  в нем возникают механические силы, изменяющие его длину. В одних материалах, например железе, поле вызывает удлинение (положительная магнитострикция), в других, например никеле, — укорочение (отрицательная магнитострикция). Величина сил пропорциональна в первом приближении  $H^2$ .

Если стержень является сердечником катушки, по которой течет синусоидальный ток, то

$$H = H_m \cos \omega t$$

и магнитострикционные силы пропорциональны

$$H_m^2 \cos^2 \omega t = \frac{H_m^2}{2} + \frac{H_m^2}{2} \cos 2\omega t.$$

Стержень совершает при этом вынужденные упругие продольные колебания частоты  $2\omega$  около средней удлиненной или укороченной кон-

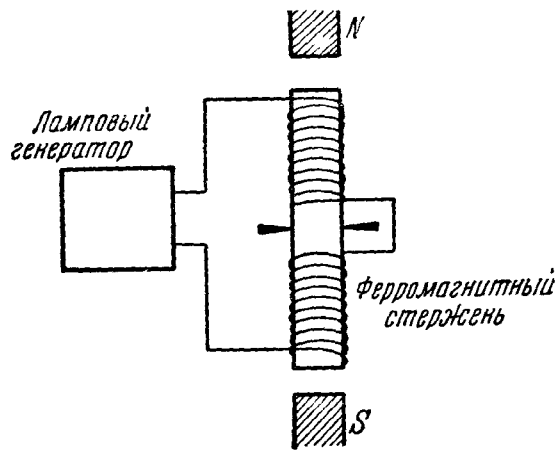


Рис. 199. Схема получения вынужденных упругих колебаний ферромагнитного стержня с помощью явления магнитострикции.

фигурации (смотря по знаку магнитострикции). Если поле имеет вид

$$H = H_0 + H_m \cos \omega t,$$

где  $H_0$  — постоянное поле, то магнитострикционные силы пропорциональны  $(H_0 + H_m \cos \omega t)^2$  или, если  $H_m \ll H_0$ ,

$$H_0^2 + 2H_0H_m \cos \omega t.$$

Стержень совершает при этом вынужденные колебания частоты  $\omega$  около средней удлиненной или укороченной конфигурации.

Если  $H_0 = 0$  при  $2\omega = \omega_n$  и если  $H_0 \gg H_m$  при  $\omega = \omega_n$  ( $\omega_n$  — любая из собственных частот стержня), имеет место резонанс. В стержне возникает стоячая волна частоты  $\omega_n$ . Ее амплитуда пропорциональна  $H_m^2$  (в первом случае) или  $H_0H_m$  (во втором случае) и добротности стержня при соответствующем собственном колебании.

На рис. 199 показана схема магнитострикционного преобразователя электромагнитных колебаний в упругие, основанная на только что изложенном принципе.

Явление магнитострикции позволяет также осуществить упругие автоколебания ферромагнитного стержня, например по схеме рис. 200.

Верхний предел частот, которые удается получить с помощью магнитострикционной акустической аппаратуры, — около 60 килогерц.

9. «Пьезоэлектрические» колебания. Если внести незаряженную пластинку, вырезанную надлежащим образом из кристалла кварца, сегнетовой соли или некоторых других диэлектриков, в электрическое поле  $E$ , параллельное оси  $x$  (рис. 201), возникают силы, пропорциональные  $E$  и стремящиеся растянуть или сжать пластину (смотря по знаку  $E$ ). Это

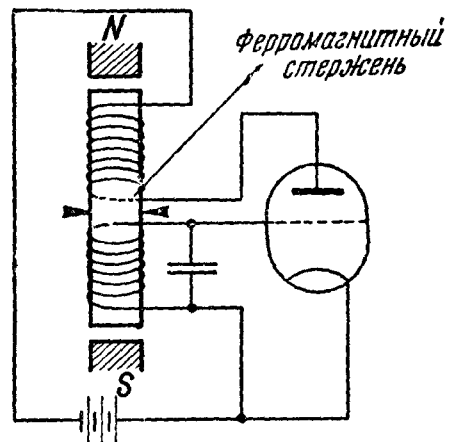


Рис. 200. Электромеханическая автоколебательная система. Здесь одновременно происходят электромагнитные колебания в контуре и упругие колебания ферромагнитного стержня. Связь между электромагнитными и механическими колебаниями осуществляется благодаря магнитострикции.

явление — частный случай *обратного пьезоэлектрического эффекта* (прямой пьезоэлектрический эффект заключается в данном случае в том, что при деформации пластинки в направлении  $x$  на ее гранях  $x = \pm L/2$

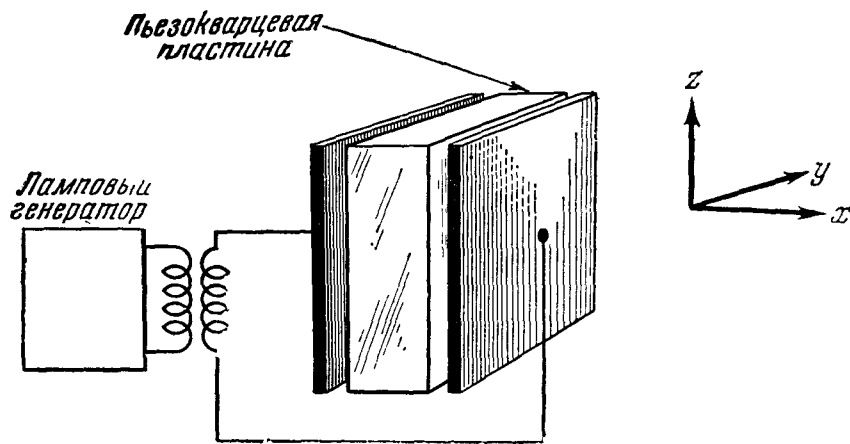


Рис. 201. Схема получения вынужденных упругих колебаний кварцевой пластинки посредством обратного пьезоэлектрического эффекта.

возникают разноименные электрические заряды; их знак меняется с изменением знака деформации). Если

$$E = E_m \cos \omega t$$

(электрическое поле создается, например, с помощью лампового генератора), в пластинке возникают вынужденные продольные упругие колебания частоты  $\omega$ . В частности, если  $\omega = \omega_n$  ( $\omega_n$  — любая из собственных частот пластинки), имеет место резонанс. При этом возникает упругая стоячая волна частоты  $\omega_n$ , амплитуда которой пропорциональна  $E_m$  и добротности пластинки при соответствующем собственном колебании.

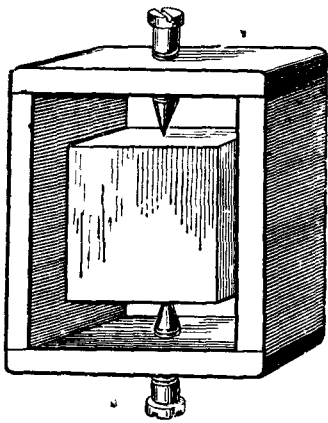


Рис. 202. Кварцевая пластинка, закрепленная так, что могут происходить колебания, аналогичные показанным на рис. 198, в, г.

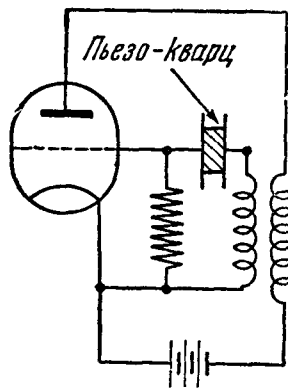


Рис. 203. Электромеханическая автоколебательная система. Здесь кварцевая пластинка совершает незатухающие колебания, частота которых равна одной из ее собственных частот.

Можно, например, возбудить в пьезокварцевой пластинке с двумя посеребренными параллельными гранями, закрепленной, как показано на рис. 202, интенсивные колебания типа, описанного в пп. 1, 2, подведя к этим граням напряжение от лампового генератора. Плавно повышая частоту генератора, можно последовательно получить резонанс на обертонах все более высокого номера.

На этом принципе основаны наиболее употребительные источники ультразвуковых волн частоты порядка  $10^5$  герц и выше (можно пойти, используя возбуждение на обертонах, до частот порядка  $10^8$  герц).

Можно также возбудить с помощью электронной лампы автоколебания пьезокварцевой пластинки. Одна из схем показана на рис. 203.

**10. Магнитострикционные и пьезоэлектрические приемники ультразвука.** Вынужденные колебания пьезокварцевой пластинки возникают и тогда, когда она помещена в жидкость, или газ, в котором давление



периодически меняется, т. е. происходит распространение звука (см. § 4 этой главы). Если частота акустической волны в газе или жидкости совпадает с одной из собственных частот пьезокварцевой пластинки, имеет место резонанс. При этом (прямой пьезоэлектрический эффект) между гранями возникает переменная разность потенциалов. Присоединяя пьезокварц (вместо антенны) ко входу радиоприемника, мы получаем чувствительный резонансный приемник ультразвука.

Аналогично этому легко осуществить электроакустический приемник, основанный на вынужденных колебаниях ферромагнитного стержня, возникающих при действии на его торец звукового давления. При этом (эффект, обратный по отношению к магнитострикции) в катушке, сердечником которой является стержень, возникает переменная э. д. с., которая может быть усилена обычными методами.

#### § 4. Упругие волны в газах и жидкостях

**1. Волновое уравнение.** Мы рассматриваем здесь газ или жидкость (так же как твердое тело в предыдущих параграфах) как сплошную непрерывную среду, отвлекаясь от его атомистической структуры. Под смещением  $\xi$  мы здесь понимаем (как и в § 1) общее смещение вещества, заполняющего объем, заключающий в себе очень много атомов, но малый по сравнению с длиной волны.

Будем считать, что рассматриваемый газ или жидкость находятся в очень длинной цилиндрической трубе, образующие которой параллельны оси  $x$ , и что смещение зависит только от одной координаты  $x$ . Мы можем применить к столбу газа или жидкости, заполняющему трубу, те же рассуждения, что и к стержню (§ 1, пп. 2, 3). Мы придем, таким образом, к уравнению

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = - \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (6.26)$$

где  $p = -\sigma$  есть давление в газе или жидкости. Здесь  $\rho_0$  — значение плотности в состоянии равновесия. Пусть ей соответствует давление  $p_0$ . Величины  $\rho_0$ ,  $p_0$  не зависят ни от  $x$ , ни от  $t$ .

Уравнение (6.26) применимо и в случае плоских волн в неограниченной жидкой или газообразной среде (можно мысленно выделить цилиндрический столб, параллельный направлению распространения и применить к нему те же рассуждения, что к столбу, заключенному в трубе).

Как известно из термодинамики,  $p$  есть функция плотности данной массы газа (или жидкости) и ее температуры\*). Температура в свою очередь изменяется при сжатии и разрежении. Теплопроводность газов и жидкостей очень мала, поэтому можно считать в первом приближении, что при распространении звука процесс сжатия и разрежения каждой части газа или жидкости происходит *адиабатически*, т. е. без заметного теплообмена с соседними частями. В термодинамике показывается, что в этом случае (если можно пренебречь внутренним трением и некоторыми другими явлениями, о которых будет идти речь в § 10) температура является однозначной функцией плотности\*\*), и следовательно, давление также

\*) При заданной деформации  $\sigma$  в твердом теле также зависит от температуры. Но в акустике твердых тел это обстоятельство не играет существенной роли.

\*\*) В газах и в жидкостях за некоторыми исключениями (например вода, при температуре ниже  $4^\circ \text{C}$ ) температура растет при сжатии и уменьшается при расширении.

есть однозначная функция плотности:

$$p = f(\rho). \quad (6.27)$$

Введем обозначения

$$p = p_0 + \Delta p, \quad \rho = \rho_0 + \Delta \rho, \quad (6.28)$$

где  $\Delta p$  и  $\Delta \rho$  — соответственно изменения давления и плотности при нарушении равновесия.

Подставляя первую формулу (6.28) в (6.26) и принимая во внимание, что при равновесии давление не зависит от  $x$ , т. е.

$$\frac{\partial p_0}{\partial x} = 0,$$

получаем:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = - \frac{\partial}{\partial x} (\Delta p). \quad (6.29)$$

Найдем теперь связь между  $\Delta p$  и деформацией  $\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x}$ . Мы сначала выразим  $\Delta p$  через  $\Delta \rho$  а затем  $\Delta \rho$  через  $\varepsilon$ :

а) Подставляя (6.28) в (6.27), имеем:

$$p_0 + \Delta p = f(\rho_0 + \Delta \rho),$$

или, разлагая  $f(\rho_0 + \Delta \rho)$  в ряд по степеням  $\Delta \rho$ ,

$$p_0 + \Delta p = f(\rho_0) + f'(\rho_0) \Delta \rho + \frac{1}{2} f''(\rho_0) (\Delta \rho)^2 + \dots$$

Так как  $p_0 = f(\rho_0)$ , то получаем:

$$\Delta p = f'(\rho_0) \Delta \rho + \frac{1}{2} f''(\rho_0) (\Delta \rho)^2 + \dots \quad (6.30)$$

Здесь мы сделаем существенное предположение: будем считать уплотнения и разрежения настолько малыми, что допустимо пренебречь в разложении (6.30) членами, пропорциональными  $(\Delta \rho)^2$ ,  $(\Delta \rho)^3$ , ..., и заменить (6.30) *линейным* соотношением

$$\Delta p = f'(\rho_0) \Delta \rho.$$

Тем самым мы ограничиваем себя исследованием волн *малой интенсивности*.

$f'(\rho_0)$  — постоянный при данных условиях опыта коэффициент, определяемый состоянием среды при равновесии.

б) Объем  $v_0$  в результате деформации превращается в объем

$$v = v_0 (1 + \varepsilon), \quad (6.31)$$

так как здесь поперечный размер (в отличие от твердого стержня) остается постоянным, а длина  $\Delta x_0$  превращается в  $\Delta x = \Delta x_0 (1 + \varepsilon)$ . Но произведение плотности на объем, равное массе рассматриваемой порции вещества, не меняется:

$$\rho v = \rho_0 v_0.$$

Подставляя (6.28) и (6.31), получаем:

$$(\rho_0 + \Delta \rho) (1 + \varepsilon) = \rho_0,$$

откуда

$$\varepsilon = - \frac{\Delta \rho}{\rho_0 + \Delta \rho} = - \frac{\Delta \rho}{\rho_0} \left( 1 + \frac{\Delta \rho}{\rho_0} \right)^{-1} = - \frac{\Delta \rho}{\rho_0} \left( 1 - \frac{\Delta \rho}{\rho_0} + \dots \right).$$

Пренебрегая и здесь высшими степенями малой величины  $\Delta\rho/\rho_0$ , получаем:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\rho}{\rho_0}, \quad \Delta\rho = -\rho_0\varepsilon.$$

Таким образом,

$$\Delta p = -\rho_0 f'(\rho_0)\varepsilon = -\rho_0 f'(\rho_0) \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (6.32)$$

Подставляя, наконец, (6.32) в (6.29), мы получаем волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad (6.33)$$

где

$$u = \sqrt{f'(\rho_0)}. \quad (6.34)$$

Отсюда заключаем, что рассматриваемые малые деформации распространяются в виде плоских недеформирующихся волн; скорость распространения (скорость звука) тем больше, чем сильнее в данной среде возрастает давление при адиабатическом возрастании плотности; она равна квадратному корню из производной давления по плотности, взятой при значении последней в отсутствие волны ( $\rho = \rho_0$ ).

**2. Случай идеального газа.** Идеальным газом называется газ, для которого справедливо уравнение состояния

$$pV = RT, \quad (6.35)$$

где  $p$  — давление,  $V$  — объем одного моля,  $R$  — универсальная газовая постоянная, равная  $8,3143 \cdot 10^7$  эрг/град,  $T$  — температура, измеренная по термодинамической шкале («абсолютная температура»), или

$$\frac{p}{\rho} = \frac{RT}{M}, \quad (6.35a)$$

где  $M$  — масса 1 моля,  $\rho = M/V$  — плотность.

Воздух, кислород, азот, водород и многие другие газы при комнатной температуре и давлении порядка атмосферного можно рассматривать с достаточным для акустики приближением как идеальные газы.

Как учит термодинамика, в случае идеального газа соотношение (6.27) имеет вид

$$p = p_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma, \quad (6.36)$$

где

$$\gamma = \frac{C_p + R}{C_v} = \frac{C_p}{C_v}$$

— постоянная величина ( $C_p$  и  $C_v$  — теплоемкости газа соответственно при постоянном давлении и постоянном объеме).

Следовательно, здесь

$$f'(\rho_0) = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}, \quad u = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} \quad (6.37)$$

(формула Лапласа).

Еще задолго до Лапласа вопросом о скорости звука в воздухе занимался Ньютон. Он считал, что

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0}. \quad (6.36a)$$

т. е. не учитывал изменения температуры воздуха при распространении в нем звуковой волны, вследствие чего получил для скорости звука соотношение

$$u = \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}}. \quad (6.37a)$$

Это соотношение можно получить из уравнения (6.34), подставляя в него (6.36а) вместо (6.36).

Для воздуха ( $\gamma = 1,4$ ) при комнатной температуре ( $20^\circ \text{C}$ ,  $T = 293^\circ$ ) формула Ньютона дает  $u = 290$  м/сек, формула Лапласа  $u = 340$  м/сек. Сравнивая эти значения с теми, которые дает опыт (гл. V, § 3), мы видим, что формула Лапласа, в отличие от формулы Ньютона, хорошо согласуется с опытом. Формула Лапласа хорошо подтверждается на опыте и для других газов (по крайней мере при не очень высоких частотах, ср. § 10).

Этим оправдывается предположение о том, что сжатие и разрежение газа в звуковой волне являются практически адиабатическими процессами.

**3. Модуль упругости и удельное акустическое сопротивление газа и жидкости.** Приближенную формулу (6.32) можно переписать на основании соотношения  $p = -\sigma$  в виде

$$\Delta\sigma = \rho f'(\rho) \varepsilon$$

(индекс у  $\rho_0$  мы теперь для краткости будем опускать).

Величину  $\rho f'(\rho)$  можно назвать по аналогии с (6.2) модулем упругости  $E$  рассматриваемого жидкого или газообразного вещества:

$$\Delta\sigma = E\varepsilon, \quad (6.38)$$

$$E = \rho f'(\rho). \quad (6.39)$$

Для идеального газа имеем на основании (6.34)

$$E = \gamma p. \quad (6.40)$$

Формула (6.38) отличается от (6.2) лишь заменой полного напряжения  $\sigma$  приращением напряжения  $\Delta\sigma$ . Из (6.26) и (6.38) волновое уравнение получается в виде

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2},$$

откуда, как и в § 1,

$$u = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Подставляя вместо  $E$  его значение (6.39) или (6.40), мы, конечно, снова получаем (6.34) и (6.37).

Определив с помощью формулы (6.40) для газов и жидкостей модуль упругости  $E$ , мы можем перенести на них все соотношения § 1; удельное акустическое сопротивление газа или жидкости будет равно

$$z = \sqrt{E\rho} = \rho \sqrt{f'(\rho)} = \rho u. \quad (6.41)$$

В частности, для идеального газа

$$z = \sqrt{\gamma p\rho} \quad (6.42)$$

и средняя плотность потока энергии в синусоидальной волне

$$\bar{q} = \frac{1}{2} \sqrt{\gamma p\rho} v_m^2 = \frac{1}{2} \frac{(\Delta p_m)^2}{V \gamma p\rho}, \quad (6.43)$$

где  $v_m$ ,  $(\Delta p)_m$  — соответственно амплитуды скорости и давления.

**4. Порядки некоторых акустических величин.** Для понимания дальнейших параграфов необходимо обратить внимание на отличие в порядке величины удельных акустических сопротивлений твердых, жидких и газообразных тел. Приведем таблицу, характеризующую акустические свойства некоторых типичных сред.

Вещество	$\rho,$ г·см <sup>-3</sup>	$u,$ м·сек <sup>-1</sup>	$\zeta = \rho u,$ г·см <sup>-2</sup> сек <sup>-1</sup>
Железо . . . . .	7,7	5170	$398 \cdot 10^4$
Кварц . . . . .	2,65	5710	$153 \cdot 10^4$
Вода . . . . .	1	1494	$149 \cdot 10^3$
Масло . . . . .	0,9	1450	$135 \cdot 10^3$
Воздух (0° С) . . .	$1,29 \cdot 10^{-3}$	331	42,9

Удельное акустическое сопротивление твердых тел на *один* порядок больше, чем у жидкостей, у жидкостей — на *три* порядка больше, чем у газов.

При частоте  $10^3$  герц порог слышимости нормального человеческого уха соответствует  $\bar{q} = 10^{-9}$  эрг сек<sup>-1</sup> см<sup>-2</sup>, болевой порог (громкость, при которой человеческое ухо начинает чувствовать боль)  $\bar{q} = 10^3$  эрг сек<sup>-1</sup> см<sup>-2</sup>.

Воспользовавшись значением  $\zeta$  воздуха из таблицы, получаем на основании формулы (6.28) (приближенно) в первом случае

$$(\Delta p)_m = 3 \cdot 10^{-5} \text{ дин/см}^2,$$

во втором —

$$(\Delta p)_m = 3 \cdot 10^2 \text{ дин/см}^2.$$

Не только в первом, но и во втором случае (с физиологической точки зрения: *очень громкий звук*)  $\Delta p$  очень мало по сравнению с атмосферным давлением  $p_0 = 1,013 \cdot 10^6$  дин/см<sup>2</sup> (760 мм ртутного столба), следовательно,  $\Delta p \ll p_0$ , и с физической точки зрения звук должен рассматриваться как упругая волна *очень малой интенсивности* (ср. § 11).

**5. Цилиндрические и сферические волны.** Подробное их рассмотрение выходит за рамки этой книги. Ограничимся следующим замечанием. Если известно, что

$$\Delta p = A(r) \cos(\omega t - kr)$$

или

$$\Delta p = A(R) \cos(\omega t - kR)$$

( $r, R$  имеют тот же смысл, что и в гл. V, § 2), закон сохранения энергии позволяет найти вид функций  $A(r), A(R)$ . В случае сферической волны среднее за период потока вектора Умова через сферу радиуса  $r$ , в центре которой находится источник волн, равно на основании (6.43)

$$\bar{q} \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{2} \frac{A(r)^2}{V \gamma_{pp}} \cdot 4\pi r^2$$

( $4\pi r^2$  — поверхность сферы). Эта величина согласно закону сохранения энергии (если нет поглощения энергии в среде, ср. § 10) должна быть

одинаковой для любого  $r$  и, следовательно,

$$A(r)^2 = \frac{A_0^2}{r^2}, \quad A(r) = \frac{A_0}{r},$$

где  $A_0$  — постоянная.

Таким же способом легко получить для цилиндрической волны

$$A(R) = \frac{A_0}{\sqrt{R}}.$$

## § 5. Излучение

1. Излучение пластинки больших размеров, колеблющейся в жидкости или газе. Пусть колеблющаяся продольно (по толщине) твердая пластинка (например, из пьезокварца) окружена жидкостью или газом (рис. 204). Для краткости вместо «жидкость или газ» мы будем говорить «среда».

Примем за плоскость  $x=0$  правую грань пластинки. Пусть

$\xi_1(x, t)$  при  $(-L) \leq x \leq 0$ ,

— смещение частиц пластинки,

$\xi_2(x, t)$  при  $x \geq 0$ ,

— смещение частиц среды. Остальные величины мы также будем отмечать индексом 1, если они относятся к пластинке, и 2, если они относятся к среде.

Частицы среды колеблются, не отрываясь от пластинки и не прони-

Рис. 204. Плоские акустические волны, излучаемые пьезокварцевой пластинкой, колеблющейся по толщине. Линейные размеры пластинки велики по сравнению с длиной волны в окружающей среде.

кая в нее. Это физическое утверждение может быть записано в виде уравнения

$$\xi_1(0, t) = \xi_2(0, t). \quad (6.44)$$

Пусть пластинка колеблется синусоидально:

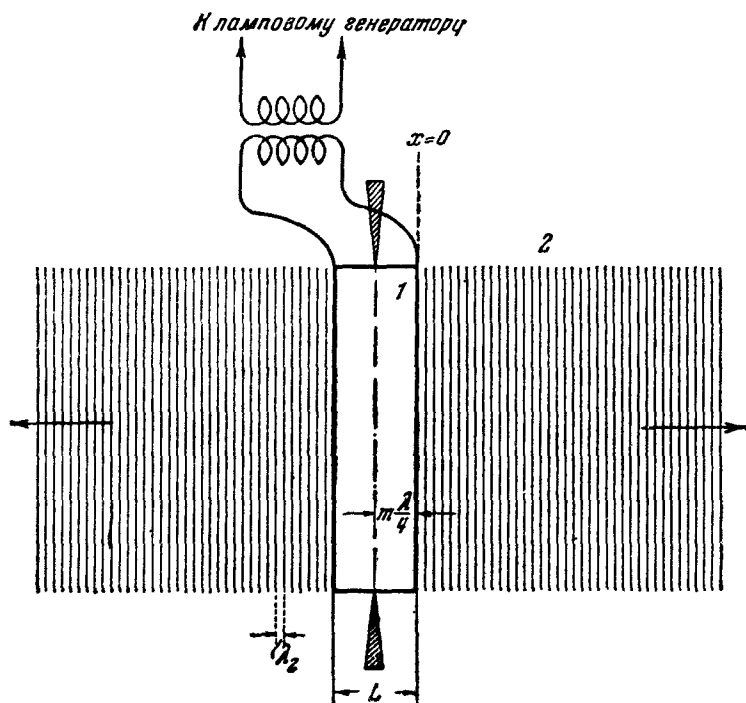
$$\xi_1(0, t) = A \cos \omega t. \quad (6.45)$$

Тогда на основании (6.44) в той части плоскости  $x=0$ , которая примыкает к пластинке,

$$\xi_2(0, t) = A \cos \omega t.$$

При этом в среде справа от пластинки распространяется плоская волна

$$\xi_2(x, t) = A \cos(\omega t - k_2 x), \quad k_2 = \frac{\omega}{u_2}. \quad (6.46)$$



Эта волна бежит вправо. Аналогичная волна распространяется от левой грани пластинки влево.

Это — акустические волны, излучаемые пластинкой. При этом в среде существует поток энергии, идущий из пластинки, т. е. пластинка *излучает* энергию в окружающую среду.

Среднее значение плотности потока энергии в среде за период

$$\bar{q}_2 = \frac{1}{2} \beta_2 \omega^2 A^2. \quad (6.47)$$

Из этой формулы и таблицы § 4 видно, что при той же частоте и амплитуде смещения пластинка, погруженная в воду, излучает приблизительно в 3000 раз больше энергии, чем пластинка, находящаяся в воздухе.

Наибольшая достижимая в воде с помощью пьезокварцевого излучателя плотность потока энергии — порядка  $10 \text{ вт/см}^2$ , что соответствует при частоте порядка 300 килогерц, как легко подсчитать на основании данных §§ 3, 4, амплитуде смещения всего лишь порядка  $10^{-5} \text{ см}$  (т. е.  $\frac{1}{5}$  длины волны зеленого света), но громадным амплитудам ускорения порядка  $40\,000 g$  ( $g$  — ускорение силы тяжести).

Волна имеет вид, показанный на рис. 204, и развитая здесь теория справедлива лишь, если линейные размеры пластинки велики по сравнению с длиной волны в среде и если  $x$  не слишком велико (подробнее см. гл. VIII, § 7).

**2. Затухание вследствие излучения.** Предположим, что колебания пластинки не поддерживаются извне. В этом случае излучение приводит к уменьшению энергии, запасенной в пластинке, т. е. к затуханию ее колебаний.

Проведем количественный расчет затухания колебаний пластинки вследствие излучения.

Согласно (6.20а) полная энергия пластинки

$$W = \frac{m\pi}{4} \beta_1 \omega A^2 S, \quad (6.48)$$

где  $2m$  — число четвертей волны, укладывающихся в толщине пластинки  $L$ ,  $S$  — площадь основания пластинки. На основании (6.29) убыль энергии пластинки за период

$$-\Delta W = 2\pi\beta_2 \omega A^2 S \quad (6.49)$$

(коэффициент 2 введен вследствие того, что излучают две грани:  $x = 0$  и  $x = -L$ ).

Сравнивая (6.48) и (6.49), имеем:

$$-\Delta W = \frac{8}{m} \frac{\beta_2}{\beta_1} W$$

или

$$\frac{W(t_0) - W(t_0 + T)}{W(t_0)} = \frac{8}{m} \frac{\beta_2}{\beta_1}, \quad (6.50)$$

где  $W(t_0)$  — значение энергии при некотором  $t = t_0$ ,  $W(t_0 + T)$  — ее значение при  $t = t_0 + T$ . Формула (6.50) имеет тот же вид, что выведенная в гл. III, § 3 формула для убыли энергии гармонического осциллятора. Значит, и здесь колебание затухает по экспоненциальному закону и к рассматриваемому собственному колебанию пластины применимо введенное в гл. III, § 3 для гармонического осциллятора понятие логарифмического декремента и добротности:

$$W(t_0 + T) = W(t_0) e^{-2d}, \quad Q = \frac{\pi}{d},$$

где  $d$  — логарифмический декремент,  $Q$  — добротность (не смешивать с потоком энергии!).

Сравнивая (6.50) с данным в гл. III, § 3 выражением убыли энергии за период через добротность, мы получаем для добротности  $Q$  и логарифмического декремента  $d = \frac{\pi}{Q}$  пластинки при  $m$ -м собственном колебании приближенно

$$Q = \frac{m\pi}{4} \frac{\beta_1}{\beta_2}, \quad d = \frac{4}{m} \frac{\beta_2}{\beta_1}. \quad (6.51)$$

Получилось простое соотношение, показывающее, что добротность (в отсутствие внутренних потерь) пропорциональна отношению удельных акустических сопротивлений пластинки и среды.

Например, для пьезокварцевой пластинки имеем при  $m = 1$  (основное колебание), на основании таблицы § 4,  $Q = 8$ , если средой является вода, и  $Q = 2,8 \cdot 10^4$  (очень большая добротность!), если средой является воздух. Опыт хорошо подтверждает эти подсчеты. Добротность кварцевой пластинки, колеблющейся *в вакууме* и хорошо закрепленной в узле смещения, еще гораздо больше — порядка  $10^5 - 10^6$  \*). Это позволяет пренебрегать внутренними потерями при расчете добротности пластинки, находящейся в воздухе при нормальном давлении, а тем более в жидкости.

**3. Тормозящая сила, действующая на излучающую пластинку.** Если пластинка колеблется не в вакууме, на ее границе  $\Delta p \neq 0$ . Действительно, в окружающей среде имеем на основании (6.10г)

$$\Delta p_2 = -\beta_2 \omega A \sin(\omega t - k_2 x). \quad (6.52)$$

На основании третьего закона Ньютона, на границе

$$\Delta p_1(0, t) = \Delta p_2(0, t) \quad (6.53)$$

(давление пластинки на окружающую среду равно давлению со стороны последней на пластинку). Подставляя (6.52) в (6.53) и сравнивая с (6.45), получаем:

$$\Delta p_1(0, t) = -\beta_2 \omega A \sin \omega t = \beta_2 v_1(0, t). \quad (6.54)$$

Таково дополнительное давление, действующее на пластинку со стороны окружающей среды, если пластинка колеблется синусоидально. Это давление — *в фазе со скоростью* излучающей грани пластинки. Фазовое соотношение — такое же, как если бы на эту грань действовала сила трения, пропорциональная скорости.

Давление  $\Delta p_1(0, t)$  называется реакцией излучения. Его аналогия с трением позволяет понять с точки зрения сил затухание колебаний пластинки, помещенной в среду, которое рассматривалось в п. 2 с энергетической точки зрения.

Разумеется, наличие реакции излучения оказывает влияние и на частоту собственного колебания пластинки: плоскость  $x = 0$  уже не является узлом напряжения.

Если  $\beta_2 \ll \beta_1$  (пластинка в газе), изменение частоты вследствие реакции излучения очень мало.

\*) Декремент затухания пьезокварцевой пластинки, обусловленный внутренними потерями, был впервые измерен С. Э. Хайкиным.



4. Излучение очень малой пластинки. Весьма важно знать (см. гл. VIII, § 7), как излучает пластинка, линейные размеры которой *малы* по сравнению с длиной волны в среде, колеблющаяся синусоидально в отверстии неподвижного щита (рис. 205). Пусть смещение пластинки  $\xi = A_0 \sin \omega t$ . Теория, основанная на рассмотрении трехмерного волнового уравнения (обобщение одномерного волнового уравнения, полученного в § 4), показывает, что такой источник создает в среде акустическую сферическую волну, в которой давление на расстоянии  $r$  от источника меняется согласно уравнению

$$\Delta p = -\rho \frac{\omega^2 S A_0}{2\pi r} \sin(\omega t - kr), \quad (6.55)$$

где  $S$  — площадь пластинки,  $\rho$  — плотность среды.

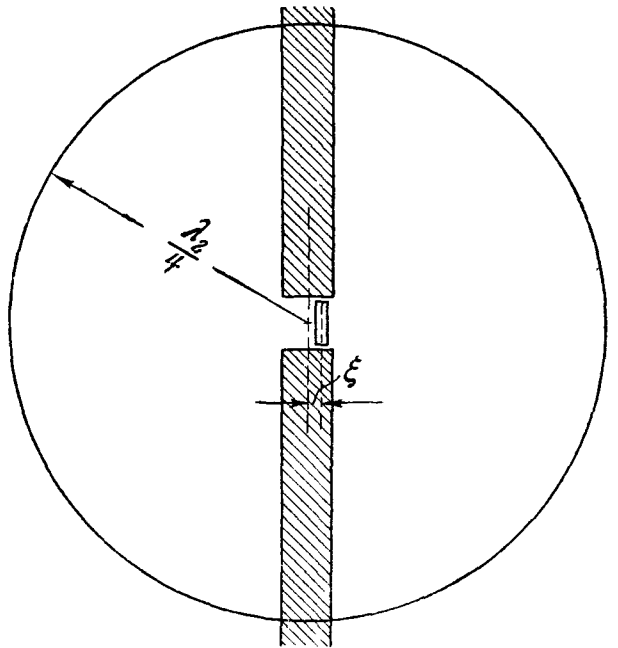


Рис. 205. Излучение пластинки, линейные размеры которой малы по сравнению с длиной волны в окружающей среде. Пластинка колеблется (наподобие поршня) в отверстии твердого щита.

## § 6. Поведение продольной волны на границе двух сред

1. Постановка вопроса. Пусть плоскость  $x = 0$  (рис. 206) является границей двух сред, обладающих различными упругими свойствами: например, жидкости и металла или жидкости и газа (в последнем случае эту плоскость надо себе представлять горизонтальной). Пусть слева приходит упругая волна

$$\xi_1 = A_1 \cos(\omega t - k_1 x), \quad (6.56)$$

где

$$k_1 = \frac{\omega}{u_1} \quad (6.56a)$$

( $u_1$  — скорость распространения в среде, находящейся *слева* от плоскости раздела; величины, относящиеся к этой среде, мы будем отмечать индексом 1, величины, относящиеся к среде, находящейся *справа* от плоскости раздела, — индексом 2). Что происходит на границе?

Мы получим ответ на этот вопрос, исходя из физических условий, существующих на границе. Это, во-первых, *сплошность и непроницаемость вещества*, выражаемая уравнением

$$\xi_1(0, t) = \xi_2(0, t), \quad (6.57)$$

и, во-вторых, *равенство действия и противодействия*, выражаемое уравнением

$$\sigma_1(0, t) = \sigma_2(0, t) \quad (6.58)$$

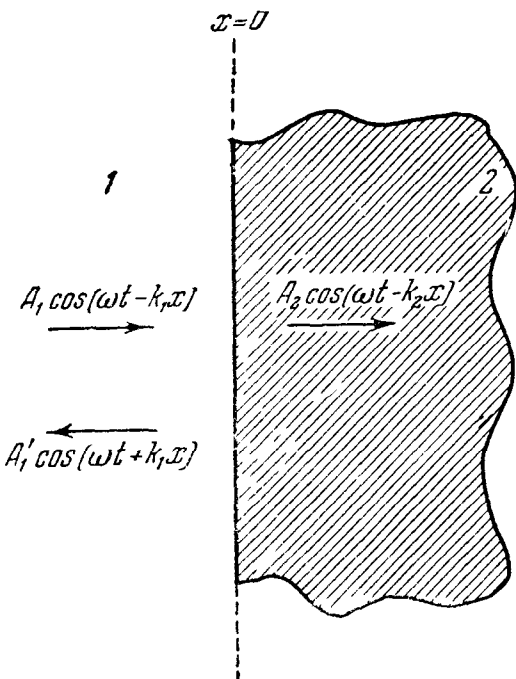


Рис. 206. Граница двух сред. Направления распространения падающей, отраженной и проходящей волн.

С аналогичными условиями мы уже встретились в § 5.

2. **Отраженная и проходящая волны.** Предположим, что волна проникает во вторую среду:

$$\xi_2 = A_2 \cos(\omega t - k_2 x), \quad (6.59)$$

где

$$k_2 = \frac{\omega}{u_2}, \quad (6.59a)$$

но что в первой среде все происходит так, как будто нет второй среды, т. е. остается справедливым (6.56). Имеем, подставляя (6.56), (6.59) в (6.57), (6.58),

$$A_1 = A_2, \quad A_1 = \gamma A_2,$$

где

$$\gamma = \frac{\delta_2}{\delta_1}. \quad (6.60)$$

Эти уравнения несовместны, т. е. противоречат одно другому, за исключением случая

$$\gamma = 1,$$

т. е. на основании (6.9)

$$E_1 \rho_1 = E_2 \rho_2.$$

Это означает следующее. Предположение о том, что при наличии второй среды волна в первой среде описывается формулой (6.56), вообще говоря, неверно. Оно справедливо лишь, если обе среды имеют одинаковое удельное акустическое сопротивление. При этом, разумеется, среды могут характеризоваться различными скоростями распространения звука ( $E_1/\rho_1 \neq E_2/\rho_2$ ).

Мы сможем удовлетворить при  $\gamma \neq 1$  обоим условиям (6.57), (6.58), если примем (как подсказывает опыт), что в первой среде к первоначальной (*падающей*) волне добавляется при наличии второй среды *отраженная* волна

$$A'_1 \cos(\omega t + k_1 x)$$

и что, следовательно, при наличии второй среды

$$\xi_1 = A_1 \cos(\omega t - k_1 x) + A'_1 \cos(\omega t + k_1 x). \quad (6.61)$$

Подставляя (6.59), (6.61) в (6.57), (6.58), получаем по сокращении на общий множитель  $\cos \omega t$  уравнения

$$\left. \begin{aligned} A_1 + A'_1 &= A_2, \\ A_1 - A'_1 &= \gamma A_2. \end{aligned} \right\} \quad (6.62)$$

Уравнения (6.62), где неизвестными являются  $A'_1$ ,  $A_2$ , всегда совместны.

При заданной амплитуде падающей волны  $A_1$  уравнения (6.62) однозначно определяют амплитуды отраженной и проходящей волн:

$$A'_1 = \frac{1-\gamma}{1+\gamma} A_1, \quad A_2 = \frac{2}{1+\gamma} A_1. \quad (6.63)$$

Заметим, что на основании соотношений (6.56a), (6.59a)

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{u_1}{u_2}.$$

Длины волн в обеих средах различны\*). Длина волны больше в той среде, где больше скорость распространения. Отношение длин волн равно отношению скоростей распространения.

3. Энергетические соотношения. Введем обозначения

$$R = \frac{\bar{q}'_1}{\bar{q}_1}, \quad T = \frac{\bar{q}_2}{\bar{q}_1}, \quad (6.64)$$

где  $\bar{q}_1$ ,  $\bar{q}'_1$ ,  $\bar{q}_2$  — средние значения плотностей потоков энергии  $q_1$ ,  $q'_1$ ,  $q_2$  за период в падающей, отраженной и проходящей волнах.  $R$ ,  $T$  мы будем

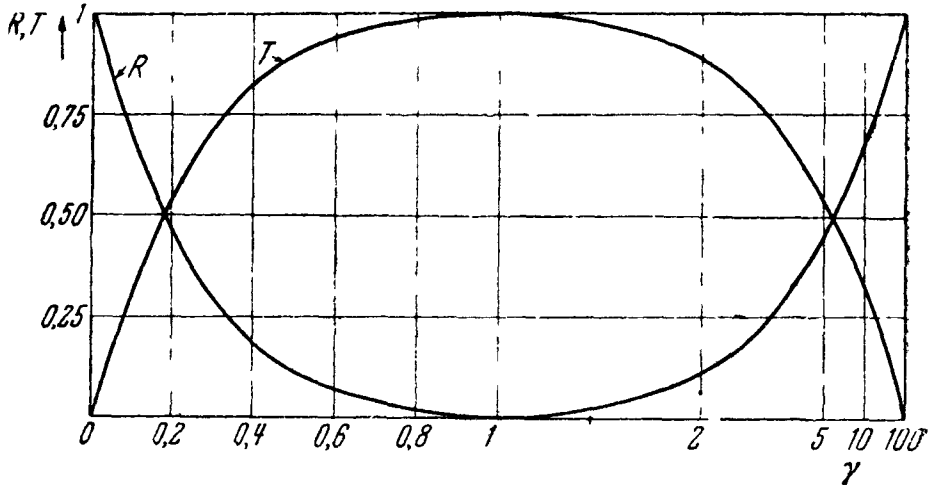


Рис. 207. Зависимость коэффициента отражения и коэффициента проникновения от отношения удельных акустических сопротивлений соприкасающихся сред. По оси абсцисс отложены значения  $\gamma$  от 0 до 1, затем значения  $1/\gamma$  от 1 до 0. Такой двойной масштаб позволяет изобразить на конечном отрезке все значения  $\gamma$  в интервале от 0 до  $\infty$  и подчеркивает, что  $R(1/\gamma) = R(\gamma)$  и  $T(1/\gamma) = T(\gamma)$ .

называть соответственно *коэффициентом отражения* и *коэффициентом проникновения*. На основании (6.63), (6.64), (6.17) легко получить формулы

$$R = \left( \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} \right)^2, \quad T = \frac{4\gamma}{(1 + \gamma)^2}, \quad (6.65)$$

причем, как и следовало ожидать,

$$R + T = 1,$$

что является следствием закона сохранения энергии, выражаемого в данном случае равенством

$$\bar{q}'_1 + \bar{q}_2 = \bar{q}_1.$$

На рис. 207 показана зависимость  $R$  и  $T$  от  $\gamma$ .

При  $\gamma = 0$  и  $\gamma = \infty$  имеем  $R = 1$ ,  $T = 0$ : вся энергия возвращается в первую среду. При  $\gamma = 1$  имеем  $R = 0$ ,  $T = 1$ : вся энергия проходит во вторую среду (случай отсутствия отражения, уже отмеченный в п. 2).

Заметим, что формулы (6.65) не меняются при замене  $\gamma$  на  $1/\gamma$ . Это значит, что коэффициенты отражения и прохождения не зависят от того, с какой стороны границы приходит падающая волна.

4. Синфазное и антифазное отражение. Как показывают формулы (6.63),  $A_2$  всегда имеет тот же знак, что и  $A_1$ , но  $A'_1$  и  $A_2$  имеют одинаково-

\*) Мы с самого начала считаем, что частота всех трех волн одинакова. Это трудно обосновать: уравнения (6.57), (6.58) могут выполняться тождественно (при любом  $t$ ), лишь если  $\xi_2$  — синусоидальные колебания той же частоты, что  $\xi_1$ .

вые знаки при  $\gamma < 1$  и различные знаки при  $\gamma > 1$ . Это можно выразить так: в плоскости раздела  $x = 0$  смещения в падающей и проходящей волнах синфазны, смещения в падающей и отраженной волнах синфазны, если  $\gamma < 1$ , и антифазны, если  $\gamma > 1$ . Первый случай мы будем называть синфазным, второй — антифазным отражением.  $A'_1/A_1$  меняет знак при замене  $\gamma$  на  $1/\gamma$ : если отражение в первую среду от второй синфазно, то отражение во вторую среду от первой антифазно, и наоборот. В первом случае, как нетрудно видеть на основании (6.10) деформация (и напряжение) на границе раздела в падающей и отраженной волнах антифазна, во втором — синфазна.

Если  $E_1 = E_2$ , первый случай имеет место при отражении от *менее плотной* среды, второй — от *более плотной*; если  $\rho_1 = \rho_2$ , первый случай имеет место при отражении от *более жесткой* среды, второй — от *менее жесткой*.

**5. Предельные случаи.** Можно считать, что имеет место случай  $\gamma = 0$ , если первая среда (та, в которой распространяется падающая волна) гораздо плотнее и (или) гораздо жестче второй (например, когда волна падает на границу металл — воздух со стороны металла). Здесь  $A'_1 = A_1$ , в первой среде возникают стоячие волны с пучностью смещения (узлом напряжения) на границе.

Можно считать, что имеет место случай  $\gamma = \infty$ , если вторая среда гораздо плотнее и (или) гораздо жестче первой, например, когда волна, распространяющаяся по воздуху, попадает на границу с жидкостью или металлом. Здесь  $A'_1 = -A_1$ , в первой среде возникает стоячая волна с узлом смещения (пучностью давления) на границе, во второй среде  $A_2 = 0$ .

Согласно (6.63) при  $\gamma = 0$   $A_2 = 2A_1$ ; амплитуда смещения во второй среде вдвое больше, чем в первой. Не противоречит ли это тому, что здесь  $T = 0$ ,  $q_2 = 0$ ?

Для того чтобы убедиться в отсутствии противоречия, обратимся к формуле (6.7). При  $z \rightarrow 0$  имеем  $\bar{q} \rightarrow 0$  в том случае, когда  $(\omega A)^2$  отлично от нуля.

**6. Гидролокация.** Отражение упругих волн от границы двух сред лежит в основе гидролокации — важнейшего технического применения ультразвука. Под гидролокацией понимают определение местоположения тел, находящихся в воде, с помощью ультразвука. Гидролокация была изобретена во время первой мировой войны выдающимся французским физиком П. Ланжевенном — прогрессивным ученым, другом Советского Союза. Идея гидролокации весьма проста. Ее поясняет рис. 208. Источник ультразвука (магнитострикционный, пьезоэлектрический), вделанный в дно корабля, излучает импульсно-модулированные ультразвуковые волны. Волны излучаются в виде остро-направленного пучка (см. гл. VIII, § 6). Приемник (также магнитострикционный или пьезокварцевый) улавливает волны, отражаемые или рассеиваемые той или иной поверхностью раздела, на которую попадает ультразвуковой пучок. Это может быть, например, поверхность погруженной подводной лодки. На границе вода — сталь получается сильное отражение: здесь  $\gamma = 27$ ,  $R = 0,86$ . Устройство, аналогичное в принципе применяемому в радиолокации (гл. VII, § 6), позволяет измерить время, в течение которого ультразвуковой импульс пробегает расстояние от источника до отражающей поверхности и обратно. Зная скорость ультразвука, легко отсюда определить расстояние до этой поверхности. Строго говоря, здесь под скоростью ультразвука нужно понимать *групповую* скорость (см. гл. V, § 9). Однако в воде при частотах, употребляемых в гидролокации, она практически совпадает с фазовой (нет заметной дисперсии).

Из § 10 станет ясно, почему ультразвуковая локация применяется только в воде (а не в атмосфере). Для оценки значения гидролокации важно отметить, что радиолокация в морской воде неосуществима (см. гл. VII, § 8).

В последние годы были опубликованы работы, в которых показано, что летучие мыши, летая в темноте, избегают столкновений с препятствиями благодаря тому, что испускают короткие ультразвуковые импульсы и чувствуют импульсы, отраженные от препятствий.

**7. Ультразвуковая дефектоскопия.** Ультразвуковая дефектоскопия, созданная С. Я. Соколовым, также является важным техническим применением явлений, о которых шла речь выше.

Идею ультразвуковой дефектоскопии легко себе уяснить из рис. 209. В бак с маслом погружены пьезокварцевый излучатель ультразвука, пьезокварцевый приемник ультразвука («щуп») и испытуемое металлическое изделие. Если на пути ультразвука в металле нет трещин, интенсивность волны, достигающей щупа, сравнительно велика и присоединенный к нему через усилитель электрический индикатор дает значительное

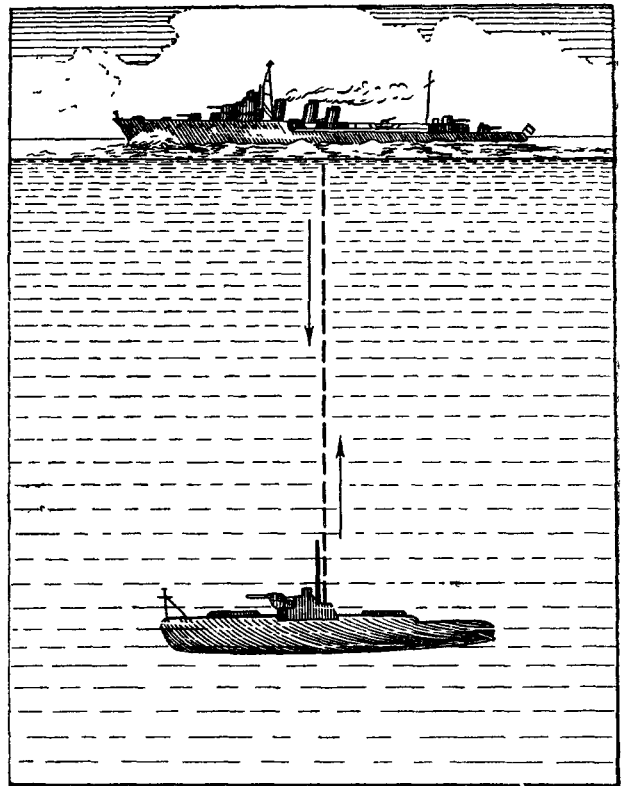


Рис. 208. Принцип гидролокации.

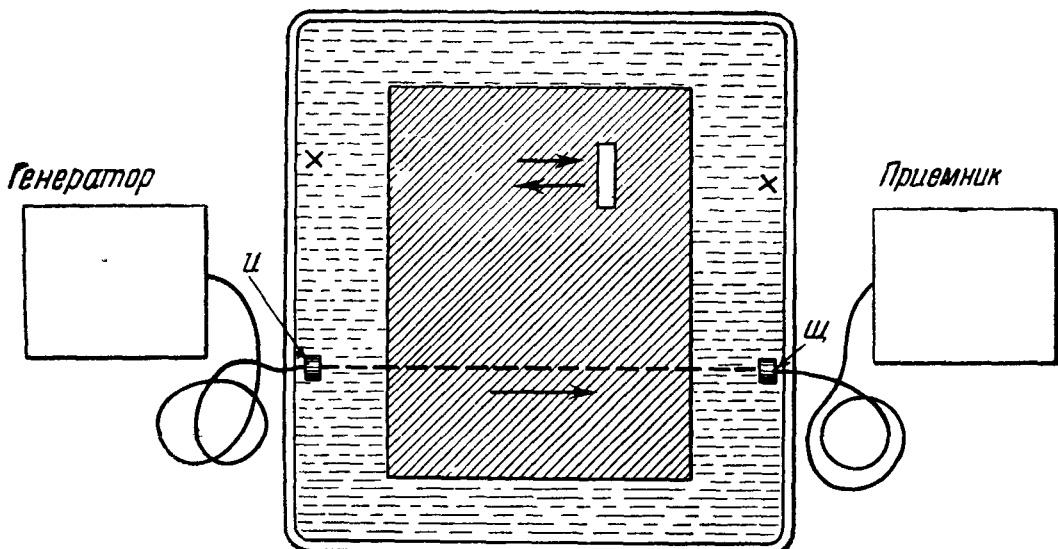


Рис. 209. Ультразвуковая дефектоскопия. Излучатель *И* и щуп *Щ* перемещаются вдоль бортов бака. Когда они будут находиться в положениях, отмеченных крестиком, индикатор будет давать нулевое показание.

отклонение. Но если на своем пути ультразвук в металле встречает трещину, происходит почти полное отражение (практически  $\gamma = 0$ ,  $R = 1$ ) и показание индикатора падает до нуля.

В качестве промежуточной среды применяется масло (а не воздух) для того, чтобы 1) получить от излучателя большой поток энергии

(см. § 5); 2) получить не исчезающе малый коэффициент проникновения ультразвука в металл и из металла снова в промежуточную среду.

На границе железо — масло имеем на основании таблицы § 4  $\gamma = 0,034$ . При этом  $T = 0,14$ .

## § 7. Колебания газовых столбов

1. Собственные колебания и резонанс воздуха в трубе, имеющей закрытый и открытый конец. Верхняя часть открытой трубы (рис. 210)

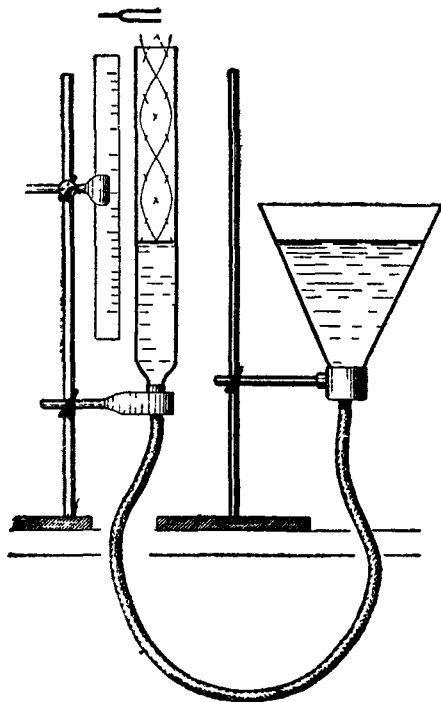


Рис. 210. Резонанс столба воздуха, находящегося в трубе, возникает тогда, когда уровень воды (он регулируется поднятием воронки) находится против меток, нанесенных на линейку. Расстояние между метками равно  $\lambda/2$ , откуда, зная частоту камертона, можно найти  $u$ .

заполнена воздухом, нижняя — водой. Если сверху в трубу проникает акустическая волна, на границе с водой происходит отражение. На основании § 6 можно считать, что в воздухе образуется стоячая волна с узлом смещения (и скорости) на границе воздух — вода (поток энергии из воздуха в воду можно считать равным нулю). Пусть отверстие трубы находится на уровне одного из узлов давления стоячей волны, образовавшейся вследствие отражения, т. е. длина столба воздуха  $L$  равна нечетному кратному  $\lambda/4$ , где  $\lambda/4$  — длина волны в воздухе. Тогда поток энергии через отверстие трубы также равен нулю. Между колеблющимся столбом воздуха в трубе и окружающей средой нет обмена энергией. Стоячая волна в столбе воздуха сохранится и в том случае, если прекратится действие источника первоначальной волны: рассматриваемая стоячая волна является *собственным колебанием* столба воздуха, заполняющего верхнюю часть трубы.

Итак, собственное колебание столба воздуха имеет вид стоячей волны. Между ее длиной волны  $\lambda$  и длиной столба воздуха  $L$  существует соотношение

$$L = n \frac{\lambda}{4} \quad (n = 1, 3, 5, \dots),$$

откуда для частоты  $n$ -го собственного колебания ( $n$ -го обертона) получаем:

$$\omega_n = \frac{n\pi}{2L} \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}, \quad \nu_n = \frac{n}{4L} \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} \quad (n = 1, 3, 5, \dots). \quad (6.66)$$

Частоты пропорциональны последовательным *нечетным* числам.

Проведенное рассмотрение было основано на идеализациях, аналогичных тем, которые были сделаны в § 3 при рассмотрении собственных колебаний стержней. В действительности собственные колебания столба воздуха постепенно затухают. Затухание (как и в случае собственных колебаний стержня) вызывается не только явлениями, происходящими в столбе воздуха (внутреннее трение, теплообмен), но также излучением звуковых волн из отверстия трубы в окружающий воздух. Как и колеблющийся стержень, столб воздуха в трубе испытывает действие реакции излучения. Она не только является одной из причин затухания собственных колебаний столба воздуха, но и вызывает изменение собственной частоты.

Задача о собственных колебаниях воздуха в трубе с учетом излучения весьма сложна. Строгое ее решение было впервые дано в 1948 г. советским физиком Л. А. Вайнштейном.

Приближенно влияние излучения из открытого конца трубы на длину стоячей волны при собственных колебаниях сводится к следующему.

Стоячие волны таковы, как если бы была верна теория, не учитывающая излучения, но длина трубы была увеличена у открытого конца на  $0,8R$ , где  $R$  — радиус трубы; иначе говоря, между отверстием трубы и ближайшим узлом смещения укладывается отрезок, приблизительно равный  $\lambda/4 - 0,8R$  (это показано на рис. 210), и следовательно,

$$L = n \frac{\lambda}{4} - 0,8R \quad (n = 1, 3, 5, \dots). \quad (6.67)$$

Отсюда легко получить формулы для  $\omega_n$ ,  $\nu_n$ , приближенно учитывающие реакцию излучения. Заметим, что вследствие поправки на излучение отношения частот собственных колебаний *не* целочисленны. Легко получить на основании сказанного приближенную формулу для потока энергии из отверстия трубы, а затем (по методу § 5) приближенное выражение для декремента затухания (или добротности) газового столба в трубе.

Под действием внешней синусоидальной силы в столбе воздуха возникают вынужденные колебания; их интенсивность имеет максимум (резонанс), если частота внешней силы равна \*) одной из собственных частот столба воздуха, т. е. такова, что между соответствующей ей длиной волны  $\lambda$  в воздухе и длиной столба  $L$  выполняется соотношение (6.49).

Это легко показать на опыте. Заставим звучать камертон около отверстия трубы (рис. 210) и будем медленно изменять уровень воды. Мы услышим ряд максимумов интенсивности звука, излучаемого трубой. Эти максимумы соответствуют уровням воды, при которых удовлетворяется условие (6.67).

Все сказанное применимо к трубе, закрытой на одном конце «пробкой» из твердого материала, а также к резонаторному ящику, применяемому для усиления излучения камертона. Длина этого ящика подобрана так, чтобы собственная частота основного собственного колебания находящегося в нем воздуха совпадала с частотой колебаний камертона. При этом длина ящика немного меньше четверти длины волны  $\lambda$  в воздухе (отличие между длиной ящика, при которой имеет место резонанс, и  $\lambda/4$  вызвано реакцией излучения).

2. Другие условия на границах столба. Собственные колебания газового столба в трубе, оба конца которой закрыты «крышками» из твердого материала (его удельное акустическое сопротивление очень велико по сравнению с удельным акустическим сопротивлением газа), представляют собой стоячие волны, для которых оба конца газового столба являются узлами смещения (пучностями давления). Здесь

$$L = n \frac{\lambda}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

где  $\lambda$  — длина волны в газе, откуда

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}, \quad \nu_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (6.68)$$

В случае узкой трубы, оба конца которой открыты, собственные колебания представляют собой в первом приближении стоячие волны, для которых концы являются узлами давления (пучностями смещения).

\*) Мы отвлекаемся от тонкостей, аналогичных разобранным в гл. III, § 3 (максимум интенсивности не точно при  $\omega = \omega_0$ ).

Здесь также

$$L = n \frac{\lambda}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

откуда снова приходим к формулам (6 68). Учитывая поправки из-за излучения из обоих концов трубы, имеем (приближенно):

$$L = n \frac{\lambda}{2} - 1,6R \quad (6 69)$$

(если труба — круглого сечения), откуда легко получить исправленные формулы для частот собственных колебаний.

**3. Автоколебания газовых столбов (органные трубы).** Механизм возбуждения автоколебаний столба воздуха в органной трубе (рис. 211)

гораздо сложнее, чем явления, происходящие в часах или ламповых генераторах, и с трудом поддается теоретическому анализу. В общих чертах он сводится к следующему.

На рис. 211, а показан разрез органной трубы. Рассмотрим сначала устройство (рис. 211, б), отличающееся от органной трубы отсутствием верхней части (собственно трубы). При равномерном дутье в мундштук М истечение воздуха из щели Ш представляет собой сложное явление: в щели происходит периодическое образование вихрей, что схематически показано на рисунке; при этом слышен «щелевой тон» — свист частоты, соответствующей частоте этого периодического процесса. Уже здесь мы имеем дело со своеобразным автоколебательным явлением. Свист, возникающий при рассекании тонким стержнем (прутом, проволокой, веревкой) потока воздуха (ср. гл. IV,

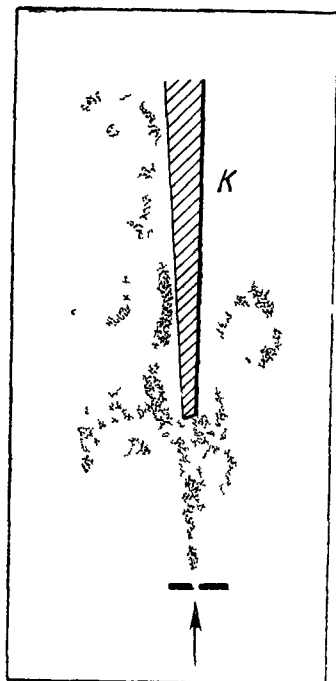
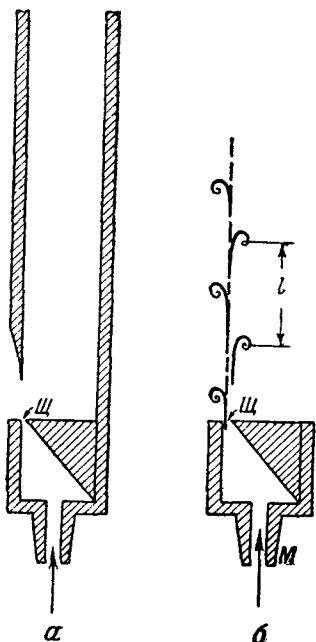


Рис. 211. а — разрез органной трубы, б — возникновение щелевого тона, его период равен пространственному периоду  $l$  «вихревой дорожки», деленному на скорость движения вихрей

Рис. 212 Фотография вихрей в органной трубе. Труба имеет стеклянную стенку. В нее вдувается дымящийся воздух

§ 1), также является автоколебательным явлением, связанным с периодическим вихреобразованием.

Вернемся к органной трубе. Вихри, выходящие из щели, поочередно проходят слева и справа от клина К (рис. 212). При этом на столб воздуха в трубе действуют периодические толчки, возбуждающие в нем колебания. Эти колебания оказывают обратное действие на процессы, происходящие около щели, в результате чего (ср. сказанное в гл. IV о синхронизации автоколебаний) процесс вихреобразования, а вместе с ним и колебания столба воздуха в трубе приобретают частоту, весьма близкую к одной из собственных частот столба воздуха, определяемых (грубо) уравнением (6 68) (можно считать трубу открытой и внизу). В зависимости от скорости дутья и начальных условий автоколебания могут иметь частоту, близкую к частоте того или другого из обертонов воздушного столба, находящегося в трубе.



ОрганнЫе трубы—далеко не единственный пример автоколебаний газовых столбов. Легко вызвать звучание (автоколебания) воздуха, находящегося в открытой с обоих концов трубе, внеся в нее пламя. Здесь автоколебания поддерживаются теплообменом между попеременно нагревающимся и охлаждающимся (в результате сжатий и разрежений) газом и пламенем. (Это явление—родственное и в известном смысле обратное затуханию из-за теплообмена, о котором будет идти речь в § 10.)

## § 8. Поперечные волны на струне

**1. Волновое уравнение.** Струной называют в акустике тонкую гибкую нить, в которой с помощью внешних сил создано большое натяжение. Под это определение подходят не только струны музыкальных инструментов, но также, например, натянутый шнур, трос или резиновый жгут, показанный на рис. 166. При исследовании струн главный интерес представляет исследование распространения поперечных упругих волн\*). Равновесная конфигурация натянутой струны—прямолинейна.

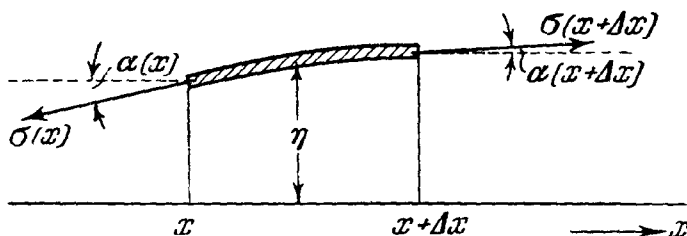


Рис. 213. К составлению уравнения движения куска струны.

Пусть ось  $x$  совпадает с осью струны при равновесии.

Пусть частицы струны смещаются только в плоскости  $x, y$  (рис. 213). Обозначим  $\eta(x, t)$  смещение точки, имеющей при равновесии абсциссу  $x$ . Напишем для куска струны  $x, x + \Delta x$  второй закон Ньютона. Масса этого куска равна  $\rho S \Delta x$  ( $\rho$ —плотность материала струны,  $S$ —ее поперечное сечение). Произведение массы куска на ускорение  $\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$  его центра тяжести равно сумме проекций на ось  $y$  сил, действующих на его концы:

$$\rho S \Delta x \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -S \sigma(x) \sin \alpha(x) + S \sigma(x + \Delta x) \sin \alpha(x + \Delta x). \quad (6.70)$$

Здесь  $\sigma(x)$ —натяжение в точке  $x$ ,  $\alpha(x)$ —угол между направлением касательной к струне в точке  $x$  и осью  $x$ . Имеем, очевидно,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial \eta}{\partial x}.$$

Предположим теперь, что смещения  $\eta(x, t)$  настолько малы, что можно с достаточным приближением:

а) пренебречь отличием натяжения  $\sigma(x)$  от натяжения струны  $\sigma$  в равновесном состоянии;

б) пренебречь отличием между  $\sin \alpha$  и  $\operatorname{tg} \alpha$ .

В результате этих упрощений уравнение (6.52) превращается в

$$\rho \Delta x \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \sigma \left[ \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_x \right], \quad (6.71)$$

откуда, разделив на  $\Delta x$  и сделав предельный переход  $\Delta x \rightarrow 0$ , получаем волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}. \quad (6.72)$$

\*) Поперечные волны могут распространяться не только по струне, но и по ненапрянутому стержню. Однако в последнем случае явление гораздо сложнее.

Согласно этому уравнению поперечные волны в струне распространяются, не деформируясь, со скоростью

$$u = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} = \sqrt{\frac{F}{\rho S}}, \quad (6.73)$$

где  $F$  — сила, натягивающая струну,  $\rho S$  — масса струны на единицу длины. Изменив натяжение шнура (рис. 166), легко убедиться на опыте, что скорость распространения поперечной волны растет с натяжением.

2. Собственные колебания и резонанс. Согласно волновому уравнению (6.54) на струне могут образоваться при соответствующих условиях опыта стоячие поперечные волны, описываемые уравнением

$$\eta = A \sin kx \cos(\omega t - \varphi), \quad (6.74)$$

а) где

$$k = \frac{\omega}{u}. \quad (6.74a)$$

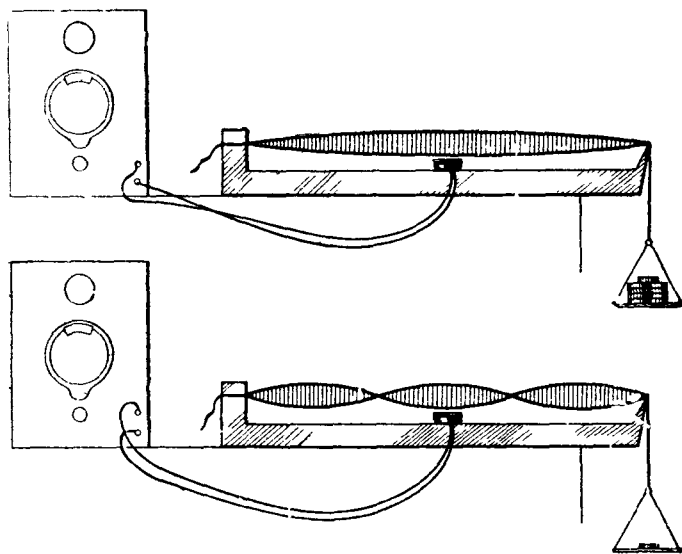


Рис. 214. Резонанс струны. Струна — стальная. Под ней — питаемая током от звукового генератора телефонная трубка, с которой сняты крышка и мембрана. а — резонанс на основной частоте; б — резонанс на третьем обертоном; частота тока такая же, как в случае а, но натяжение втрое меньше

Представим себе, что, закрепив точки  $x = 0$ ,  $x = n\lambda/2$ , мы выделяем участок струны. Так как точки  $x = 0$ ,  $x = n\lambda/2$  уже были неподвижны (узлы смещения  $\eta$ ), их закрепление ничего не меняет (ср. § 3). Мы приходим к выводу, что ограниченная, закрепленная на концах струна длины  $L$  может совершать собственные колебания, имеющие характер синусоидальных стоячих волн с узлами смещения на

концах. При этом на струне укладывается целое число  $n$  полуволн:

$$L = n \frac{\lambda}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (6.75)$$

Частоту  $n$ -го собственного колебания ( $n$ -го обертона) легко вычислить с помощью формул (6.74), (6.74a), (6.75). Получаем:

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{F}{\rho S}}, \quad \nu_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{F}{\rho S}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (6.76)$$

Частота каждого собственного колебания тем больше, чем короче струна, чем больше натягивающая ее сила и чем меньше масса на единицу длины.

Укрепим около натянутой стальной струны электромагнит и будем его питать синусоидальным током (рис. 214). При этом на струну действует периодическая поперечная сила, частота которой совпадает (при наличии постоянного подмагничивания) с частотой тока. Резонанс получается при совпадении частоты звукового генератора с частотой того или иного собственного колебания струны. При этом возникает стоячая волна того же вида, что и при соответствующем собственном колебании.

## § 9. Суперпозиция нормальных колебаний

1. Математическое введение. Мы рассматривали в § 3, 7, 8 *синусоидальные* собственные колебания (их называют также *нормальными* колебаниями, ср. § 3) некоторых упругих тел: стержней, пластин, столбов газа, струн. Эти колебания имеют вид стоячих волн, удовлетворяющих волновому уравнению. Длина волны, а также расположение узлов и пучностей определяются условиями на границах упругого тела.

Как уже указывалось (гл. V, § 8) суперпозиция волн, удовлетворяющих волновому уравнению, также удовлетворяет ему. Это следует из линейности волнового уравнения.

Рассмотренные в § 3, 7, 8 условия на границах также выражаются *линейными* уравнениями, например,

$$\eta(0, t) = 0, \quad \eta(L, t) = 0 \quad (6.77)$$

в случае струны, закрепленной на концах, или

$$\xi(0, t) = 0, \quad \varepsilon(L, t) = 0 \quad \left( \varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \quad (6.78)$$

в случае стержня, закрепленного на одном конце и свободного на другом. Отсюда следует, что суперпозиция функций, удовлетворяющих рассматриваемым здесь граничным условиям, также удовлетворяет им: например, если  $f_1(0, t) = 0$  и  $f_2(0, t) = 0$ , то  $f_1(0, t) + f_2(0, t) = 0$ .

Из линейности волнового уравнения и граничных условий следует, таким образом, что суперпозиция *произвольного числа нормальных колебаний* упругого тела удовлетворяет волновому уравнению и условиям на границах и является одним из возможных его движений.

Так, например, функция

$$\eta(x, t) = A_1 \sin k_1 x \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + A_2 \sin k_2 x \cos(\omega_2 t - \varphi_2),$$

где

$$k_1 = \frac{\pi}{L}, \quad k_2 = 2k_1, \quad \omega_1 = 2 \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}, \quad \omega_2 = 2\omega_1,$$

описывает одно из движений, которое может совершать струна длины  $L$  с закрепленными концами.

Более глубокая математическая теория\*) приводит к результатам, имеющим для физики фундаментальное значение. Мы их изложим (не стремясь к строгости формулировок) на примере струны с закрепленными концами.

Такая струна не может совершать (в отсутствие внешних воздействий) движений, отличных от суперпозиции

$$\eta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} t - \varphi_n\right). \quad (6.79)$$

синусоидальных собственных колебаний. Здесь  $A_n$ ,  $\varphi_n$  — произвольные постоянные, определяемые начальными условиями. (Некоторые  $A_n$  могут быть равны нулю, в частности, число слагаемых с амплитудами, отличными от нуля, может быть конечным.) Иными словами, каковы бы ни были начальные условия, движение струны с закрепленными концами может быть представлено в виде суперпозиции нормальных колебаний.

\*) См., например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, том II.

Под начальными условиями здесь нужно понимать задание начальных отклонений  $\eta(x, 0)$  и начальных скоростей  $v(x, 0)$  всех точек струны, т. е. задание функций

$$F(x) = \eta(x, 0), \quad G(x) = v(x, 0), \quad (6.80)$$

где

$$v = \frac{\partial \eta}{\partial t}.$$

Подставляя (6.79) в (6.80), получаем:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (6.81)$$

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (6.82)$$

причем

$$a_n = A \cos \varphi_n, \quad b_n = A_n \sin \varphi_n, \quad (6.83)$$

$$A_n^2 = a_n^2 + b_n^2, \quad \operatorname{tg} \varphi_n = \frac{b_n}{a_n}. \quad (6.84)$$

Содержание формул (6.81), (6.82) таково: любые функции  $F(x)$ ,  $G(x)$ , описывающие возможное распределение смещений и скоростей струны длины  $L$  с закрепленными концами, могут быть представлены в виде суперпозиции пространственных синусоид с волновыми числами, являющимися целыми кратными  $\pi/L$ . Это — частный случай теоремы Фурье\*).

Легко показать, что если имеют место равенства (6.81), (6.82), амплитуды  $A_n$  и фазы  $\varphi_n$  однозначно определяются видом функций  $F(x)$ ,  $G(x)$  и легко могут быть вычислены, если даны эти функции.

Действительно, умножая (6.81) на  $\sin \frac{m\pi x}{L}$  ( $m$  — целое) и интегрируя по  $x$  в пределах от 0 до  $L$ , имеем:

$$\int_0^L F(x) \sin \frac{m\pi x}{L} dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Но, как легко убедиться,

$$\int_0^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \begin{cases} \frac{L}{2}, & \text{если } m = n, \\ 0, & \text{если } m \neq n. \end{cases}$$

Следовательно, под знаком суммы отличен от нуля только член, у которого  $n = m$ ; он равен  $a_m \frac{L}{2}$ , откуда

$$a_m = \frac{2}{L} \int_0^L F(x) \sin \frac{m\pi x}{L} dx. \quad (6.85)$$

Аналогичным образом можно вычислить  $b_m$  и, далее, с помощью формулы (6.83) найти  $A_m$ ,  $\varphi_m$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ).

В случае колебаний стержней или столбов газа имеют место аналогичные свойства. Например, всякое продольное колебание стержня, имеющего один закрепленный конец ( $x = 0$ ) и один свободный конец ( $x = L$ ),

\*) Мы вернемся к этой теореме с другой точки зрения в гл. XI.

может быть представлено в виде

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n-1} \sin \left[ \frac{(2n-1) \pi x}{L} \right] \cos \left[ \frac{(2n-1) \pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} t - \varphi_n \right],$$

где  $A_n, \varphi_n$  определяются начальными условиями. Заметим, что здесь в отличие от (6.79) всегда отсутствуют слагаемые, частоты которых являются четными кратными основной частоты.

**2. Тембр звука, издаваемого упругими телами.** Оттянем струну в середине (рис. 215, а) и отпустим ее, не сообщая начальной скорости. Здесь начальные условия таковы:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x}{L} h & \text{для } 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ \frac{L-x}{L} h & \text{для } \frac{L}{2} \leq x \leq L, \end{cases} \quad (6.86)$$

$$G(x) = 0 \quad \text{для } 0 \leq x \leq L. \quad (6.87)$$

На основании формулы (6.85) получаем, подставляя (6.86) и произведя интегрирование\*):

$$a_n = \frac{8h}{\pi L n} \quad (n - \text{нечетное}),$$

$$a_n = 0 \quad (n - \text{четное});$$

кроме того, очевидно, все  $b_n = 0$ . Важ-

но отметить, что здесь возбуждаются *только нечетные обертоны*.

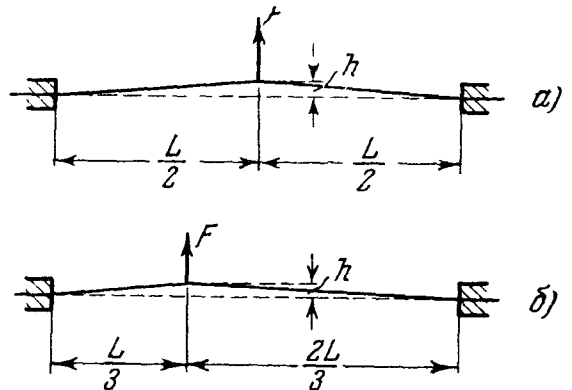


Рис. 215. Сила  $F$ , оттягивающая струну, приложена: а—в точке  $x=L/2$ , б—в точке  $x=L/3$ . В момент  $t=0$  сила  $F$  исчезает и начинаются колебания струны, представляющие собой суперпозицию нормальных колебаний.

\*) Приводим вычисление. Заметим сначала, что

$$\sin \frac{n\pi x}{L} = \sin \frac{n\pi(L-x)}{L} \quad (n - \text{нечетное}),$$

$$\sin \frac{n\pi x}{L} = -\sin \frac{n\pi(L-x)}{L} \quad (n - \text{четное})$$

и что в нашей задаче

$$I(x) = F(L-x)$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^L F(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx =$$

$$= \int_0^{\frac{L}{2}} F(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx + \int_{\frac{L}{2}}^L F(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \begin{cases} 2 \int_0^{\frac{L}{2}} F(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx & (n - \text{нечетное}), \\ 0 & (n - \text{четное}) \end{cases}$$

Поэтому  $a_n = 0$  при  $n$  четном, а при  $n$  нечетном

$$a_n = \frac{4}{L} \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{2h}{L} x \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

Интеграл легко вычислить, применяя интегрирование по частям, что дает выражение, приведенное в тексте.

Если мы оттянем струну в точке  $x = L/3$  (рис. 215, б) и отпустим без начальной скорости, то придем путем аналогичного вычисления к выводу, что отсутствуют все обертоны, для которых точка  $x = L/3$  является узлом  $\eta$ , т. е. обертоны частоты  $3n\omega_1$  ( $n$  — целое).

В обоих случаях *период* колебания струны, а следовательно, и излучаемой ею звуковой волны одинаков и равен

$$T = 2L \sqrt{\frac{\rho}{\sigma}},$$

но вид осциллограммы колебания отдельной точки струны, а также создаваемого струной звукового давления  $\Delta p$  различен.

Как показывает опыт, ухо воспринимает звуки, создаваемые струной в обоих случаях, как звуки *одинаковой высоты, но различного тембра*. Вообще (при любых начальных условиях) наше ощущение тембра звука, создаваемого струной, определяется соотношением амплитуд  $A_1, A_2, A_3, \dots$  \*); фазы  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$  не влияют на звуковое ощущение.

Проведенное только что рассмотрение объясняет, почему тембр звука, издаваемого *щипковыми* струнными музыкальными инструментами (например, мандолиной), зависит от места, где оттягивают струну.

При возбуждении струны ударом соотношение амплитуд  $A_1, A_2, A_3, \dots$  зависит от *места* удара и от *характера* удара (от вида зависимости силы, действующей на струну при ударе, от времени). Отличие в тембре звуков, создаваемых различными *ударными* струнными музыкальными инструментами, например фортепиано и балалайкой, объясняется главным образом этим обстоятельством \*\*). При игре на фортепиано струны возбуждаются ударами мягких молотков. Раскрыв фортепиано и резко ударив пальцами по одной из струн, мы услышим звук чуждого фортепиано тембра.

В *смычковых* инструментах (скрипка, виолончель) струны совершают *автоколебания* (ср. рис. 111). Смещения точек струны (их осциллограммы имеют пилообразную форму) могут быть и здесь представлены в виде суперпозиции синусоидальных составляющих. Соотношение амплитуд этих составляющих резко отличается от их соотношения в щипковых и ударных струнных инструментах. Этим объясняется отличие между тембром, например, скрипки и фортепиано.

Теория автоколебаний струн весьма сложна. Укажем лишь, что механизм передачи энергии смычком струне — того же рода, что механизм поддержания колебаний маятника трением о вращающийся вал (гл. IV).

Все, что здесь было сказано о тембре звука, издаваемого струной, можно перенести на звучание других упругих тел. Например, когда мы ударяем молотком по металлическому стержню, последний начинает звучать. Тембр звука отличен от тембра звука той же высоты, издаваемого камертоном: колебание камертона синусоидально, тогда как колебание стержня представляет собой суперпозицию большого числа синусоидальных колебаний с различными частотами.

В результате удара в торец стержня по нему бежит волна сжатия (рис. 196, а), затем от другого торца бежит отраженная волна; она пред-

\*) Говоря точнее, *спектром* колебания (см. гл. XI).

\*\*\*) Значение имеет также устройство остальных частей инструмента, которым передаются колебания струны.

ставляет собой, как показывает более детальное рассмотрение, волну растяжения (рис. 196, б) и т. д. Это — другое описание того процесса, о котором мы только что говорили как о суперпозиции синусоидальных нормальных колебаний стержня.

3. Тепловое движение как суперпозиция упругих волн. Не будем ограничиваться смещениями точек стержня (пластинки), параллельными оси  $x$ . В действительности точки стержня могут смещаться в произвольном направлении. Как показывает общая теория упругих волн, *произвольное движение* такого общего вида — и притом в твердом теле произвольной формы — может быть представлено как суперпозиция стоячих упругих волн, ориентированных во всевозможных направлениях (обобщение теоремы, приведенной в п. 1). Но если так, то и беспорядочное *тепловое движение*, совершаемое частицами стержня, пластинки или вообще твердого тела любой формы, может рассматриваться как суперпозиция стоячих упругих волн: тепловое движение твердого тела есть не что иное, как очень сложное его *звучание*. Чем выше температура, тем больше в среднем амплитуды стоячих волн, из которых складывается тепловое движение, тем интенсивнее это звучание. Мы его не слышим потому, что практически вся энергия теплового движения сосредоточена в упругих стоячих волнах, имеющих очень высокие — неслышимые — частоты, еще гораздо более высокие, чем наиболее высокие частоты ультразвуковых колебаний, создаваемых искусственным путем.

Очерченная здесь схематически картина теплового движения имеет в физике огромное значение. Она позволила решить одну из важнейших проблем теоретической физики — построить теорию теплоемкости твердых тел; отметим также, что эта картина привела к открытию изменения частоты света при рассеянии (см. гл. XI, § 4).

## § 10. Поглощение и дисперсия

1. Поглощение. Общие сведения. Вернемся к волне, излучаемой пьезокварцевой пластинкой, колеблющейся синусоидально в газе или жидкости (§ 5). Лишь приближенно можно считать амплитуду не зависящей от  $x$ . В действительности, как показывает опыт, волна имеет вид

$$\xi = A_0 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - kx) \quad (6.88)$$

( $\alpha$  — постоянная), амплитуда колебания убывает с ростом  $x$  по показательному закону. Моментальный снимок волны имеет вид, показанный на рис. 216. (Осциллограмма колебания в каждой точке синусоидальна.) В соответствии с (6.88) средняя плотность потока энергии

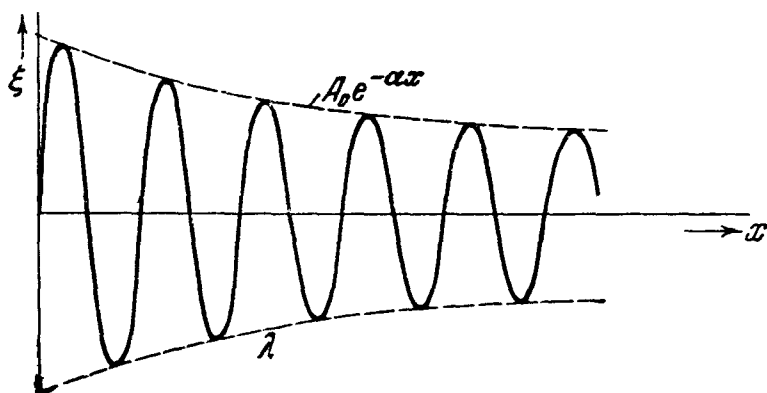


Рис. 216. Моментальный снимок волны. Осциллограмма колебания в фиксированной точке представляет собой синусоиду (т. е. *незатухающее* колебание).

с (6.88) средняя плотность потока энергии

$$q = q_0 e^{-2\alpha x},$$

где  $q_0$  — средняя плотность потока энергии около источника. Это значит, что не вся энергия, входящая в слой  $x_1 \leq x \leq x_2$  через его границу  $x = x_1$ , выходит через другую его границу  $x = x_2$ . Часть энергии «застревает» в этом слое. Как принято говорить, в среде происходит *поглощение* (или

*абсорбция*) звука. Величина  $\alpha$  называется коэффициентом поглощения. Обратная ей величина  $1/\alpha$  есть расстояние, на протяжении которого амплитуда плоской акустической волны уменьшается в  $e$  раз.

Коэффициент поглощения в газах и жидкостях сильно зависит от частоты. В воздухе и других газах, где нет заметной дисперсии (см. п. 4), например в благородных газах (гелий, аргон, неон), он растет пропорционально квадрату частоты:

$$\alpha = a\nu^2, \quad (6.89)$$

где  $a$  зависит только от температуры и плотности газа. Для воздуха \*)

$$a = 2 \cdot 10^{-13} \text{ сек}^2 \text{ см}^{-1}.$$

При  $\nu = 10^3$  герц уменьшение амплитуды в воздухе вследствие поглощения еще трудно заметить:  $1/\alpha = 50 \text{ км}$ , но при  $\nu = 5 \cdot 10^5$  герц воздух уже почти непрозрачен для ультразвука: здесь  $1/\alpha = 20 \text{ см}$ .

Для воды вплоть до частот порядка  $10^6$  герц также выполняется с хорошим приближением соотношение вида (6.89), причем

$$a = 3 \cdot 10^{-16} \text{ сек}^2 \text{ см}^{-1}.$$

Из сопоставления значений  $a$  для воды и воздуха видно, что при той же частоте дальность распространения в воде в 700 раз больше, чем в воздухе. При  $\nu = 10^5$  герц  $1/\alpha$  равно для воды приблизительно 3 км.

Возможность гидролокации (§ 6, п. 6) существенно связана с малостью поглощения ультразвука в воде.

В результате поглощения среда постепенно греется при распространении в ней акустической волны. Это *монотонное* нагревание не надо смешивать с поочередным нагреванием и *охлаждением*, которое сопровождает всякое упругое колебание и о котором говорилось в § 4. Учитывая поглощение, мы должны сказать, что изменение температуры при прохождении звука состоит из двух слагаемых: рассмотренного ранее колебательного процесса и монотонного нарастания. Поглощение *бегущей* акустической волны вызывается теми же причинами, что затухание собственных колебаний упругих тел (*стоячих* волн); вязкостью (внутренним трением) вещества, а также другими причинами, о которых мы дадим некоторое представление в пп. 2 и 4.

**2. Поглощение вследствие теплообмена.** Роль теплообмена в поглощении звука мы поясним с помощью модели. Для ее понимания необходимо знание элементов термодинамики \*\*). Представим себе цилиндр с идеальным газом, в котором скользит без трения плотно пригнанный поршень (рис. 217). Результирующая сила, действующая вверх на поршень (площадь поршня принимаем равной единице),

$$\Delta p = p - p_0,$$

\*) Первые измерения поглощения акустических волн в воздухе (1911 г.) принадлежат Н. Неклепаеву, одному из сотрудников П. Н. Лебедева. В то время еще не было магнитострикционных и пьезокварцевых источников ультразвука и Неклепаев работал с затухающими (не только в пространстве, но и *во времени*) акустическими волнами, которые возникают около искры при затухающих электрических колебаниях в контуре с искровым промежутком (рис. 224). Замечательно, что, несмотря на трудности эксперимента, результаты Неклепаева близки к тем, которые были получены впоследствии с помощью современной ультразвуковой аппаратуры. (Поглощение определяют, например, возбуждая стоячие волны между кварцем—источником и металлической пластинкой—отражателем и наблюдая спадание максимумов интенсивности при последовательных резонансах; эти максимумы аналогичны наблюдаемым на низкой звуковой частоте в опыте, представленном на рис. 210. Высота максимумов определяется величиной  $\alpha$  и уменьшается с ростом  $n$ .)

\*\*\*) Хотя бы в объеме «Курса физики» под редакцией Н. Д. Папалекси.



$p$  — давление газа,  $p_0$  — внешнее (атмосферное) давление. При малом изменении  $\Delta V$  объема имеем на основании (6.35)

$$V_0 \Delta p + p_0 \Delta V = R \Delta T. \quad (6.90)$$

Согласно первому принципу термодинамики

$$C_v \Delta T = -p_0 \Delta V + \Delta Q, \quad (6.91)$$

где  $\Delta Q$  — количество тепла, полученное вследствие теплопроводности газом от окружающих тел, причем

$$-\frac{d}{dt}(\Delta Q) = \beta \Delta T, \quad (6.92)$$

где  $t$  — время,  $\beta$  — коэффициент теплопроводности цилиндра.

Пусть поршень колеблется синусоидально:

$$\Delta V = (\Delta V)_m \cos \omega t,$$

вследствие чего  $\Delta T$  и  $\Delta p$  также изменяются синусоидально, синхронно с  $\Delta V$ .

Векторная диаграмма уравнений (6.90), (6.91), (6.92) показана на рис. 218, а. Из нее видно, что  $\Delta T$  отстает по фазе от  $(-\Delta V)$ , вследствие чего  $\Delta p$  также отстает по фазе от  $(-\Delta V)$ .

Фигура Лиссажу на плоскости  $V, p$  (на языке термодинамики: индикаторная диаграмма) имеет вид, показанный на рис. 218, б. Она обегается *против* часовой стрелки. Это означает, что для поддержания колебаний поршня необходима *затрата энергии извне*. Отсюда ясно, что если предоставить поршень самому себе, его колебания затухнут.

К этому же выводу легко прийти, разложив  $\Delta p$  на две составляющие:  $\Delta p'$  в фазе с  $(-\Delta V)$ , играющую для поршня роль упругой силы ( $V$  пропорционально смещению поршня), и  $\Delta p''$  в фазе с  $-\frac{d(\Delta V)}{dt}$  и действующую поэтому на поршень так же, как действовала бы сила трения.

При  $\beta = 0$  (изменение объема газа происходит *адиабатически*) имеем на основании (6.90), (6.91), (6.92)

$$-C_v \Delta T = p_0 \Delta V,$$

$$V_0 \Delta p = -p_0 \left(1 + \frac{R}{C_v}\right) \Delta V$$

или, так как

$$C_v + R = C_p$$

(см. § 4),

$$V_0 \Delta p = -\frac{C_p}{C_v} p_0 \Delta V, \quad \Delta p'' = 0.$$

Эллипс рис. 218, б превращается в прямую, поршень совершает незатухающие колебания без подведения энергии извне. Аналогично обстоит дело в другом предельном случае, а именно  $\beta = \infty$  (говоря физически, теплопроводность цилиндра очень велика). При этом (как можно заключить из конечности  $\Delta Q$ )  $\Delta T = 0$  (изменение объема газа происходит *изотермически*) и на основании (6.90)

$$V_0 \Delta p = -p_0 \Delta V, \quad \Delta p'' = 0.$$

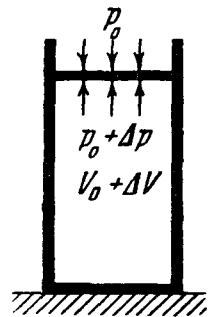


Рис. 217. Модель, поясняющая поглощение звука вследствие теплопроводности.

Заметим, что при  $\beta = 0$  газ имеет модуль упругости

$$E_{\text{адиаб}} = V_0 \frac{\Delta p}{|\Delta V|} = p_0 \frac{C_p}{C_v}, \quad (6.93)$$

при  $\beta = \infty$  он имеет другой (меньший) модуль упругости

$$E_{\text{изот}} = p_0. \quad (6.94)$$

Значение (6.93) модуля упругости соответствует формуле Лапласа для скорости звука, значение (6.94)—формуле Ньютона (см. § 4).

Резюмируем: теплопроводность приводит к затуханию колебаний поршня; это затухание исчезает в двух случаях:

- если нет теплообмена между газом и окружающей средой;
- если между ними нет разности температур.

На основании разбора модели с цилиндром и поршнем можно себе представить (качественно), как теплопроводность приводит к поглощению звука.

Соседние слои вещества расширяются и сжимаются со сдвигом фазы, вследствие чего их температура также меняется не синфазно: между ними возникает разность температур, а следовательно (так как теплопроводность отличается от нуля), и теплообмен. На поддержание незатухающих колебаний (в соответствии с (6.88)) в слое  $x_1 \leq x \leq x_2$  затрачивается часть энергии, посылаемой источником сквозь плоскость  $x = x_1$ , чем и вызывается то, что амплитуда — убывающая функция  $x$ .

Количественная теория показывает, что внутреннее трение и теплопроводность играют при поглощении акустических волн в газах приблизительно одинаково значительную роль. Она приводит также к выводу, что коэффициент поглощения  $\alpha$ , обусловленный внутренним трением и температурой, пропорционален квадрату частоты. Такой характер зависимости, как было сказано, действительно наблюдается во многих газах.

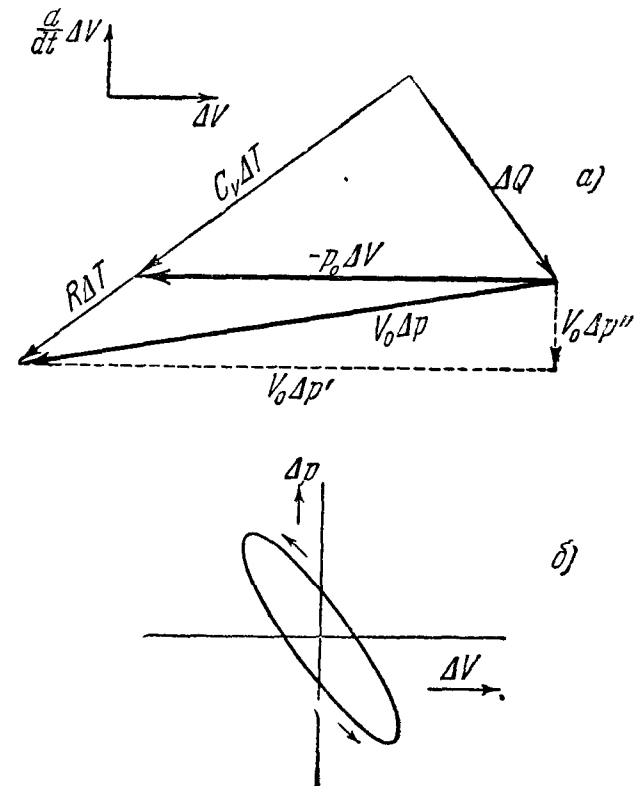


Рис. 218. *a*—векторная диаграмма, показывающая, что  $\Delta p$  имеет компоненту  $\Delta p'$  (в противофазе с  $\Delta V$ ), играющую роль упругой силы, и компоненту  $\Delta p''$  (в противофазе с  $\Delta V$ ), аналогичную силе трения; *b*—фигура Лиссажу на плоскости  $\Delta V, \Delta p$ .

**3. Акустические волны и строение вещества.** До сих пор нам не нужно было учитывать при рассмотрении упругих волн атомистическую структуру вещества. Но при исследовании упругих волн очень высокой частоты такое рассмотрение становится необходимым. В твердом теле, где атомы образуют правильную решетку, оно становится необходимым тогда, когда длина упругой волны сравнима с расстоянием между атомами, т. е. порядка  $10^{-7}$  см и короче (расстояние между атомами—порядка  $10^{-8}$  см). При  $\lambda = 10^{-7}$  см частота колебаний—порядка  $10^{12}$  герц, т. е. порядка частоты электромагнитных волн А. А. Глаголевой-Аркадьевой (см. гл. VII, § 5).

В газах приходится считаться с атомистической структурой уже при гораздо меньших частотах. Дело здесь не в том, что в газах среднее расстояние между атомами (или в многоатомных газах между молекулами) больше, чем в твердом теле, а в следующем.

Отдельные слои газа давят друг на друга вследствие того, что между ними происходит непрерывная взаимная бомбардировка молекулами, вылетающими из одного слоя и попадающими в другой. Если расстояние  $\lambda/2$  между сгущениями и разрежениями в звуковой волне становится сравнимо со средней длиной свободного пробега  $\Lambda$  (средним расстоянием, пролетаемым молекулой от одного соударения до другого), взаимодействие между местами сгущений и разрежений начинает ослабевать, прекращается действие «механизма», вызывающего передачу давления, т.е. распространение упругой волны. Поэтому теория, изложенная в § 4, применима лишь, если  $\lambda \gg \Lambda$ .

При атмосферном давлении средняя длина пробега молекул газа порядка  $10^{-5}$  см; она уменьшается обратно пропорционально давлению. Таким образом, все представление о звуковых волнах в газах, изложенное в § 4, начинает терять силу при атмосферном давлении, при  $\lambda$  порядка  $10^{-4}$  см, что соответствует частоте  $10^8$  герц (в газах  $u$  — порядка  $10^4$  см/сек), а при понижении давления — уже при более длинных волнах (более низких частотах). При  $\lambda$  порядка  $\Lambda$  уже нет распространения акустической волны в обычном смысле; происходит практически полное поглощение энергии уже на расстоянии порядка  $\Lambda$ .

**4. Дисперсия акустических волн в газах.** Согласно теории, изложенной в § 4, скорость звука в газах не зависит от частоты. В действительности, однако, в некоторых газах наблюдается дисперсия (ср. гл. V, § 9) акустических волн. Для того чтобы понять ее механизм, рассмотрим акустические явления в газах с молекулярной точки зрения. Изложим предварительно некоторые сведения из молекулярно-кинетической теории.

Внутренняя энергия идеального газа (энергия хаотического движения его молекул) состоит (если газ не является одноатомным) из следующих слагаемых: а) энергии *поступательного* движения молекул; б) энергии *вращательного* движения молекул; в) энергии *колебательного* движения атомов, составляющих молекулы. Давление газа на стенки, а также давление каждого слоя газа на соседние слои обусловлено ударами молекул газа о стенку или друг о друга. Оно пропорционально энергии поступательного движения молекул. Когда происходит адиабатическое сжатие (расширение) газа в цилиндре с поршнем, работа, совершаемая поршнем, идет на увеличение (производится за счет) энергии поступательного движения молекул, чем вызывается увеличение (уменьшение) давления газа. Наряду с этим вследствие соударений между молекулами газа происходит увеличение энергии их вращательного и колебательного движения за счет возросшей энергии поступательного движения (уменьшение энергии вращательного и колебательного движения, частично восполняющее убыль энергии поступательного движения). После прекращения процесса сжатия (расширения) постепенно устанавливается *равновесное состояние*, при котором прирост (убыль) внутренней энергии газа оказывается распределенным в определенном отношении (различном для различных газов) между ее тремя слагаемыми.

Представим себе теперь, что объем газа меняется по осциллограмме, показанной на рис. 219, а (периодические мгновенные сжатия и разрежения). Для простоты изложения будем рассуждать так, как будто равно-

весе между поступательным и вращательным движением устанавливается мгновенно. В результате мгновенного сжатия энергия поступательного + вращательного движения  $U_n$  молекул возрастает (рис. 219, б) на величину  $\Delta U$ , равную работе поршня  $p_0 \Delta V$ , и соответственно возрастает давление (рис. 219, в). Затем происходит процесс перераспределения прироста энергии  $\Delta U$  между поступательным + вращательным и колебательным движением молекул, в результате которого энергия  $U_k$  колебательного движения увеличивается, а энергия  $U_n$  поступательного + вращательного движения уменьшается.

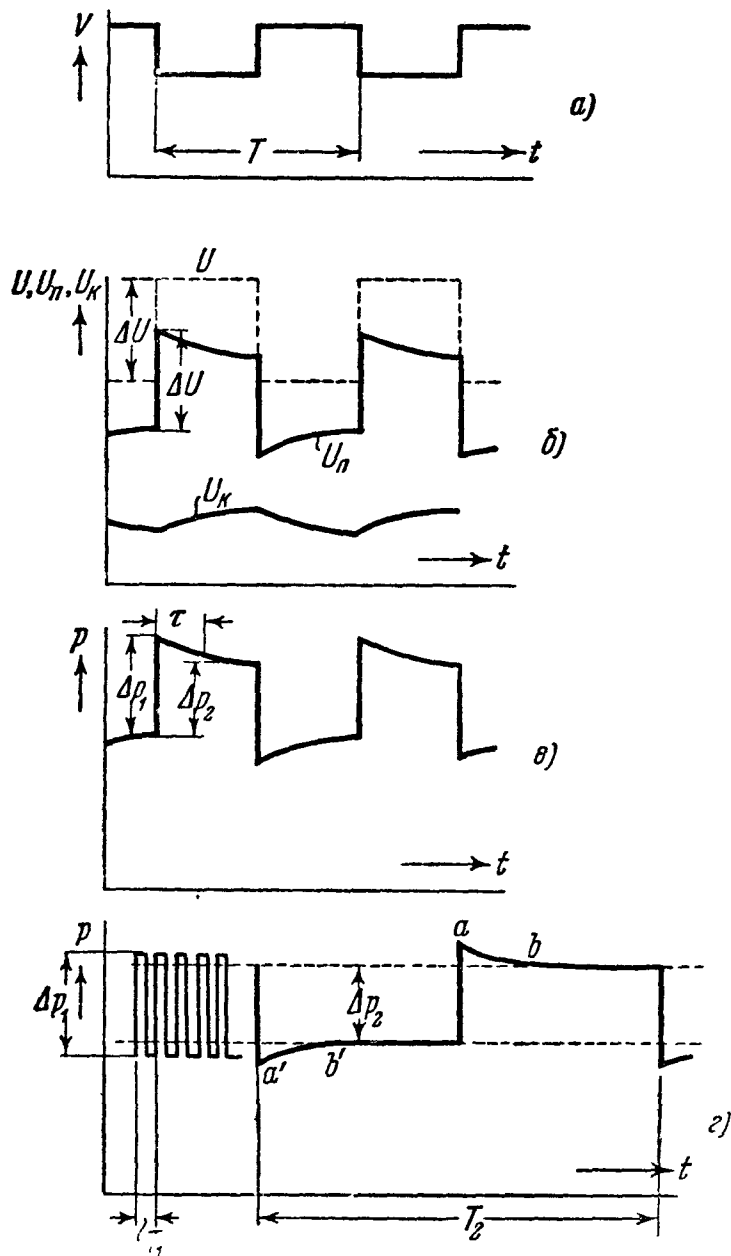


Рис. 219. а—периодическое скачкообразное изменение объема  $V$ ; б—соответствующее изменение внутренней энергии  $U$  и ее слагаемых  $U_n$ ,  $U_k$ ; в—соответствующее изменение давления; г—изменение давления при очень быстрых (левая осциллограмма), очень медленных (правая осциллограмма) скачкообразных изменениях объема.

релаксации), давление будет колебаться, как показано на рис. 219, г слева ( $T = T_1$ ), т. е. совершать скачки  $\pm \Delta p_1$ . Если  $T \gg \tau$ , как показано на рис. 219, г справа ( $T_1 = T_2$ ), т. е. период велик по сравнению с временем релаксации, участки осциллограммы  $ab$ ,  $a'b'$  не играют существенной роли и все происходит практически так же, как если бы давление совершало скачки  $\pm \Delta p_2$  ( $|\Delta p_2| < |\Delta p_1|$ ). Дело обстоит так, как будто модуль упругости газа во втором случае равен

$$F_0 = V_0 \left| \frac{\Delta p_2}{\Delta V} \right|,$$

Вследствие этого давление падает до некоторой величины, большей, чем давление до сжатия, но меньшей, чем давление непосредственно после сжатия. В результате мгновенного расширения происходит сначала сильное уменьшение энергии поступательного + вращательного движения (и соответствующее уменьшение давления), а затем частичное возмещение этой потери энергии (и увеличение давления) за счет энергии колебательного движения молекул.

Обозначим  $\tau$  время, за которое отклонения  $U_n$  и  $U_k$  от их равновесных значений уменьшаются в  $e$  раз. Эта величина называется *временем релаксации* газа.

Если  $T \ll \tau$  (период мал по сравнению со временем

релаксации), давление будет колебаться, как показано на рис. 219, г

слева ( $T = T_1$ ), т. е. совершать скачки  $\pm \Delta p_1$ . Если  $T \gg \tau$ , как показано на рис. 219, г справа ( $T_1 = T_2$ ), т. е. период велик по сравнению с временем релаксации, участки осциллограммы  $ab$ ,  $a'b'$  не играют существенной роли и все происходит практически так же, как если бы давление совершало скачки  $\pm \Delta p_2$  ( $|\Delta p_2| < |\Delta p_1|$ ). Дело обстоит так, как будто модуль упругости газа во втором случае равен

а в первом —

$$E_{\infty} = V_0 \left| \frac{\Delta p_1}{\Delta V} \right| > E_0,$$

т. е. имеет одно значение при медленных колебаниях (при «нулевой частоте») и другое (большее) — при быстрых колебаниях (при «бесконечной частоте»).

Отсюда мы заключаем, что распространение в газе звуковых волн высокой частоты ( $\nu \gg 1/\tau$ ) должно происходить с *большой скоростью*, чем распространение звуковых волн низкой частоты ( $\nu \ll 1/\tau$ ), причем должен существовать плавный переход от скорости

$$u_0 = \sqrt{\frac{E_0}{\rho}} \quad \left( \nu \ll \frac{1}{\tau} \right)$$

к скорости

$$u_{\infty} = \sqrt{\frac{E_{\infty}}{\rho}} \quad \left( \nu \gg \frac{1}{\tau} \right).$$

Более подробная теория приводит к зависимости  $u$  от  $\nu$ , показанной на рис. 220. Дисперсия, наблюдаемая в газах, носит именно такой характер. Она наблюдается в большинстве случаев (при атмосферном давлении) в области частот порядка  $10^5$  герц. Так обстоит дело, например, в  $\text{CO}_2$ . Здесь при  $0^\circ\text{C}$   $u_0 = 268$  м/сек,  $u_{\infty} = 280$  м/сек. Количественная теория позволяет определить из полученной на опыте зависимости  $u$  от  $\nu$  время релаксации  $\tau$ . В  $\text{CO}_2$  при  $18^\circ\text{C}$  и атмосферном давлении  $\tau = 5,7 \cdot 10^{-6}$  сек.

Анализ опытных данных показывает, что установление равновесного распределения энергии между поступательным и вращательным движением происходит очень быстро, а между поступательным и вращательным движением, с одной стороны, и колебательным, с другой, — гораздо медленнее. (Этим оправдывается то, что мы пренебрегали временем установления равновесия между поступательным и вращательным движением молекул.)

Дисперсию, связанную с конечностью времени установления равновесия между поступательным и вращательным движением, не удастся наблюдать: по-видимому, это время настолько мало, что когда период с ним сравним, длина волны сравнима со средней длиной свободного пробега, и практически уже нет распространения акустической волны (ср. п. 3).

**5. Поглощение, связанное с дисперсией.** Построим на основании осциллограмм *а*), *б*) рис. 219 соответствующую фигуру на плоскости  $V, p$ : здесь, как и в п. 2, получается фигура конечной площади  $\Pi$  с обходом против часовой стрелки (рис. 221), что указывает на *поглощение энергии* в газе: работа, совершаемая поршнем над газом во время сжатия, больше (по абсолютной величине) работы, совершаемой газом над поршнем во время расширения. Энергия, поглощаемая за 1 сек., равна  $\nu\Pi$ .

Рассуждая так же, как в п. 2, мы приходим к заключению, что процессы обмена энергией между поступательными + вращательными и коле-

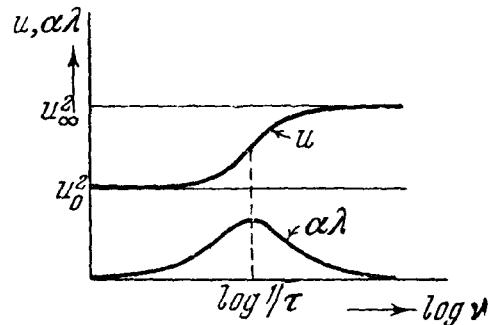


Рис. 220. Дисперсия и связанная с ней абсорбция акустических волн в газах (теоретические кривые, подтвержденные опытом). Точка перегиба кривой дисперсии и максимальное ослабление волны на протяжении  $\lambda$  соответствуют  $\nu = \frac{1}{\tau}$ .

бательными движениями молекул вызывают не только дисперсию, но и поглощение акустических волн. Площадь  $\Pi$ , а с нею и энергия, поглощаемая за период, стремится к нулю при  $\nu \rightarrow \infty$  (рис. 221, б). Энергия, поглощаемая за 1 сек., стремится к нулю при  $\nu \rightarrow 0$ . Подробные расчеты приводят к зависимости величины  $\alpha\lambda$ , характеризующей ослабление амплитуды на протяжении одной длины волны, от  $\nu$ , показанной на рис. 220. Опыт подтверждает для газов, обладающих дисперсией, например для  $\text{CO}_2$ , такой характер зависимости поглощения от частоты. В  $\text{CO}_2$  при  $\nu = 100$  килогерц, комнатной температуре и нормальном давлении коэффициент поглощения

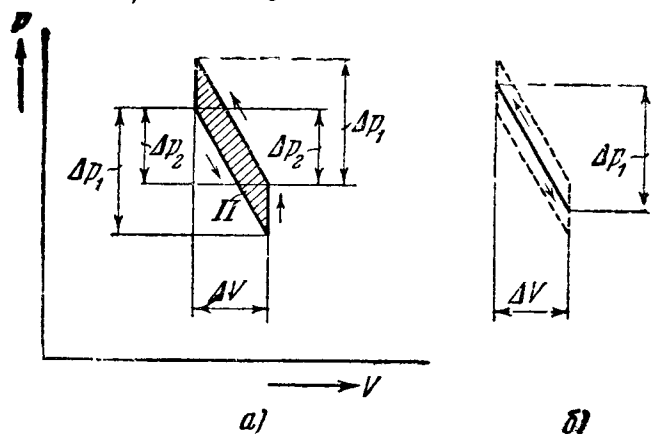


Рис. 221. а—индикаторная диаграмма, соответствующая изменению объема и давления, показанных на рис. 219, а, в; б—индикаторная диаграмма, соответствующая левой осциллограмме рис. 219, г.

$\alpha = 0,5 \text{ см}^{-1}$ , т. е. амплитуда уменьшается в 5 раз уже на расстоянии 2 см. Можно считать, таким образом, что при частотах порядка 100 килогерц газ  $\text{CO}_2$  практически непрозрачен для ультразвука.

## § 11. Нелинейные явления

**1. Предварительные замечания.** Линейное волновое уравнение всегда является в теории упругих волн *приближенным* уравнением: закон Гука (§ 1)—приближенный закон; при выводе волнового уравнения для газов и жидкостей (§ 4) мы заменяли истинное нелинейное соотношение между давлением и деформацией линейным; при выводе волнового уравнения струн мы заменяли истинное нелинейное соотношение между силой и смещением линейным соотношением. Но в действительности в акустике наблюдаются при не очень малых деформациях нелинейные явления. Особенно большое не только теоретическое, но и практическое значение имеют нелинейные явления в газах. Их рассмотрением мы здесь ограничимся.

**2. Предел применимости линейного приближения в акустике газов.** При выводе линейного волнового уравнения (6.33) § 4 мы дважды сделали предположение о малости уплотнения  $\Delta\rho$ : при линеаризации соотношения между  $\Delta p$  и  $\Delta\rho$  и при линеаризации соотношения между  $\varepsilon$  и  $\Delta\rho$ .

Сформулируем более точно эти предположения.

Первое означает, что

$$|f''(\rho_0)|(\Delta\rho)^2 \ll |f'(\rho_0)\Delta\rho|,$$

т. е.

$$|\Delta\rho| \ll \left| \frac{f'(\rho_0)}{f''(\rho_0)} \right|. \quad (6.95)$$

Второе означает, что

$$|\Delta\rho| \ll \rho_0 \quad (6.96)$$

(малость уплотнения по отношению к плотности в отсутствие волны).

Проанализируем более подробно эти условия для идеального газа. Здесь на основании (6.36)

$$f'(\rho_0) = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}, \quad f''(\rho_0) = \frac{\gamma(\gamma-1)p_0}{\rho_0^2}, \quad \text{где } \gamma = \frac{c_p}{c_v},$$

и условие (6.95) дает  $|\Delta\rho| \ll (\gamma-1)\rho_0$ .

Так как  $(\gamma - 1)$  — порядка единицы, условия (6.95), (6.96) в данном случае сливаются в одно. Дифференцируя (6.36), имеем (для малых  $\Delta p$ ,  $\Delta \rho$ ):

$$\frac{\Delta \rho}{\rho_0} = \frac{1}{\gamma} \frac{\Delta p}{\rho_0},$$

и следовательно, условие (6.96) может быть представлено в виде

$$|\Delta p| \ll \gamma(\gamma - 1)\rho_0, \quad (6.97)$$

или

$$|\Delta p| \ll \rho_0,$$

так как  $\gamma(\gamma - 1)$  — порядка единицы. Это означает, что волновое уравнение (6.33) может служить хорошим приближением в случае, если звуковое давление  $|\Delta p|$  мало по сравнению с давлением газа  $\rho_0$  в отсутствие звуковых волн (в частности, если звук распространяется в атмосфере, — по сравнению с атмосферным давлением).

В случае синусоидальной волны условию (6.97) можно придать и такое наглядное толкование. Здесь на основании (6.42)

$$(\Delta p)_m = \sqrt{\gamma \rho_0 \rho_0} \omega A = \gamma \rho_0 k A,$$

и условие (6.79) означает

$$kA \ll \gamma - 1, \text{ т. е. } A \ll \frac{\gamma - 1}{2\pi} \lambda,$$

или проще, так как  $[(\gamma - 1)/2\pi]$  порядка единицы, то  $A \ll \lambda$ .

Итак, линеаризованная теория звуковых волн в идеальном газе является тем лучшим приближением, чем меньше амплитуда смещения по сравнению с длиной волны.

Даже около болевого порога  $A/\lambda$  очень мало по сравнению с единицей. При  $\lambda$  порядка 30 см ( $\nu$  около  $10^3$  герц) болевой порог соответствует  $(\Delta p)_m = 3 \cdot 10^2$  дин/см<sup>2</sup>, откуда находим, что  $A$  — порядка  $10^{-3}$  см.

**3. Краткие сведения о нелинейных явлениях.** Упругие волны, возникающие в результате взрывов, не удовлетворяют условию (6.97): в них  $\Delta p$  может во много раз превышать  $\rho_0$ . Так же обстоит дело с акустическими волнами, возникающими около мощной электрической искры. Заметные нелинейные явления возникают также около очень мощных громкоговорителей (мощности порядка нескольких ватт и выше).

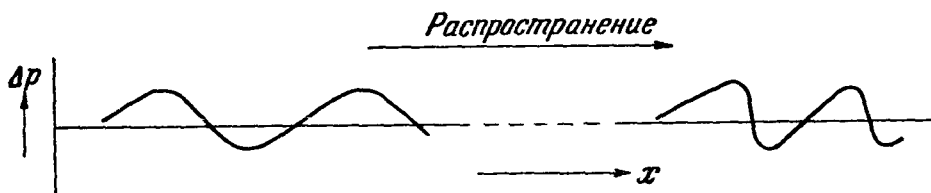


Рис. 222. Последовательные моментальные снимки акустической волны большой интенсивности (схематически).

Теория нелинейных явлений, происходящих при распространении упругих волн, весьма сложна. Для ее понимания нужно основательное знакомство с механикой сплошной среды и термодинамикой, и мы не будем ее излагать. Укажем лишь важнейшие черты этих явлений.

Горбы волны давления (максимумы  $\Delta p$ ) движутся быстрее ее впадин (минимумов  $\Delta p$ ), вследствие чего фронт волны становится все круче (рис. 222). Пусть, например, диафрагма очень мощного громкоговорителя колеблется синусоидально с частотой  $\omega$ . На некотором расстоянии от

него волна уже заметно несинусоидальна. Колебание  $\Delta p$  (в фиксированной точке пространства) содержит при этом синусоидальные слагаемые частоты  $2\omega$ ,  $3\omega$ ,  $4\omega$ , ...

Если диафрагма колеблется по закону  $A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t$ , то вследствие искажения формы при распространении колебание на некотором расстоянии от источника содержит синусоидальные слагаемые не только частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , но также  $2\omega_1$ ,  $3\omega_1$ , ...  $2\omega_2$ ,  $3\omega_2$ , ... и  $\omega_1 \pm \omega_2$ ,  $\omega_1 \pm 2\omega_2$  и т. д. (слагаемые последнего типа соответствуют комбинационным тонам, ср. гл. IV, § 10). Отдельные синусоидальные слагаемые  $\Delta p$  могут быть выделены с помощью соответствующей резонансной аппаратуры (см. гл. XI). Ухо также чувствует появление «гармоник»  $2\omega$ ,  $3\omega$ , ... и комбинационных тонов  $\omega_1 \pm \omega_2$ ,  $\omega_1 \pm 2\omega_2$  и т. д.

## § 12. Дополнительные замечания

Мы смогли коснуться лишь незначительной части тех фактов, которые составляют содержание современной акустики. В акустику входят учение о слухе и речи (физиологическая акустика \*), исследование акустических свойств помещений (архитектурная акустика), изучение приборов для преобразования электрических колебаний в звуковые и обратно (электроакустика \*\*) и т. д.

Большой интерес представляет акустика движущейся среды. Сюда относится ряд исследований виднейшего советского акустика Н. Н. Андреева. Весьма интересной ветвью акустики является акустика моря. В 1946 г. Л. Д. Розенберг обнаружил замечательное явление сверхдальнего распространения звуков под водой. Оказалось, что достаточно мощные звуковые импульсы могут быть восприняты приемной аппаратурой на расстоянии порядка тысячи километров. Это явление удалось объяснить Л. М. Бреховских. Сверхдальнее распространение звука обусловлено своеобразным характером зависимости скорости звука от глубины.

---

\*) См. книгу С. Н. Р ж е в к и н а, Слух и речь в свете современных исследований, ОНТИ, 1936 г.

\*\*\*) См. книгу В. В. Ф у р д у е в а, Электроакустика, Гостехиздат, 1948 г.



## Г Л А В А VII

# ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

### § 1. Исторические замечания

Физическая природа звука была ясна задолго до того, как была разработана (в XIX в.) теория основных акустических явлений. Иначе обстояло дело со светом.

В первых десятилетиях XIX в. была создана волновая теория света, объяснявшая или предсказывавшая обширный круг важнейших оптических явлений (см. гл. V, § 7). Но «волнами чего» является свет? Какова физическая природа того вектора, который колеблется и распространяется в световой волне? Правильный ответ на этот вопрос еще не был найден. «Световой вектор» старались себе представить как смещение частиц некоторого упругого вещества — «эфира», заполняющего вселенную (так как свет приходит к нам от Солнца и звезд). Но это представление наталкивалось на громадные трудности, в частности такую: распространение упругих поперечных волн возможно в твердом теле, но не в газе и не в жидкости — стало быть, эфир есть твердое тело. Но как же сквозь него движутся без сопротивления планеты? Разрешить подобного рода противоречия до сих пор никому не удалось.

Забудем на мгновение о свете и обратимся к истории электромагнетизма.

В 60-х годах Максвелл, опираясь на воззрения Фарадея, создал новую теорию электромагнитных явлений. Согласно прежним теориям электромагнитных явлений, распространение электрических и магнитных взаимодействий происходит мгновенно: так, например, силы, действующие на магнитную стрелку со стороны соленоида, появляются в то самое мгновение, когда по соленоиду начинает течь ток, каково бы ни было расстояние  $r$  между соленоидом и стрелкой. Важнейший вывод из новой теории (он был впервые высказан Максвеллом в письме к Фарадею в 1861 г.) заключается в следующем. Электрическое и магнитное поля распространяются с конечной скоростью в виде электромагнитных волн, где векторы  $E$  и  $H$  в каждой точке пропорциональны и перпендикулярны друг к другу и перпендикулярны к направлению распространения. Скорость распространения этих волн в вакууме равна электродинамической постоянной  $c$  (отношению абсолютной электромагнитной единицы электрического заряда к абсолютной электростатической единице электрического заряда; это отношение имеет размерность скорости); так, в примере с соленоидом и магнитной стрелкой силы, действующие на стрелку, появляются спустя время  $r/c$  после замыкания тока.

Во времена Максвелла уже было известно, что с точностью до ошибки измерения

$$c = 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{см}}{\text{сек}},$$

что удивительным образом совпадало со скоростью света в вакууме, уже хорошо измеренной до этого (см. гл. V, § 9).

Сопоставляя известные из опыта свойства света с выведенными математическим путем из теории Максвелла свойствами электромагнитных волн, можно было предположить (что и сделал Максвелл), что свет — это электромагнитные волны, т. е. что в световой волне распространяются электрическое и магнитное поля. Возникшая таким образом *электромагнитная теория света* не только вложила новое физическое содержание в уже хорошо разработанные разделы волновой оптики, но и позволила объяснить непринужденно ряд явлений, бывших для нее прежде камнем преткновения (см. § 7).

Однако для окончательного торжества теории Максвелла не хватало прямого экспериментального доказательства того, что электрические и магнитные поля распространяются в виде волн, обладающих перечисленными выше свойствами. Такое экспериментальное доказательство было дано в 1887 г. Герцем. Он исследовал в своих опытах электромагнитное поле в пространстве, окружающем проводники, в которых он возбуждал электромагнитные колебания высокой частоты, и убедился, что это поле имеет характер волн, свойства которых совпадают с предсказанными теорией Максвелла.

После положительного результата опытов Герца теория Максвелла получила широкое признание. При этом оптика стала одним из разделов учения об электромагнитных явлениях. В течение некоторого времени продолжались еще бесплодные попытки свести в свою очередь электромагнитные явления к механическим явлениям в «эфире». В XX в. (в значительной мере благодаря теории относительности) эти попытки были окончательно оставлены, и стало общепризнанным, что за электромагнитными явлениями не скрываются никакие «закулисные» механические явления.

Несколько лет спустя после экспериментального доказательства существования электромагнитных волн, излучаемых колебательным контуром (их теперь называют радиоволнами), было положено начало их техническому применению. Речь идет о рождении радио — одном из величайших изобретений в истории человечества. Изобретение радио Александром Степановичем Поповым (1859 — 1906) явилось результатом исследований, проводившихся им с ясно поставленной целью осуществить передачу сигналов на расстояние с помощью электромагнитных волн. Исследования эти проводились в лаборатории Минных офицерских классов в Кронштадте, где в то время А. С. Попов был преподавателем «практической физики» (впоследствии А. С. Попов стал профессором физики Петербургского электротехнического института).

7 мая (25 апреля по старому календарю) 1895 г. А. С. Попов выступил с сообщением на заседании Физического отделения Русского физико-химического общества. В этом сообщении он продемонстрировал созданную им аппаратуру, которая легла в основу «телеграфирования без проводов»\*).

Мы приводим (рис. 223) схему созданного А. С. Поповым первого радиоприемника, принимавшего затухающие колебания, создававшиеся

\*) Радио называли в первое время «телеграфией без проводов»

искровым генератором (рис. 224). Действие своего приемника А. С. Попов описывает следующими словами \*):

«Трубка с металлическими опилками подвешена горизонтально между зажимами *M* и *N* на легкой часовой пружине, которая для большей эластичности согнута со стороны одного зажима зигзагом. Над трубкой расположен звонок так, чтобы при своем действии он мог давать легкие удары молоточком по середине трубки, защищенной от разбивания резиновым кольцом. Удобнее всего трубку и звонок укрепить на общей вертикальной дощечке. Реле может быть помещено как угодно. Действует прибор следующим образом. Ток батареи в 4 — 5 вольт постоянно циркулирует от зажима *P* к платиновой пластинке *A*, далее через порошок, содержащийся в трубке, к другой пластинке *B* и по обмотке электромагнита реле обратно к батарее. Сила этого тока недостаточна для притягивания якоря реле, но если трубка *AB* подвергнется действию электрического колебания, то сопротивление мгновенно уменьшится, и ток увеличится настолько, что якорь реле притянется. В этот момент цепь, идущая от батареи к звонку, прерванная в точке *c*, замкнется, и звонок начнет действовать, но тотчас же сотрясения трубки опять уменьшат ее проводимость, и реле разомкнет цепь звонка. В моем приборе сопротивление опилок после сильного встряхивания бывает около 100 000 омов, а реле, имея сопротивление около 250 омов, притягивает якорь при токах от 5 до 10 миллиампер (пределы регулировки), т. е. когда сопротивление всей цепи падает ниже тысячи омов. На одиночное колебание прибор отвечает коротким звонком; непрерывно действующие разряды спирали отзываюся довольно частыми, через приблизительно равные промежутки следующими звонками».

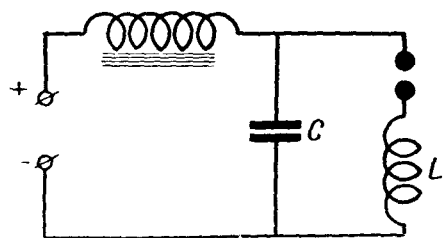


Рис. 224. Принципиальная схема искрового генератора. Конденсатор постепенно заряжается от источника высокого напряжения. Когда напряжение на искровом промежутке достигает некоторого критического значения, наступает пробой (искра) и происходит колебательный затухающий разряд «периода»  $2\pi\sqrt{LC}$ . По окончании разряда искровой промежуток теряет проводимость, конденсатор снова начинает заряжаться и т. д.

А. С. Попов так закончил свое сообщение: «В заключение могу выразить надежду, что мой прибор при дальнейшем усовершенствовании его может быть применен к передаче сигналов на расстояние при помощи

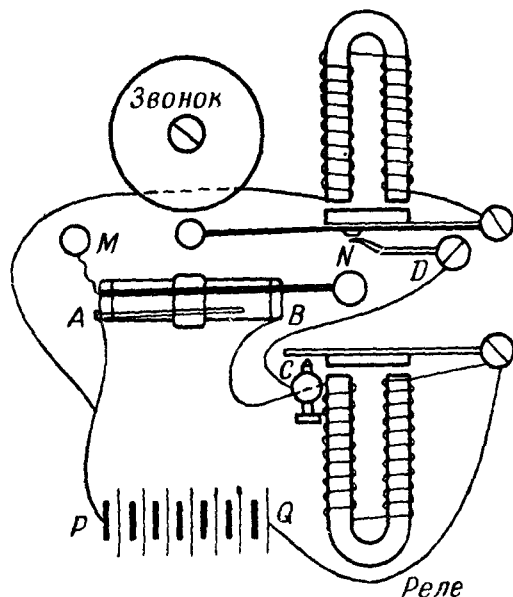


Рис. 223. Рисунок А. С. Попова, изображающий схему первого радиоприемника.

Здесь важно отметить следующее. А. С. Попов, создавая свой приемник, не только усовершенствовал когерер (трубку с опилками) и автоматизировал его работу, но и обнаружил, что чувствительность приемника значительно увеличивается при присоединении к когереру провода. Так была изобретена антенна. Изобретение антенны имело решающее значение для осуществления радиосвязи.

Здесь важно отметить следующее. А. С. Попов, создавая свой приемник, не только усовершенствовал когерер (трубку с опилками) и автоматизировал его работу, но и обнаружил, что чувствительность приемника значительно увеличивается при присоединении к когереру провода. Так была изобретена антенна. Изобретение антенны имело решающее значение для осуществления радиосвязи.

\*) Журнал Русского физ.-хим. общества, т. 28, стр. 711 (1896).

быстрых электрических колебаний, как только будет найден источник таких колебаний, обладающий достаточной энергией».

24 (12 марта) 1896 г. А. С. Попов, создав к тому времени более мощный источник колебаний, продемонстрировал на заседании Русского физико-химического общества передачу первой в мире радиограммы. Передатчик находился в Химическом институте Петербургского университета, приемник — в аудитории старого физического кабинета. Расстояние между передатчиком и приемником было приблизительно 250 м \*).

Изложение истории развития радио не входит в задачи этой книги. Мы ограничимся двумя замечаниями.

1. Огромную роль в развитии радио сыграло появление электронных ламп и основанных на их применении разнообразных устройств, частично описанных в гл. IV. Уже четверть века назад электронные приборы и генерируемые с их помощью незатухающие колебания вытеснили из радиотехники искру и затухающие колебания.

2. Радио в настоящее время — громадная и разносторонняя отрасль техники, охватывающая не только передачу на любые расстояния в земных пределах сообщений, речи, музыки, передачу на значительные расстояния неподвижных и движущихся изображений (телевидение), но и вождение кораблей и самолетов (радионавигация), измерение расстояний между удаленными пунктами земной поверхности (радиогеодезия), определение местоположения невидимых предметов (радиолокация) и т. д. Рожденное физикой, радио в свою очередь обогатило науку чрезвычайно гибкими и мощными средствами исследования и многими новыми идеями. Радиофизическая аппаратура (например, усилители, электронные осциллографы, циклотроны, синхротроны, приемники, обнаруживающие радиоволны, излучаемые Солнцем и другими небесными телами) революционировала технику физического эксперимента и оказывает все большее влияние на характер эксперимента и наблюдений в геофизике \*\*), астрофизике, химии, биологии.

## § 2. Уравнения Максвелла и их физический смысл

Пусть читателя не пугает некоторая абстрактность этого параграфа и следующих за ним. Понимание основ теории Максвелла — единственный ключ, открывающий доступ ко вполне конкретным вещам, о которых будет идти речь дальше.

Теория Максвелла утверждает, что между основными величинами, характеризующими электромагнитное поле в произвольной «неподвижной» среде или в пустоте, существуют простые и универсальные связи, выражаемые написанными ниже четырьмя уравнениями. В эти уравнения входят величины, физический смысл которых предполагается известным читателю: вектор  $E$  — напряженность электрического поля; вектор  $D$  — электрическая индукция (ее иногда называют также — неудачно — электри-

\*) Подробнее об истории изобретения радио см., например, Б. А. Введенский, А. С. Попов — изобретатель радио, Изд. АН СССР, 1948, или А. И. Берг и М. И. Радоский, Изобретатель радио А. С. Попов, Госэнергоиздат, М.—Л., 1949. Отметим, что первая патентная заявка Маркони, аналогичная по содержанию изобретению Попова, была сделана им 2 июня 1896 г. Из сопоставлений приведенных здесь дат видна несостоятельность притязаний Маркони на приоритет в изобретении радио.

\*\*) Первое применение радио к геофизике является заслугой А. С. Попова: его первый приемник был установлен в Лесном институте в Петербурге в качестве «грозоотметчика»; он реагировал на грозовые разряды, происходившие на расстоянии до 30 км.

ческим смещением); вектор  $\mathbf{H}$  — напряженность магнитного поля; вектор  $\mathbf{B}$  — магнитная индукция; скаляр  $\rho$  — объемная плотность электрического заряда; вектор  $\mathbf{j}$  — объемная плотность электрического тока. Мы будем пользоваться гауссовой системой единиц, т. е. системой, в которой единицы для  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\rho$ ,  $\mathbf{j}$  совпадают с единицами системы CGSE, а единицы для  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{B}$  совпадают с единицами системы CGSM. При этом в уравнения входит единственная константа — электродинамическая постоянная  $c$ .

Эти четыре уравнения таковы:

$$\oint D_n dS = 4\pi \int \rho dV, \quad (7.1)$$

$$\oint B_n dS = 0, \quad (7.2)$$

$$\oint E_l dl = -\frac{1}{c} \int B_n dS, \quad (7.3)$$

$$\oint H_l dl = +\frac{4\pi}{c} \int \left( j_n + \frac{D_n}{4\pi} \right) dS. \quad (7.4)$$

Здесь  $dl$  — элемент длины,  $dS$  — элемент поверхности,  $dV$  — элемент объема. Индекс  $l$  означает проекцию на направление элемента  $dl$ , индекс  $n$  — проекцию на направление нормали к элементу  $dS$ . Кружок на знаке интеграла означает, что он берется вдоль замкнутого контура или по замкнутой поверхности. В первом случае направление обхода контура образует правый винт с положительным направлением нормали к  $dS$ .

Интегралы берутся: в левой части (7.1) по произвольной замкнутой поверхности, в правой части (7.1) по всему заключенному в ней объему, в левой части (7.2) — по произвольной замкнутой поверхности, в правых частях (7.3), (7.4) — по произвольным незамкнутым поверхностям, в левых частях (7.3), (7.4) — по контурам этих поверхностей.

Уравнение (7.1) есть выражение теоремы Гаусса, согласно которой поток электрической индукции через замкнутую поверхность равен числу  $4\pi$ , умноженному на полный электрический заряд, заключенный внутри этой поверхности.

Уравнение (7.2) выражает тот факт, что не существует магнитных зарядов: поток магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю.

Уравнение (7.3) выражает закон индукции Фарадея: циркуляция электрического поля по произвольной замкнутой кривой равна изменению потока магнитной индукции через произвольную поверхность, ограниченную этой кривой. Содержание этого уравнения иллюстрирует рис. 225, где пунктирные светлые стрелки изображают вектор  $\mathbf{B}$  в некоторый момент  $t$ , пунктирные черные — его приращение  $\Delta \mathbf{B}$  за малый промежуток времени  $\Delta t$ , замкнутые кривые — силовые линии электрического поля, возникающие в результате изменения магнитной индукции. Электрические силовые линии образуют *левый* винт с направлением приращения вектора  $\mathbf{B}$ . Именно этот факт выражается знаком  $-$ , стоящим перед правой частью уравнения (7.3), в отличие от знака  $+$  перед правой частью уравнения (7.4).

Уравнение (7.4) есть обобщение формулы

$$\oint H_l dl = \frac{4\pi}{c} \int j_n dS = \frac{4\pi}{c} \sum i, \quad (7.4')$$

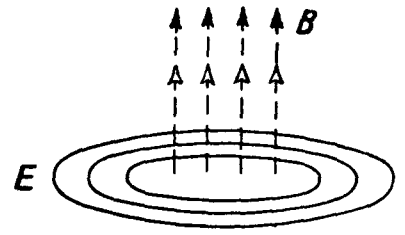


Рис. 225. Электрическое поле, возникающее вследствие изменения магнитной индукции.

справедливой для замкнутых электрических токов и утверждающей, что циркуляция напряженности магнитного поля по любому замкнутому контуру равна числу  $4\pi/c$ , умноженному на алгебраическую сумму токов, пронизывающих контур (ток считается положительным, если его направление образует *правый* винт с выбранным направлением обхода по контуру). В случае постоянных токов вектор  $\mathbf{D}$  во всем пространстве не меняется со временем, поэтому  $\dot{\mathbf{D}}$  всюду равно нулю, и уравнение (7.4) сводится к (7.4'). Уравнение (7.4) утверждает, что наряду с током проводимости  $\int j_n dS$  в создании магнитного поля принимает участие «ток смещения» — этим термином (как показало дальнейшее развитие науки, довольно неудачным) Максвелл обозначил величину  $\int (\dot{D}_n/4\pi) dS$ . Это утверждение играет в теории Максвелла фундаментальную роль.

Пользуясь термином «ток смещения», мы имеем право сказать: «через данную поверхность течет ток смещения» всякий раз, когда меняется

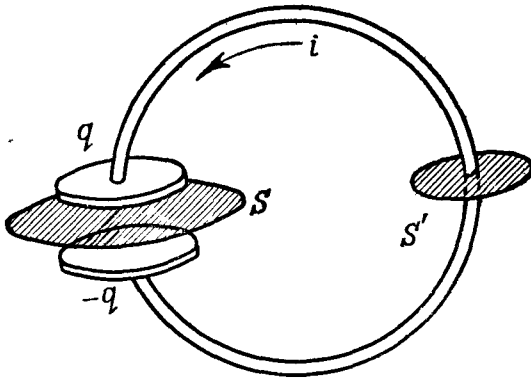


Рис. 226. Через поверхность  $S$  течет «ток смещения», через поверхность  $S'$  течет равный ему ток проводимости.

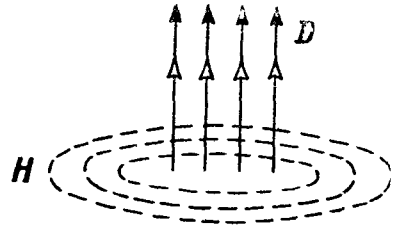


Рис. 227. Магнитное поле смещения, т. е. магнитное поле, возникающее вследствие изменения электрической индукции.

поток электрической индукции, пронизывающий эту поверхность. Например, через поверхность  $S$ , проведенную между обкладками конденсатора, входящего в состав колебательного контура (рис. 226), течет синусоидальный ток смещения, синфазный с током проводимости в проводе, замыкающем конденсатор. Действительно  $\mathbf{D}$  пропорционально заряду обкладок  $q$ , а следовательно,  $\dot{\mathbf{D}}$  пропорционально  $\dot{q} = i$ , т. е. току в проводе. Если поверхность  $S$  охватывает практически все силовые линии электрического поля конденсатора, ток смещения через нее равен току проводимости  $i$ . Действительно, в этом случае на основании уравнения (7.1) откуда ток смещения

$$\int D_n dS = 4\pi q,$$

откуда ток смещения

$$\int \frac{\dot{D}_n}{4\pi} dS = \dot{q} = i.$$

Это можно выразить так: «ток проводимости в проводе замыкается током смещения через конденсатор».

В случае, если в рассматриваемой области пространства нет токов проводимости, уравнение (7.4) сводится к следующему:

$$\oint H_i dl = \frac{1}{c} \int \dot{D}_n dS.$$

Это уравнение иллюстрирует рис. 227. Светлые стрелки указывают значение вектора  $\mathbf{D}$  в некоторый момент времени  $t$ , черные — приращение  $\Delta \mathbf{D}$  вектора  $\mathbf{D}$  за малый промежуток времени  $\Delta t$ . Пунктирные замкнутые кривые — силовые линии магнитного поля, возникающего вследствие изменения потока электрической индукции. Обратим внимание на то, что магнитные линии образуют *правый* винт с направлением тока смещения, т. е. направлением вектора  $\Delta \mathbf{D}$ .

Уравнения (7.1) — (7.4) не исчерпывают содержания теории Максвелла. Она указывает, кроме того, связь между энергией электромагнитного поля и векторами  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B}$ . Для простейшего случая линейной среды (немного дальше будет разъяснено, что это означает) плотность энергии электромагнитного поля  $\omega$  такова:

$$\omega = \frac{\mathbf{E}\mathbf{D}}{8\pi} + \frac{\mathbf{B}\mathbf{H}}{8\pi}. \quad (7.5)$$

Энергия, заключенная в некотором объеме, выражается интегралом

$$W = \int \omega dV = \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{E}\mathbf{D} + \mathbf{H}\mathbf{B}) dV. \quad (7.6)$$

Подобно тому как для теоретического исследования упругих волн (гл. VI, § 2) необходимо, кроме законов механики, знать, какова в рассматриваемой среде связь между напряжением и деформацией, для теоретического исследования электромагнитных явлений необходимо, кроме уравнений (7.1) — (7.4), знать связь между  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{E}$ . Среда называется *линейной*, если компоненты этих векторов связаны линейными соотношениями. Мы будем рассматривать здесь частный случай *изотропной* среды, т. е. среды, свойства которой во всех направлениях одинаковы. Соотношения между рассматриваемыми векторами тогда особенно просты.

В идеальном диэлектрике мы имеем:

$$\mathbf{j} = 0$$

(нет тока проводимости) при любом  $\mathbf{E}$ ; в действительности это уравнение строго справедливо только для вакуума. Мы здесь будем считать, что в диэлектриках

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (7.7)$$

где  $\varepsilon$ ,  $\mu$  (диэлектрическая и магнитная проницаемость) — постоянные скаляры, характеризующие данный диэлектрик, а в металлах

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad (7.8)$$

где  $\sigma$  (проводимость) — постоянный скаляр, характеризующий данный металл.

Согласно теории Максвелла, в диэлектрике между соленоидом и магнитной стрелкой (пример, о котором говорилось в § 1) последовательно происходят следующие явления: 1) появление магнитного поля тока и связанной с ним магнитной индукции вблизи соленоида; 2) появление электрического поля и связанной с ним электрической индукции вследствие появления магнитной индукции; 3) появление дополнительных магнит-

ного поля и индукции вследствие появления электрической индукции; 4) появление дополнительного электрического поля вследствие изменения магнитной индукции и т. д., в соответствии с тем, что поясняют схематически рис. 225, 227. Но словесные рассуждения бессильны раскрыть, как развиваются эти явления. Здесь необходим математический анализ, основанный на уравнениях Максвелла.

Подобно тому как мы поступили в гл. VI для упругих волн, мы рассмотрим подробно лишь случай распространения *плоского* электромагнитного поля — такого поля, в котором все величины зависят только от *одной* пространственной координаты  $x$  (и, разумеется, от времени  $t$ ).

При этом мы предположим, что имеем дело с идеальным диэлектриком ( $j = 0$ ) и притом незаряженным ( $\rho = 0$ ). В этом случае система уравнений (7.1) — (7.4) принимает вид

$$\oint D_n dS = 0, \quad (7.1a) \quad \oint B_n dS = 0, \quad (7.2a)$$

$$\oint E_t dl = -\frac{1}{c} \int \dot{B}_n dS, \quad (7.3a) \quad \oint H_t dl = +\frac{1}{c} \int D_n dS \quad (7.4a)$$

### § 3. Электромагнитные волны (теория)

1. **Общее исследование плоского электромагнитного поля.** Итак, пусть  $E$ ,  $D$ ,  $B$ ,  $H$  зависят (кроме  $t$ ) только от  $x$ . В каждой плоскости  $x = \text{const}$  указанные величины в любой рассматриваемый момент времени одинаковы.

Разложим векторы  $E$  на три взаимно перпендикулярных вектора, коллинеарных осям координат:

$$E = E_x + E_y + E_z,$$

и сделаем то же для  $H$ :

$$H = H_x + H_y + H_z.$$

На основании (7.7) имеем:

$$D = \varepsilon E = D_x + D_y + D_z,$$

$$B = \mu H = B_x + B_y + B_z,$$

где каждая составляющая  $D$  или  $B$  равна соответственной составляющей  $E$  или  $H$ , умноженной на скаляр  $\varepsilon$  или  $\mu$ .

Возьмем в качестве «вспомогательной поверхности» поверхность параллелепипеда высоты  $\Delta x$  с квадратным основанием, стороны которого параллельны осям  $y$ ,  $z$  и имеют одинаковую длину, равную единице (рис. 228).

Применим сначала к грани  $MNPQ$  уравнение (7.3a). Циркуляция  $E$  по контуру  $MNPQM$  сводится к сумме интегралов по сторонам  $MN$  и  $PQ$ , так как вследствие независимости  $E$  от  $y$  интегралы по  $NP$  и  $QM$  равны по величине и противоположны по знаку и дают в сумме нуль. Найдем интегралы по сторонам  $MN$ ,  $PQ$ :

$$\int_{MN} E_t dl = E_y \cdot 1, \quad \int_{PQ} E_t dl = -E_y \cdot 1$$

(в первом интеграле  $E_t = E_y$ , а во втором  $E_t = -E_y$ ). С другой стороны, для грани  $MNPQ$

$$\int B_n dS = -\dot{B}_z \cdot 1 \cdot \Delta x,$$



так как  $B_n = -B_z$ , если нормаль, как это требуется (см. § 2), связана *правым* винтом с обходом по контуру. Следовательно,

$$E_y(x, t) - E_y(x + \Delta x, t) = \frac{1}{c} \dot{B}_z \Delta x,$$

откуда, деля на  $\Delta x$  и перейдя к пределу при  $\Delta x \rightarrow 0$ , получаем:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_z}{\partial t} \quad (7.9)$$

( $\partial B_z / \partial t$  означает то же самое, что  $\dot{B}_z$ ).

Применяя к той же грани уравнение (7.4а), мы получим аналогичным образом

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = +\frac{1}{c} \frac{\partial D_z}{\partial t}. \quad (7.10)$$

Применим теперь уравнения (7.3а), (7.4а) к грани  $MQRT$ . Поступая так же, как при выводе (7.9), и обращая особенное внимание на знаки всех величин, мы получим:

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{1}{c} \frac{\partial B_y}{\partial t}, \quad (7.11)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial D_y}{\partial t}. \quad (7.12)$$

Применим теперь к нашей вспомогательной поверхности уравнение (7.1а). Ясно, что потоки вектора  $\mathbf{D}$ , выходящие через грани  $MNPQ$  и  $MQRT$ , равны соответственно ввиду независимости  $\mathbf{D}$  от  $y$  и  $z$  потокам, входящим через грань  $TUSR$  и грань  $NPSU$ . Общий поток, выходящий из поверхности, равен, таким образом, избытку потока  $D_x(x + \Delta x, t) \cdot 1 \cdot 1$ , выходящего через правую грань  $PQRS$ , над потоком  $D_x(x, t) \cdot 1 \cdot 1$ , входящим через левую грань  $NMTU$ , т. е.

$$D_x(x + \Delta x, t) - D_x(x, t).$$

Согласно (7.1) этот поток равен нулю, откуда

$$\frac{D_x(x + \Delta x, t) - D_x(x, t)}{\Delta x} = 0,$$

или, перейдя к пределу  $\Delta x \rightarrow 0$ ,

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} = 0. \quad (7.13)$$

Аналогичным образом мы получим на основании (7.2а)

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} = 0. \quad (7.14)$$

Применим, наконец, к грани  $PQRS$  уравнение (7.3а). Циркуляция электрического поля по контуру  $PQRS$  равна нулю, так как во всех точках контура  $E$  имеет одинаковые значения. Следовательно, в силу (7.3а)

$$0 = \int \dot{B}_n dS,$$

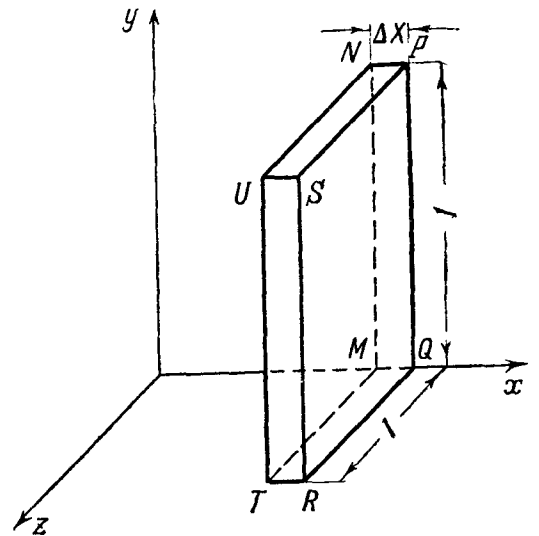


Рис. 228. Вспомогательная поверхность, используемая для исследования плоского поля.

где интеграл берется по грани  $PQRS$ . Но так как  $B_n$  равно в данном случае  $B_x$  и не зависит от  $y$  и  $z$ , имеем:

$$0 = \int \dot{B}_n dS = \int \dot{B}_x dS = \dot{B}_x \int dS = \dot{B}_x \cdot 1 \cdot 1 = \dot{B}_x,$$

или

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0. \quad (7.15)$$

Аналогичным образом получаем на основании (7.4а)

$$\frac{\partial D_x}{\partial t} = 0. \quad (7.16)$$

Уравнения (7.13) и (7.16) показывают, что  $D_x$  есть постоянная величина, не зависящая ни от  $x$ , ни от  $t$ . Уравнения (7.14) и (7.15) показывают, что таким же свойством обладает величина  $B_x$ . Кроме того, мы видим, что наши уравнения не устанавливают никакой связи величин  $D_x$ ,  $B_x$  между собой, а также между величинами  $D_x$  и  $B_x$ , с одной стороны, и всеми остальными компонентами полей  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  и индукцией  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$ , с другой стороны. (Действительно, если мы положим  $D_x = 0$ , или  $B_x = 0$ , или  $D_x = B_x = 0$ , то в уравнениях, куда входят остальные компоненты электрического и магнитного полей и индукции, ничего не изменится.) Это физически означает следующее. Плоское электромагнитное поле, зависящее только от  $x$ , является (вообще говоря) суперпозицией однородного электростатического поля, параллельного оси  $x$ , независимого от него однородного статического магнитного поля, также параллельного оси  $x$ , и независимого от этих двух полей электромагнитного поля, векторы  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B}$  которого имеют только  $y$ - и  $z$ -компоненты, т. е. расположены в плоскостях, перпендикулярных к оси  $x$ . В частности, может быть  $H_x = B_x = E_x = D_x = 0$ , т. е. указанные выше статические поля отсутствуют, и существует только поле, в котором электрические и магнитные векторы расположены в плоскостях, перпендикулярных к оси  $x$ .

Нас здесь интересуют только *распространяющиеся* электромагнитные поля. Статические поля сюда не относятся: они уже существуют во всем рассматриваемом пространстве в тот момент, с которого начинается наше рассмотрение. Следовательно, нас может интересовать только то из трех указанных выше полей, векторы  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B}$  которого лежат в плоскостях, перпендикулярных к оси  $x$ . Но согласно сказанному выше статические поля  $D_x$ ,  $B_x$  не оказывают никакого влияния на это распространяющееся поле. Поэтому, если даже  $D_x$  и  $B_x$  отличаются от нуля, интересующее нас распространяющееся поле ведет себя так же, как если бы  $D_x = B_x = 0$ . Часто дело обстоит еще проще: статические поля просто отсутствуют.

Мы пришли к следующему весьма важному результату: *распространяющееся плоское поле является поперечным полем*; в нем векторы  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B}$  лежат в плоскостях, перпендикулярных к направлению распространения.

**2. Плоские волны.** Заметим, что распространяющееся плоское поле также является суперпозицией двух не связанных между собой полей:

а) поля, в котором векторы  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$  коллинеарны оси  $y$ , а векторы  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B}$  — оси  $z$  и которое описывается уравнениями (7.9) и (7.12).

Так как

$$B_z = \mu H_z, \quad D_y = \epsilon E_y,$$

эти уравнения могут быть заменены следующими:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\frac{\epsilon}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t}; \quad (7.17)$$

б) поля, в котором векторы  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$  коллинеарны оси  $z$ , а векторы  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B}$  — оси  $y$  и которое описывается уравнениями (7.10) и (7.11) или

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\mu}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t}, \quad (7.18)$$

так как

$$B_y = \mu H_y, \quad D_z = \epsilon E_z.$$

Действительно, компоненты  $E_y$ ,  $D_y$ ,  $H_z$ ,  $B_z$ , входящие в уравнения (7.9), независимы от компонент  $E_z$ ,  $D_z$ ,  $H_y$ ,  $B_y$ , входящих в уравнения (7.10), (7.11), между тем как уравнения (7.9), (7.12) связывают между собой  $E_y$  и  $B_z$ ,  $H_z$  и  $D_y$ , а уравнения (7.10), (7.11) связывают между собой  $E_z$  и  $B_y$ ,  $H_y$  и  $D_z$ .

Поле, описываемое уравнениями (7.17), мы назовем  $y$ -полем (по тому, как направлен в нем вектор  $\mathbf{E}$ ); поле, описываемое уравнениями (7.18), —  $z$ -полем. Рассмотрим отдельно эти поля. В каждом из них  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  связаны между собой; каждое из этих полей не является ни чисто электрическим, ни чисто магнитным — оба являются *электромагнитными* полями.

Рассмотрим сначала  $y$ -поле.

Дифференцируя первое уравнение (7.17) по  $x$ , второе по  $t$ , получаем:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x \partial t}, \quad \frac{\partial^2 H_z}{\partial t \partial x} = -\frac{\epsilon}{c} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2},$$

откуда, исключая выражение

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 H_z}{\partial t \partial x},$$

получаем:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\epsilon \mu} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}. \quad (7.19)$$

Это — *волновое уравнение* (см. гл. V, § 8), причем роль скорости распространения играет величина  $u = c/\sqrt{\epsilon \mu}$ . Итак, электрическая компонента  $y$ -волны распространяется в виде недеформирующейся волны со скоростью

$$u = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}. \quad (7.20)$$

Дифференцируя первое уравнение (7.17) по  $t$ , второе — по  $x$ , получаем:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t \partial x} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = -\frac{\epsilon}{c} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial t},$$

откуда, исключая выражение

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial t},$$

находим:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\epsilon \mu} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2}. \quad (7.19a)$$

Получилось снова волновое уравнение, и притом с тем же коэффициентом, что для  $E_y$ . Итак, магнитная компонента  $y$ -поля также распро-

страняется в виде недеформирующейся волны, и притом с той же скоростью, что и его электрическая компонента.

Вместо « $y$ -поле» мы имеем право говорить « $y$ -волна».

Согласно волновому уравнению (7.19)

$$E_y = f(x \mp ut), \quad (7.21)$$

согласно волновому уравнению (7.19а)

$$H_z = g(x \mp ut), \quad (7.21а)$$

где  $f$ ,  $g$  — обозначения некоторых функций одного и того же аргумента  $x \mp ut$ . Продифференцируем (7.21) по  $x$ , (7.21а) по  $t$ :

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = f'(x \mp ut), \quad \frac{\partial H_z}{\partial t} = \mp ug'(x \mp ut).$$

Подставляя эти выражения в (7.17), получим:

$$g'(x \mp vt) = \pm \frac{c}{\mu} f'(x \mp vt).$$

Интегрируя, получаем:

$$g(x \mp vt) = \pm \frac{c}{\mu} f(x \mp vt) + H_0,$$

где  $H_0$  — постоянная. Таким образом, на основании (7.21), (7.21а)

$$H_z = \pm \frac{c}{\mu} E_y + H_0.$$

Так как статическое поле нас не интересует (ср. § 3), мы положим:

$$H_0 = 0.$$

Используя, кроме того, соотношение (7.20), получаем:

$$H_z = \pm \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_y. \quad (7.22)$$

Верхний знак соответствует волне, распространяющейся слева направо, нижний — волне, распространяющейся справа налево.

Таким образом, моментальные снимки и осциллограммы напряженностей электрического и магнитного полей не независимы: они отличаются только масштабами (рис. 229): в каждой точке и в каждый момент времени магнитная компонента пропорциональна электрической компоненте.

Перейдем теперь к  $z$ -полю.

Проделав такие же вычисления, как для  $y$ -поля, мы получим волновые уравнения

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\epsilon \mu} \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\epsilon \mu} \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} \quad (7.23)$$

для величин  $E_z$ ,  $H_y$  и соотношение между ними

$$H_y = \mp \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_z \quad (7.24)$$

(рис. 230). Таким образом, здесь также напряженности электрического и магнитного полей распространяются в виде недеформирующихся волн с одинаковой скоростью, равной скорости распространения  $y$ -волны;

между обеими напряженностями существует такое же соотношение, как в  $y$ -волне. Вместо « $z$ -поле» мы можем говорить « $z$ -волна»\*).

Как в  $y$ -волне, так и в  $z$ -волне векторы  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  перпендикулярны друг к другу и перпендикулярны к направлению распространения. Как видно из рис. 229 и 230, распространение происходит в ту сторону, куда направлено векторное произведение  $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ . Иными словами, векторы  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{n}$ , где  $\mathbf{n}$  направлен в сторону распространения волны, образуют правую тройку.

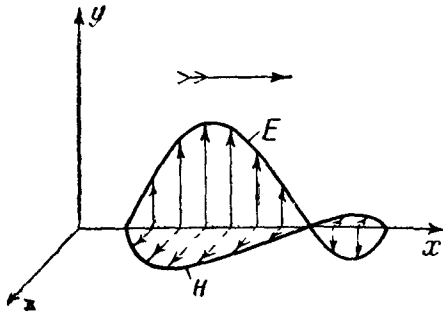


Рис. 229. Моментальный снимок  $y$ -волны, распространяющейся слева направо.

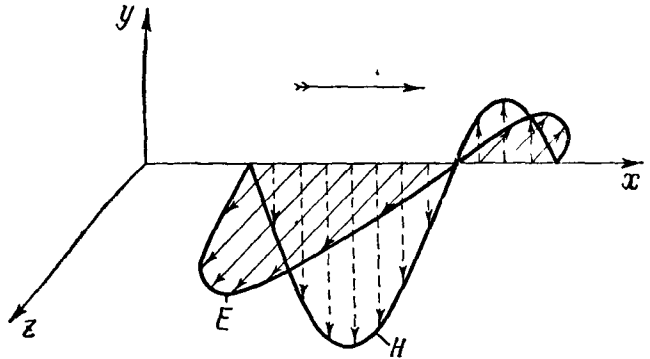


Рис. 230. Моментальный снимок  $z$ -волны, распространяющейся слева направо.

В случае вакуума ( $\epsilon = 1$ ,  $\mu = 1$ ) соотношения (7.20), (7.22) упрощаются: скорость распространения

$$u = c,$$

т. е. равна электродинамической постоянной. Кроме того, для  $y$ -волны

$$H_z = \pm E_y, \quad (7.22a)$$

а для  $z$ -волны

$$H_y = \mp E_z. \quad (7.24a)$$

При сделанном выборе единиц абсолютные величины напряженности электрического и магнитного полей равны друг другу.

Как мы знаем, световые волны распространяются в вакууме со скоростью, равной электродинамической постоянной; в них колеблется некоторый вектор, перпендикулярный к направлению распространения. Теперь должно стать понятно, как могла возникнуть догадка Максвелла об электромагнитном характере световых волн.

В качестве «светового вектора» можно рассматривать вектор  $\mathbf{E}$ , вектор  $\mathbf{H}$  или любую их линейную комбинацию. Целесообразнее всего рассматривать в качестве светового вектора напряженность электрического поля  $\mathbf{E}$ , так как в силе  $e\mathbf{E} + e\mathbf{v} \times \mathbf{H}/c$ , с которой электромагнитная волна действует на заряженную частицу ( $e$  — заряд частицы,  $v$  — ее скорость), при  $v \ll c$  (что чаще всего имеет место) первое слагаемое гораздо больше второго\*\*).

Из теории Максвелла следует, что диэлектрики прозрачны для электромагнитных волн и что последние распространяются в них со скоростью, выражаемой формулой (7.20), т. е. практически формулой

$$u = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}, \quad (7.20a)$$

\*) Зная свойства  $y$ -поля, мы могли бы заключить о существовании аналогичных свойств  $z$ -поля и без новых вычислений, заметив просто, что оси  $y$  и  $z$  физически равноправны.

\*\*) Косой крест — знак векторного произведения.

так как в диэлектриках  $\mu$  отличается от единицы только в четвертом или еще более далеком десятичном знаке.

Формула (7.20а) выражает так называемый закон Максвелла. О том, в какой мере он оправдывается на опыте, будет сказано позднее.

Мы будем в дальнейшем, пользуясь для диэлектриков формулами (7.22), (7.24), полагать в них  $\mu = 1$ :

$$H_z = \pm \sqrt{\varepsilon} E_y, \quad (7.226)$$

$$H_y = \mp \sqrt{\varepsilon} E_z. \quad (7.246)$$

Заметим еще (ср. гл. V, § 8), что  $y$ -поле может представлять собой не только одну волну типа (7.21), но и суперпозицию двух волн этого типа, бегущих навстречу друг другу:

$$E_y = f_1(x - ut) + f_2(x + ut),$$

$$H_z = \sqrt{\varepsilon} f_1(x - ut) - \sqrt{\varepsilon} f_2(x + ut).$$

Аналогично, разумеется, обстоит дело и с  $z$ -полем.

**3. Синусоидальные плоские волны.** Рассмотрим сначала частный случай — синусоидальную  $y$ -волну. Имеем на основании (7.21), (7.226)

$$\left. \begin{aligned} E_y &= A \cos(\omega t - kx), \\ H_z &= \sqrt{\varepsilon} A \cos(\omega t - kx), \end{aligned} \right\} \quad (7.25)$$

если волна распространяется в сторону возрастающих  $x$ , и

$$\left. \begin{aligned} E_y &= A \cos(\omega t + kx), \\ H_z &= -\sqrt{\varepsilon} A \cos(\omega t + kx), \end{aligned} \right\} \quad (7.25a)$$

если волна распространяется в сторону убывающих  $x$  ( $k = \omega/u$ ).

На рис. 231, а, б изображены моментальные снимки  $y$ -волны для того и другого случая. Обратим внимание еще раз на то, что максимумы и нули  $E$  и  $H$  находятся в одних и тех же местах. С течением времени картина а) перемещается равномерно вправо, картина б) — влево со скоростью  $c/\sqrt{\varepsilon}$ . На рис. 232 дано другое изображение моментального снимка синусоидальной  $y$ -волны.

Рассмотрим теперь общий случай синусоидальной плоской электромагнитной волны, т. е. суперпозицию синусоидальной  $y$ -волны и синусоидальной  $z$ -волны, имеющих одинаковую частоту. Будем считать для определенности, что волна распространяется слева направо. Тогда в общем случае имеем:

$$\left. \begin{aligned} E_y &= A_1 \cos(\omega t - kx - \varphi_1), & E_z &= A_2 \cos(\omega t - kx - \varphi_2), \\ H_z &= \sqrt{\varepsilon} A_1 \cos(\omega t - kx - \varphi_1), & H_y &= -\sqrt{\varepsilon} A_2 \cos(\omega t - kx - \varphi_2), \end{aligned} \right\} \quad (7.26)$$

где  $\omega$ ,  $k$ ,  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  — постоянные.

Во всех точках пространства конец вектора  $E$  описывает одинаковые эллипсы, но со сдвигом во времени, зависящим линейно от  $x$ . В каждой точке конец вектора  $H$  описывает эллипс, подобный первому, в  $\sqrt{\varepsilon}$  раз больший и повернутый относительно него на  $90^\circ$  по часовой стрелке, как показано на рис. 233 (если мы смотрим в сторону, куда распространяются волны). Мы можем повторить для электромагнитной синусоидальной волны то, что было сказано в гл. V, § 4 для произвольной синусоидальной поперечной волны: в синусоидальной электромагнитной волне как волна вектора  $E$ , так и волна вектора  $H$ , вообще говоря, эллиптически-поляризованы.

В частности, если  $A_1 = 0$ , или  $A_2 = 0$ , или  $\varphi_1 - \varphi_2 = n\pi$  ( $n$  — целое), они поляризованы линейно; в первом случае мы имеем  $z$ -волну, во втором случае —  $y$ -волну, в третьем случае направление вектора  $\mathbf{E}$  составляет

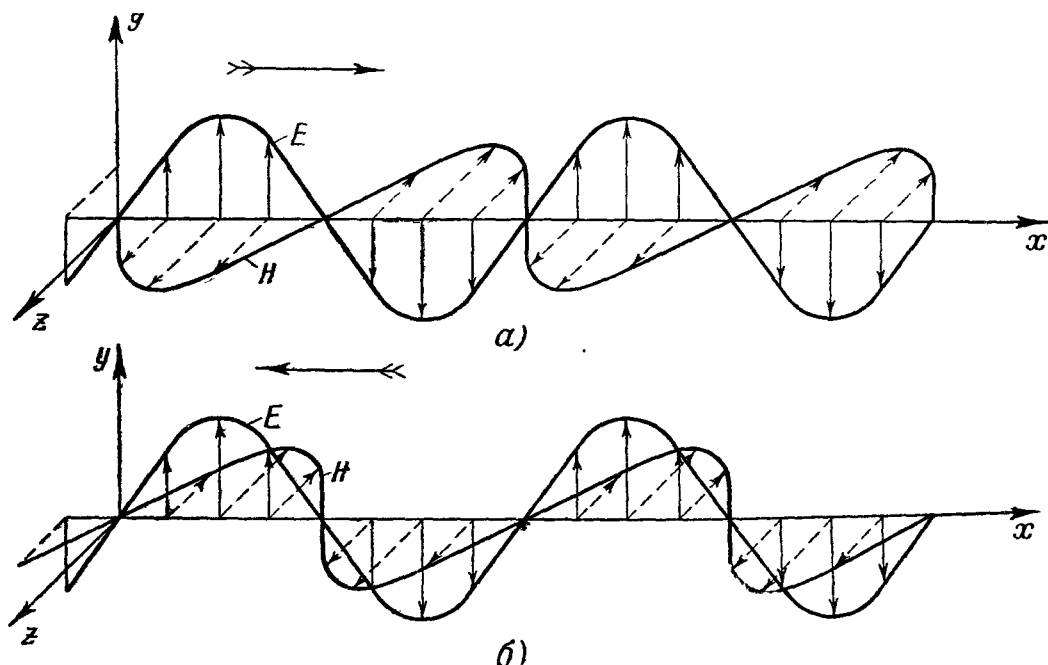


Рис. 231. Синусоидальная  $y$ -волна, распространяющаяся:  $a$ —слева направо,  $b$ —справа налево.

с осью  $y$  угол, равный  $\arctg(A_2/A_1)$ . Если  $\varphi_1 - \varphi_2 = (2n + 1)\pi/2$  и  $A_1 = A_2$  ( $n$  — целое), волна вектора  $\mathbf{E}$  и волна вектора  $\mathbf{H}$  поляризованы по кругу.

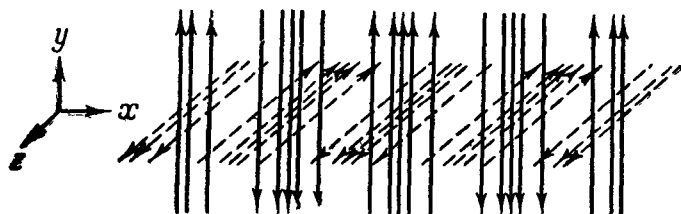


Рис. 232. Другое изображение  $y$ -волны. Здесь значения  $E, H$  показаны густотой силовых линий (сплошные—электрические, пунктирные—магнитные).

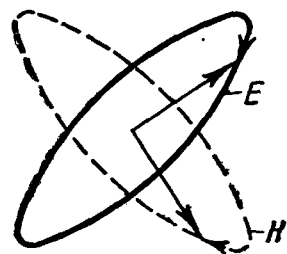


Рис. 233. Эллипсы, описываемые концами векторов  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  в эллиптически-поляризованной электромагнитной волне.

Пусть имеет место суперпозиция двух распространяющихся навстречу друг другу синусоидальных линейно-поляризованных волн одинаковой частоты и амплитуды и с одинаковым направлением колебаний вектора  $\mathbf{E}$ :

$$\begin{array}{ll} \text{первая волна} & \text{вторая волна} \\ E_1 = A \cos(\omega t - kx), & E_2 = A \cos(\omega t + kx), \\ H_1 = \sqrt{\epsilon} A \cos(\omega t - kx), & H_2 = -\sqrt{\epsilon} A \cos(\omega t + kx). \end{array}$$

Результирующие напряженности полей таковы:

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 = A \cos(\omega t - kx) + A \cos(\omega t + kx), \\ H &= H_1 + H_2 = \sqrt{\epsilon} A \cos(\omega t - kx) - \sqrt{\epsilon} A \cos(\omega t + kx), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} E &= 2A \cos \omega t \cos kx, \\ H &= 2\sqrt{\epsilon} A \sin \omega t \sin kx. \end{aligned} \tag{7.27}$$

Это — линейно-поляризованная стоячая волна электрического и магнитного полей. Узлы электрического поля являются пучностями магнитного поля, и наоборот. Колебания  $E$  и  $H$  сдвинуты по фазе на  $\pi/2$ . Здесь

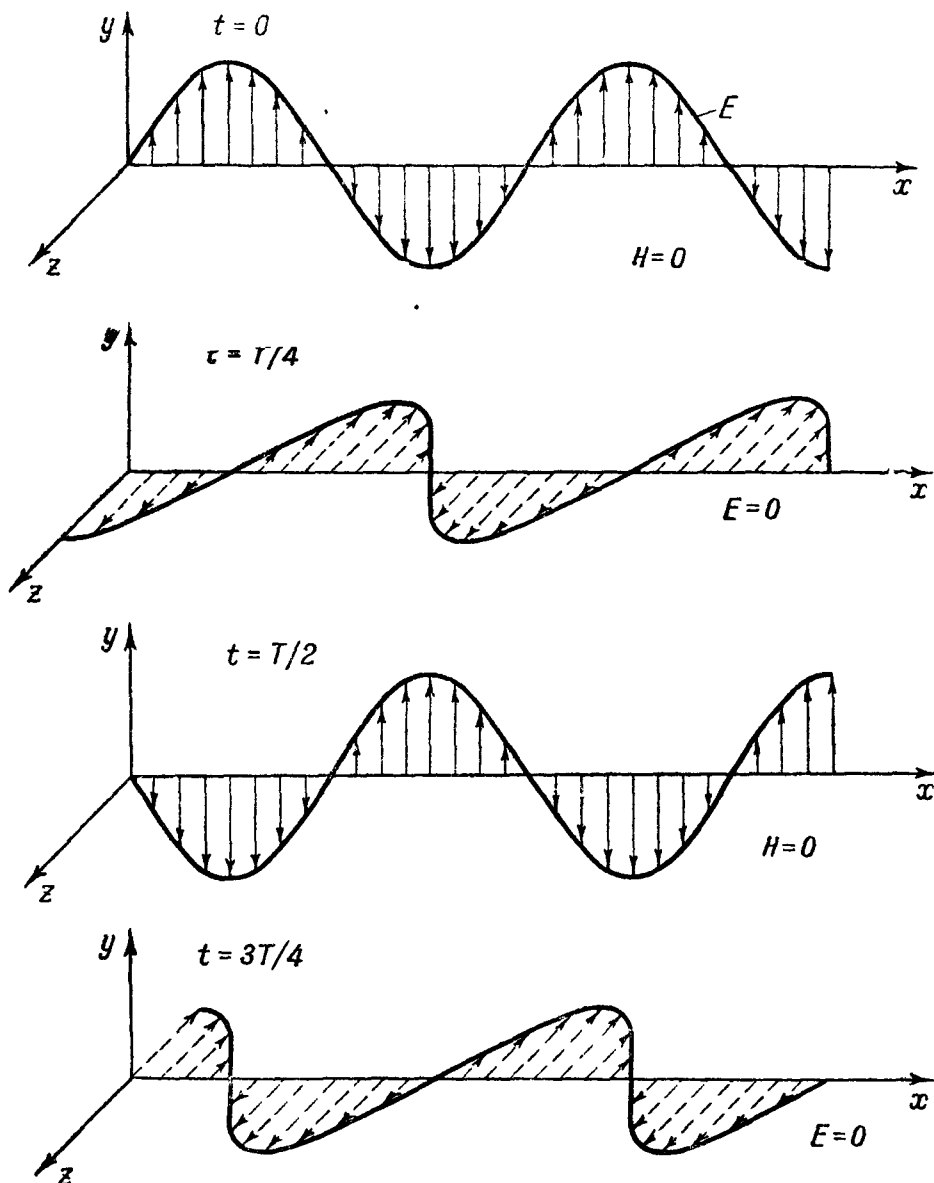


Рис. 234. Ряд моментальных снимков линейно-поляризованной стоячей электромагнитной волны.

между  $E$  и  $H$  — такое же соотношение, как между деформацией и скоростью в продольной упругой стоячей волне (гл. VI, § 2).

Рис. 234 дает наглядное изображение стоячей синусоидальной линейно-поляризованной электромагнитной волны.

#### § 4. Электромагнитные волны (продолжение теории). Энергетические соотношения

1. **Линейно-поляризованные волны.** Рассмотрим сначала  $y$ -поле, описываемое уравнениями (7.17). Умножим первое из них на  $H_z$ , второе — на  $E_y$  и сложим. Мы получим:

$$H_z \frac{\partial E_y}{\partial x} + E_y \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\frac{1}{c} \left( \mu H_z \frac{\partial H_z}{\partial t} + \varepsilon E_y \frac{\partial E_y}{\partial t} \right)$$



или после очевидного преобразования

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mu}{2} H_z^2 + \frac{\epsilon}{2} E_y^2 \right) = -c \frac{\partial}{\partial x} (H_z E_y).$$

Интегрируя это равенство по  $x$  в пределах от  $x_1$  до  $x_2$  и принимая во внимание (7.5), (7.6), (7.7), найдем:

$$\frac{dW}{dt} = S_1 - S_2, \quad (7.28)$$

где  $W$  — энергия электромагнитного поля, заключенная в столбике  $x_1 \leq x \leq x_2$  сечения  $1 \text{ см}^2$ ,  $S_1$ ,  $S_2$  — значения в плоскостях  $x = x_1$ ,  $x = x_2$  величины

$$S = \frac{c}{4\pi} E_y H_z. \quad (7.29)$$

Уравнение (7.29) аналогично уравнению, выражающему частный случай теоремы Умова (см. стр. 191). Его физический смысл состоит в следующем.  $S$  есть *поток электромагнитной энергии*, т. е. энергия поля, проходящая в единицу времени через единицу площади плоскости, перпендикулярной к направлению распространения (т. е. оси  $x$ ).

Для  $z$ -поля мы также получим, сделав аналогичное вычисление, формулу (7.28), причем здесь

$$S = -\frac{c}{4\pi} E_z H_y. \quad (7.29a)$$

Вспомним теперь, что если  $y$ -волна распространяется в сторону возрастающих  $x$ , величины  $E_y$  и  $H_z$ , когда они не равны нулю, имеют всегда *одинаковый* знак и, следовательно, мгновенные значения потока энергии в любой точке либо равны нулю, либо положительны, — энергия течет только слева направо. Если  $z$ -волна распространяется в сторону возрастающих  $x$ ,  $E_y$  и  $H_z$ , когда они не равны нулю, имеют всегда *противоположные* знаки. Учтя знак в выражении (7.29), мы придем и здесь к выводу, что энергия течет только в сторону возрастающих  $x$ . Аналогичным образом легко убедиться, что в  $y$ -волне или  $z$ -волне, распространяющихся справа налево, энергия течет только справа налево.

**2. Общий случай.** В общем случае (т. е. когда поле представляет собой суперпозицию  $y$ -поля и  $z$ -поля) можно получить соотношение, являющееся обобщением (7.28).

Умножим первое уравнение (7.17) на  $H_z$ , второе — на  $E_y$ , первое уравнение (7.18) на  $H_y$ , второе — на  $H_z$  и сложим четыре получившихся соотношения. Это даст после очевидных преобразований

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\mu}{2} (H_y^2 + H_z^2) + \frac{\epsilon}{2} (E_y^2 + E_z^2) \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mu H^2}{2} + \frac{\epsilon E^2}{2} \right) = -c \frac{\partial}{\partial x} (E_y H_z - E_z H_y)$$

Интегрируя последнее равенство по  $x$  в пределах от  $x_1$  до  $x_2$ , мы снова придем к соотношению (7.28), но теперь

$$S = \frac{c}{4\pi} (E_y H_z - E_z H_y). \quad (7.29б)$$

Это есть величина потока энергии в результирующем поле.

Заметим, что выражение (7.29б) представляет собой алгебраическую величину направленного в сторону распространения волны вектора

$$S = \frac{c}{4\pi} E \times H. \quad (7.29в)$$

Мы получили выражение, выведенное Пойнтингом из теории Максвелла в 1884 г. Напомним (см. гл. VI, § 2), что общее понятие потока энергии было введено Н. А. Умовым. Поэтому вектор  $S$  справедливо называть вектором Умова — Пойнтинга.

Электромагнитное поле не только обладает энергией (а следовательно, и массой), но и количеством движения (см. § 8). Оно является *особым видом материи*, существующим наряду с более привычными для нас телами \*).

3. Частные случаи. Рассмотрим сначала линейно-поляризованную бегущую  $y$ -волну. Для нее на основании (7.22б), (7.24б)

$$|H_z| = \sqrt{\varepsilon} |E_y|.$$

В тех местах, где  $|E_y|$  максимально, максимально также и  $|H_z|$ . В этих местах имеется максимум плотности как электрической, так и магнитной энергии и, кроме того, здесь же имеет место максимальный поток энергии. Это очень похоже на энергетические соотношения в упругой волне (гл. VI, § 2).

Аналогия простирается на энергетические соотношения в стоячей волне (см. § 3). За четверть периода от  $t=0$  до  $t=T/4$  происходит полное превращение электрической энергии в магнитную, за следующую четверть периода — обратное превращение. При этом энергия перемещается из окрестностей пучности  $E_y$  в окрестности пучности  $H_z$ . Поток энергии как через узлы  $E_y$ , так и через узлы  $H_z$  равен нулю тождественно, т. е. при каждом значении  $t$ . Следовательно, каждый слой пространства толщины  $\lambda/4$  от узла  $E_y$  до ближайшего узла  $H_z$  не обменивается энергией с остальным пространством, т. е. ведет себя автономно в энергетическом отношении. Превращения энергии в слое толщины  $\lambda/4$  между узлом  $E_y$  и узлом  $H_z$  напоминают те превращения, которые происходят в колебательном контуре. Окрестность пучности  $E_y$  играет ту же роль, что и пространство между обкладками конденсатора, окрестность пучности  $H_z$  — ту же роль, что и пространство внутри катушки. Заметим еще, что

$$S = \frac{c}{4\pi} E_y H_z + \left( -\frac{c}{4\pi} E_z H_y \right) = S^{(y)} + S^{(z)}, \quad (7.30)$$

где  $S^{(y)}$ ,  $S^{(z)}$  — те потоки энергии, которые существовали бы при наличии одной только  $y$ -волны или одной только  $z$ -волны.

Поток энергии в синусоидальной волне выражается очень просто через амплитуды  $A_1$ ,  $A_2$  составляющих ее  $y$ - и  $z$ -волн. Подставляя (7.26) в (7.29б), получаем:

$$S = \frac{cV\sqrt{\varepsilon}}{4\pi} \{A_1^2 \cos^2(\omega t - kx - \varphi_1) + A_2^2 \cos^2(\omega t - kx - \varphi_2)\},$$

или после простого преобразования

$$S = \frac{cV\sqrt{\varepsilon}}{8\pi} (A_1^2 + A_2^2) + \frac{cV\sqrt{\varepsilon}}{8\pi} \{A_1^2 \cos(2\omega t - kx - \varphi_1) + A_2^2 \cos(2\omega t - kx + \varphi_2)\}.$$

В каждой точке пространства поток колеблется с частотой  $2\omega$ , принимая только положительные или нулевые значения, около среднего значения

$$S = \frac{c}{8\pi} V\sqrt{\varepsilon} (A_1^2 + A_2^2). \quad (7.31)$$

Отметим, что среднее значение потока энергии равно сумме средних потоков энергии в отдельно взятых  $y$ -волне и  $z$ -волне.

\*) Частицы «обычной» материи (электроны, позитроны) могут при известных условиях превращаться в излучение (электромагнитное поле) и наоборот. При этом соблюдаются законы сохранения материи, энергии, количества движения.

## § 5. Электромагнитные волны (лекционные эксперименты)

**1. Предварительные замечания.** Мы опишем лекционные эксперименты, наглядно демонстрирующие существование электромагнитных волн, свойства которых находятся в полном согласии с теми, которые выводятся математически из теории Максвелла (см. § 3). Опыты, которые мы опишем, аналогичным по содержанию опытам Герца (см. § 1), сыгравшим решающую роль для признания теории Максвелла. Основная идея их — показать, что такие волны возникают вокруг проводника, по которому течет быстропеременный электрический ток, подобно тому как около тела, совершающего механические колебания и находящегося в упругой среде, возникают акустические (упругие) волны. Подходящее приспособление (вогнутое зеркало) позволяет придать электромагнитным волнам, излучаемым проводником, вид плоских волн. Опыты, которые будут здесь описаны, в значительной степени аналогичны опытам Герца и по выполнению; главное отличие в следующем: Герц работал с искровыми контурами и пользовался возбуждаемыми в них затухающими электромагнитными колебаниями и не имел возможности усиливать колебания, возникавшие в приборе, воспринимающем электромагнитные волны; в описываемых здесь опытах колебания генерируются ламповым генератором (автоколебательной системой) и являются *незатухающими*; в приборе, воспринимающем электромагнитные волны, применяется условие, что позволяет получать даже при очень малой мощности источника эффекты, вполне заметные для очень большой аудитории.

Мы будем работать с волнами длины около 10 см (частота около  $3 \cdot 10^9$  герц). В настоящее время существует аппаратура, позволяющая получать электромагнитные автоколебания еще значительно более высокой частоты — порядка  $3 \cdot 10^{10}$  герц (длины волны порядка 1 см). Частоты порядка  $10^9$  герц и выше называются *сверхвысокими частотами*, соответствующие им электромагнитные волны — *микрорадиоволнами*.

Заметим, что уже в 1895 г. П. Н. Лебедеву удалось осуществить генерацию и прием *затухающих* электромагнитных колебаний частоты  $5 \cdot 10^{10}$  герц ( $\lambda = 6$  мм) и воспроизвести в соответствующем масштабе основные оптические явления\*).

В 1922 — 1923 гг. А. А. Глаголевой-Аркадьевой удалось получить, возбуждая электрические разряды в смеси металлических опилок и вязкого масла («массовый излучатель» Глаголевой-Аркадьевой), затухающие электромагнитные колебания еще значительно более высокой частоты ( $\lambda$  порядка  $10^{-2}$  см). Волны Глаголевой-Аркадьевой — рекордно короткие электромагнитные волны, которые до сих пор удалось получить радиофизическими средствами. В логарифмическом масштабе они лежат между длинноволновой границей видимого света ( $\lambda$  порядка  $10^{-4}$  см) и коротковолновой границей современного радиотехнического диапазона ( $\lambda$  порядка 1 см).

**2. Аппаратура.** а) **Передачик** (источник волн). В ящике I, который крепится на подвижной треноге (рис. 235), смонтирован генератор незатухающих электромагнитных колебаний сверхвысокой частоты и модулирующий его колебания ламповый генератор звуковой частоты.

Генераторы автоколебаний сверхвысокой частоты работают по другому принципу, чем ламповые генераторы, описанные в гл. IV. Обычные

\*) П. Н. Лебедев, О двойном преломлении лучей электрической силы, Собрание сочинений, М., 1913. Избранные сочинения, Гостехиздат, 1949.

ламповые генераторы непригодны при частотах порядка  $10^9$  герц и выше. Время пролета электрона от катода к аноду при таких частотах не мало по сравнению с периодом (в гл. IV это время считалось пренебрежимо малым). Вследствие этого сетка не может управлять анодным током так, как это требуется для поддержания автоколебаний. В результате огромной исследовательской работы, сделанной за последние два десятилетия, были созданы специальные лампы для генерации сверхвысоких частот. Весьма плодотворными оказались идеи, высказывавшиеся еще в самом

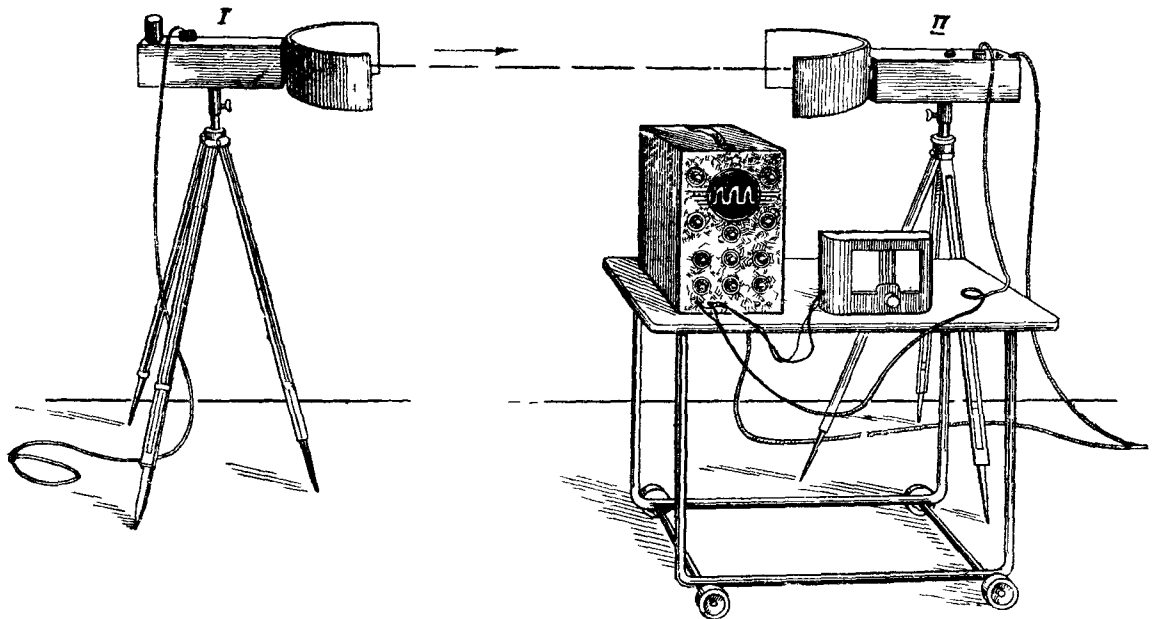


Рис. 235. Установка для демонстрации электромагнитных волн частоты около  $10^9$  герц ( $\lambda=10$  см).

начале этого периода Д. А. Рожанским и М. Т. Греховой о возбуждении внутриламповых колебательных систем электронным потоком и разрабатывавшиеся рядом исследователей в многочисленных экспериментальных работах (в частности, в г. Горьком М. Т. Греховой). Возбуждение внутриламповых колебательных систем электронным потоком прочно вошло в технику после того, как научились возбуждать собственные электромагнитные колебания (стоячие электромагнитные волны) в полостях, окруженных металлическими стенками (так называемые полые резонаторы или эндовибраторы). Для генерации колебаний сверхвысокой частоты широко применяют в настоящее время многокамерные магнетроны — лампы, в которых электроны, движущиеся в сильном постоянном магнитном поле, возбуждают собственные электромагнитные колебания полостей (камер), устроенных внутри лампы. Первые многокамерные магнетроны для генерации сверхвысоких частот были разработаны в 1936 г. Н. Ф. Алексеевым и Д. Д. Маляровым под руководством М. А. Бонч-Бруевича.

Основной частью генератора, которым мы здесь пользуемся, является маломощный магнетрон. Однако для понимания дальнейшего изложения нет необходимости детально знать, как он работает. (Этот вопрос — весьма сложный и до сих пор до конца не исследован.) Магнитное поле, необходимое для работы магнетрона, создается электромагнитом, находящимся внутри ящика I.

Возникающие в магнетронном генераторе электромагнитные колебания подводятся с помощью двух параллельных проводов, пропущенных через изолятор, к полуволновому вибратору, состоящему из двух медных

проволочек, расположенных, как показано на рис. 236. (Вибратор является *простейшей антенной* (см. гл. VIII).) В этом вибраторе возникает стоячая волна тока — сила тока распределена так, как показано пунктиром (длина вибратора равна одной полуволне), в чем можно было бы убедиться с помощью отдельного опыта \*). Центр вибратора находится в фокусе параболы, являющейся средней линией жестко скрепленного с ящиком «зеркала» — алюминиевого листа, согнутого в виде цилиндрического параболоида (рис. 236, б).

б) Приемник. Прибор для обнаружения волны. Ящик II (рис. 235) также укреплен на передвижной треноге. В нем находится усилитель звуковой частоты. Ко входу усилителя присоединено с помощью двух параллельных проводов устройство, показанное в большем масштабе на рис. 237: полуволновый вибратор, состоящий из двух металлических тонких цилиндров, замкнутых между собой кристаллическим детектором \*\*)

типа, применяемого в современных сверхвысокочастотных радиоприемных устройствах.

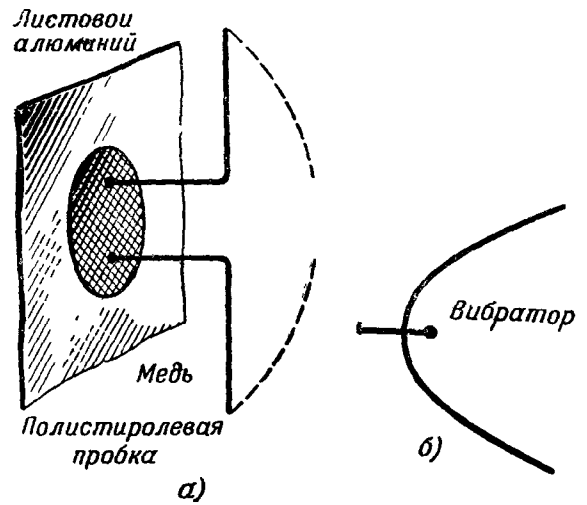


Рис. 236. а—вибратор передатчика (немного меньше натуральной величины) и распределение тока в нем (амплитуда силы тока в данном месте пропорциональна расстоянию до пунктирной дуги синусоиды); б—расположение вибратора по отношению к зеркалу (вид сверху).

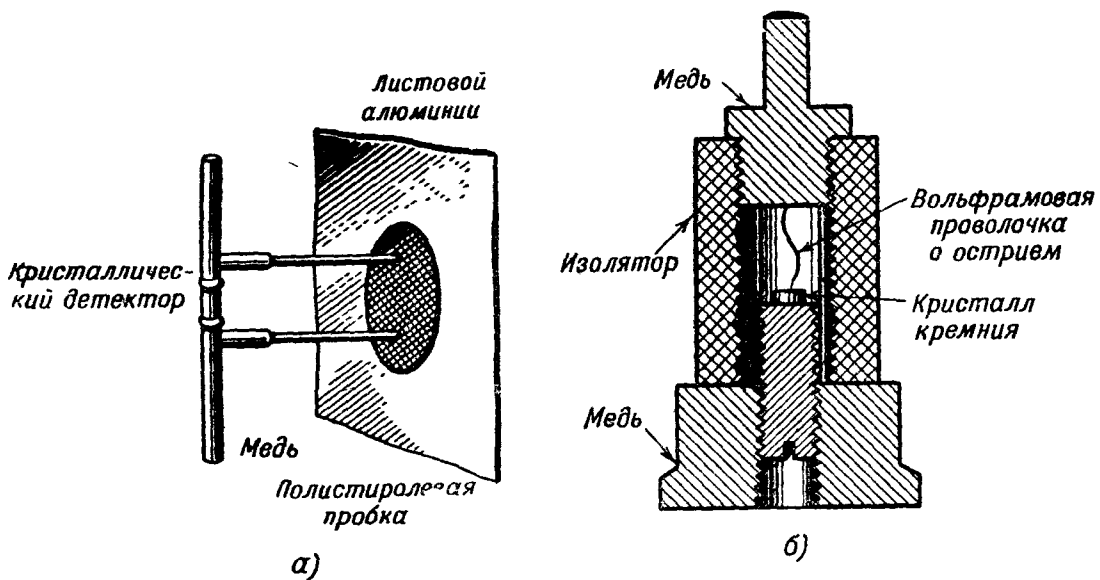


Рис. 237. а—вибратор (антенна) приемника, общий вид; б—разрез современного кристаллического детектора (сильно увеличено; длина патрона 5 мм).

\*) Передвигая вдоль вибратора виточки проволоки, расположенный в плоскости, параллельной вибратору и имеющей диаметр, малый по сравнению с длиной вибратора, и измеряя амплитуду э. д. с. индукции, возникающей в витке.

\*\*\*) Применение электронной лампы для демодуляции здесь невозможно опять-таки вследствие сравнимости времени пролета электронов с периодом колебаний. Кристаллический детектор для сверхвысоких частот содержит заключенные в миниатюрный «патрон» кристалл кремния и находящуюся с ним в контакте заостренную вольфрамовую проволочку. Такой контакт обладает резко выраженными нелинейными свойствами. Кристалл и вольфрамовая проволочка образуют последовательное соединение. От них наружу выведены контакты, припаянные к половинкам вибратора.

Зависимость между напряжением на зажимах детектора (т. е. между половинками вибратора) и током через детектор носит характер, показанный на рис. 238. Если напряжение на зажимах детектора (т. е. между половинками вибратора) имеет вид

$$u = A [1 + f(t)] \cos \omega t,$$

на вход усилителя попадает колебание, приблизительно пропорциональное

$$A [1 + f(t)]$$

(демодуляция, ср. гл. IV, § 9).

Напряжение звуковой частоты с выхода усилителя, пропорциональное  $Af(t)$ , подается на громкоговоритель и подключенный к нему параллельно вход электронного осциллоскопа. «Амплитуда» этого напряжения тем больше, чем больше (при данной глубине модуляции)

Рис. 238. Характеристика кристаллического детектора.

«амплитуда»  $A$  колебания сверхвысокой частоты в вибраторе приемника.

**3. Существование излучения.** Раздвинем треноги на расстояние в несколько метров и повернем зеркала так, чтобы их оси совпадали друг с другом. Включим напряжения питания передатчика и приемника. На экране осциллоскопа появится картина, показывающая наличие на выходе усилителя приемника колебания звуковой частоты, громкоговоритель начинает звучать.

Возьмем в руки большой плоский квадратный алюминиевый лист и будем перемещать его около нашей аппаратуры. Пока лист находится вне полосы, показанной пунктиром (рис. 239, *a*), картина на экране и звучание громкоговорителя заметно не меняются. Но если лист расположен, как показано на рис. 239, *б*, «связь прекращается»<sup>4</sup> (картина на экране пропадает, звук замолкает). Убираем лист — картина и звук снова возникают. Мы заключаем отсюда, что передатчик<sup>5</sup> действует на приемник посредством излучения, заполняющего полосу, обозначенную пунктиром, и что алюминиевый лист задерживает излучение. Тот же результат дал бы лист из любого другого металла. Но лист из диэлектрика (в частности, непрозрачного для видимого света: эбонит, гетинакс) хорошо пропускает излучение; даже если он гораздо толще нашего алюминиевого листа, он даст лишь незначительное ослабление связи. Все это также находится в полном согласии с теорией Максвелла (подробно см. § 8, 9).

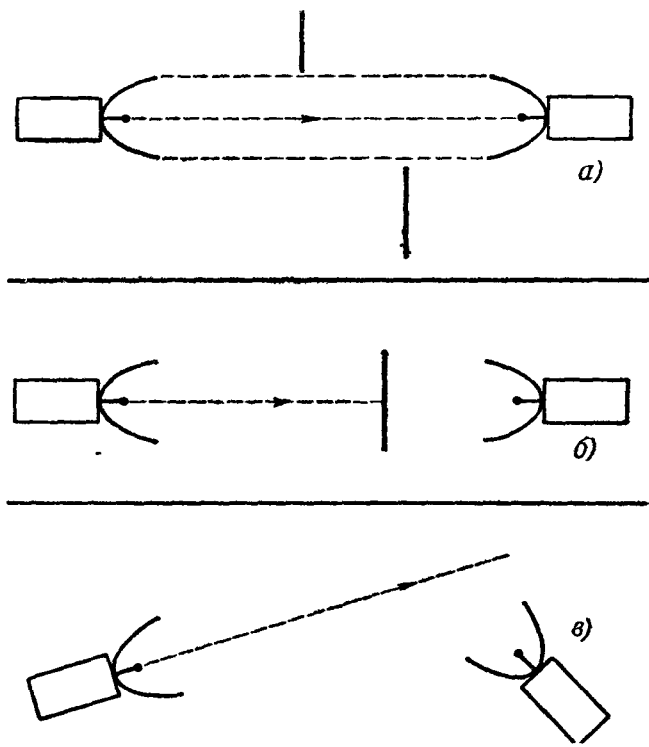


Рис. 239. *a*—алюминиевый лист не влияет на сигнал, воспринимаемый приемником; *б*—алюминиевый лист—между передатчиком и приемником; связи нет; *в*—оси зеркал не на продолжении друг друга; связи нет.

Если между передатчиком и приемником проходит человек (передатчик и приемник расположены ниже его роста), «связь» между ними также прекращается. Связь прекращается также, если повернуть передатчик или приемник вокруг вертикальной оси на достаточно большой угол (рис. 239, в).

4. **Отражение.** Расположим передатчик и приемник так, как показано на рис. 240. Громкоговоритель молчит, связи нет. Будем теперь передвигать большой плоский алюминиевый лист так, чтобы он прошел через положения 1, 2, 3. Вообще говоря, и теперь связи нет, но в тот момент,

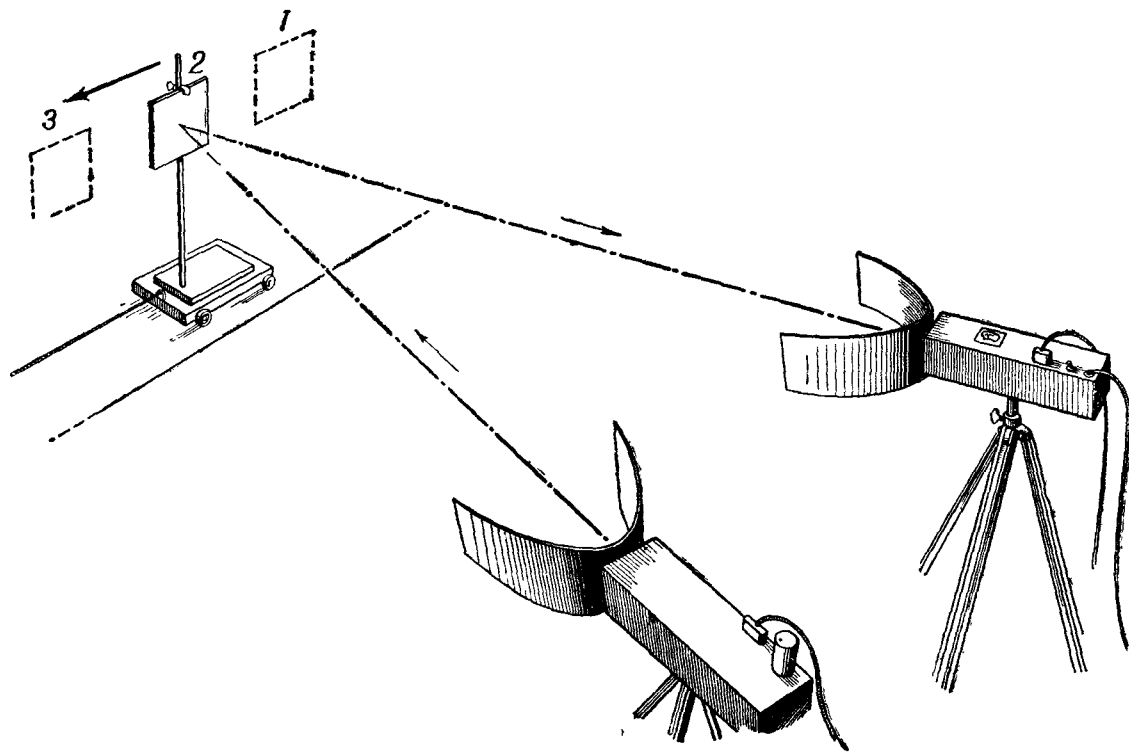


Рис. 240. Отражение электромагнитных волн от металлического листа.

когда лист занимает положение 2 (нормаль к листу приблизительно совпадает с биссектрисой угла между осями зеркал передатчика и приемника), громкоговоритель звучит, на экране появляется хорошо заметная осциллограмма. Ясно, в чем дело: изучение *отражается* от металлической пластинки, причем, как и при отражении видимого света от зеркала, угол падения равен углу отражения.

Лист из эбонита или гетинакса дает гораздо более слабое отражение, чем металлический лист, даже если он гораздо толще. Ясно, что есть прямая связь между различным поведением металла и диэлектрика в опыте, показанном на рис. 239, и в опыте, показанном на рис. 240.

5. **Измерение длины волны.** Поставим треноги рядом, так чтобы один край зеркала приемника соприкасался с одним из краев зеркала передатчика, а оси их были параллельны. Возьмем плоский алюминиевый лист и будем передвигать его параллельно самому себе и параллельно плоскости, содержащей отверстия зеркал (рис. 241). Мы замечаем, что амплитуда колебания на выходе усилителя приемника (а с нею и интенсивность звука, издаваемого громкоговорителем) меняется периодически с увеличением расстояния  $x$  между листом и плоскостью, проходящей через отверстия зеркал; происходит чередование максимумов и минимумов.

Толкование опыта очевидно: в пространстве между отверстиями зеркал и листом возникает система стоячих волн вследствие суперпозиции волн, излучаемых передатчиком, и волн, отражаемых алюминиевым листом.

Эти стоячие электромагнитные волны аналогичны в большой степени стоячим акустическим волнам, возникающим между отверстием трубы и плоскостью раздела воздух — вода (рис. 240 гл. VI). Максимумы амплитуды колебаний на выходе приемника соответствуют *резонансам «полости»* (не вполне замкнутой), заключенной между зеркалами и алюминиевым листом. Отсюда можно заключить, что пространственный «период» (расстояние между ближайшими положениями алюминиевого листа, которым соответствуют максимумы амплитуды на выходе приемника) равен  $\lambda/2$ , где  $\lambda$  — длина электромагнитной волны, излучаемой передатчиком.

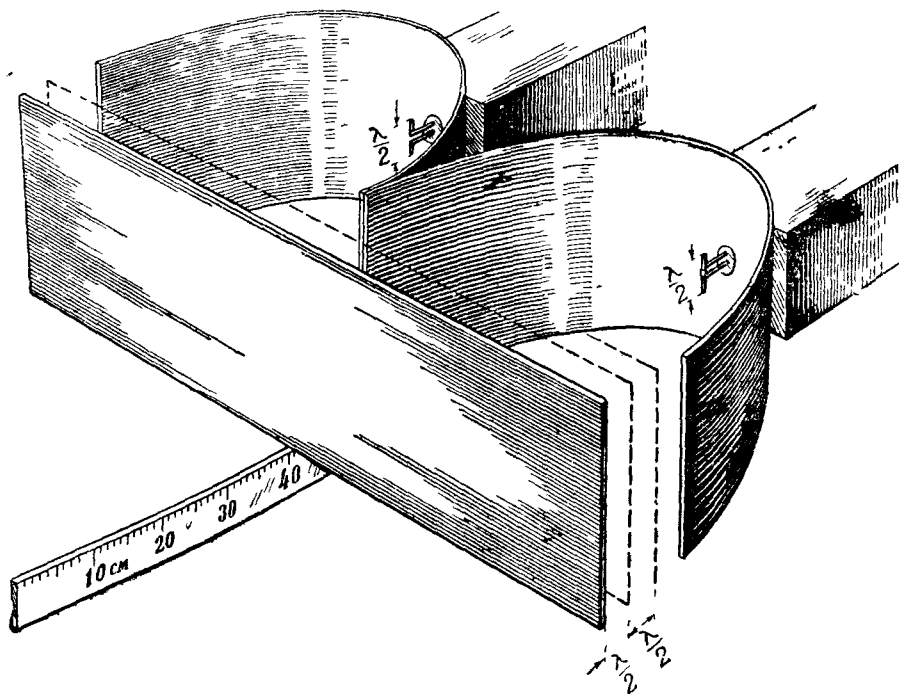


Рис. 241. Измерение длины волны в воздухе методом стоячих волн.

Измерив это расстояние с помощью масштаба, мы получаем для описываемой здесь установки приблизительно  $\lambda = 10$  см.

Если частота  $\nu$  автоколебаний генератора измерена независимо (сравнением с эталоном времени), мы можем определить из подобных опытов, пользуясь формулой

$$u = \lambda\nu,$$

фазовую скорость  $u$ . Она оказывается равной (с точностью до ошибки измерения) электродинамической постоянной  $c$ , в согласии с теорией Максвелла.

**6. Поперечность электромагнитных волн.** Легко осуществить с помощью описываемой здесь аппаратуры опыт, аналогичный оптическому опыту, изображенному на рис. 179. Ящики I и II могут укрепляться на штативах не только в положении, показанном на рис. 235, но и в положениях, показанных на рис. 242. Переход от одного положения к другому происходит путем поворота соответствующего ящика вместе с вибратором и зеркалом вокруг прямой, соединяющей фокусы зеркал, на угол  $90^\circ$ .

Когда вибраторы расположены, как показано на рис. 242, а и в (вибраторы параллельны), связь есть, мы слышим звук и видим кривую на экране. Но если они расположены, как показано на рис. 242, б (т. е. вибраторы взаимно перпендикулярны), связи нет, громкоговоритель молчит, на экране видна горизонтальная прямая.

Этот опыт с очевидностью показывает, что *электромагнитные волны поперечны*, в согласии с теорией Максвелла.



Более подробно можно сказать следующее: между половинками вибратора приемника не может возникнуть напряжения, если вибратор перпендикулярен к электрическим силовым линиям исследуемой электромагнитной

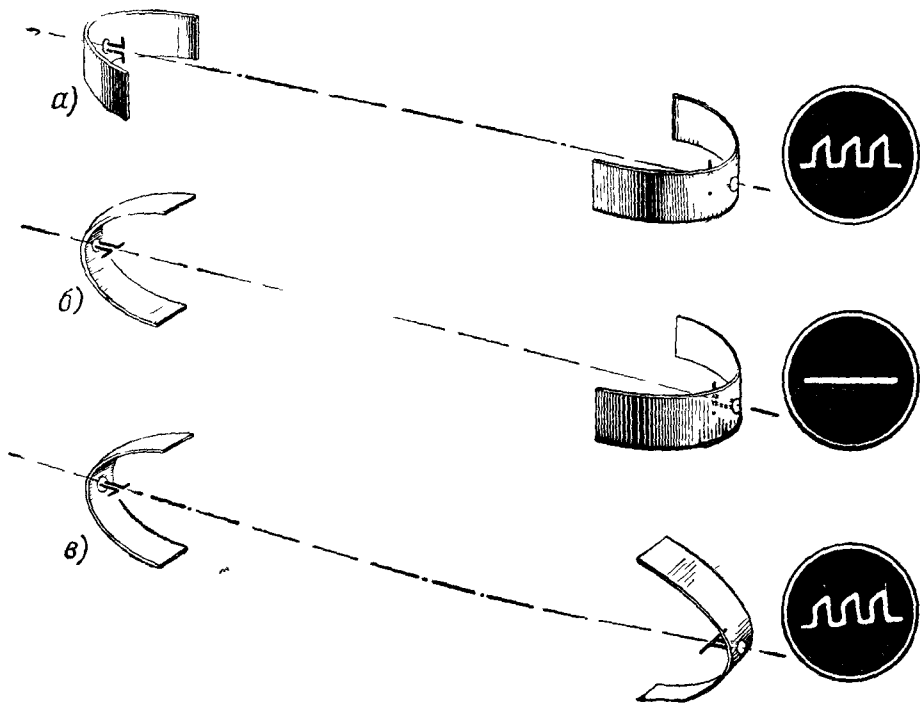


Рис. 242. Демонстрация поперечности электромагнитных волн.

волны (рис. 243). Напряжение между половинками вибратора максимально, если ось вибратора параллельна этим силовым линиям (рис. 243, б). Из сопоставления этого замечания с только что описанным опытом следует, что в волне, излучаемой передатчиком, вектор  $E$  параллелен оси вибратора передатчика (ср. § 7 и гл. VIII, § 1).

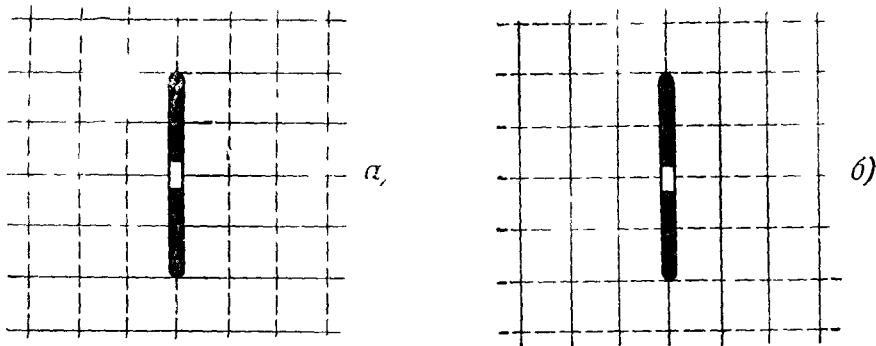


Рис. 243. Вибратор приемника и электромагнитное поле приходящей волны; а—вибратор перпендикулярен к электрическим силовым линиям приходящей волны; в нем не наводится э. д. с.; б—вибратор параллелен электрическим силовым линиям приходящей волны, амплитуда наводимой э. д. с. максимальна (пунктир—магнитные линии приходящей волны).

7. Пеленгация дальней радиостанции с помощью рамки. Присоединим к обычному радиоприемнику *рамку* или рамочную антенну (рис. 244, а), представляющую собой несколько десятков больших витков проволоки. Концы проволоки подключены к входу приемника; при этом напряжение на сетке первой лампы приемника равно э. д. с., индуцируемой в рамке приходящей электромагнитной волной. Ее амплитуда согласно закону индукции (7.3) пропорциональна амплитуде вектора  $H$  этой волны и косинусу угла  $\varphi$  между  $H$  и направлением нормали к плоскости витков.

Настроим приемник на одну из длинноволновых московских радиостанций\*) (например,  $\lambda = 1724$  м) и будем медленно поворачивать рамку вокруг вертикальной оси. Громкость приема при этом изменяется. Она достигает минимума, затем (при повороте на  $90^\circ$  от минимума) достигает максимума, затем (опять через  $90^\circ$ ) снова минимума. Ясно, в чем тут дело:

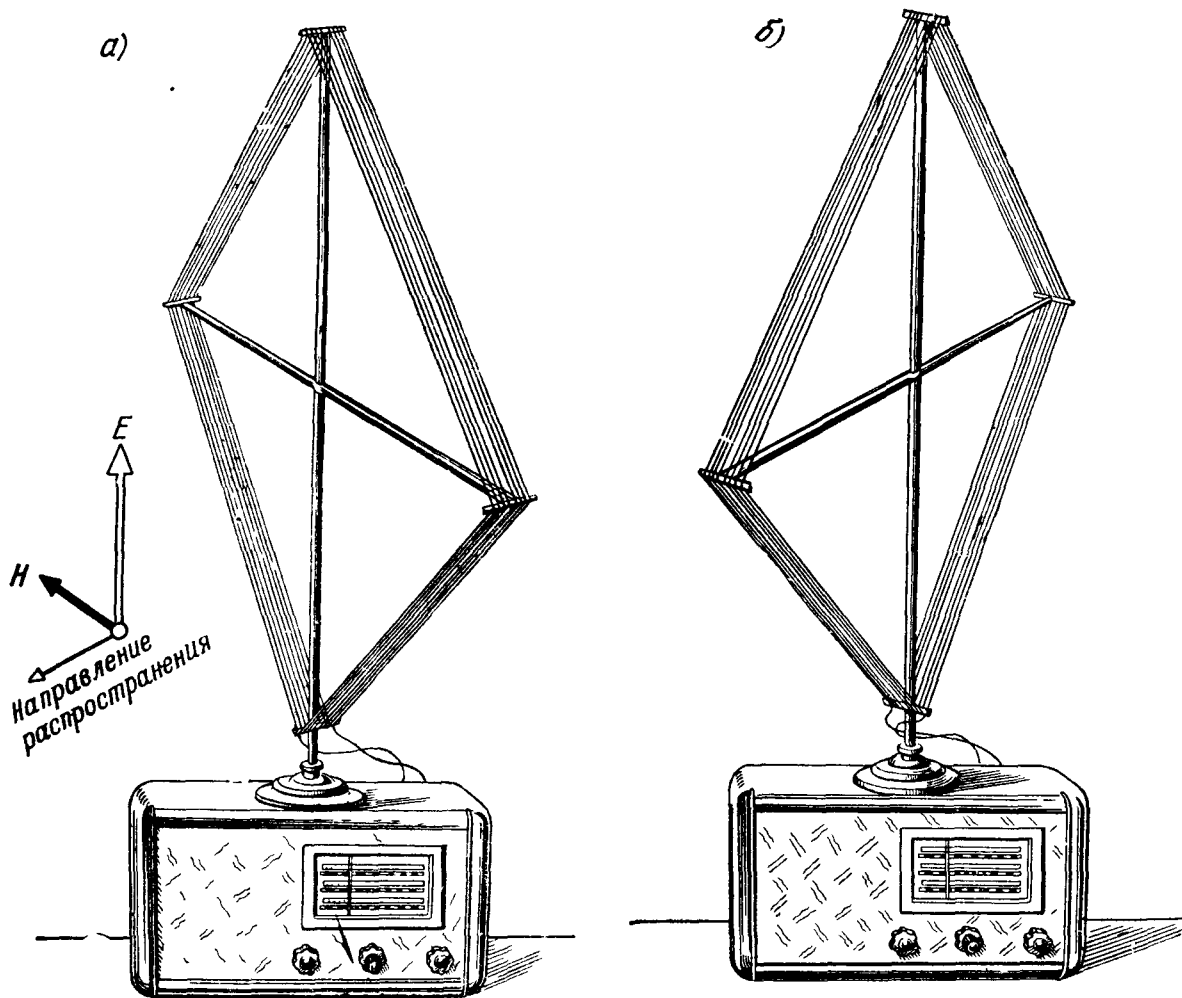


Рис. 244. Пеленгация с помощью рамочной антенны.

максимумы получаются тогда, когда нормаль к рамке коллинеарна вектору  $H$  принимаемой станции (рис. 244, б) и, следовательно, направление Горький — Москва лежит в плоскости рамки (что легко проверить по компасу и карте), т. е.  $\cos \varphi = 1$ ; минимумы получаются тогда, когда плоскость рамки перпендикулярна к этому направлению (рис. 244, а;  $\cos \varphi = 0$ ).

Приемник с рамочной антенной позволяет, таким образом, осуществить *пеленгацию* передающей радиостанции — определить направление на эту станцию. Этим широко пользуются для вождения кораблей и самолетов с помощью радио (*радионавигация*).

## § 6. Радиолокация и радиоинтерферометрия

1. Принцип радиолокации. Опыт, к которому относится рис. 239, позволяет легко понять явление, наблюдавшееся А. С. Поповым весной 1897 г., когда он проводил на Балтийском море испытания разработанной им аппаратуры для радиосвязи между кораблями. В отчете, составленном

\*) Описывается опыт в том виде, как он демонстрируется в Горьковском университете.

А. С. Поповым, мы читаем: «...станция отправления была помещена на транспорте «Европа» а приемная станция — на «Африке»... Во время опытов между «Европой» и «Африкой» попадал крейсер «Лейтенант Ильин», и если это случалось при больших расстояниях, то взаимодействие приборов прекращалось, пока суда не сходили с одной линии...» \*). Здесь радиоволны отражались крейсером «Лейтенант Ильин», или, говоря точнее, рассеивались им в разные стороны (бортами, трубами, мачтами и т. д.), что и вызывало прекращение связи. Уже сам А. С. Попов в цитируемом отчете предложил применить обнаруженное им явление для навигации: «... прибор, обнаруживающий эл. волну звонком, может предупредить о близости маяка, снабженного радиопередатчиком... Направление маяка может быть приблизительно определено, пользуясь свойством мачт, снастей и т. п. задерживать эл. волну, так сказать, затенять ее».

В дальнейшем явление рассеяния радиоволн металлическими предметами легло в основу одного из важнейших применений радио — *радиолокации*, т. е. обнаружения и точного определения местонахождения предметов (самолетов, кораблей и др.) с помощью радиоволн.

Уже в 1932 — 1933 гг. в СССР под руководством Ю. А. Коровина проводились первые исследовательские работы в области радиолокации. Большое значение для радиолокации имело изобретение многокамерного магнетрона (см. § 5). Этот тип лампы используется во всех генераторах радиолокационных установок, работающих на сверхвысоких частотах. В 1940 г. М. Д. Гуревичем и Н. Д. Девятковым были созданы специальные электронные лампы для приема сверхвысоких частот. Ю. Б. Кобзаревым и его сотрудниками была создана первая в СССР радиолокационная установка, за что им в 1941 г. была присуждена Сталинская премия.

Во время второй мировой войны радиолокация получила весьма широкое развитие и применение.

Опыт, показанный на рис. 240, позволяет понять, как происходит в радиолокации *обнаружение «цели»* и определение *направления*, в котором она находится. Однако обычно в радиолокации имеют дело не с правильным отражением, а с рассеянием волн улавливаемой целью.

Радиолокационная установка состоит из передающей и приемной частей. Передатчик посылает в пространство излучение, обладающее сильно выраженной направленностью, приемник также обладает сильной направленностью. В опытах § 5 направленность создается зеркалом; в радиолокационных установках, работающих на длинах волн порядка 10 см и меньше, направленность создается также применением зеркал, на волнах порядка метра и больше — применением сложных систем вибраторов (сложных антенн); подробнее вопрос о создании направленного излучения радиоволн будет рассмотрен в гл. VIII и гл. IX. При поисках цели антенны (зеркала, системы вибраторов) поворачиваются совместно в разных направлениях. Когда направление излучения совпадает с направлением на цель и последняя находится не слишком далеко, приемник воспринимает рассеиваемую целью (ср. рис. 158) электромагнитную волну: цель обнаружена, направление на цель известно.

Для определения *расстояния* до цели применяется *импульсный метод*. Моделью этого метода может служить эхо: мы можем, зная скорость звука, измерить расстояние от себя до препятствия, отражающего звуки, издав отрывистый крик и определив время, прошедшее до прихода эха.

\*) См. Изобретение радио А. С. Поповым, сборник документов и материалов под ред. А. И. Берга, М.—Л., 1945.

Передатчики радиоприемных станций излучают импульсно-модулированные волны (ср. гл. IV, § 7). Обычно продолжительность импульса порядка микросекунды, период модуляции — порядка  $10^{-4}$  сек. Сигнал, воспринимаемый приемником, когда цель поймана, представляет собой очень слабое импульсно-модулированное колебание; период модуляции здесь такой же, как в посылаемом сигнале, но импульсы, попадающие в приемник, сдвинуты по отношению к соответствующим импульсам, покидающим передатчик (подобно запаздыванию эха по отношению к порождающему его отрывистому звуку), на промежуток времени

$$\tau = \frac{2R}{U},$$

где  $R$  — расстояние до цели,  $U$  — групповая скорость волн (гл. V, § 9). Так как фазовая скорость радиоволн в атмосфере практически не зависит от частоты и равна  $c$ , групповая скорость также практически равна  $c$  и, следовательно,

$$\tau = \frac{2R}{c}.$$

Так как  $c$  известно с большой точностью, задача определения  $r$  сводится к измерению  $\tau$ . При  $r = 15$  км имеем  $\tau = 10^{-4}$  сек., при  $r = 1,5$  км имеем  $\tau = 10^{-5}$  сек.

Для измерения таких малых промежутков времени применяется электронный осциллоскоп. Генератор развертки в

Рис. 245. Измерение времени  $\tau$  в радиолокационной установке:  $a$  — модулирующие импульсы передатчика;  $b$  — демодулированные импульсы в приемнике;  $в$  — напряжение развертки;  $г$  — картина на экране.

нем синхронизируется (см. гл. IV, § 6) генератором импульсов, входящим в состав передатчика, и притом так, что начала зубцов «пилы» совпадают с моментами отправки импульсов (рис. 245). На вертикально отклоняющие пластинки подается напряжение, возникающее в приемнике в результате демодуляции импульсов. На экране получается картина, схематически показанная на рис. 245,  $г$ . Расстояние между началом горизонтальной полоски и изображением импульса

$$l = \frac{c}{\tau_M} L,$$

где  $L$  — общая длина горизонтальной линии,  $\tau_M$  — период модуляции; зная  $\tau_M$ , легко найти  $\tau$ . Но гораздо удобнее иметь на экране шкалу, непосредственно показывающую  $R = c\tau/2$ , поэтому такая градуировка и делается всегда в радиолокационных установках.

Радиолокационные установки имеют радиус действия до нескольких сотен километров. Так как туман и густая облачность практически совершенно прозрачны для радиоволн частоты порядка  $10^9$  герц и ниже, действие радиолокационных станций на таких частотах не зависит от условий погоды. Само собой разумеется, радиолокационные установки работают ночью совершенно так же, как днем.

Мы изложили принцип простейшего радиолокационного устройства. Существуют гораздо более сложные и совершенные устройства, например

самолетные установки для ночного прицельного бомбометания, дающие на экране электронно-лучевой трубки двумерную картину распределения наземных объектов, рассеивающих радиоволны.

**2. Измерение групповой скорости радиоволн.** Если  $R$  известно с большой точностью, радиолокационная установка может рассматриваться как установка для измерения *групповой скорости* радиоволн в воздухе. Нетрудно заметить, что принцип измерения тождествен с принципом измерения групповой скорости света, изложенным в гл. V, § 9. Правильность значений  $R$ , получаемых с помощью радиолокации при предположении, что  $U = c$ , является доказательством практического равенства групповой скорости электромагнитных волн в атмосфере и электродинамической постоянной  $c$ .

**3. Радиointерферометрия.** Наряду с импульсным методом (п. 2) большое значение имеет другой метод измерения расстояний с помощью радиоволн — радиointерференционный метод, созданный Л. И. Мандельштамом и Н. Д. Папалекси. За создание радиointерференционного метода они были удостоены в 1942 г. Сталинской премии первой степени. Мы здесь поясним принцип действия одного из типов установок, основанных на радиointерференционном методе.

Пусть в пункте  $P_1$  (неподвижном и находящемся на поверхности земли) находится передатчик, посылающий в пространство синусоидальную (немодулированную) радиоволну \*)

$$a_1 \cos(\omega t - kr_1),$$

где  $r_1$  — расстояние от пункта  $P_1$  до рассматриваемой точки пространства,  $a_1$  — убывающая функция  $r_1$ .

Пусть на корабле или самолете (подвижной пункт  $P_2$ ) находится приемник, настроенный на эту волну, и передатчик, колебания которого синхронизированы (см. гл. IV, § 4) на частоте  $\omega$  колебаниями, возникающими на выходе высокочастотной части приемника. На приемник действует колебание, пропорциональное

$$\cos(\omega t - kR),$$

где  $R$  — расстояние между пунктами  $P_1, P_2$ . Антенна передатчика пункта  $P_2$  излучает волну вида

$$a_2 \cos(\omega t - kR - \alpha_2 - kr_2),$$

где  $\alpha_2$  — сдвиг фаз, определяемый аппаратурой пункта  $P_2$ ,  $r_2$  — расстояние от пункта  $P_2$  до рассматриваемой точки пространства,  $a_2$  — убывающая функция  $r_2$ . Пусть, наконец, в пункте  $P_1$  находится приемник, настроенный на частоту  $\omega$ . На приемник действует суперпозиция колебания

$$A_1 \cos(\omega t - \alpha_1),$$

приходящего непосредственно от передатчика ( $\alpha_1$  — сдвиг фаз на пути от передатчика к приемнику), и колебания

$$A_2 \cos(\omega t - 2kR - \alpha_2),$$

приходящего от передатчика  $P_2$ . Интенсивность (квадрат амплитуды)

\*) Ср гл. X, § 4

колебаний в контуре приемника, находящегося в пункте  $P_1$ , пропорциональна

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(2kR + \alpha_2 - \alpha_1).$$

Мы получили выражение того же вида, что и выражение для интенсивности в рассмотренных ранее интерференционных опытах (ср. гл. V, § 6).

Когда расстояние  $R$  изменяется,  $A^2$  меняется по синусоиде. Пусть расстояние  $R_0$  между неподвижной станцией  $P_1$  и кораблем (самолетом) при некотором начальном положении последнего известно. При увеличении этого расстояния интенсивность  $A^2$  будет поочередно проходить через максимумы и минимумы. Переход от максимума к следующему («прохождение одной интерференционной полосы») соответствует изменению расстояния  $R$  на  $\lambda/2 = u/2\nu$ , где  $\nu$  — частота,  $u$  — фазовая скорость в условиях опыта (см. п. 4). Сосчитав (по показаниям измерительного прибора, показывающего значение  $A^2$ ) число  $n$  прошедших «интерференционных полос» (вообще говоря, число не целое), мы сможем, зная фазовую скорость волны, определить  $R$  из уравнения

$$n = \frac{2\nu}{u}(R - R_0).$$

Мы описали простейшую мыслимую схему интерференционного *радиолага\**). Однако эта схема практически неосуществима по следующей причине: амплитуда  $A_2$  всегда будет очень мала по сравнению с  $A_1$  и волнистость кривой зависимости  $A^2$  от  $R$  невозможно будет заметить; тут не поможет применение усиления колебаний, приходящих из  $P_2$  в  $P_1$ , так как вследствие равенства частот обоих колебаний, попадающих в приемник, они оба будут усиливаться в одинаковой степени. Поэтому в действительности радиоинтерференционные устройства строятся по такой несколько более сложной схеме: колебания передатчика пункта  $P_2$  синхронизируются не на частоте  $\omega$ , а на другой частоте  $\omega'$ , находящейся с  $\omega$  в отношении малых целых чисел (как мы знаем из гл. IV, § 5, в автоколебательных системах возможна и такая синхронизация). Обычно передатчик  $P_2$  синхронизируют на частоте  $2\omega/3$ . Пусть волна, излучаемая пунктом  $P_2$ , имеет вид \*\*)

$$a_2 \cos \left[ \frac{2}{3} (\omega t - kR - kr_2 - \alpha_2) \right],$$

а в приемниках пункта  $P_1$  происходит сведение колебаний вида

$$A_1 \cos(\omega t - \alpha_1), \quad A_2 \cos \left[ \frac{2}{3} (\omega t - 2kR - \alpha_2) \right].$$

Применяя резонансное усиление на частоте  $2\omega/3$ , легко сделать амплитуды на выходе величинами одного порядка. Но теперь уже суммарная интенсивность равна просто сумме интенсивностей  $A_1^2$ ,  $A_2^2$ , и для определе-

\*) Лагом называется в морском деле устройство для измерения пути, пройденного кораблем. Простейший лаг состоит из пошлавка, бросаемого за борт на тонкой веревке, и вьюшки, с которой сматывается эта веревка.

\*\*) При синхронизации колебание  $\cos \omega t$  преобразуется в  $\cos \frac{2}{3} \omega t$ , а следовательно, колебание

$$\cos \omega(t - t_0) = \cos(\omega t - \varphi)$$

— в колебание

$$\cos \left[ \frac{2}{3} \omega(t - t_0) \right] = \cos \left[ \frac{2}{3} (\omega t - \varphi) \right].$$

откуда следует формула, приведенная в тексте.

ния  $R$  нужно воспользоваться методом, чуждым оптике, но легко осуществимым в радиофизике: непосредственным измерением приведенной разности фаз

$$2hR + a_2 - a_1$$

между сводимыми колебаниями (ср. гл. I, § 4). Это делается с помощью электронного осциллоскопа: колебания подаются на обе пары отклоняющих пластин и наблюдается фигура Лиссажу. При изменении  $R$  фигура последовательно принимает очертания, показанные на рис. 59. Будем понимать здесь под «прохождением одной интерференционной полосы» такое изменение разности фаз сводимых колебаний, в результате которого восстанавливается исходный вид фигуры Лиссажу. Здесь расстояние  $R$  связано с числом  $n$  прошедших интерференционных полос написанным выше соотношением, аналогичным написанному для  $\omega' = \omega$ .

Измерив  $n$  и зная  $R_0$ , легко найти  $R$  (по изменению фигуры Лиссажу можно следить и за немонотонным изменением  $R$ ).

Такова общая схема действия одного из типичных радиоинтерференционных устройств \*). В этих устройствах применяются особые счетчики, автоматически подсчитывающие число проходящих интерференционных полос.

Радиоинтерференционный метод применим не только в навигации. Он лежит в основе *радиогеодезии* — применения радио к геодезическим измерениям. Радиогеодезия, возникшая в результате работ Л. И. Мандельштама, Н. Д. Папалекси, Е. Я. Щеголева, А. И. Грузикова и их сотрудников, прочно вошла в практику в нашей стране. Достигнутая в настоящее время относительная точность измерения расстояний с помощью радиоинтерференционного метода — порядка  $(2 \div 3) 10^{-4}$ . Эта точность уступает точности обычных геодезических измерений, производимых с помощью оптических приборов, однако радиоинтерференционный метод имеет два больших преимущества: быстрота измерений и возможность проводить их при полном отсутствии видимости (туман, полярная ночь \*).

**4. Прецизионные измерения фазовой скорости радиоволн.** Если  $R$  измерено с большой точностью обычными геодезическими методами, методы, указанные в п. 3, позволяют определить с большой точностью фазовую скорость радиоволн.

Если оба пункта  $P_1, P_2$  находятся на поверхности земли (суши или моря), заранее не ясно, будет ли  $u$  заметно отличаться от  $c$  или нет: из всего сказанного выше следует лишь то, что в атмосфере *вдали от земной поверхности* фазовая скорость электромагнитных волн практически равна универсальной постоянной  $c$ . Но в течение долгого времени господствовал взгляд, восходивший к работе Ценнека (1907 г.), что при распространении вдоль поверхности земного шара  $u$  существенно отличается от  $c$  и зависит от характера поверхности (пресная вода, морская вода, песок и т. д.). В своих теоретических исследованиях Зоммерфельд пришел к выводу о правильности этого взгляда. Однако В. А. Фок \*\*), автор ряда фундаментальных теоретических работ о распространении радиоволн вдоль земной поверхности, показал ошибочность этих результатов Зоммерфельда.

Вопрос об экспериментальном исследовании скорости распространения радиоволн вдоль земной поверхности приобрел в 30-х годах большой

\*) Физические основы радиоинтерференционного метода изложены в работе В. В. Мигулина, УФН, т. XXXIII, вып. 3, 1947.

\*\*) См. переработанное В. А. Фоком изложение теории распространения радиоволн вдоль поверхности земли в книге: Ф. Ф р а н к и Р. М и з е с, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, часть вторая, М.—Л., 1937.

интерес как с чисто научной точки зрения (в связи с только что сказанным), так и в связи с радиоинтерферометрией (точность измерения расстояния определяется точностью, с которой известна величина  $u$ ).

В течение 1931—1941 гг. под руководством Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси были произведены с помощью различных вариантов радиоинтерференционного метода и в различных условиях местности систематические измерения  $u$ . Эти измерения привели к заключению, что скорость распространения радиоволн над сушей \*)

$$u = 299\,500 \pm 80 \text{ км/сек.}$$

Та же величина скорости, хотя и с несколько меньшей точностью, была получена при измерении на море. Эта величина довольно хорошо сходится со значением скорости света в воздухе, равным (на основании измерений Майкельсона)  $299\,670 \text{ км/сек.}$  По современным данным скорость света в пустоте  $c = 299\,776 \text{ км/сек.}$

На основании радиоинтерференционных измерений можно утверждать, что с точностью порядка  $1/2000$  скорость распространения радиоволн над поверхностью земли совпадает со скоростью света в воздухе. Существенно иначе обстоит дело в *ионосфере*, о которой будет сказано несколько слов в § 8.

## § 7. Излучение элементарного вибратора

**1. Предварительные замечания.** В § 3 рассматривалась только плоская электромагнитная волна. Здесь будет дано описание электромагнитных волн, излучаемых простейшим *точечным источником*—источником, размеры которого малы по сравнению с длиной волны. Мы не будем выводить излагаемую картину из уравнений Максвелла: такой вывод потребовал бы применения математического аппарата, незнакомого еще тем, для кого предназначена эта книга; он дается в курсах электродинамики (теории электромагнитного поля)\*\*). Мы ограничимся тем, что напишем формулы, описывающие волну, и раскроем их физический смысл. Заметим, что мы поступили аналогичным образом при рассмотрении излучения точечного источника акустических волн (гл. VI, § 5).

**2. Элементарный вибратор и создаваемое им поле.** Элементарным вибратором называется система, изображенная на рис. 246: два шарика, несущих заряды  $\pm q$ , синусоидально меняющиеся со временем, причем расстояние  $l$  между центрами шариков (абсолютная величина вектора  $l$ , направленная от центра шарика с зарядом  $-q$  к центру шарика с зарядом  $+q$ ) *мало* по сравнению с длиной волны  $\lambda$  в окружающей среде. Мы будем считать, что этой средой является вакуум или воздух, и будем писать (приблизительно в случае воздуха)

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c},$$

где  $\omega$  — частота измерения заряда. Заряды  $\pm q$  образуют диполь, момент которого  $p$  синусоидально меняется со временем:

$$p = M \cos \omega t, \quad M = ql. \quad (7.32)$$

\*) См. Новейшие исследования распространения радиоволн вдоль земной поверхности, сборник под ред. Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси, М.—Л., 1945, а также ряд статей в Полном собрании трудов М. И. Мандельштама, т. II, и Собрании трудов Н. Д. Папалекси.

\*\*\*) См., например, И. Е. Тамм, Основы теории электричества, Гостехиздат, 1957.



Из уравнений Максвелла выводится, что на расстояниях  $r$  от середины вибратора, больших по сравнению с длиной волны, вследствие изменения со временем вектора  $\mathbf{p}$  возникает электромагнитное поле, в котором векторы  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  описываются формулами

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}(t) &= \frac{1}{c^2 r} \mathbf{r}_1 \times \left[ \mathbf{r}_1 \times \ddot{\mathbf{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right) \right], \\ \mathbf{H}(t) &= -\frac{1}{c^2 r} \mathbf{r}_1 \times \ddot{\mathbf{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right), \end{aligned} \right\} \quad (7.33)$$

Здесь  $\mathbf{r}_1$  — единичный вектор, направленный от середины диполя  $O$  к точке наблюдения  $P$  (точке, к которой относятся значения  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ ). Характерным в этих формулах является то, что значения векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  на расстоянии  $r$  от вибратора в момент  $t$  определяются значением  $\ddot{\mathbf{p}}$  в определенный более ранний момент  $t - r/c$ .

Перейдем к выяснению физического смысла приведенных без доказательства формул (7.33).

Так как вектор  $\ddot{\mathbf{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right)$  коллинеарен вектору  $\mathbf{p}$ , а следовательно, оси диполя (вектору  $\mathbf{l}$ ), вектор  $\mathbf{H}$  всюду перпендикулярен к плоскости чертежа (рис. 247). Формула для  $\mathbf{E}$  может быть представлена в виде

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{H}(t) \times \mathbf{r}_1,$$

откуда видно, что вектор  $\mathbf{E}$  находится в плоскости чертежа и перпендикулярен к направлению  $OP$  и что  $|\mathbf{E}(t)| = |\mathbf{H}(t)|$ .

Перейдя от плоскости к пространству, мы можем утверждать, что линии вектора  $\mathbf{E}$  (электрические силовые линии) расположены по меридианам, линии вектора  $\mathbf{H}$  (магнитные силовые линии) — по параллелям концентрических сфер с центром в  $O$  и с полюсами на продолжении оси диполя (рис. 248).

Посмотрим теперь, как изменяются  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  со временем. Имеем:

$$\ddot{\mathbf{p}}(t) = -\omega^2 M \cos \omega t, \quad \ddot{\mathbf{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right) = -\omega^2 M \cos (\omega t - kr). \quad (7.34)$$

Обозначив через  $\psi$  угол между плоскостью, перпендикулярной к оси вибратора, и направлением  $OP$  и подставляя (7.34) в (7.33), получаем:

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{H}(t) = \frac{\omega^2 M}{c^2 r} \cos \psi \cos (\omega t - kr). \quad (7.35)$$

Итак, напряженности электрического и магнитного полей колеблются в каждой точке пространства *синфазно*; поверхности равной фазы — сферы

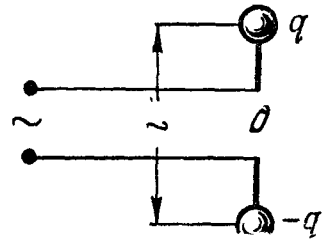


Рис. 246. Элементарный вибратор (в отличие от полуволнового вибратора, расстояние между концами *мало* по сравнению с длиной волны).

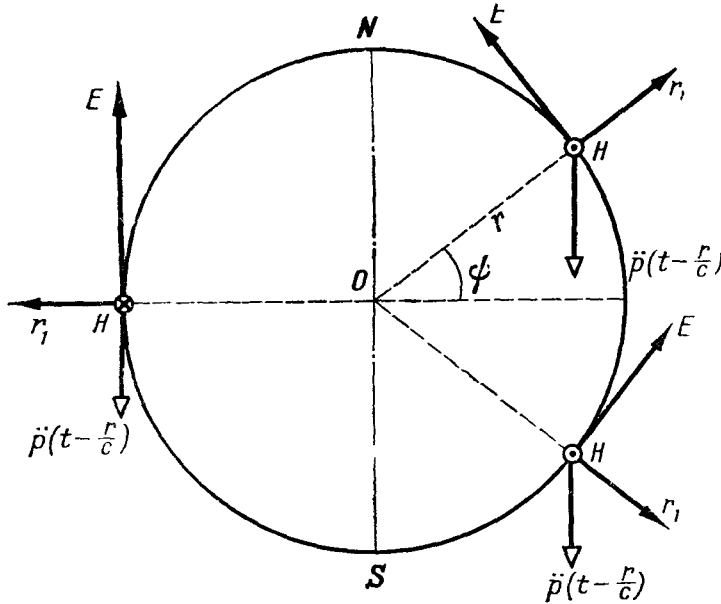


Рис. 247. Построение электрического и магнитного полей по формулам (7.33) для трех точек, лежащих на одной и той же окружности с центром  $O$ .

с центром, совпадающим с серединой вибратора  $O$ . Амплитуды электрического и магнитного полей (при нашем выборе) единиц, см. § 2) в каждой точке пространства равны друг другу. При удалении от  $O$  по фиксированному направлению ( $\psi = \text{const}$ ) эти амплитуды убывают обратно пропорционально *первой* степени расстояния (в этом — фундаментальное отличие от поля электростатического диполя; последнее убывает с расстоянием гораздо быстрее — как  $1/r^3$ ). При фиксированном  $r$  (на данной сфере с центром  $O$ ) амплитуды  $E$ ,  $H$  зависят от широты  $\psi$  (разумеется, — это ясно из осевой симметрии — они не зависят от долготы): амплитуды максимальны на экваторе ( $\psi = 0$ ) и, монотонно убывая с ростом  $\psi$ , обращаются в нуль на полюсах ( $\psi = \pm \pi/2$ ).

На достаточно большом расстоянии от вибратора можно выделить объем, в котором поле, описываемое формулами (7.35), сколь угодно мало отличается от плоской линейно-поляризованной волны, описанной в § 3 (с заменой оси  $z$  направлением распространения  $r_1$  в данном месте).

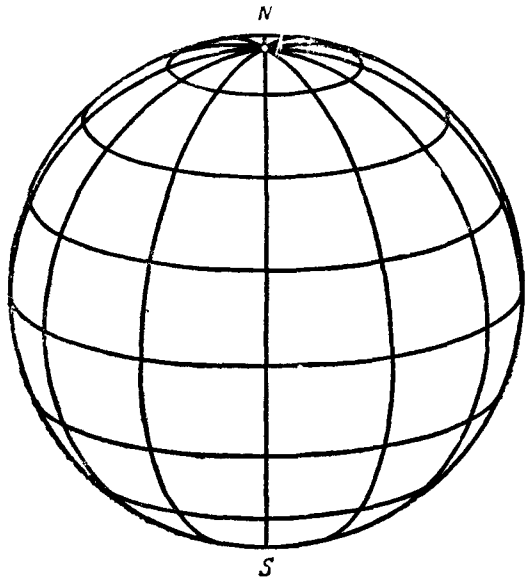
**3. Энергетические соотношения.** Вычислим на основании (7.35) поток энергии в точке  $r$ ,  $\psi$ . Принимая во внимание перпендикулярность векторов  $E$ ,  $H$ , имеем на основании (7.29в).

$$S = \frac{c}{4\pi} EH = \frac{\omega^4 M^2}{4\pi c^3 r^2} \cos^2 \psi \cos^2 (\omega t - kr).$$

откуда для среднего значения за период находим:

$$\bar{S} = \frac{\omega^4 M^2}{8\pi c^3 r^2} \cos^2 \psi. \quad (7.36)$$

Рис. 248. Электрические (сплошные) и магнитные (пунктирные) силовые линии на сфере с центром  $O$ . Эти линии напоминают меридианы и параллели.



Строя в полярных координатах график зависимости  $S$  от  $\psi$  при фиксированном  $r$ , мы получаем *полярную диаграмму направленности*, указывающую распределение потока энергии по направлениям в данной меридиональной плоскости (рис. 249). Диаграмму направленности в пространстве мы получим, поворачивая полученную фигуру вокруг прямой  $\psi = \pi/2$ .

Подсчитаем общее количество энергии, излучаемой элементарным вибратором за 1 сек. Обозначив эту величину через  $P$ , имеем:

$$P = \int \int \bar{S} d\sigma, \quad (7.37)$$

где  $d\sigma$  — элемент сферы с центром  $O$ , интеграл берется по всей сфере. Удобно взять в качестве элемента  $d\sigma$  кольцо  $\psi$ ,  $\psi + d\psi$  (рис. 250); тогда

$$d\sigma = 2\pi r \cos \psi \cdot r d\psi = 2\pi r^2 \cos \psi d\psi.$$

Подставляя это выражение, а также (7.36) в (7.37), получаем:

$$P = \frac{\omega^4 M^2}{4c^3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 \psi d\psi = \frac{\omega^4 M^2}{3c^3}. \quad (7.38)$$

Здесь важно подчеркнуть, что при данной амплитуде электрического момента энергия, излучаемая за 1 сек., пропорциональна *четвертой степени частоты*.

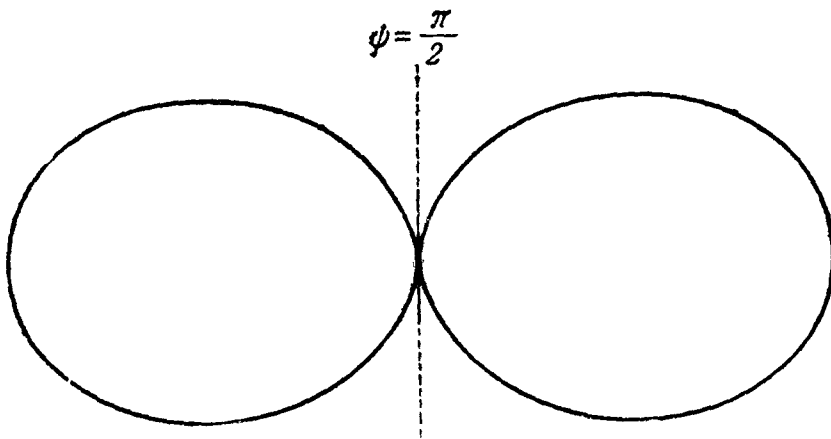


Рис. 249. Полярная диаграмма направленности элементарного вибратора.

Разумеется, для поддержания незатухающих колебаний вибратора необходим источник, восполняющий потерю энергии на излучение, т. е. доставляющий полю диполя мощность  $P$ . Амплитуда тока в диполе

$$I = \frac{\omega M}{l}$$

( $M/l$  — амплитуда заряда). Мы можем представить  $P$  в виде

$$P = \frac{1}{3} \frac{\omega^2 l^2}{c^3} I^2.$$

Эта формула напоминает формулу

$$P = \frac{RI^2}{2}$$

для мощности, поглощаемой в контуре с сопротивлением  $R$  при амплитуде тока  $I$ . Величина

$$R_{\text{из}} = \frac{2}{3} \frac{\omega^2 l^2}{c^3},$$

играющая для потерь на излучение такую же роль, как сопротивление контура для потери на нагревание, называется *сопротивлением излучения* диполя. В связи с понятием «сопротивление излучения» вспомним сказанное в гл. VI, § 5 о затухании механических колебаний, обусловленном излучением акустических волн.

**4. Классическая модель светящегося атома.** Для объяснения излучения света атомами вещества, например раскаленного газа (пламени) или разреженного газа в разрядной трубке, классическая электронная теория (см. также гл. VIII, § 9) принимает следующую модель. Электроны содержащиеся в атомах, ведут себя, как гармонические осцилляторы: электрон имеет определенное положение равновесия; будучи выведен из него каким-нибудь внешним воздействием, он совершает после этого гармонические колебания, собственная частота которых  $\omega$  определяется

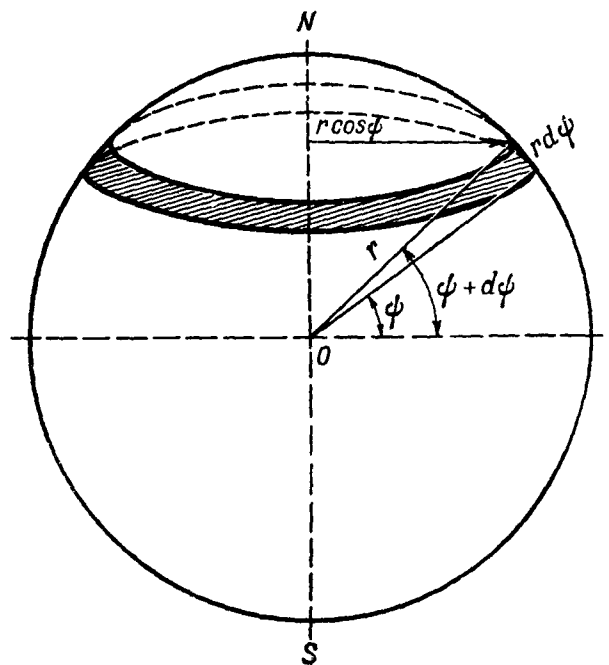


Рис. 250. К вычислению потока энергии.

«жесткостью связей», удерживающих электроны около положения равновесия, и массой электрона  $m$ .

В результате гармонических колебаний электрона в атоме возникает переменный электрический момент

$$p = -e\mathit{l},$$

где  $(-e)$  — заряд электрона,  $\mathit{l}$  — его смещение из положения равновесия. Пусть электрон колеблется по прямой линии (линейно-поляризованное колебание). Тогда

$$\mathit{l} = l_m \cos \omega t$$

и

$$p = -el_m \cos \omega t. \quad (7.39)$$

В электродинамике доказывается (на основании уравнений Максвелла), что если  $l_m \ll \lambda$  ( $\lambda = c \cdot 2\pi/\omega$ ), происходит излучение электромагнитных волн, описываемых теми же формулами, которые были приведены в п. 2 для случая, когда электрический момент диполя меняется вследствие изменения *величины* заряда (а не так, как это имеет место здесь вследствие изменения *положения* заряда). Поэтому световая волна, излучаемая электроном, описывается формулами (7.33) и (7.35) и рис. 247, 248, 249.

Мы сказали, что электрон совершает гармоническое колебание. Это не совсем точно: вследствие излучения он теряет энергию, причем для потока энергии имеет место формула (7.37), где теперь  $\omega$  — собственная частота электрона. Поэтому согласно классической электронной теории колебания электрона — затухающие. Логарифмический декремент легко вычислить тем же методом, что в гл. VI, § 5, понимая под  $\Delta W$  энергию, излучаемую за период, а под  $W$  — энергию, запасенную в осцилляторе. Она равна согласно гл. III, § 2.

$$m\omega^2 \frac{l_m^2}{2} = \frac{m\omega^2 M^2}{2e^2}.$$

Мы получаем на основании (7.38) (так как  $\Delta W = PT$ ,  $T = 2\pi/\omega$ )

$$d = \frac{1}{2} \frac{\Delta W}{W} = \frac{2\pi}{3} \frac{e^2\omega}{mc^3}, \quad \delta = \frac{\omega}{2\pi} d = \frac{1}{3} \frac{e^2\omega^2}{mc^3}. \quad (7.40)$$

Например, для частоты  $\omega/2\pi = 6 \cdot 10^{14}$  герц (зеленый свет), подставляя значения заряда и массы электрона

$$e = 4,8 \cdot 10^{-10} \text{ CGSE}, \quad m = 9,1 \cdot 10^{-28} \text{ г},$$

получаем:

$$d = 2,2 \cdot 10^{-7}, \quad \delta = 13 \cdot 10^7 \text{ сек.}^{-1}$$

Амплитуда нашего осциллятора спадает в  $e$  раз за время

$$\tau = \frac{1}{\delta} = 7,7 \cdot 10^{-9} \text{ сек.}$$

(ср. гл. X, § 5).

## § 8. Отражение и преломление

**1. Условия на границе диэлектриков.** В § 3 рассматривалась электромагнитная волна, распространяющаяся в *однородном* диэлектрике ( $\sigma = 0$ ,  $\varepsilon$  всюду одинаково). Здесь будут рассмотрены явления, которые происходят, когда электромагнитная волна встречает при своем распространении границу *двух* однородных диэлектриков. Как и в случае упругих волн (гл. VI, § 6), на границе раздела двух сред должны выполняться

для электромагнитных волн определенные *граничные условия*. Они должны быть выведены путем предельного перехода из уравнений Максвелла.

Пусть граница между диэлектриками (рис. 251) — плоскость  $z = 0$ . Применим уравнение (7.3) к прямоугольнику  $M_1N_1N_2M_2$  (он лежит в плоскости  $y = 0$ ). Будем считать  $\Delta x$  настолько малым по сравнению с длиной волны, что векторы  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  и т. д. можно считать постоянными (при данном  $z$ ) на протяжении интервала  $x$ ,  $x + \Delta x$ . Тогда

$$\oint E_1 dl = E_{1x} \Delta x - E_{2x} \Delta x,$$

$$\int \dot{B}_n dS = \dot{B}'_y \Delta x \Delta z,$$

где  $E_1$ ,  $E_2$  — значения вектора  $\mathbf{E}$  соответственно на отрезках  $M_1N_1$  и  $M_2N_2$ ,  $B'$  — значение вектора  $\mathbf{B}$  где-то внутри прямоугольника  $M_1N_1N_2M_2$ . (Вследствие нашего предположения о малости  $\Delta x$  слагаемые циркуляции  $\mathbf{E}$  по сторонам  $N_1N_2$  и  $M_2M_1$  дают в сумме нуль.) Уравнение (7.3) здесь имеет вид (по сокращении на  $\Delta x$ )

$$E_{1x} - E_{2x} = -\frac{1}{c} \dot{B}'_y \Delta z.$$

Будем теперь стремит  $\Delta z$  к нулю и притом так, чтобы точки  $M_1$ ,  $M_2$  слились с  $M_0$ , а  $N_1$ ,  $N_2$  — с  $N_0$ . В пределе мы получим:

$$E_x^{(1)} = E_x^{(2)}, \quad (7.41)$$

где  $E^{(1)}$ ,  $E^{(2)}$  — значения вектора  $\mathbf{E}$  непосредственно по обе стороны границы раздела диэлектриков. Путем аналогичных рассуждений мы получим:

$$E_y^{(1)} = E_y^{(2)} \quad (7.41a)$$

(но, вообще говоря,  $E_z^{(1)} \neq E_z^{(2)}$ ), а также с помощью уравнения (7.4)

$$H_x^{(1)} = H_x^{(2)}, \quad H_y^{(1)} = H_y^{(2)} \quad (7.42)$$

(но, вообще говоря,  $H_z^{(1)} \neq H_z^{(2)}$ ).

Уравнения (7.41), (7.42) составляют искомые граничные условия. Они означают, что компоненты  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , лежащие в плоскости, образующей границу диэлектриков, меняются *непрерывно* при переходе через эту границу.

Уравнения (7.41), (7.42) будут играть в дальнейшем изложении такую же роль, как уравнения (6.57), (6.58) при разборе поведения упругих волн на границе двух сред.

В этом параграфе всюду будет идти речь о *плоских* электромагнитных волнах. Для получения плоской волны в оптике, а также в радиофизике применяются линзы (рис. 252) и зеркала (подробнее см. гл. IX). Можно также рассматривать как плоскую волну небольшой участок сферической волны, излучаемой источником, находящимся *достаточно далеко* от поверхности раздела.

**2. Нормальное падение.** Пусть из первой среды на границу раздела  $z = 0$  падает линейно-поляризованная волна, распространяющаяся парал-

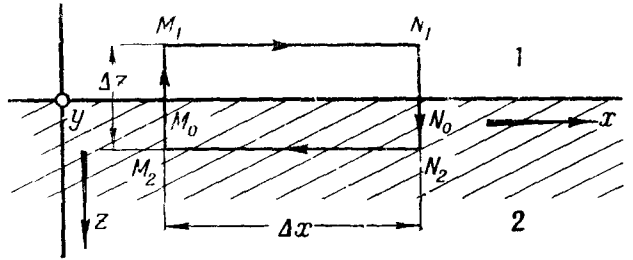


Рис. 251. К выводу граничных условий (7.41), (7.42).

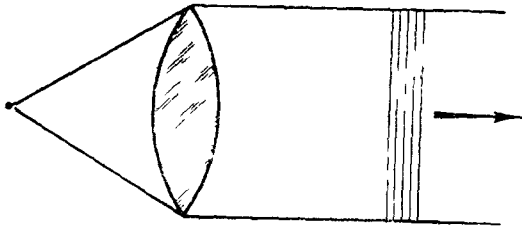


Рис. 252. Получение плоской световой волны с помощью линзы (о линзах для радиоволн см. гл. IX, § 6).

лельно оси  $z$  (рис. 253). Направим ось  $x$  параллельно вектору  $E$  в падающей волне. Тогда падающая волна запишется так (мы считаем  $\mu = 1$ , ср. § 3):

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= E_{1x} = A_1 \cos(\omega t - k_1 z), \\ H_1 &= H_{1y} = \sqrt{\varepsilon_1} A_1 \cos(\omega t - k_1 z). \end{aligned} \right\} \quad (7.43)$$

Граничные условия (7.41), (7.42) требуют, чтобы, помимо волны, проходящей во вторую среду, возникла еще волна, отраженная обратно

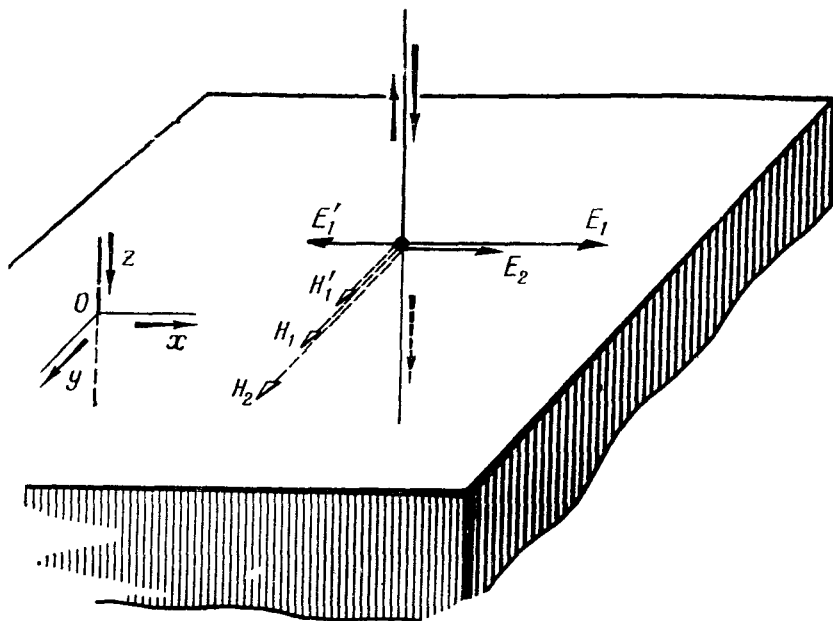


Рис. 253. Нормальное падение линейно-поляризованной электромагнитной волны на плоскость раздела двух диэлектриков. Построение отраженной и преломленной волн по формулам (7.46).  $n_2 = 2n_1$ , что соответствует отражению радиоволн от границы воздух—эбонит. Изображены значения  $E_1$ ,  $E_1'$  и т. д. у границы ( $z=0$ ) в момент  $t=0$ . Обратите внимание на направления  $E_1$ ,  $E_1'$  у границы.

в первую среду (ср. гл. VI, § 6). Пусть электрическое и магнитное поля в отраженной волне описываются уравнениями

$$\left. \begin{aligned} E_1' &= E_{1x}' = A_1' \cos(\omega t + k_1 z), \\ H_1' &= H_{1y}' = -n_1 A_1' \cos(\omega t + k_1 z), \end{aligned} \right\} \quad (7.44)$$

в проходящей во вторую среду — уравнениями

$$\left. \begin{aligned} E_2 &= E_{2x} = A_2 \cos(\omega t - k_2 z), \\ H_2 &= H_{2y} = n_2 A_2 \cos(\omega t - k_2 z), \end{aligned} \right\} \quad (7.45)$$

причем

$$k_1 = \frac{\omega}{u_1} \quad k_2 = \frac{\omega}{u_2}, \quad \text{где} \quad u_1 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1}}, \quad u_2 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_2}}$$

и

$$n_1 = \sqrt{\varepsilon_1}, \quad n_2 = \sqrt{\varepsilon_2}.$$

Величины  $n_1$ ,  $n_2$  называются *показателями преломления* соответствующих сред (ср. п. 3). Знак минус перед  $n_1 A_1'$  нужен потому, что волна распространяется в сторону отрицательных  $z$  (ср. (7.226) и (7.246)). Принимая во внимание, что электрическое и магнитное поля в первой среде

равны соответственно  $E_1 + E'_1$ ,  $H_1 + H'_1$ , подставив (7.43), (7.44), (7.45) в (7.41), (7.42) и проводя вычисление так же, как в гл. VI, § 6, получим:

$$A'_1 = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} A_1, \quad A_2 = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} A_1. \quad (7.46)$$

Введя, так же как в акустике (гл. VI, § 6), коэффициент отражения  $R$  и коэффициент прохождения  $T$ , равные соответственно отношению среднего (за период) потока энергии в отраженной и проходящей волне к среднему потоку энергии в падающей волне, получим на основании формул (7.46) и (7.31)

$$R = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2, \quad T = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}. \quad (7.47)$$

Эти формулы показывают, что отражение тем сильнее, чем больше (при том же  $n_1 + n_2$ ) абсолютная величина разности показателей преломления обеих сред. Они показывают, далее, что коэффициенты отражения и прохождения одинаковы при падении волны из первой среды на вторую и из второй — на первую.

Для случая, когда  $n_1 = 1$  (первая среда — пустота), формула для  $R$  может быть переписана в виде

$$R = \left( \frac{\Delta n}{2 + \Delta n} \right)^2, \quad \text{где } \Delta n = n_2 - 1, \\ \text{или приближенно, если } \Delta n \ll 1, \\ R = \left( \frac{\Delta n}{2} \right)^2. \quad (7.47a)$$

Обратим еще внимание на фазовые соотношения при отражении (ср. также гл. VI, § 6).

Если  $n_2 > n_1$ , амплитуды  $A_1$ ,  $A'_2$  имеют разные знаки, другими словами, между электрическими полями падающей и отраженной волн имеется на границе раздела сдвиг фаз  $\pi$ ; магнитные же поля падающей и отраженной волн колеблются на границе раздела синфазно ( $-n_1 A'_1$  имеет тот же знак что  $A_1$ ). В этом случае, как обычно говорят (обращая внимание только на фазовые соотношения электрических полей), отражение происходит с потерей полуволны. Если  $n_2 < n_1$ , наоборот, электрические поля в падающей и отраженной волне колеблются на границе раздела синфазно, магнитные поля — в противофазе. Здесь, как принято говорить, отражение происходит без потери полуволны.

**3. Косое падение. Направления отраженной и преломленной волн.** Пусть на границу  $z = 0$  падает плоская волна, распространяющаяся параллельно оси  $s_1$ , образуя угол  $\varphi_1$  (угол падения) с осью  $z$  (нормалью к плоскости раздела). Для того чтобы удовлетворить граничным условиям, мы должны принять и здесь, что возникают проходящая и отраженная плоские волны. Пусть они распространяются соответственно по направлению осей  $s'_1$  и  $s_2$  (рис. 254), образующих с осью  $z$  углы  $\varphi'_1$  (угол отражения) и  $\varphi_2$  (угол преломления). Пусть в падающей волне вектор  $\mathbf{E}$  лежит в плоскости падения, а следовательно, вектор  $\mathbf{H}$  к ней перпендикулярен. Из симметрии ясно, что оси  $s'_1$  и  $s_2$ , а также электрические поля  $\mathbf{E}'_1$ ,  $\mathbf{E}_2$

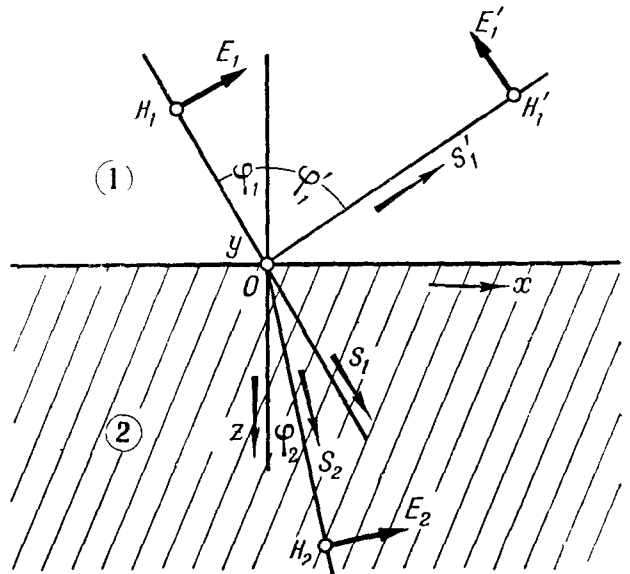


Рис. 254. К составлению уравнений задачи о косом падении волны, в которой  $\mathbf{E}$  лежит в плоскости падения (углы  $\varphi'_1$ ,  $\varphi_2$  еще не известны.) Показаны положительные (по условию) направления векторов  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  в падающей, отраженной и проходящей волнах.

в отраженной и проходящей волне могут лежать только в плоскости падения (плоскости, содержащей направление распространения падающей волны и нормаль к плоскости раздела).

Примем плоскость падения за плоскость  $y = 0$ . Тогда падающая, отраженная и проходящая волны описываются уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \begin{aligned} E_1 &= A_1 \cos(\omega t - k_1 s_1), \\ H_1 &= n_1 A_1 \cos(\omega t - k_1 s_1), \end{aligned} \right. & \left\{ \begin{aligned} E'_1 &= A'_1 \cos(\omega t - k_1 s'_1), \\ H'_1 &= n_1 A'_1 \cos(\omega t - k_1 s'_1), \end{aligned} \right. \\ & \left\{ \begin{aligned} E_2 &= A_2 \cos(\omega t - k_2 s_2), \\ H_2 &= n_2 A_2 \cos(\omega t - k_2 s_2). \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\} \quad (7.48)$$

На основании геометрических соотношений

$$s_1 = x \sin \varphi_1 + z \cos \varphi_1, \quad s'_1 = x \sin \varphi'_1 - z \cos \varphi'_1, \\ s_2 = x \sin \varphi_2 + z \cos \varphi_2$$

имеем в плоскости раздела  $z = 0$

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \begin{aligned} E_1 &= A_1 \cos(\omega t - k_1 x \sin \varphi_1), \\ H_1 &= n_1 A_1 \cos(\omega t - k_1 x \sin \varphi_1), \end{aligned} \right. & \left\{ \begin{aligned} E'_1 &= A'_1 \cos(\omega t - k_1 x \sin \varphi'_1), \\ H'_1 &= n_1 A'_1 \cos(\omega t - k_1 x \sin \varphi'_1), \end{aligned} \right. \\ & \left\{ \begin{aligned} E_2 &= A_2 \cos(\omega t - k_2 x \sin \varphi_2), \\ H_2 &= n_2 A_2 \cos(\omega t - k_2 x \sin \varphi_2). \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\} \quad (7.49)$$

Так как магнитное поле в первой среде равно  $H_1 + H'_1$ , граничное условие (7.42) имеет вид

$$n_1 A_1 \cos(\omega t - k_1 x \sin \varphi_1) + n_1 A'_1 \cos(\omega t - k_1 x \sin \varphi'_1) = n_2 A_2 \cos(\omega t - k_2 x \sin \varphi_2).$$

В момент  $t = 0$  это условие принимает вид

$$n_1 A_1 \cos(k_1 x \sin \varphi_1) + n_1 A'_1 \cos(k_1 x \sin \varphi'_1) = n_2 A_2 \cos(k_2 x \sin \varphi_2). \quad (7.50)$$

Это равенство должно выполняться тождественно при любом  $x$  (в каждой точке плоскости раздела). Слева стоит сумма двух синусоидальных функций от  $x$ , имеющих соответственно периоды  $2\pi/(k_1 \sin \varphi_1)$  и  $2\pi/(k_1 \sin \varphi'_1)$ , справа — также синусоидальная функция от  $x$ , имеющая период  $2\pi/(k_2 \sin \varphi_2)$ . Но сумма двух синусоидальных функций есть также синусоидальная функция тогда и только тогда, когда слагаемые функции имеют одинаковый период, причем в этом случае сумма имеет тот же период, что и слагаемые. На этом основании из уравнения (7.50) следует:

$$k_1 \sin \varphi_1 = k_1 \sin \varphi'_1 = k_2 \sin \varphi_2,$$

откуда получаются:

1) закон отражения

$$\varphi_1 = \varphi'_1 \quad (7.51)$$

— угол падения равен углу отражения;

2) закон преломления (закон Снеллиуса)

$$\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{n_2}{n_1}, \quad (7.52)$$

указывающий, что проходящая волна распространяется по направлению, отличному от направления распространения падающей волны (преломление), причем отношение синуса угла падения к синусу угла преломления есть для данных двух сред величина постоянная. Она равна отношению фазовых скоростей в первой и второй среде и обратному отношению показателей преломления этих сред.



Заметим, что для вывода законов отражения и преломления мы воспользовались из всей теории Максвелла только *линейностью* одного из граничных условий\*). Те же законы имеют место вследствие линейности граничных условий и для электромагнитных волн *любой* поляризации, а также и для звуковых волн (при малых амплитудах). Опыты, описанные в гл. V, § 1, показывают, что аналогичные законы имеют место для волн на поверхности жидкости (при малых амплитудах).

Рис. 255 дает наглядное толкование условия (7.50).

4. Дисперсия. Полученный теоретически закон отражения (7.51) полностью совпадает с тем, что известно из опыта. С законом преломления (7.52) дело обстоит сложнее. Опыт показывает в согласии с (7.52), что для монохроматического света отношение  $\sin \varphi_1 / \sin \varphi_2$  есть для данных сред величина постоянная. Вместе с тем опыт показывает, что эта величина зависит от цвета (частоты) монохроматического света. Это лучше всего демонстрирует классический эксперимент с призмой (рис. 256). На основании (7.52) мы можем утверждать, что *фазовая скорость света в телах* (в отличие от вакуума, ср. § 3) *зависит от частоты*, т. е. при распространении света в телах имеет место *дисперсия* (гл. V, § 9). Рассматривая уравнение (7.20а)

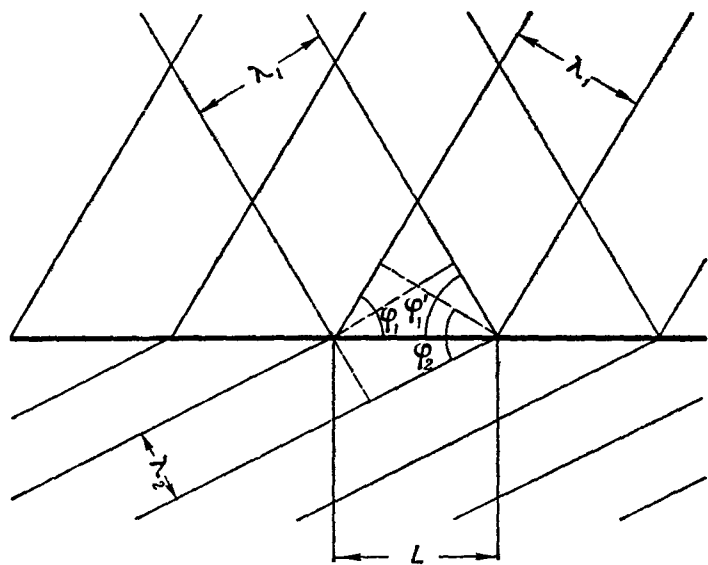


Рис. 255. Линии «гребней» падающей, отраженной и преломленной волн (углы  $\varphi_1$ ,  $\varphi_1'$ ,  $\varphi_2$  равны углам между линиями гребней и плоскостью раздела). Граничные условия требуют, чтобы пространственный период чередования гребней всех трех волн в плоскости раздела был одинаков. Обозначая его  $L$ , имеем  $\lambda_1 = L \sin \varphi_1 = L \sin \varphi_1'$ ,  $\lambda_2 = L \sin \varphi_2$ , откуда следует (7.51), (7.52).

как определено  $\varepsilon$ , мы можем утверждать, что *диэлектрическая проницаемость*, а с нею и *показатель преломления*  $n = \sqrt{\varepsilon}$ , *есть функция частоты*.

$$u = \frac{c}{V \varepsilon}$$

Опыт показывает, что диэлектрическая проницаемость, измеренная с помощью электромагнитных колебаний частоты, лежащей в радиодиапазоне, отличается — иногда даже по порядку величины — от определенной оптическим путем из измерений показателя преломления видимого света. Это иллюстрируют следующие\*\*) данные для воды:  $\varepsilon$ , измеренное электростатически, равно 81, а  $n^2$  для видимого света — около 1,8.

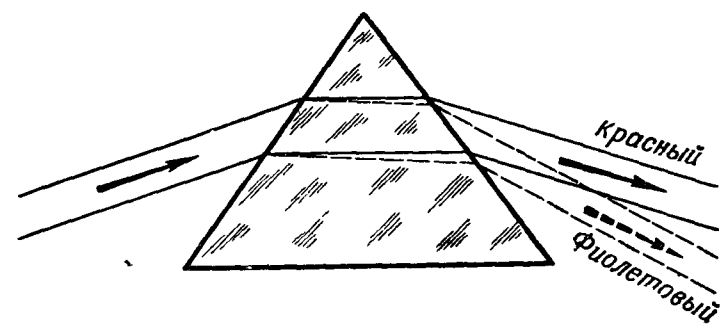


Рис. 256. Преломление в стеклянной призме красного и фиолетового света.

\*) Мы могли бы таким же образом воспользоваться линейностью граничного условия (7.41).

\*\*) Отсюда видно, насколько неудачен выходящий постепенно из употребления термин «диэлектрическая постоянная».

При переходе к электромагнитным волнам еще более высокой частоты, чем видимый свет (рентгеновское излучение,  $\lambda \sim 10^{-8}$  см), показатель преломления всех тел становится весьма близким к 1.

Заметим, что согласно сказанному в § 3 все диэлектрики должны быть прозрачны для видимого света. Это явно противоречит опыту. Достаточно вспомнить эбонит, гетинакс, фарфор. Эти тела пропускают радиоволны, но *поглощают* видимый свет. Некоторые стекла («цветные стекла») прозрачны лишь для определенной области частот видимого света. Такие стекла употребляются в качестве светофильтров (ср. гл. V, § 7).

Из сказанного здесь ясно, что теория Максвелла в том виде, как она излагалась в § 2, 3, нуждается, если речь идет о распространении электромагнитных волн в *телах*, в существенных усовершенствованиях. Такие усовершенствования были внесены в нее Г. Лорентцом на основе представления об электронах (*электронная теория*). Объяснение дисперсии с точки зрения электронной теории будет изложено в гл. VIII, § 9.

Дисперсия и поглощение наблюдаются не только в оптическом диапазоне, но и в диапазоне радиоволн. Уже П. Н. Лебедев привлекал внимание исследователей к изучению свойств вещества по его поведению в различных частотах радиодиапазона \*).

Впоследствии это направление исследования получило широкое развитие. К нему относится, в частности, основанная одним из виднейших представителей лебедевской школы В. К. Аркадьевым магнитная спектроскопия, о которой мы здесь скажем несколько слов.

Опыт показывает, что магнитная проницаемость  $\mu$  (определяемая как отношение амплитуды индукции  $B$  к амплитуде напряженности поля  $H$  при синусоидальном изменении этих величин) также зависит от частоты. Для ферромагнитных тел  $\mu$  порядка  $10^2 \div 10^5$  для низких звуковых частот и спадает до величины порядка 1 при частотах порядка  $10^{10}$  герц. Эта дисперсия магнитной проницаемости была открыта В. К. Аркадьевым в замечательной работе, выполненной в 1912 г. (еще с помощью затухающих электромагнитных колебаний). В дальнейшем В. К. Аркадьевым и его сотрудниками, а также рядом других исследователей была проведена огромная работа по изучению зависимости магнитной проницаемости ферромагнитных тел от частоты.

В этих исследованиях получила широкое применение современная техника радиофизического эксперимента, оперирующая с незатухающими колебаниями. Эти исследования выяснили многие вопросы, связанные с механизмом процессов намагничивания, подобно тому как исследование дисперсии и абсорбции ультразвука позволяет многое узнать о механизме явлений, происходящих при деформации (гл. VI, § 10).

**5. Косое падение (продолжение). Интенсивность отраженной и преломленной волны.** Важно знать не только направление, но и интенсивность отраженной и преломленной волны. Теория Максвелла приводит к формулам, позволяющим вычислить эту интенсивность, если даны  $n_1$ ,  $n_2$  (рассматривается *монохроматическая волна*), угол падения, интенсивность и характер поляризации падающей волны. Эту волну всегда можно представить как суперпозицию волны, в которой  $E$  колеблется в плоскости падения, и волны, в которой  $E$  колеблется перпендикулярно к плоскости падения (в частности, одна из компонент может отсутствовать). Поэтому достаточно рассмотреть в отдельности волны обоих указанных типов.

\*) См. статью П. Н. Лебедева, Опытные исследования в области электромагнитных волн (Собрание сочинений, стр. 361).

а) Вектор  $E$  находится в плоскости падения. Напишем граничные условия (7.41), (7.42). Из рис. 254 имеем, принимая во внимание, что в каждой из волн вектор  $E$  перпендикулярен к направлению распространения,

$$E_1 \cos \varphi_1 - E'_1 \cos \varphi_1 = E_2 \cos \varphi_2,$$

откуда, используя (7.49), (7.51), (7.52), получаем уравнения

$$\begin{aligned} A_1 - A'_1 &= \frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi_1} A_2, \\ A_1 + A'_1 &= \frac{n_2}{n_1} A_2. \end{aligned} \quad (7.53)$$

Решая эти уравнения относительно  $A'_1$ ,  $A_2$ , получаем после тригонометрических преобразований

$$A'_1 = \frac{\operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi_2)}{\operatorname{tg}(\varphi_1 + \varphi_2)} A_1, \quad A_2 = \frac{2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_1}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2) \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} A_1. \quad (7.54)$$

При  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ ,  $\cos \varphi_1 = \cos \varphi_2 = 1$  имеем (это сразу видно из предыдущих формул):

$$A'_1 = -\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} A_1,$$

что отличается по знаку от результата, полученного в п. 2. Это связано с тем, что здесь иначе выбрано положительное направление вектора  $E'_1$ : теперь при одинаковом знаке  $A_1$ ,  $A_2$  тангенциальные слагающие  $E_1$ ,  $E'_1$  имеют *противоположные* направления, т. е. отражение происходит с потерей полуволны.

б) Вектор  $E$  перпендикулярен к плоскости падения.

Из соображений симметрии ясно, что так же должны быть расположены векторы  $E$  в отраженной и преломленной волне. Выберем для векторов  $E_1$ ,  $E'_1$ ,  $E_2$  общее положительное направление (параллельное оси  $y$ ). Рассуждая так же, как в п. 1, и пользуясь граничными условиями (7.41), (7.42), получаем здесь уравнения

$$\begin{aligned} A_1 + A'_1 &= A_2, \\ A_1 - A'_1 &= \frac{n_2 \cos \varphi_2}{n_1 \cos \varphi_1} A_2, \end{aligned} \quad (7.55)$$

откуда после тригонометрических преобразований

$$A'_1 = \frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)} A_1, \quad A_2 = \frac{2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_1}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)} A_1. \quad (7.56)$$

Здесь при  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$  мы получаем тот же результат, что в п. 2, так как здесь положительное направление вектора  $E'_1$  совпадает с тем, которое было принято там.

Формулы (7.54), (7.56) называются *формулами Френеля*. Френель получил эти формулы, основываясь на упругой теории света. Однако в действительности они противоречат теории распространения упругих волн. Согласно этой теории при падении поперечной волны на границу двух сред должны возникать, помимо поперечных, еще и продольные отраженная и преломленная волны, чему противоречат формулы Френеля (именно так обстоит дело при падении на границу двух тел *упругой* поперечной волны). Формулы Френеля очень хорошо подтверждаются на опыте. Одним из главных аргументов в пользу теории Максвелла было то, что из нее формулы Френеля получаются совершенно непринужденно (без каких-либо дополнительных предположений).

Для проверки формул Френеля нужно, разумеется, работать с *плоскими* волнами (ср. п. 1). Эти формулы неприменимы, например, для радиоволн, если излучающая антенна находится близко от границы раздела.

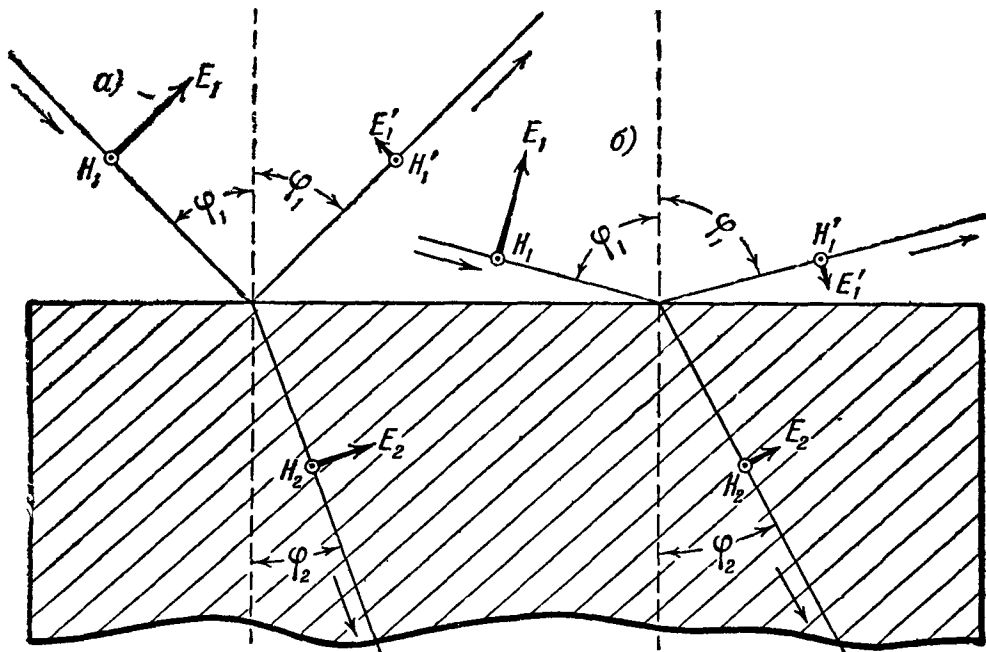


Рис. 257. Отражение и преломление при косом падении радиоволн (достаточно коротких, чтобы можно было пренебречь дифракцией, ср. гл. IX) на границе воздух—эбонит ( $n_1=1$ ,  $n_2=2$ ); а)  $\varphi_1=45^\circ$ , б)  $\varphi_1=75^\circ$ ,  $\mathbf{E}_1$  — в плоскости падения. Показаны значения  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{E}'$  и т. д., равные значениям на границе  $z=0$  в момент  $t=0$ . Построение проведено с помощью формул (7.54).

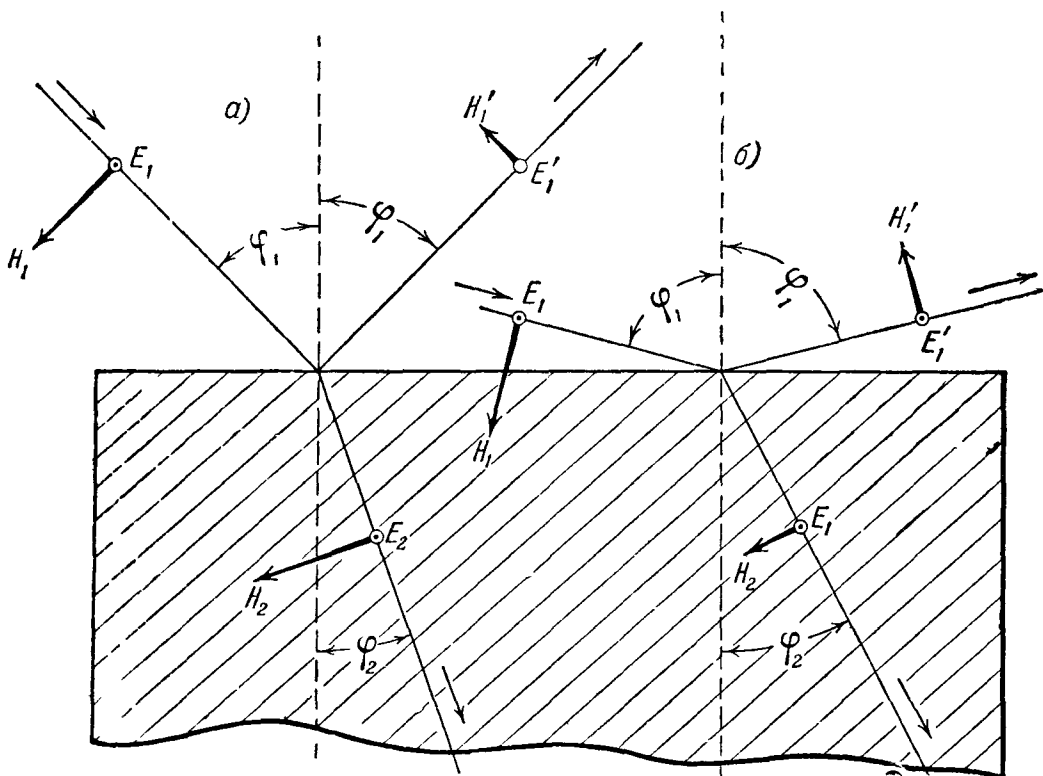


Рис. 258. То же, что и на рис. 257, но  $\mathbf{E}_1$  перпендикулярно к плоскости падения. Построение проведено с помощью формул (7.56)

Иллюстрацией формул Френеля могут служить рис. 257, 258, 260. Взяв случай, когда  $n_2 > n_1$ . Если  $\mathbf{E}_1$  лежит в плоскости падения, то  $A'_1/A_1$  положительно при малых углах падения и отрицательно при больших. Если  $\mathbf{E}_2$  перпендикулярно к плоскости падения —  $A'_1/A_1$  всегда отрицательно.

На рис. 259 показаны графики зависимости  $R$  от  $\varphi_1$ , построенные по формулам Френеля для случаев, когда  $E$  параллельно и перпендикулярно к плоскости падения, для границы воздух — стекло.

### 6. Явление Брюстера.

Одним из замечательных следствий формул Френеля является то, что если вектор  $E$  лежит в плоскости падения, существует такой угол падения, при котором *нет отраженной волны*.

Действительно, подберем угол падения  $\varphi_1$  так, чтобы было

$$\operatorname{tg}(\varphi_1 + \varphi_2) = \infty, \text{ т. е.}$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\pi}{2}, \quad (7.57)$$

иначе говоря, так, чтобы направление, по которому «должна пойти» согласно (7.51) отраженная волна, было перпендикулярно к направлению преломленной волны. При этом, как легко вывести из (7.52),

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{n_2}{n_1}.$$

На основании первой формулы (7.54) имеем, если выполнено условие (7.57),

$$A'_1 = 0.$$

Угол падения, при котором выполняется условие (7.57), называется углом Брюстера (рис. 260).

Пусть происходит постепенное увеличение угла падения. При переходе через угол Брюстера разность фаз между  $E_1$  и  $E'_1$  на границе меняется на  $\pi$  (ср. рис. 257, а и б).

Если вектор  $E$  перпендикулярен к плоскости падения, отраженной волны не будет лишь в тривиальном случае, когда  $\varphi_1 = \varphi_2$ , т. е. нет отличия между показателями преломления.

На рис. 261 показана схема оптического лекционного эксперимента. Поворачивая

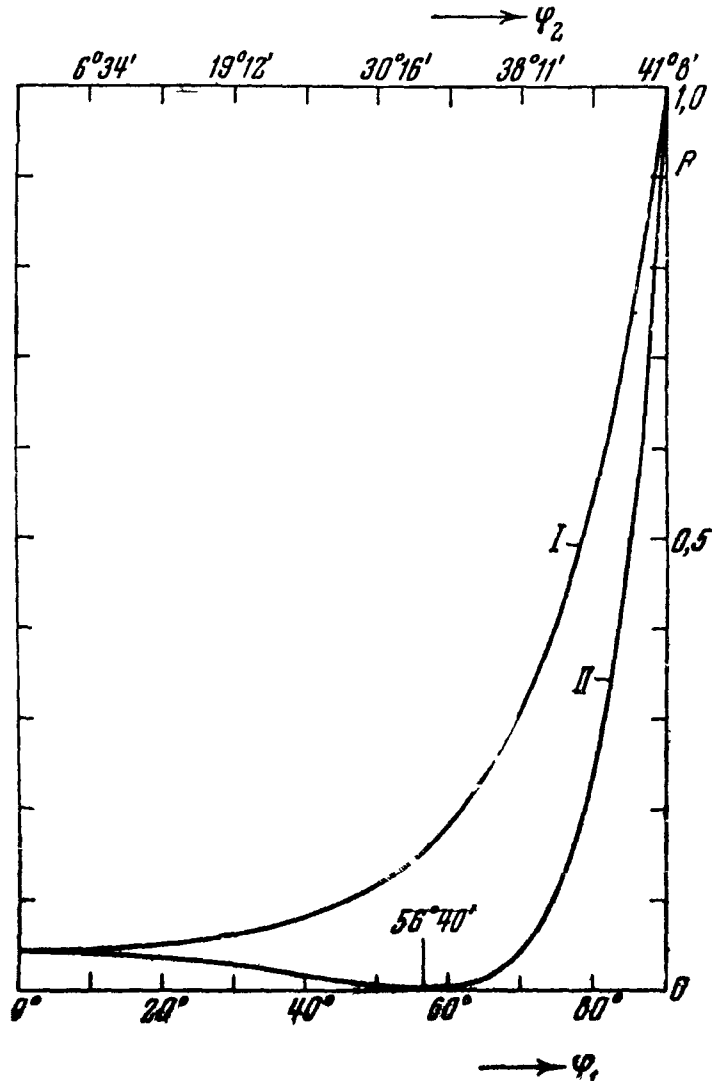


Рис. 259. Зависимость  $R$  от  $\varphi_1$  для границы воздух—стекло (видимый свет,  $n_1=1$ ,  $n_2=1,52$ ). I— $E_1$  перпендикулярно к плоскости падения, II— $E_1$  в плоскости падения. Графики построены по формулам Френеля. На верхнем крае рисунка показаны значения угла преломления.

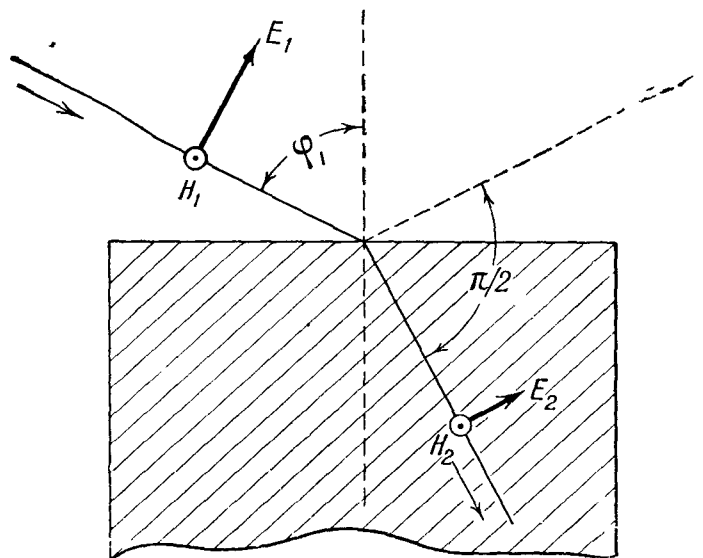


Рис. 260. То же, что на рис. 257, но  $\varphi_1=63^\circ$  (угол Брюстера). Амплитуда отраженной волны равна 0.

стеклянную пластинку в двух направлениях (вокруг осей  $OO$  и  $O'O'$ ), можно достигнуть такого положения, при котором свет от нее не отражается (падение под углом Брюстера,  $E$  в плоскости падения). Повернув поляризатор на  $90^\circ$ , мы получаем максимальную (при данном угле падения) интенсивность отраженного света.

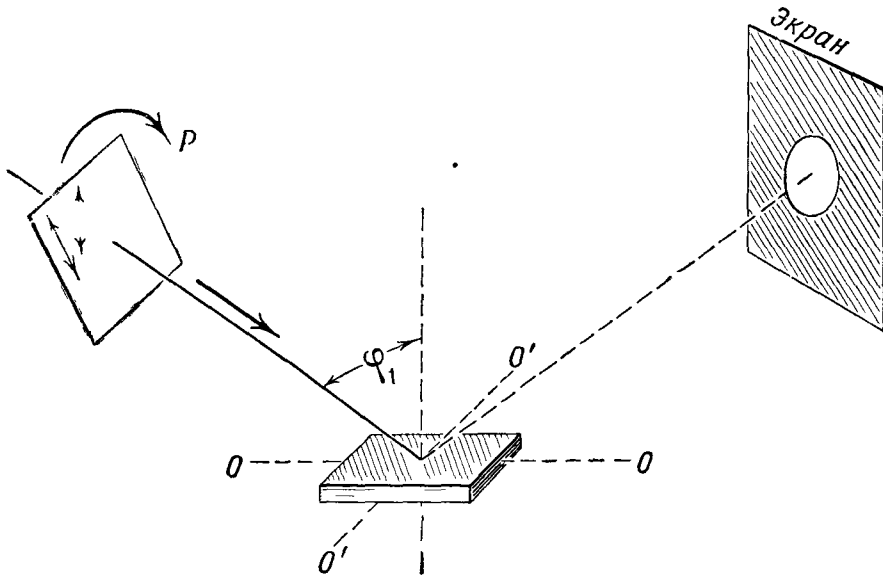


Рис. 261. Схема демонстрации явления Брюстера в оптике. Зеркало сделано из черного (сильно поглощающего) стекла для того, чтобы не было заметного отражения от его задней грани;  $P$ —поляризатор.

С помощью стеклянного зеркала можно однозначно установить направление векторов  $E$  и  $H$  во всяком линейно-поляризованном свете. При таком положении зеркала, когда нет отражения, вектор  $E$  падающего света лежит в плоскости падения, вектор  $H$  к ней перпендикулярен.

На пластинках из поляриоида обычно делаются метки, показывающие направление вектора  $E$  выходящего из них линейно-поляризованного света. С помощью только что описанного опыта легко проверить правильность этих меток.

**7. Полное отражение.** Уравнения (7.54), (7.56) имеют непосредственный физический смысл только тогда, если

$$\sin \varphi_2 \leq 1.$$

Случай, когда

$$n_1 > n_2, \sin \varphi_1 > \frac{n_2}{n_1}, \quad (7.52a)$$

а следовательно, согласно (7.52)

$$\sin \varphi_2 > 1,$$

Рис. 262. Падающая и отраженная волна в первой среде и волна, распространяющаяся вдоль границы, во второй среде в случае полного отражения. Стрелками показаны направления распространения волн.

требует особого рассмотрения. Мы не будем его проводить (оно требует более сложного математического аппарата, чем тот, которым мы здесь пользуемся). Укажем лишь готовый результат. Мнение, распространенное

среди начинающих, что в случае (7.52a) свет *вовсе* не проникает во вторую среду, является ошибочным \*).

Если имеет место (7.52a), во второй среде возникает электромагнитная волна, в которой компоненты  $E$  и  $H$  описываются выражениями вида

$$ae^{-hz} \cos(\omega t - k_1 \sin \varphi_1 \cdot x).$$

Эта волна распространяется *вдоль границы раздела*, причем ее интенсивность очень быстро падает с глубиной  $z$ . Практически волна во второй среде существует только в очень тонком слое, толщина которого — порядка длины волны ( $h$  — порядка  $1/\lambda$ ). В ней вектор Умова — Пойнтинга направлен *вдоль границы раздела*, нет потока энергии в глубь второй среды. Поэтому *интенсивность отраженной волны равна интенсивности падающей*. Явление, о котором идет речь, называется *полным отражением* (рис. 262).

Электромагнитное поле во второй среде при полном отражении было подвергнуто А. А. Эйхенвальдом детальному теоретическому исследованию. Л. И. Мандельштаму и Вуду удалось продемонстрировать на опыте проникновение электромагнитного поля во вторую среду (рис. 263).

8. **Ионосфера.** Не следует думать, что в среде, отличной от вакуума, всегда  $u < c$ , а следовательно,  $\epsilon > 1$ ,  $n > 1$ . Замечательный пример обрат-

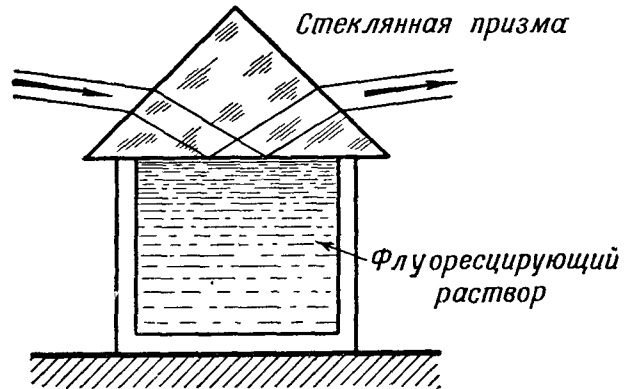


Рис. 263. Опыт Л. И. Мандельштама. На границе стекло—раствор происходит полное отражение, тем не менее заметна флуоресценция (светится очень тонкий слой раствора).

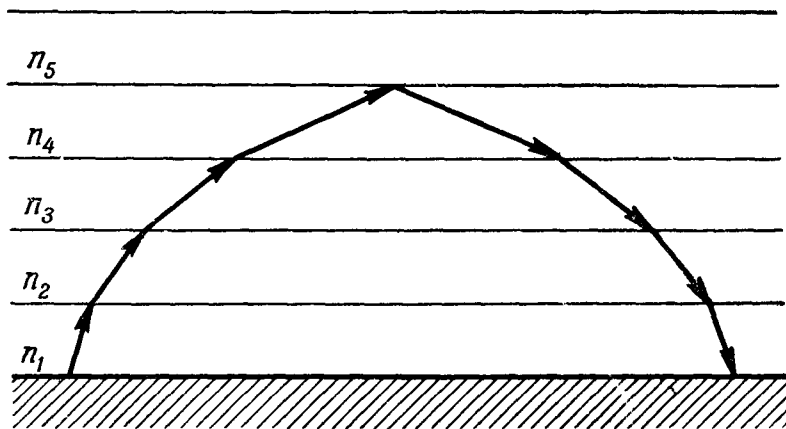


Рис. 264. Распространение волны в слоистой среде;  $n$  скачкообразно убывает от слоя к слою.

ного представляет *ионосфера*. Этим термином обозначают верхние, ионизированные слои атмосферы, играющие фундаментальную роль в распространении радиоволн (за исключением очень коротких волн частоты порядка  $10^8$  герц и выше) над поверхностью земного шара.

Для того чтобы описать (грубо схематически) то, что происходит в ионосфере, представим себе сначала (рис. 264) слоистую среду, в которой  $n$

\*) Это видно уже из того, что уравнениям (7.53) или (7.55) нельзя удовлетворить, если положить  $A_2 = 0$ .

скачкообразно убывает от слоя к слою, причем в нижнем слое  $n=1$ . Согласно закону преломления

$$n_1 \sin \varphi_1 = n_2 \sin \varphi_2 = n_3 \sin \varphi_3 = \dots,$$

и следовательно, распространение происходит по ломаной линии. Если найдется слой с достаточно малым  $n$ , на его границе происходит полное

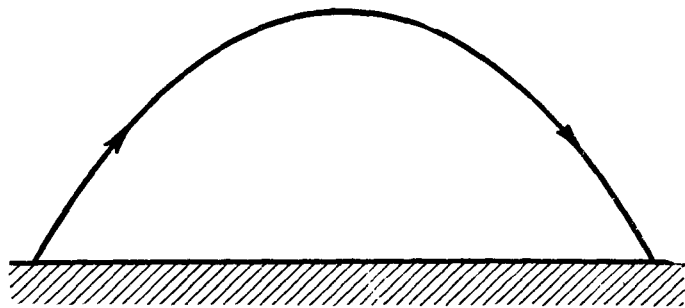


Рис. 265. Распространение волн в неоднородной среде;  $n$  монотонно убывает с высотой.

отражение и волны возвращаются на поверхность земли. Здесь на каждой границе, помимо преломления, происходит и отражение. Если перейти к предельному случаю *непрерывного* изменения  $n$ , «луч» (нормаль к плоскости равной фазы) превращается в плавную кривую, а отражения исчезают. Явление, изображенное на рис. 265 (плавное искривление «лучей»), называют *рефракцией* волн \*).

В действительности ионосфера имеет очень сложную структуру. На это впервые указал М. В. Шулейкин (1884 — 1939), один из виднейших создателей советской радиотехники, широко известный также как основатель преподавания радиотехники в нашей высшей школе и учитель целого поколения советских радиоинженеров. Ионосфера состоит из нескольких ионизированных слоев. В них  $n$  не только зависит от высоты  $z$  над поверхностью земли и от частоты (дисперсия), но подвержено сильным регулярным изменениям в зависимости от времени суток и времени года, а также быстрым беспорядочным изменениям. Главные слои расположены соответственно на высоте примерно от 100 до 350 км над поверхностью земли.

Радиоволны распространяются от передатчика к приемнику по нескольким различным путям (рис. 266). На приемник действует (в случае двух волн) результирующее поле интенсивности

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2),$$

где  $A_1, A_2, \varphi_1, \varphi_2$  — амплитуды и фазы, с которыми приходят волны, распространяющиеся по тому и другому пути; имеет место *интерференция* обеих волн. Разность фаз  $\varphi_1 - \varphi_2$  зависит от условий распространения в ионосфере. Вследствие беспорядочных из-

отражение и волны возвращаются на поверхность земли. Здесь на каждой границе, помимо преломления, происходит и отражение. Если перейти к предельному случаю *непрерывного* изменения  $n$ , «луч» (нормаль к плоскости равной фазы) превращается в плавную кривую, а отражения исчезают. Явление, изображенное на рис. 265 (плавное искривление «лучей»), называют *рефракцией* волн \*).

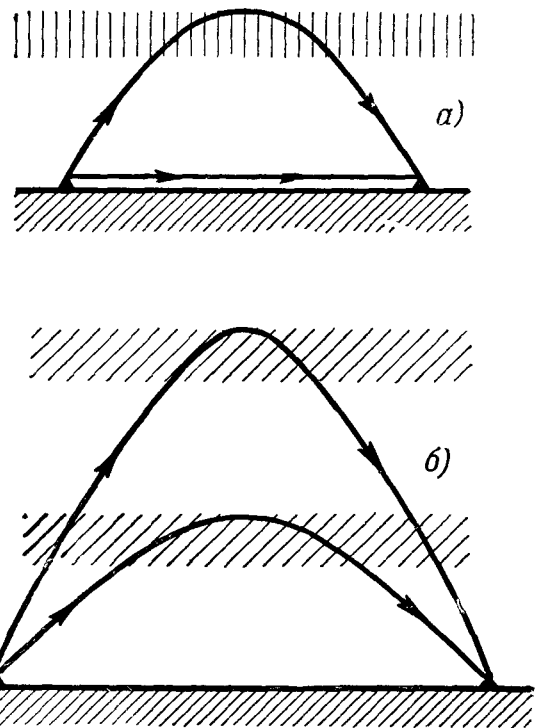


Рис. 266. Два случая распространения радиоволн: *a* — интерферируют «земной» и «небесный» лучи, *b* — интерферируют два «небесных» луча.

\*) При некоторых условиях существует сильно выраженная рефракция видимого света, а также звука в нижних слоях атмосферы.



менений  $\varepsilon$  в ионосфере  $\varphi_1 - \varphi_2$  также беспорядочно меняется, интенсивность  $A^2$  то растет, то падает. Обычно  $\varphi_1 - \varphi_2$  изменяется на величину порядка  $\pi$  за время порядка минуты. Этим вызываются *замирания* радиоволн (фэдинги), хорошо известные каждому радиослушателю.

Знание состояния ионосферы имеет первостепенное значение для правильной организации радиосвязи. Приблизительно с 1926 г. началось систематическое исследование состояния ионосферы с помощью «ионосферных станций», расположенных в различных местах земного шара. Исследования проводятся методом «радиоэхо», о котором уже говорилось в связи с радиолокацией (§ 6). В обзоре «Советская радиофизика за 30 лет»\*) Б. А. Введенский и М. И. Пономарев приводят следующие сведения о начале ионосферных исследований в СССР. «Вероятно, первыми опубликованными исследованиями в СССР являются исследования, произведенные в связи с Интернациональным полярным годом (1932 — 1933 гг.) в Мурманске М. А. Бонч-Бруевичем. В 1932 г. действовала экспериментальная ионосферная установка А. Н. Казанцева и Я. Л. Альперта. Вскоре начались аналогичные работы В. Н. Кессениха и его группы в Томске; около середины 30-х годов начал регулярно действовать ряд других советских ионосферных станций. С этого времени начинается планомерное исследование ионосферы, уже в прямой связи с практической эксплуатацией радиолиний».

Радиоволны короче 10 м (граница — довольно условная и меняется в зависимости от состояния ионосферы) проходят сквозь ионосферу. Этим объясняется невозможность надежной связи на больших расстояниях с помощью волн короче 10 м. Это обстоятельство имеет, с другой стороны, решающее значение для *радиоастрономии* — исследования Солнца и звезд с помощью радиоаппаратуры, улавливающей излучаемые ими радиоволны.

Пионером исследования распространения ультракоротких волн (у. к. в.), т. е. волн длины (1—10) м, является Б. А. Введенский. Им было, в частности, выяснено (в 1926 — 1928 гг.), что решающее значение имеет интерференция волны, приходящей в точку наблюдения непосредственно от источника (поднятого над Землей), и волны, отраженной от Земли. Б. А. Введенским и его сотрудниками (М. Г. Аренберг и другие) было выяснено, что существенное значение для распространения у. к. в. имеют свойства почвы и неоднородность нижних слоев атмосферы.

**9. Отражение от металла.** Когда электромагнитная волна проникает в металл, электрическое поле волны  $E$  вызывает появление в толще металла электрического тока, плотность которого  $j$  связана с  $E$  соотношением

$$j = \sigma E$$

(см. § 2). Вследствие этого металл нагревается, в нем происходит *поглощение* энергии, по мере продвижения в глубь металла амплитуда электрического и магнитного полей убывает по экспоненциальному закону. Подсчет, основанный на уравнениях Максвелла, показывает, что толщина слоя, в котором происходит убывание амплитуды в данное число раз (скажем в  $e$  раз), тем меньше, чем больше  $\sigma$  и чем выше частота. Например, в алюминии при частоте  $3 \cdot 10^9$  герц уже на глубине около  $10^{-4}$  см амплитуда  $E$  и  $H$  в  $e$  раз меньше, чем на поверхности.

На основании этой оценки естественно идеализировать металл, на границу которого падает электромагнитная волна высокой частоты, считая

\*) Успехи физических наук 33, стр. 318 (1947). В обзоре содержится весьма подробный перечень исследований во всех областях радиофизики.

его средой, в которую поле не проникает вовсе, т. е. внутри которой  $\mathbf{E} = 0$ ,  $\mathbf{H} = 0$ . Рассуждая так же, как в п. 1, мы приходим при такой идеализации к следующим условиям, которым должно удовлетворять поле в диэлектрике на границе с металлом (плоскости  $z = 0$ ):

$$E_x^{(1)} = E_x^{(2)} = 0, \quad E_y^{(1)} = E_y^{(2)} = 0. \quad (7.58)$$

Пусть на границу диэлектрик — металл падает со стороны диэлектрика электромагнитная волна

$$\begin{aligned} E &= E_x = A \cos(\omega t - kz), \\ H &= H_y = nA \cos(\omega t - kz). \end{aligned}$$

Напишем для отраженной волны

$$\begin{aligned} E' &= E'_x = A' \cos(\omega t + kz), \\ H' &= H'_y = -nA' \cos(\omega t + kz), \end{aligned}$$

откуда

$$E_x^{(1)} = (E_x + E'_x)_{z=0} = (A + A') \cos \omega t.$$

На основании (7.58) имеем:

$$A' = -A. \quad (7.59)$$

Таким образом, при сделанной идеализации коэффициент отражения  $R$  на границе с металлом равен единице, поглощенная энергия равна нулю. Опыт дает для коэффициента отражения радиоволн от меди или алюминия значения, весьма близкие к единице.

На основании (7.59) результирующая волна в диэлектрике имеет вид

$$\begin{aligned} E &= E_x + E'_x = 2A \sin kz \sin \omega t, \\ H &= H_y + H'_y = 2nA \cos kz \cos \omega t. \end{aligned}$$

Это — стоячая электромагнитная волна, для которой плоскость  $z = 0$  является узлом электрического поля и пучностью магнитного поля (рис. 267). То обстоятельство, что на границе диэлектрик — металл величина  $H_y$  (при нашей идеализации) меняется скачком, не должно нас смущать. Это связано с тем, что вдоль поверхности металла под действием электромагнитных волн течет ток, имеющий то же направление, что  $H$  близ границы. При сделанной нами идеализации он течет в бесконечно тонкой пленке около поверхности («поверхностный ток»). Скачок  $H_y$  при переходе через границу диэлектрик — металл обеспечивает выполнение уравнения (7.4) для прямоугольника  $M_1 N_1 N_2 M_2$  в пределе, когда  $M_1 M_2 = N_1 N_2 = 0$ .

Только что сказанное позволяет наглядно представить «механизм» светового давления, обнаруженного на опыте П. Н. Лебедевым в прославившей его работе, выполненной в Московском университете в 1901 г.\*). Магнитное поле  $\mathbf{H}$  на границе диэлектрик — металл действует на поверхностный ток, имеющий в каждый момент то же направление, что  $\mathbf{E}$  около границы, с силой, направленной так же, как вектор  $\mathbf{j} \times \mathbf{H}^{**}$ ), т. е. по нор-

\*) По свидетельству знаменитого русского ученого К. А. Тимирязева только опыт Лебедева смог убедить одного из виднейших представителей физики XIX в. лорда Кельвина (В. Томсона) в правильности электромагнитной теории света. «Вы, может быть, знаете, — сказал он К. А. Тимирязеву, — что я всю жизнь воевал с Максвеллом, не признавая его светового давления, и вот ваш Лебедев заставил меня сдаться перед его опытами» (К. А. Тимирязев, Сочинения, т. IX, Сельхозгиз, 1939, стр. 61).

\*\*\*) Напомним читателю, что поле  $\mathbf{H}$  действует на ток  $i$ , текущий в направлении единичного вектора  $\mathbf{l}$ , с силой (отнесенной к единице длины)  $\frac{i}{c} \mathbf{l} \times \mathbf{H}$ .

мали к границе, в сторону от диэлектрика к металлу (рис. 267). Оказывая давление на отражающую пластинку, волна сообщает ей некоторое количество движения. Это позволяет утверждать, что электромагнитное поле обладает количеством движения (ср. § 4).

**10. Зависимость коэффициента отражения от толщины пластинки.** В свете сказанного в п. 7 опыт со стоячими волнами (рис. 241) становится вполне понятным. Алюминиевая пластинка является узловой плоскостью электрического поля. Что касается отличия между сильным отражением электромагнитных волн от алюминиевого листа и очень слабым отражением от листа из эбонита или гетинакса, то оно не может быть просто сведено к отличию случая, когда  $R=1$  для границ воздух — металл, от случая  $R$ , определенного первой формулой (7.47) для границ воздух — эбонит или воздух — гетинакс (причем  $\varepsilon=3 \div 4$  для эбонита,  $\varepsilon=4 \div 6$  для гетинакса). В самом деле, формулы (7.47) выведены в предположении, что отражение происходит от диэлектрика, заполняющего *все полупространство*  $z > 0$ . На опыте же мы имели дело с листами толщины порядка 1 см. Волна, отраженная от пластинки (рис. 268), складывается из волны

$$A'_1 \cos(\omega t + k_1 z), \quad (7.60)$$

отраженной от плоскости  $z=0$ , и волны вида

$$A''_1 \cos(\omega t + k_1 z - 2k_2 \delta), \quad (7.61)$$

отраженной от плоскости  $z=\delta$  (задней плоскости пластинки). Отражение от плоскости  $z=0$  происходит с потерей полуволны, от плоскости  $z=\delta$  — без потери полуволны (ср. п. 2). Следовательно,  $A'_1$ ,  $A''_1$  имеют противоположные знаки. Если, кроме того,  $\delta \ll \lambda_2$ , т. е.  $2k_2 \delta \ll \pi$ , волны (7.60), (7.61) находятся почти в противофазе и отражение от пластинки значительно слабее, чем это следовало бы по формулам (7.47). Но, если бы мы взяли  $\delta = \lambda_2/4$ , откуда  $2k_2 \delta = \pi$ , волны (7.60), (7.61) были бы синфазны и, следовательно, отражение — сильнее, чем это следовало бы по формулам Френеля.

Проведем приближенный расчет отражения для случая  $n=1$ ;  $0 < \Delta n \ll 1$ . На основании (7.46) имеем приближенно:

$$A'_1 = -\frac{\Delta n}{2} A_1, \quad A_2 = \left(1 - \frac{\Delta n}{2}\right) A_1. \quad (7.62)$$

Ввиду малости  $\Delta n$  мы можем считать приближенно:

$$A_2 = A_1,$$

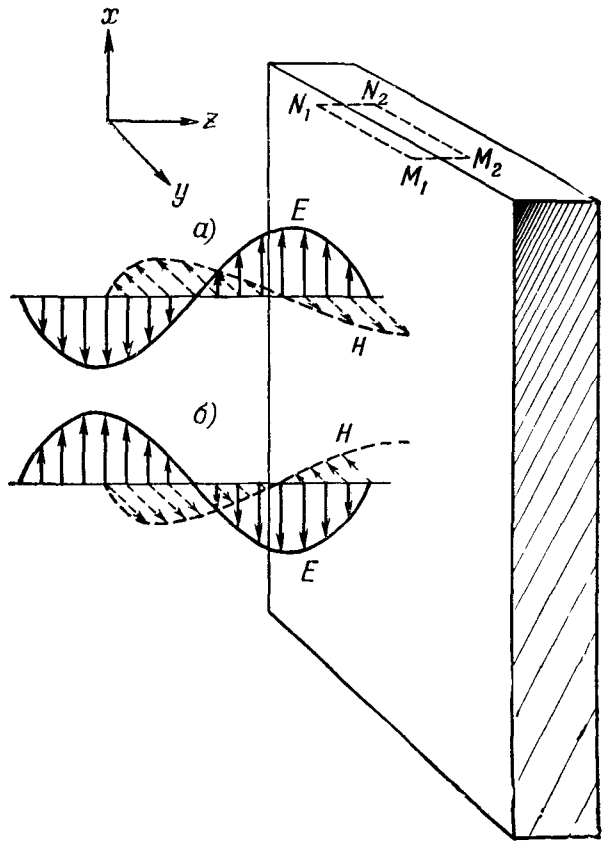


Рис. 267. Стоячая волна, образующаяся при отражении от металла (рассматриваемого как идеальный проводник). Моментальные снимки в моменты, когда: а)  $\omega t = \frac{\pi}{4}$ , б)  $\omega t = \frac{5\pi}{4}$  Циркуляция вектора  $\mathbf{H}$  по прямоугольнику  $M_1N_1N_2M_2$  равна  $4\pi/c$ , умноженному на ток, текущий сквозь этот прямоугольник.

что дает для амплитуды волны, отраженной от второй границы пластинки ( $z = \delta$ ),

$$A'_2 = \frac{\Delta n}{2} A_1.$$

Ввиду малости  $\Delta n$  мы можем считать, что при переходе через границу  $z = 0$  волна, отраженная от плоскости  $z = \delta$ , сохраняет это значение и, следовательно,

$$A''_1 = \frac{\Delta n^2}{2} A_1. \quad (7.63)$$

Принимая во внимание, что разность фаз  $2k_2\delta$  (или приблизительно  $2k\delta$ , полагая  $k_2 = (1 + \Delta n)k_1 = k$ ) из-за прохождения толщины пластинки в обоих

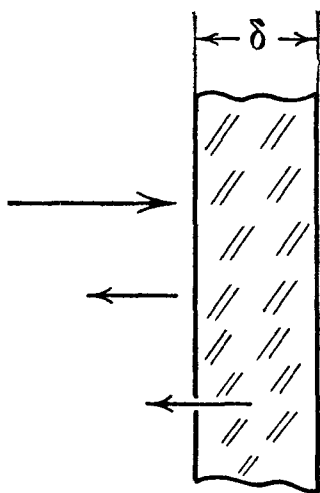


Рис. 268. Отражение от двух параллельных границ пластинки.

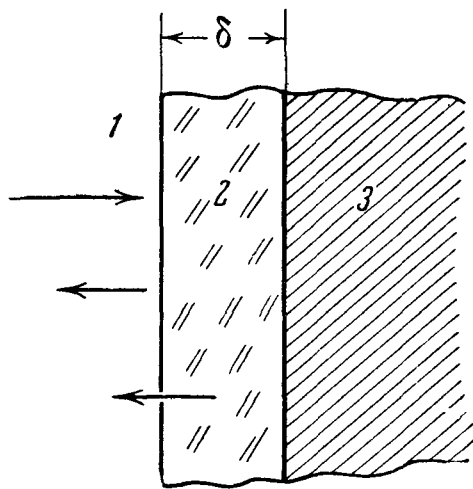


Рис. 269. Отражение от двух параллельных границ пластинки 2, являющейся промежуточным слоем между средами 1, 3.

направлениях второй отраженной волной, имеем для суммарной отраженной волны

$$E''_1 = A'_1 \cos(\omega t + kz) + A''_1 \cos(\omega t + kz - 2k\delta)$$

или, подставляя (7.62), (7.63),

$$E''_1 = A_1 \Delta n \sin k\delta \sin(\omega t + kz - k\delta). \quad (7.64)$$

Интенсивность отраженной волны пропорциональна, таким образом,  $\sin^2 k\delta$ . Она равна нулю при  $k\delta = m\pi$  ( $m$  — целое), т. е.  $\delta = m\lambda/2$ , и максимальна при  $k\delta = m\pi + \pi/2$ , т. е.  $\delta = m\lambda/2 + \lambda/4$ .

Разумеется, в действительности мы никогда не имеем дело с диэлектриком, заполняющим полупространство. Тем не менее рассмотрение отражения от полупространства не лишено физического значения и вот почему.

Ни один диэлектрик не является идеальным, во всех диэлектриках имеется хотя бы очень малое поглощение. Если толщина диэлектрика такова, что в нем происходит практически полное поглощение волн на расстоянии порядка  $2\delta$ , можно пренебречь отражением от задней плоскости и пользоваться формулами Френеля.

Аналогичные соображения могут быть применены к отражению акустических волн от пластинок (ср. гл. VI, § 6) и к отражению видимого света от тонких прозрачных пластинок и пленок.

Особенно интересен случай, показанный на рис. 269: пластинка или пленка 2 служит переходной средой между телами 1, 3. Подберем

вещество пластинки 2 так, чтобы как отражение в 1 от 2, так и отражение в 2 от 3 происходили с потерей полуволны. Тогда, если толщина пластинки  $\delta = \lambda_2/4$ , волны, отраженные в среду 1 от обеих границ пластинки, будут в противофазе; если, кроме того, среда 2 подобрана так, что амплитуды этих волн одинаковы, они будут гасить друг друга, коэффициент отражения от пластинки 2 будет равен 0.

Описанным приемом пользуются для устранения (или по крайней мере существенного ослабления) отражения акустических или электромагнитных волн от тех или иных границ между средами. В частности, с помощью нанесения на поверхность стекла тонких пленок из подходящего прозрачного вещества можно существенно ослабить крайне нежелательные отражения света от линз, входящих в состав тех или иных оптических приборов, например фотоаппаратов. Этот прием называется «просветлением оптики» (оптика в смысле оптическая аппаратура). Особенных успехов в этом направлении достигли ленинградский физик А. А. Лебедев и его школа.

Если пластинка не является плоско-параллельной, т. е.  $\delta$  меняется от места к месту, отражение происходит в различных местах с различной интенсивностью. Геометрическими местами точек, где интенсивность суммарной отраженной волны одинакова, являются линии  $\delta = \text{const}$  (линии равной толщины). В случае клина линии равной толщины — прямые, параллельные ребру клина. При этом, так как  $\delta$  пропорционально расстоянию от ребра клина, интенсивность суммарной отраженной волны — периодическая функция этого расстояния. Это является следствием периодичности волны. Разумеется, периодическая зависимость интенсивности суммарной отраженной волны от  $\delta$  сохраняется и при косом падении на клин.

Только что сказанное дает возможность объяснить оптический опыт, описанный в гл. I (рис. 13). Мыльная пленка постепенно утолщается от верхней к нижней стороне каркаса, свет отражается от обеих ее сторон.

Рассмотренные здесь вкратце явления, происходящие при отражении волн от пластин, являются одним из наиболее важных случаев *интерференции*; интерференцией при отражении света от тонких пластин мы еще займемся с другой точки зрения в гл. X, § 12.

## § 9. Электромагнитные волны в анизотропной среде

1. Связь между  $D$  и  $E$ . Рассматривая электромагнитные волны, мы считали до сих пор, что векторы  $D$  и  $E$  коллинеарны и отношение их величин не зависит от направления. Среда, обладающие этим свойством, называют электрически (или, если речь идет о видимом свете, оптически) изотропными. Но для многих сред дело обстоит сложнее. В них  $D$  и  $E$  имеют, вообще говоря, в данной точке *различные* направления; угол между этими векторами и отношение их величин зависят от направления вектора  $E$ . Такие среды называют электрически (оптически) *анизотропными*. Большинство кристаллов (например, слюда, исландский шпат) оптически анизотропно (естественная анизотропия). Изотропные в отсутствие внешних воздействий прозрачные тела (например, стекло, пластмассы) становятся оптически анизотропными под действием механических напряжений (искусственная анизотропия). Мы здесь будем говорить для определенности только о видимом свете и ограничимся при этом *однородными* анизотропными телами — такими, свойства которых в различных точках одинаковы.

Исследование оптических явлений в анизотропных телах приводит к выводу, что в них: а) имеет место свойство суперпозиции (если поле  $E_1$

создает индукцию  $\mathbf{D}_1$ , а поле  $\mathbf{E}_2$  — индукцию  $\mathbf{D}_2$ , то поле  $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$  создает индукцию  $\mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2$ ); б) всегда можно найти три взаимно перпендикулярных направления  $x, y, z$ , обладающих следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon_x \mathbf{E}, & \text{если } \mathbf{E} & \text{ коллинеарен оси } x, \\ \mathbf{D} &= \varepsilon_y \mathbf{E}, & \text{» } \mathbf{E} & \text{ » » } y, \\ \mathbf{D} &= \varepsilon_z \mathbf{E}, & \text{» } \mathbf{E} & \text{ » » } z, \end{aligned}$$

где  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  — постоянные.

Направления  $x, y, z$  мы будем называть *главными направлениями*, величины  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  — *главными диэлектрическими проницаемостями*. Словами: главные направления характеризуются тем, что, если вектор  $\mathbf{E}$

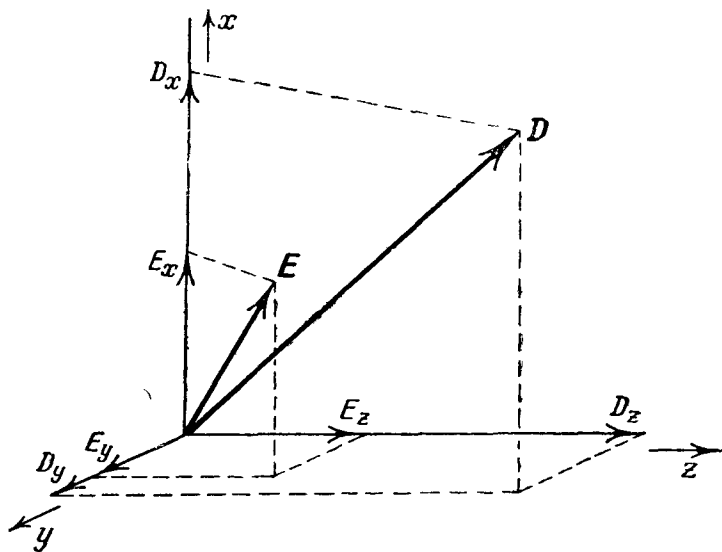


Рис. 270. Построение векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$  для случая,  $E_x = E_y = E_z$ ,  $\varepsilon_x = 2$ ,  $\varepsilon_y = 1,5$ ,  $\varepsilon_z = 2,5$ .

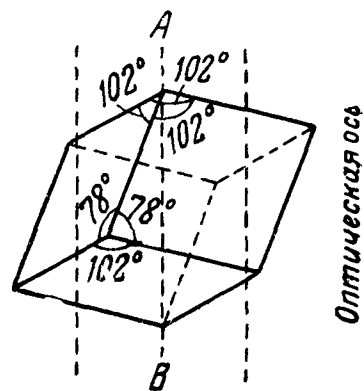


Рис. 271. Кристалл исландского шпата.

направлен по одному из главных направлений, вектор  $\mathbf{D}$  ему коллинеарен и пропорционален. Ясно, что это свойство не может иметь места для любого направления. Пусть

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{e}_x + E_y \mathbf{e}_y + E_z \mathbf{e}_z,$$

причем  $E_x \neq 0$ ,  $E_y \neq 0$ ,  $E_z \neq 0$ . Тогда (на основании свойства суперпозиции)

$$\mathbf{D} = \varepsilon_x E_x \mathbf{e}_x + \varepsilon_y E_y \mathbf{e}_y + \varepsilon_z E_z \mathbf{e}_z$$

и  $\mathbf{D}$  не коллинеарен  $\mathbf{E}$  (рис. 270), за исключением случая  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z$ , т. е. случая изотропной среды.

Интерес представляет случай, когда две главные диэлектрические проницаемости равны друг другу, например

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z \neq \varepsilon_x \quad (7.65)$$

Среды (например, исландский шпат, однородно сжатое или растянутое стекло), для которых имеет место (7.65), называют *одноосными*. Направление оси  $x$  называется направлением оптической оси. На рис. 271 показан кристалл исландского шпата ( $\text{CaCO}_3$ ) и направление оптической оси. Для одноосных сред удобны обозначения

$$\varepsilon_x = \varepsilon_o, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon_{\Pi}. \quad (7.65a)$$

В случае одноосной среды если вектор  $\mathbf{E}$  произвольным образом ориентирован в плоскости  $\Pi$ , перпендикулярной к оптической оси, имеем:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_{\Pi} \mathbf{E},$$

$\mathbf{D}$  коллинеарен и пропорционален  $\mathbf{E}$ . Здесь только одно из главных направлений ( $x$ ) однозначно определено, за главные направления  $y, z$  можно взять любые взаимно перпендикулярные направления, перпендикулярные к направлению  $x$ .

На рис. 272 показано построение вектора  $\mathbf{D}$  при заданном векторе  $\mathbf{E}$  для некоторой точки одноосной среды.

2. Распространение вдоль одной из главных осей. Представим себе параллелепипед, грани которого перпендикулярны к главным осям (рис. 273).

а) Пусть на грань  $z=0$  падает нормально линейно-поляризованная электромагнитная волна, в которой  $\mathbf{E}$  коллинеарно оси  $x$ :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_x = A_1 \cos(\omega t - kz).$$

Ясно из симметрии, что она породит в пластинке электромагнитную волну, в которой векторы  $\mathbf{D}, \mathbf{E}$  будут также коллинеарны оси  $x$ , причем  $\mathbf{D} = \varepsilon_x \mathbf{E}$ . Эта волна ничем не будет отличаться от волны в изотропной диэлектрике с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_x$ . Она будет распространяться со скоростью  $c/\sqrt{\varepsilon_x}$  и запишется так:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_x = A_2 \cos(\omega t - k_x z), \quad k_x = k \sqrt{\varepsilon_x}. \quad (7.66)$$

б) Пусть на грань  $z=0$  падает нормально электромагнитная волна, в которой  $\mathbf{E}$  коллинеарно оси  $y$ :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_y = B_1 \cos(\omega t - kz).$$

Она порождает в пластинке волну, в которой  $\mathbf{D} = \varepsilon_y \mathbf{E}_1$ , распространяющуюся со скоростью  $c/\sqrt{\varepsilon_y}$ ,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_y = B_2 \cos(\omega t - k_y z), \quad k_y = k \sqrt{\varepsilon_y}. \quad (7.67)$$

Волны, распространяющиеся так, что тип поляризации в них всюду один и тот же, мы будем называть *нормальными*. Волны (7.66), (7.67) нормальны, так как при всех  $z$  они являются линейно-поляризованными волнами с  $\mathbf{E}$ , коллинеарным одной из главных осей, перпендикулярных к направлению распространения.

в) Пусть теперь нормально на грань  $z=0$  падает волна

$$\mathbf{E} = \mathbf{C}_1 \cos(\omega t - kz),$$

причем направление вектора  $\mathbf{C}_1$  образует углы  $\alpha, \pi/2 - \alpha$  (оба отличные от нуля) с осями  $x$  и  $y$ . На первый взгляд может показаться, что в кристалле при этом будет распространяться волна со скоростью, имеющей некоторое значение, промежуточное между  $c/\sqrt{\varepsilon_x}$  и  $c/\sqrt{\varepsilon_y}$ . Но это не верно. Разложим  $\mathbf{E}$  на составляющие волны

$$E_x = A_1 \cos(\omega t - kz),$$

$$E_y = B_1 \cos(\omega t - kz),$$

где

$$A_1 = C_1 \cos \alpha, \quad B_1 = C_1 \sin \alpha.$$

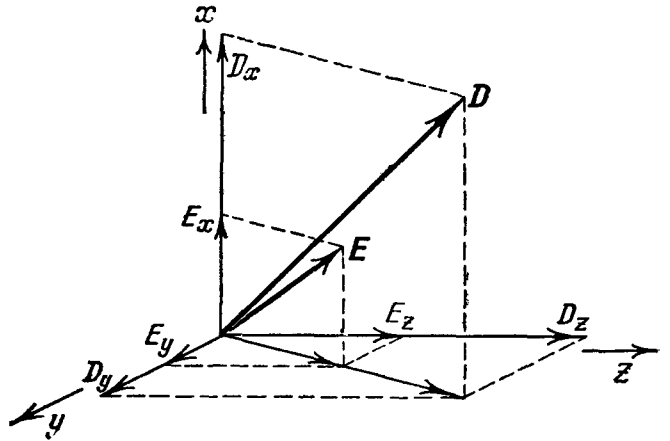


Рис. 272. Построение  $\mathbf{D}$  по заданному  $\mathbf{E}$  для одноосной среды.

Каждая из этих волн порождает волну типа (7.66), (7.67), и в результате в кристалле возникает волна с компонентами

$$E_x = A_2 \cos(\omega t - k_x z), \quad E_y = B_2 \cos(\omega t - k_y z), \quad (7.68)$$

где  $A_2, B_2$  пропорциональны соответственно  $A_1, B_1$ .

Сдвиг фаз между компонентами

$$\varphi = (k_y - k_x) z = k (\sqrt{\varepsilon_y} - \sqrt{\varepsilon_x}) z$$

(мы считаем для определенности, что  $\varepsilon_y > \varepsilon_x$ ) растёт по мере продвижения в глубь кристалла. На глубине  $z = z_1$  такой, что  $\varphi = \pi/2$ , т. е.

$$(\sqrt{\varepsilon_y} - \sqrt{\varepsilon_x}) z_1 = \frac{\lambda}{4},$$

где  $\lambda$  — длина волны в пустоте, конец вектора  $\mathbf{E}$  описывает эллипс, глав-

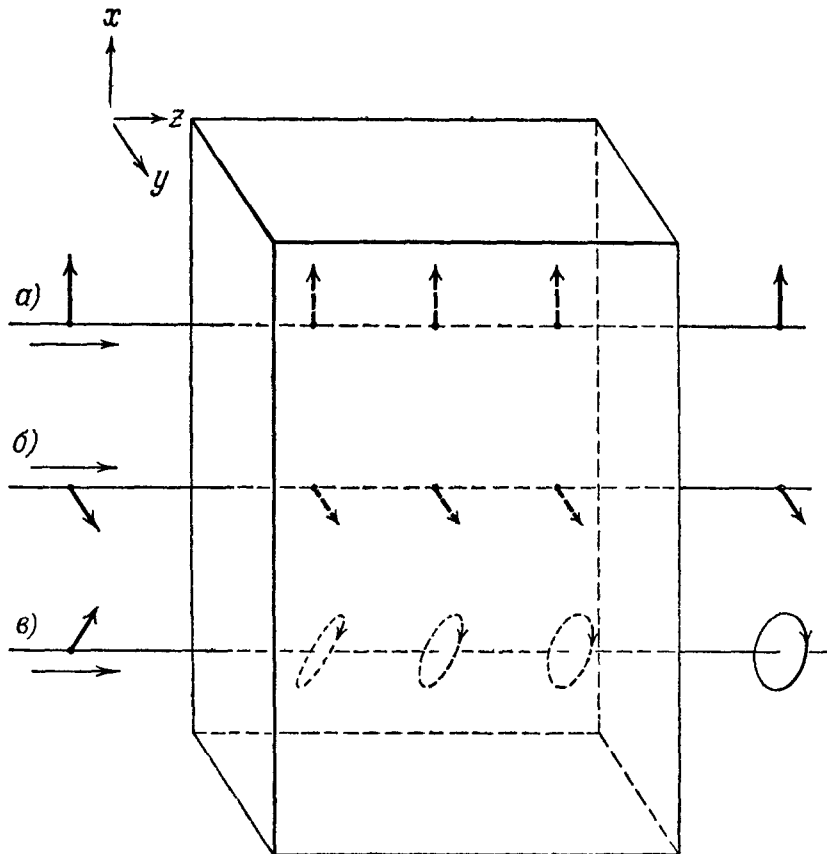


Рис. 273. Ребра параллелепипеда параллельны главным направлениям:  $a, b$  — нормальные волны (линейно-поляризованные во взаимно перпендикулярных направлениях);  $c$  — волна, отличная от нормальной, изменение типа поляризации с глубиной проникновения в кристалл.

ные оси которого коллинеарны осям  $x, y$ . На глубине  $z = z_2$  такой, что  $\varphi = \pi$ , т. е.

$$(\sqrt{\varepsilon_y} - \sqrt{\varepsilon_x}) z_2 = \frac{\lambda}{2},$$

колебание — линейно-поляризованное, причем вектор  $\mathbf{E}$  колеблется под углом  $(-\alpha)$  с осью  $x$  и т. д.

Таким образом, из пластинки будет выходить (вообще говоря) эллиптически-поляризованный свет. Форма эллипса, описываемого в нем концом вектора  $\mathbf{E}$ , определяется (при данном веществе) толщиной пластинки и ориентацией вектора  $\mathbf{E}$  падающего света.



Пластинка, толщина которой  $\delta$  такова, что

$$(V_{\varepsilon_y} - V_{\varepsilon_x})\delta = \frac{\lambda}{4}, \quad (7.69)$$

называется *пластинкой в четверть волны* (пластинка  $\lambda/4$ ). Ясно, что если на такую пластинку падает линейно-поляризованный свет, в котором

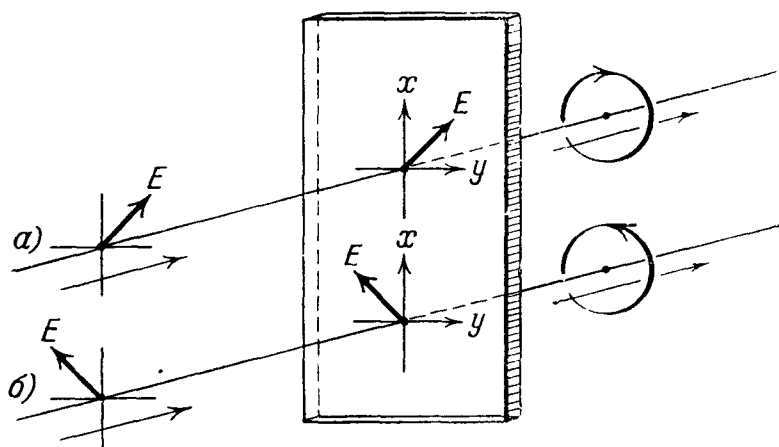


Рис. 274. Пластинка  $\lambda/4$ . Получение света, поляризованного по кругу: а—влево, б—вправо.

вектор  $E$  образует угол  $\pm \pi/4$  с осью  $x$ , из нее будет выходить свет, поляризованный по кругу (рис. 274).

Пластинка в четверть волны обычно изготавливается из слюды. На рис. 275 показана схема опыта, демонстрирующего превращение линейно-

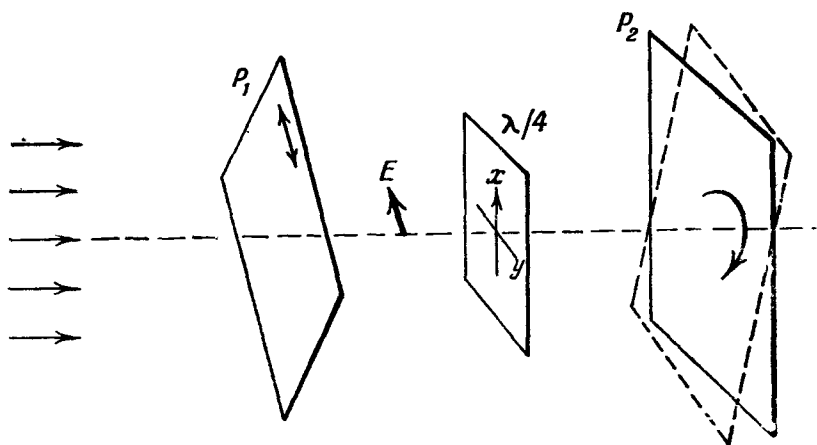


Рис. 275. Между поляроидами находится пластинка  $\lambda/4$ . Когда  $E$  в падающем на нее свете образует с осью  $x$  угол  $\pm \pi/4$  (см. рис. 274), поворот поляроида  $P_2$  не меняет освещенности экрана.

поляризованного света в поляризованный по кругу с помощью такой пластинки.

Ясно, что если в пластинку  $\lambda/4$  входит свет, поляризованный по кругу, выходящий из нее свет будет линейно-поляризован: пластинка добавляет сдвиг фаз  $\pi/2$  к уже имевшемуся сдвигу фаз  $\pm \pi/2$ .

**3. Двойное преломление.** Пусть пластинка (рис. 276) вырезана в одноосном кристалле в виде параллелепипеда, имеющего грани, параллельные оптической оси. Пусть на одну из этих граней падает косо линейно-поляризованный свет, причем его плоскость падения перпендикулярна, а направление вектора  $E$  коллинеарно оптической оси кристалла. Ясно из симметрии, что направление распространения преломленного света будет

оставаться в плоскости падения, а вектор  $\mathbf{E}$  в нем также будет коллинеарен оптической оси кристалла. Поэтому независимо от угла падения  $\varphi_1$  и угла преломления  $\varphi_2$  для света, прошедшего в кристалл, имеем:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}.$$

Поэтому преломление происходит (как и на границе изотропной среды) по закону отражения, причем

$$\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = \sqrt{\varepsilon_0}.$$

Пусть теперь направление распространения падающего света — прежнее, но вектор  $\mathbf{E}$  в нем расположен в плоскости падения. Здесь из сим-

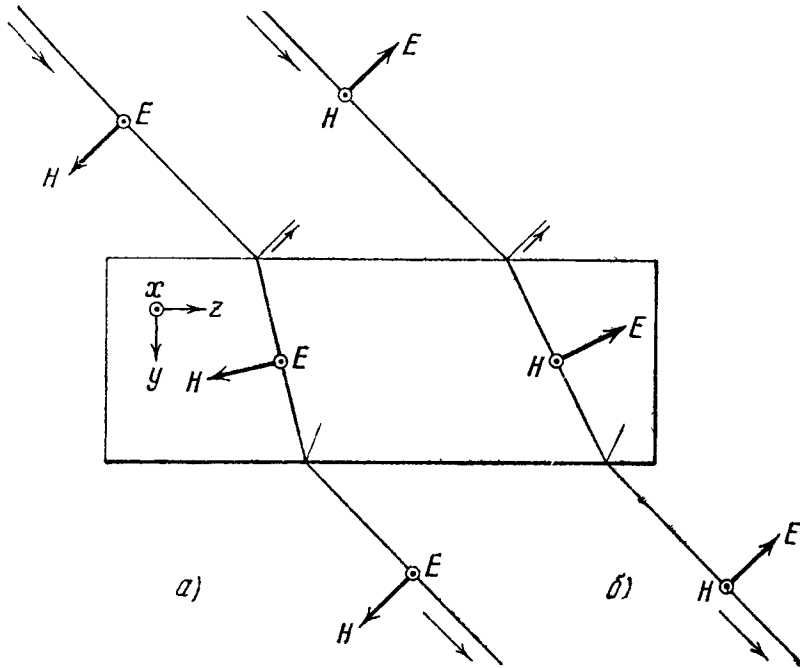


Рис. 276. Преломление света в одноосной пластинке. Плоскость падения перпендикулярна к оптической оси: а)  $\mathbf{E}$  параллельно оптической оси, б)  $\mathbf{E}$  параллельно плоскости  $\Pi$ .

метрии ясно, что направление распространения преломленного света будет оставаться в плоскости падения, а вектор  $\mathbf{E}$  в нем будет перпендикулярен к оптической оси кристалла. При этом независимо от угла падения  $\varphi_1$  и угла преломления  $\varphi_2'$  имеем для преломленного света

$$\mathbf{D} = \varepsilon_{\Pi} \mathbf{E}.$$

Преломление происходит и в этом случае по закону Снеллиуса, причем

$$\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2'} = \sqrt{\varepsilon_{\Pi}}.$$

Таким образом, при одном и том же угле падения  $\varphi_1$  углы преломления  $\varphi_2$  и  $\varphi_2'$  различны. Для исландского шпата  $\varepsilon_{\Pi} > \varepsilon_0$ , а следовательно,  $\varphi_2 < \varphi_2'$ .

Пусть, наконец, направление распространения прежнее, но падающий свет поляризован эллиптически или линейно и притом так, что вектор  $\mathbf{E}$  в нем колеблется не в плоскости падения и не перпендикулярно к ней. Разложим мысленно падающую волну на  $O$ -волну (линейно-поляризованную волну с вектором  $\mathbf{E}$ , коллинеарным оптической оси) и  $\Pi$ -волну (ли-

нейно-поляризованную волну с вектором  $E$ , параллельным плоскости  $\Pi$ ). Для каждой составляющей справедливо сказано выше.  $O$ -компонента порождает преломленную линейно-поляризованную волну с  $E$ , параллельным оптической оси, и углом преломления  $\varphi_2$ ,  $\Pi$ -компонента — преломленную линейно-поляризованную волну с  $E'$ , параллельным плоскости  $\Pi$ , и углом преломления  $\varphi'_2$ . Это явление носит название *двойного преломления*. На опыте легко наблюдать связанное с ним явление двойного преломления ограниченных световых пучков (лучей). Если пластинка достаточно толстая, а фронт падающей волны достаточно мал (свет выходит из достаточно малого отверстия), из кристалла выйдут два отдельных линейно-поляризованных световых пучка со взаимно перпендикулярным направлением колебаний вектора  $E$  (рис. 277).

Аналогичное расщепление происходит при падении на рассматриваемую пластинку естественного света (гл. V, § 7); на этом явлении мы пока не будем останавливаться, так как еще не выяснили природы естественного света (ср. гл. X, § 10).

Мы рассмотрели только простейший случай двойного преломления в одноосном кристалле. При условиях опыта, отличных от описанного здесь (например, если плоскость падения перпендикулярна к плоскости  $\Pi$ ), закон Снеллиуса уже не имеет места, отношение синуса угла падения к синусу угла преломления зависит от направления падающего света. В самом общем случае направление распространения одного из преломленных пучков не лежит в плоскости падения. Эти более сложные случаи подробно разбираются в курсах оптики.

В своей работе «О двойном преломлении лучей электрической силы» (см. § 5, п. 1) П. Н. Лебедев показал наличие двойного преломления микрорадиоволн в естественной ромбической сере. Он осуществил, в частности, из этого материала пластинку  $\lambda/4$  для волны  $\lambda = 6$  мм.

4. Дихроизм. Некоторые тела обладают различным коэффициентом поглощения для линейно-поляризованного света, в котором  $E = E_x$ , и для линейно-поляризованного света, в котором  $E = E_y$ , где  $x, y$  — два взаимно перпендикулярных направления. Это свойство называется *дихроизмом*. Им обладают в сильной степени кристаллы турмалина, а также поляроида. Поляроид состоит из очень мелких дихроичных кристалликов, ориентированных так, что направления максимального пропускания в них параллельны. Свойство дихроизма легко объясняет опыты, подобные показанному на рис. 179. Если на поляроид или турмалин падает свет произвольной поляризации, его  $x$ -компонента пропускается, а  $y$ -компонента практически полностью задерживается.

5. Вращение плоскости поляризации. В некоторых средах (например, в водном растворе сахара, в кристаллах кварца при распространении света в определенном направлении) нормальными волнами (см. п. 2) являются только волны, *поляризованные по кругу* (рис. 278), как влево

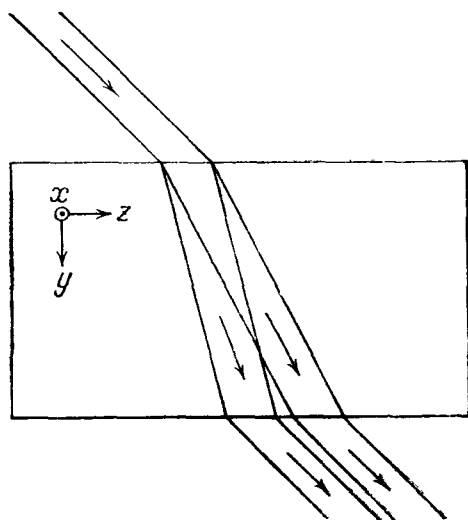


Рис. 277. Двойное преломление в одноосной пластинке. Плоскость падения перпендикулярна к оптической оси.

$$\begin{cases} E_x = a \cos(\omega t - k_{\perp} z), \\ E_y = a \sin(\omega t - k_{\perp} z), \end{cases} \quad (7.70)$$

так и вправо

$$\begin{cases} E_x = a \cos(\omega t - k_{\Pi} z), \\ E_y = -a \sin(\omega t - k_{\Pi} z), \end{cases} \quad (7.71)$$

причем  $k_{\perp} \neq k_{\Pi}$  (т. е. скорости распространения волны с правой и левой поляризацией различны).

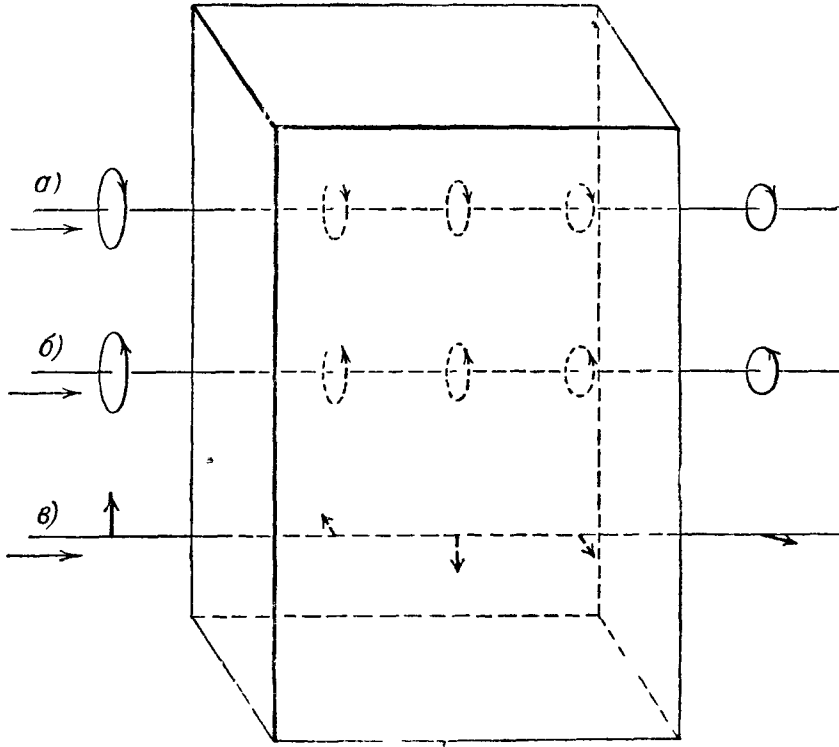


Рис. 278. Распространение света в среде, вращающей плоскость поляризации: а, б—нормальные волны (поляризованные по кругу влево и вправо); в—волна, отличная от нормальной; изменение типа поляризации с глубиной проникновения (вращение плоскости поляризации).

Пусть на границу  $z = 0$  такой среды падает линейно-поляризованная волна

$$\mathbf{E}_1 = E_{1x} = A \cos(\omega t - kz).$$

Представим ее в виде суперпозиции двух составляющих волн, поляризованных по кругу в противоположных направлениях:

$$\begin{cases} E_x^{(\perp)} = \frac{A}{2} \cos(\omega t - kz), \\ E_y^{(\perp)} = \frac{A}{2} \sin(\omega t - kz) \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} E_x^{(\parallel)} = \frac{A}{2} \cos(\omega t - kz), \\ E_y^{(\parallel)} = -\frac{A}{2} \sin(\omega t - kz) \end{cases}$$

$$(E_x^{(\perp)} + E_x^{(\parallel)} = E_{1x}, \quad E_y^{(\perp)} + E_y^{(\parallel)} = 0).$$

Первая порождает в рассматриваемой среде волну типа (7.70), вторая—волну типа (7.71). На глубине  $z$  суммарное колебание имеет составляющие

$$\begin{aligned} E_{2x} &= a \cos(\omega t - k_{\perp} z) + a \cos(\omega t - k_{\Pi} z) = \\ &= 2a \cos\left(\frac{k_{\perp} - k_{\Pi}}{2} z\right) \cos\left(\omega t - \frac{k_{\perp} + k_{\Pi}}{2} z\right), \\ E_{2y} &= a \sin(\omega t - k_{\perp} z) - a \sin(\omega t - k_{\Pi} z) = \\ &= 2a \sin\left(\frac{k_{\perp} - k_{\Pi}}{2} z\right) \cos\left(\omega t - \frac{k_{\perp} + k_{\Pi}}{2} z\right). \end{aligned} \quad (7.72)$$

Здесь величина  $a$  пропорциональна  $A$  (вследствие отражения  $a \neq A/2$ ). Колебание (7.72) представляет собой линейно-поляризованное колебание амплитуды  $2a$  и фазы  $(k_{\perp} + k_{\parallel})z/2$ , направление которого образует с осью  $x$  угол

$$\alpha = \frac{k_{\perp} - k_{\parallel}}{2} z.$$

Таким образом, по мере продвижения в глубь среды направление вектора  $\mathbf{E}$  поворачивается на все больший угол по отношению к направлению вектора  $\mathbf{E}$  на границе раздела. Это явление легко наблюдать на опыте. Оно называется *вращением плоскости поляризации*.

Если  $\alpha/z < 0$ ,  $k_{\parallel} > k_{\perp}$ , вращение называется правым, если  $\alpha/z > 0$ ,  $k_{\perp} > k_{\parallel}$  — левым. Величина  $|\alpha/z|$  зависит от длины волны (обычно растет с уменьшением  $\lambda$ ). В кварце для желтого света  $|\alpha|$  равно приблизительно  $22^\circ$  при  $z = 1$  мм.

---

## ГЛАВА VIII

### СЛОЖНЫЕ ИЗЛУЧАТЕЛИ

#### § 1. Предварительные замечания

В предыдущих главах были рассмотрены некоторые излучатели акустических и электромагнитных волн: синусоидально колеблющийся поршень, диаметр которого мал по сравнению с длиной волны (гл. VI, § 5); элементарный вибратор, синусоидально колеблющийся электрон (гл. VII, § 7). В двух последних случаях, так же как и в первом, размер излучающей системы (длина вибратора, удвоенная амплитуда смещения электрона) мал по сравнению с длиной волны. Для всех перечисленных излучателей — мы будем называть их *элементарными* — характерно *отсутствие резкой направленности* излучения. Согласно формуле (6.55) поршень, диаметр которого мал по сравнению с длиной волны, излучает равномерно во всех направлениях. Согласно (7.36) элементарный вибратор и колеблющийся электрон излучают равномерно во всех направлениях, лежащих в «экваториальной плоскости»: спадание интенсивности излучения с увеличением «широты» происходит очень плавно.

Под *сложным излучателем* мы будем понимать систему, излучающую акустические или электромагнитные волны (других волн мы в этой главе не будем рассматривать), имеющую размеры *не* малые по сравнению с длиной волны. Как мы увидим, некоторые сложные излучатели дают остро направленное излучение.

В этой главе будет дана теория некоторых типов сложных излучателей, широко применяемых в радиотехнике и акустике для получения остро направленного излучения (§ 2 — 7). Для построения этой теории мы будем пользоваться следующим приемом: сложный излучатель представляется как совокупность элементарных излучателей, а излучаемая им волна — как суперпозиция волн, излучаемых (по законам, известным из гл. VI, VII) этими элементарными излучателями.

В § 8 — 10 теория сложных излучателей будет применена для построения модели явлений отражения и преломления света и рассеяния рентгеновских лучей. Модель основана на следующем представлении. Под действием падающей на тело электромагнитной волны возникают вынужденные колебания электронов, содержащихся в атомах этого тела. Эти электроны становятся элементарными излучателями типа, рассмотренного в гл. VII, § 7. Совокупность всех электронов тела образует сложный излучатель.

В этой главе мы будем считать колебания всех элементарных излучателей, образующих сложный излучатель, строго синусоидальными и строго синхронными (но не обязательно синфазными).

Как будет ясно из гл. X, это представление является идеализацией; там же будут указаны пределы ее применимости и рассмотрены задачи о сложных излучателях, где отступления от синусоидальности играют решающую роль.

## § 2. Излучение полуволнового вибратора

Постараемся себе представить в общих чертах, как излучает антенна, состоящая из одного тонкого полуволнового вибратора (рис. 279, а). Пренебрежем разрывом между половинами вибратора (рис. 279, б) и

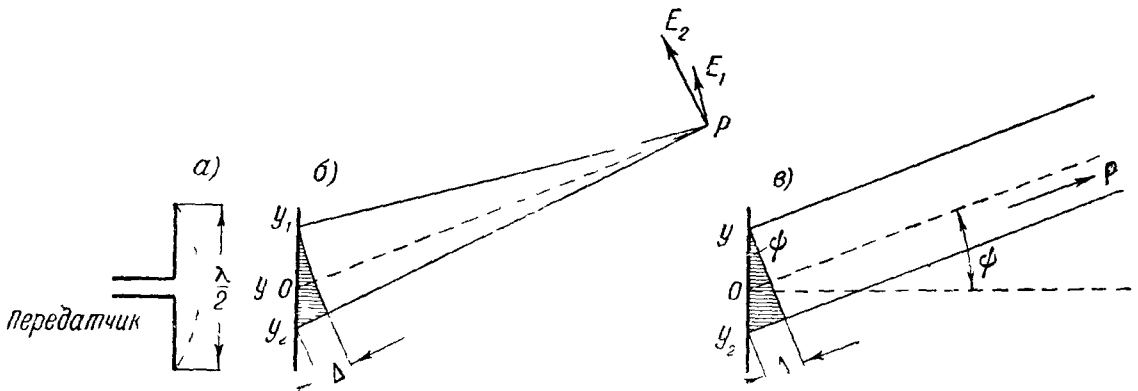


Рис. 279. а—тонкий полуволновой вибратор; б—его идеализация;  $\Delta$ —разность хода колебаний, приходящих в  $P$  от элементов  $y_1, y_2$ ;  $\phi$ —разность хода  $\Delta$  для весьма удаленной точки  $P$ .

будем его рассматривать как отрезок прямой линии, а каждый элемент этого отрезка («элемент» вибратора) — как элементарный вибратор. Поле, излучаемое антенной в целом, есть суперпозиция полей отдельных ее элементов.

Рассмотрим сначала точки пространства, лежащие в одной какой-нибудь меридиональной плоскости (плоскости, содержащей ось вибратора). Электрические поля, создаваемые отдельными элементарными вибраторами  $y = y_1, y = y_2$  (ось  $y$  совпадает с осью антенны) в точке  $P$ , лежат в рассматриваемой плоскости (рис. 279, б), а магнитные поля к ней перпендикулярны и, следовательно, коллинеарны между собой. Предположим, что мы настолько далеко ушли от антенны, что прямые, соединяющие точку наблюдения  $P$  с различными точками вибратора, можно считать параллельными (рис. 279, в). Тогда векторы  $\mathbf{E}$  от отдельных элементов можно считать коллинеарными, а разность хода колебаний, приходящих от элементов вибратора, можно рассчитывать по приближенной формуле

$$\Delta = (y_1 - y_2) \sin \phi, \quad (8.1)$$

где  $\phi$  — угол между прямой, соединяющей какую-нибудь точку вибратора с точкой наблюдения  $P$ , и перпендикуляром к вибратору, лежащему в выбранной плоскости (ср. гл. V, § 6, а также § 4 этой главы). Напомним, что разности хода  $\Delta$  соответствует разность фаз  $k\Delta$ , где  $k$  — волновое число.

В точках наблюдения, находящихся в направлении  $\phi = 0$ , колебания от всех элементарных вибраторов приходят в одинаковой фазе (для любой пары точек  $\Delta = 0$ ), и следовательно, в таких точках амплитуда вектора  $\mathbf{E}$  есть просто сумма амплитуд полей, создаваемых отдельными элементарными вибраторами. Чем больше угол  $\phi$ , тем больше отличаются по фазе колебания, приходящие от каких-нибудь двух элементарных вибраторов. При  $\phi \rightarrow \pi/2$  сдвиг фаз между колебаниями, создаваемыми крайними элементами вибратора, стремится к  $k\lambda/2 = \pi$  (так как длина вибратора равна поло-

вине длины волны). Поэтому колебания, приходящие от участков, близких к концам вибратора, почти полностью погашают друг друга. Таким образом, по косым направлениям ( $\psi \neq 0$ ) амплитуда суммарного колебания меньше суммы амплитуд колебаний, создаваемых отдельными элементами вибратора, и тем меньше, чем больше  $\psi$ .

Отсюда ясно, что диаграмма направленности полуволнового вибратора в меридиональной плоскости несколько острее, чем диаграмма направленности элементарного вибратора. Диаграмма направленности в экваториаль-

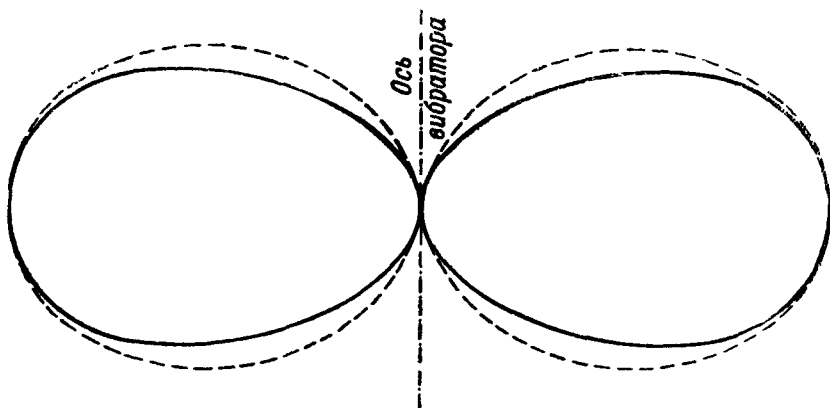


Рис. 280. Диаграмма направленности элементарного вибратора (пунктиром) и полуволнового вибратора в их меридиональной плоскости.

ной плоскости в силу осевой симметрии — такая же, как у элементарного вибратора (окружность).

Предоставляем читателю убедиться путем аналогичного рассуждения, что если длина вибратора равна  $\lambda$ , он ничего не излучает в экваториальной плоскости.

Нетрудно подтвердить только что сказанное количественным расчетом и найти уравнение диаграммы направленности полуволнового вибратора. Такой расчет приводится в любом подробном изложении теории антенн \*).

На рис. 280 пунктиром показана диаграмма направленности элементарного вибратора, сплошной линией — диаграмма направленности полуволнового вибратора. Масштабы диаграмм выбраны так, чтобы они соприкасались при  $\psi = 0$ .

Еще раз подчеркнем, что диаграмма направленности относится лишь к полю на *достаточно большом* расстоянии от антенны. Задача о поле вблизи полуволнового вибратора гораздо сложнее. Она была впервые решена А. А. Пистолькорсом.

Мы будем рассматривать лишь очень частный тип антенн (сложных излучателей радиоволн), а именно, комбинации из полуволновых вибраторов. Такие антенны широко применяются для волн порядка  $1\text{ м}$ . Для излучения длинных волн ( $\lambda$  — порядка 100 или 1000 м) в качестве антенн применяются сложные сети, подвешенные на высоких мачтах. Теория таких сетей была разработана М. В. Шулейкиным и его сотрудниками. В области микрорадиоволн применяются зеркала (см. гл. IX, § 10), а также щелевые антенны: излучение происходит из щели, прорезанной в металлическом листе.

\*) См., например, В. В. Татаринов, Коротковолновые направленные антенны, 1936; А. А. Пистолькорс, Антенны, 1947.



### § 3. Излучение антенны, состоящей из двух параллельных полуволновых вибраторов

Рассмотрим излучение системы, состоящей из двух параллельных полуволновых вибраторов  $M, N$  в их общей экваториальной плоскости  $\Pi$  (рис. 281). Пусть токи в вибраторах имеют одинаковую частоту и амплитуду. В плоскости  $\Pi$  на достаточно большом расстоянии (таким, что направления от точки наблюдения к обоим вибраторам можно считать параллельными) векторы  $H$  от обоих вибраторов можно считать коллинеарными. Векторы  $E$  от обоих вибраторов во всех точках плоскости  $\Pi$  коллинеарны вибраторам, следовательно, коллинеарны друг другу. Кроме того, можно считать, что на достаточно большом расстоянии амплитуды полей, создаваемых обоими вибраторами, одинаковы, а разность расстояний  $MP, NP$  ( $P$  — точка наблюдения) равна проекции  $MN'$  отрезка  $MN$  на прямую  $MP$  (ср. гл. V, § 6).

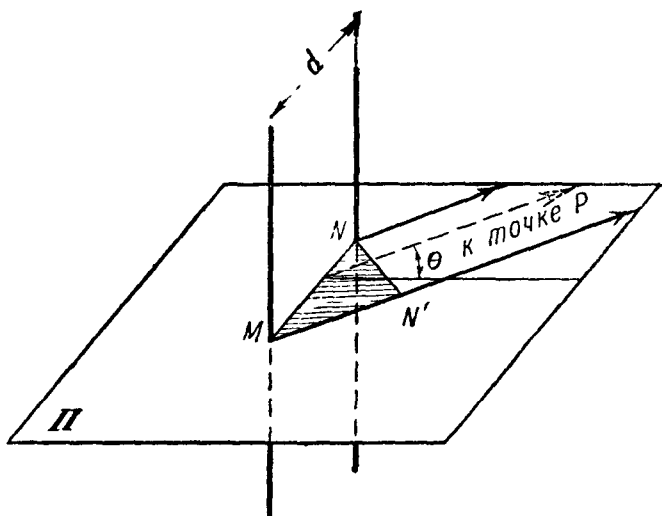


Рис. 281. Система из двух параллельных полуволновых вибраторов.

Мы рассмотрим два случая.

**1. Фазы колебаний в обоих вибраторах одинаковы.** Мы можем непосредственно применить как к электрическому, так и к магнитному полям антенны все сказанное в гл. V, § 6. Пусть  $a$  — амплитуда колебания, создаваемого на определенном (достаточно большом) расстоянии каждым из вибраторов. Разность фаз этих колебаний равна

$$k\Delta = k \cdot MN' = kd \sin \theta, \tag{8.2}$$

где  $d$  — расстояние между вибраторами,  $\theta$  — угол между направлением наблюдения и нормалью к прямой  $MN$  (рис. 281). Следовательно, результирующая интенсивность

$$A^2 = a^2 + a^2 + 2a^2 \cos k\Delta = 4a^2 \cos^2 \left( \frac{kd \sin \theta}{2} \right). \tag{8.3}$$

Направлениям таким, что

$$\cos^2 \left( \frac{kd \sin \theta}{2} \right) = 1, \text{ т. е. } kd \sin \theta = \pm m \cdot 2\pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots),$$

откуда

$$\sin \theta = \pm m \frac{\lambda}{d},$$

соответствуют одинаковые максимумы интенсивности, равные  $4a^2$ . Это — направления синфазного излучения. Направлениям антифазного излучения — таким, что

$$\cos^2 \left( \frac{kd \sin \theta}{2} \right) = 0, \text{ т. е. } kd \sin \theta = \pm \left( m + \frac{1}{2} \right) 2\pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots),$$

откуда

$$\sin \theta = \left( \pm m + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{d},$$

соответствуют минимумы (нули) интенсивности.

Диаграмму направленности мы получим, построив зависимость  $A^2$  от  $\theta$  в полярных координатах. Она имеет вид, показанный на рис. 282, и состоит из ряда одинаковых «лепестков». Число лепестков тем больше,

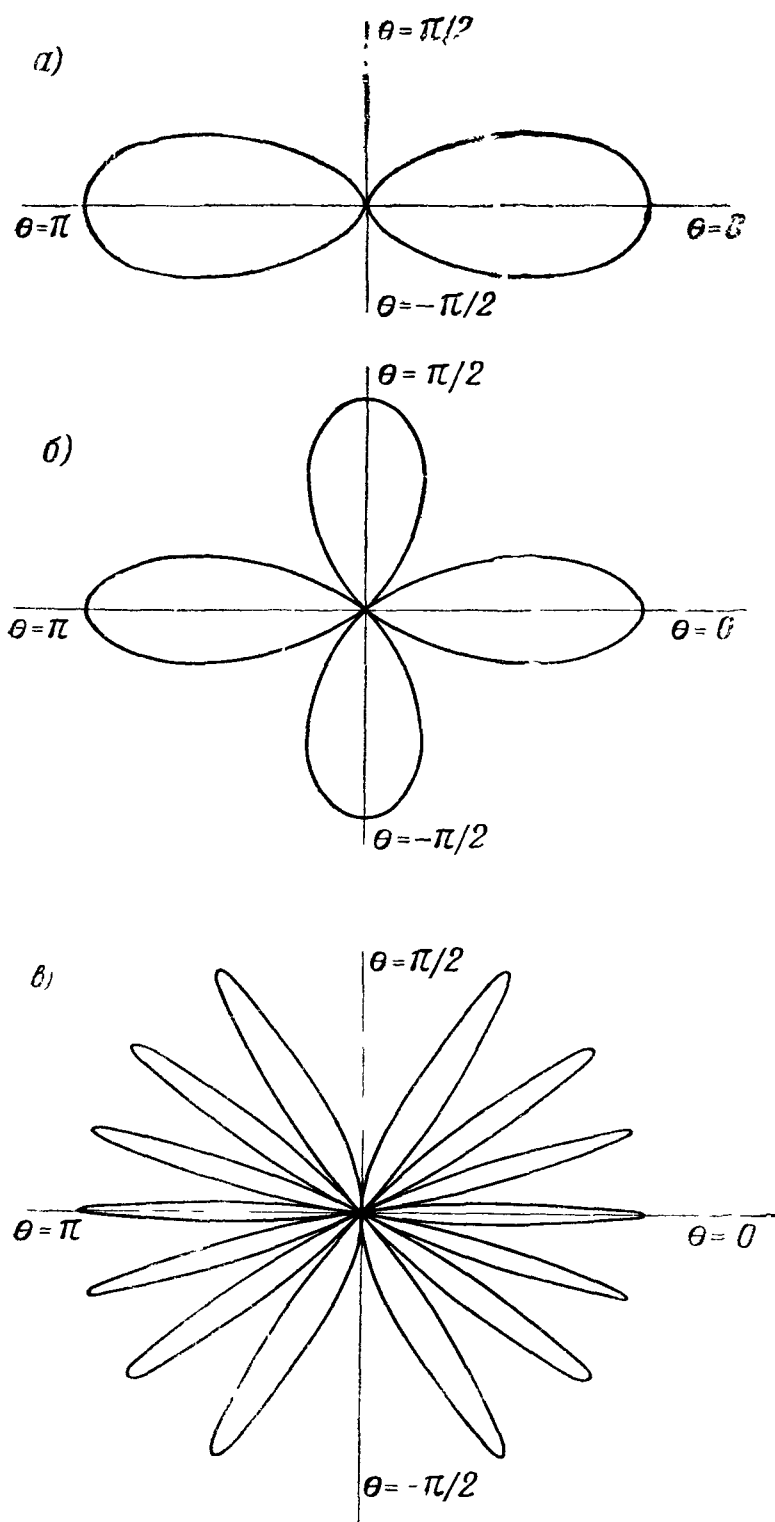


Рис. 282. Диаграмма направленности системы из двух синфазных параллельных полуволновых вибраторов: а)  $d=0,5\lambda$ ; б)  $d=0,8\lambda$ ; в)  $d=3,5\lambda$ .

их ширина — тем меньше, чем больше отношение  $d/\lambda$ . Если  $d < \lambda$ , имеется лишь два направления синфазного излучения. Они перпендикулярны к прямой, соединяющей середины вибраторов.

2. Вибраторы отстают на четверть волны и колеблются со сдвигом фазы  $\pi/2$ . Пусть  $d = \lambda/4$ , а вибраторы питаются от передатчика так, что ток в  $M$  опережает по фазе на  $\pi/2$  ток в  $N$ . Обозначим  $\theta$  (рис. 283) угол между направлением наблюдения и прямой  $MN$  (а не нормалью к ней, как в п. 1). Амплитуда колебания, излучаемого антенной в направлении  $\theta = 0$ , вдвое больше амплитуды от каждого вибратора: действительно, разность хода  $\lambda/4$  между обоими колебаниями дает разность фаз  $\pi/2$ , которая вычитается из разности фаз  $\pi/2$  самих источников, в результате чего колебания, приходящие от обеих антенн, находятся в фазе. В направлении  $\theta = \pi$ , наоборот, происходит взаимное погашение этих колебаний: разность фаз  $\pi/2$ , вызванная разностью хода  $\lambda/4$ , прибавляется к разности фаз  $\pi/2$  самих источников колебаний в вибраторах, в результате чего оба колебания приходят в противофазе.

Нетрудно найти общее выражение для зависимости интенсивности от направления.

Колебание, посылаемое в направлении  $\theta$  (рис. 284) вибратором  $M$ , опережает по фазе колебание, посылаемое в том же направлении вибратором  $N$ , на величину

$$\frac{\pi}{2} - k\Delta = \frac{\pi}{2} - k\frac{\lambda}{4} \cos \theta = \frac{\pi}{2} (1 - \cos \theta) = \pi \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

Следовательно, если  $a$  — амплитуда колебания, создаваемого отдельным вибратором, результирующая интенсивность

$$A^2 = a^2 + a^2 + 2a^2 \cos\left(\pi \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)$$

или

$$A^2 = 4a^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2}\right). \quad (8.4)$$

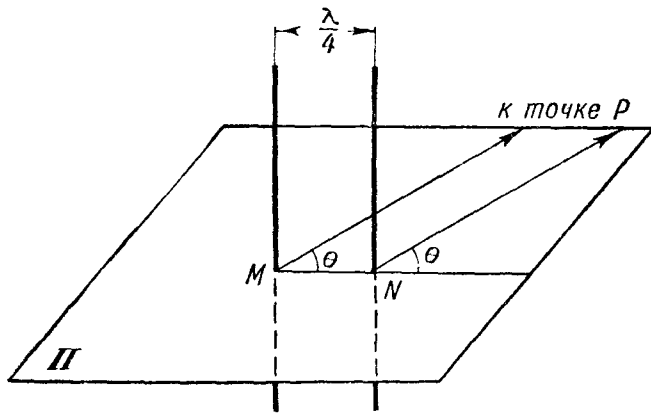


Рис. 283. Вибраторы, отстоящие на четверть волны.

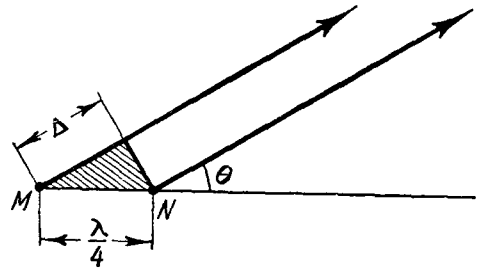


Рис. 284 К вычислению разности хода от вибраторов рис 283

В согласии со сказанным выше имеем:

$$A^2 = 4a^2 \quad \text{при} \quad \theta = 0,$$

$$A^2 = 0 \quad \text{при} \quad \theta = \pi.$$

Строя в полярных координатах зависимость  $A^2$  от  $\theta$ , мы получаем диаграмму направленности, показанную на рис. 285.

### 3. Замечание о теории антенн.

В этом и следующих параграфах рассматривается вопрос о том, как излучает та или иная комбинация вибраторов, если заданы амплитуды и фазы поддерживаемых в них колебаний. Но в этой книге не рассматривается вопрос о том, как поддерживается в вибраторах, питаемых от некоторого передатчика, колебание нужной амплитуды и фазы. Последний вопрос («динамика антенн») гораздо сложнее и не может быть решен элементарными методами. Пионерами динамики антенн являются Д. А. Рожанский, В. В. Татаринов, А. А. Пистолькорс. В их работах впервые была рассмотрена фундаментальная задача о взаимодействии между собой вибраторов, входящих в состав сложной антенны (об э. д. с., наводимых каждым вибратором в остальных вибраторах). В последнее время большие успехи в разработке динамики антенн были достигнуты М. А. Леонтовичем и его учениками.

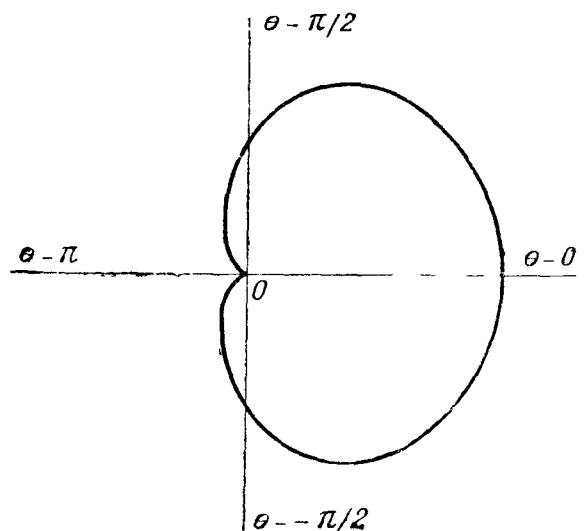


Рис. 285. Диаграмма направленности системы из двух вибраторов, отстоящих на  $\lambda/4$  и имеющих сдвиг фаз  $\pi/2$

### § 4. Антенна в виде одномерной решетки из полуволновых вибраторов

1. **Вывод основной формулы.** Представим себе  $N$  полуволновых вибраторов, расположенных в виде «решетки» (рис. 286 и 287). Расстояния между ними одинаковы и равны  $d$ ; эта величина называется *периодом* решетки. Пусть токи в вибраторах имеют одинаковые частоту, амплитуду и фазу. Выясним, какой вид имеет диаграмма направленности «решетки»

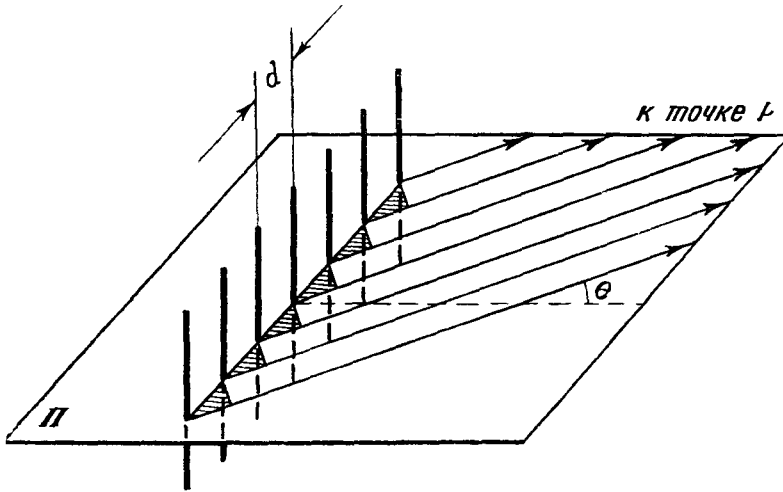


Рис. 286. Одномерная решетка из вибраторов.

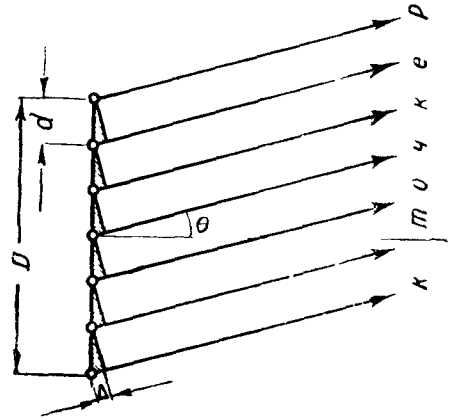


Рис. 287. К вычислению диаграммы направленности решетки рис. 286 в плоскости II.

в экваториальной плоскости II (плоскости, перпендикулярной к вибраторам и проходящей через их середины).

Пусть  $\theta$  — угол между рассматриваемым направлением и нормалью к плоскости решетки. В достаточно удаленной точке наблюдения (настолько удаленной, что все прямые, соединяющие ее с отдельными антеннами решетки, можно считать параллельными) разность хода волн, приходящих от двух соседних вибраторов,

$$\Delta = d \sin \theta. \quad (8.5)$$

Выберем начало счета времени так, чтобы фаза электрического поля, создаваемого в точке наблюдения первым (крайним) вибратором, была равна 0. Тогда фаза  $\varphi_n$  колебания, приходящего от  $n$ -го вибратора, будет равна

$$\varphi_n = (n - 1) k \Delta = (n - 1) k d \sin \theta. \quad (8.6)$$

Амплитуды колебаний, приходящих от всех вибраторов, можно считать одинаковыми (ввиду малости размера решетки по сравнению с расстоянием от решетки до точки наблюдения).

Мы получаем, таким образом, задачу о сложении  $N$  гармонических колебаний одинаковой амплитуды, фазы которых образуют арифметическую прогрессию. Такую задачу мы уже рассматривали (гл. II, § 2), и мы можем сразу указать результирующую интенсивность  $A^2$ :

$$A^2 = a^2 \frac{\sin^2 \left( N \frac{1}{2} k d \sin \theta \right)}{\sin^2 \left( \frac{1}{2} k d \sin \theta \right)}, \quad (8.7)$$

где  $a^2$  — интенсивность колебания, приходящего от отдельного вибратора.

Воспользовавшись сказанным в гл. II, § 2, мы можем построить график зависимости  $A^2$  от  $\theta$  в декартовых координатах (при заданном расстоянии от решетки, а следовательно, и при постоянном  $a$ ).

Такой график показан на рис. 288 (так как углы  $\theta$ ,  $\theta + 2\pi$  соответствуют одному и тому же направлению в пространстве, график построен

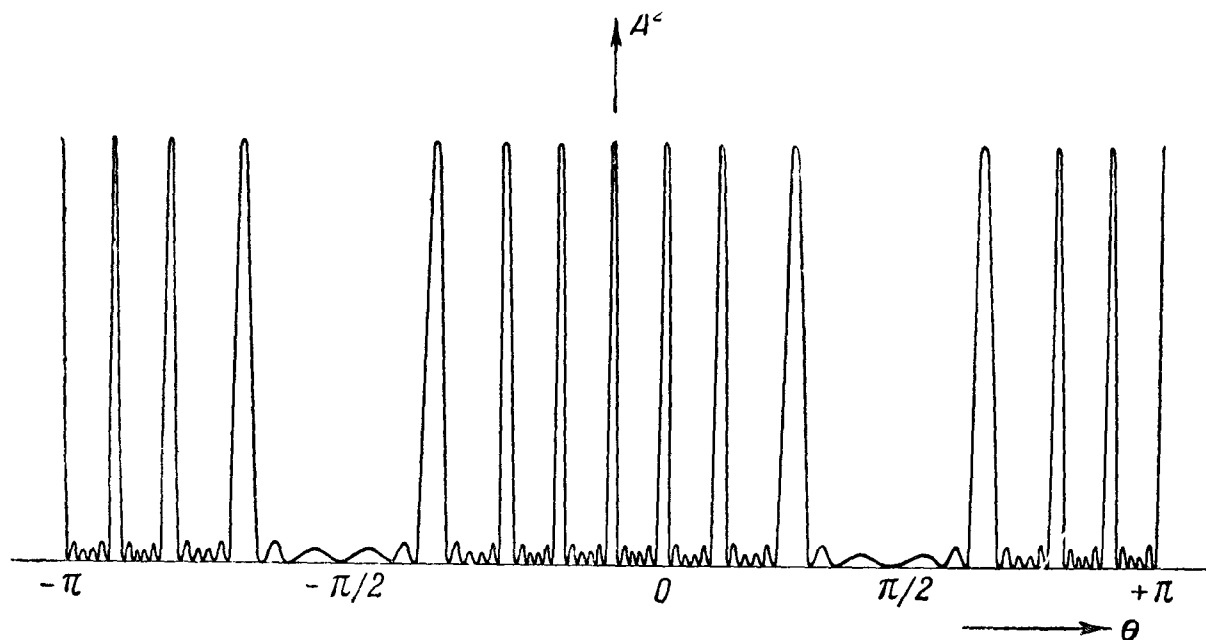


Рис 288 Диаграмма направленности одномерной решетки в экваториальной плоскости в декартовых координатах ( $N=6$ ,  $d=3,5\lambda$ ).

только для интервала  $-\pi \leq \theta \leq +\pi$ ). Мы получим полярную диаграмму направленности, переводя график рис. 288 в полярные координаты (рис. 289). Главным максимумам соответствуют длинные лепестки, побочным максимумам — более короткие, не показанные на рисунке.

Лепестки, соответствующие главным максимумам, называются *главными лепестками*, остальные — *побочными*.

2. Что значит «достаточно удаленная точка»? Волновой параметр. Насколько должна быть удалена точка наблюдения, чтобы можно было пользоваться формулой (8.5) и основанной на ней теорией, в частности понятием диаграммы направленности? Неправильно было бы думать, что для этого достаточно, чтобы расстояние от точки наблюдения до антенны было велико по сравнению с размерами антенны. Критерий здесь, как мы сейчас увидим, совсем другой.

Пусть (рис. 290)  $r_0$  — расстояние  $OP$  точки наблюдения  $P$  от середины решетки  $O$ ,  $\theta$  — угол между прямой  $OP$  и нормалью к решетке. Истинная разность хода между колебаниями, приходящими в точку  $P$  и среднего и  $n$ -го вибратора (число вибраторов считаем для определенности нечетным, это предположение не существенно),

$$\Delta_n = r_0 - r_n$$

где

$$r_n = Q_n P = Q'_n P^*$$

( $Q_n Q'_n$  — дуга окружности с центром  $P$ ), причем из треугольника  $OQ_n P$  имеем:

$$r_n^2 = r_0^2 + x_n^2 - 2r_0 x_n \sin \theta, \quad (8.8)$$

\* Если  $N$  — нечетное,  $r_0$  совпадает с  $r_{\frac{N+1}{2}}$

где

$$x_n = OQ_n.$$

На основании (8.7) имеем:

$$\Delta_n = r_0 - \sqrt{r_0^2 + x_n^2 - 2r_0x_n \sin \theta} = r_0 \left\{ 1 - \sqrt{1 + \left(\frac{x_n}{r_0}\right)^2 - 2\frac{x_n}{r_0} \sin \theta} \right\}. \quad (8.9)$$

Нас интересует случай, когда для всех  $x_n$  отношение  $|x_n|/r_0$  мало по срав-

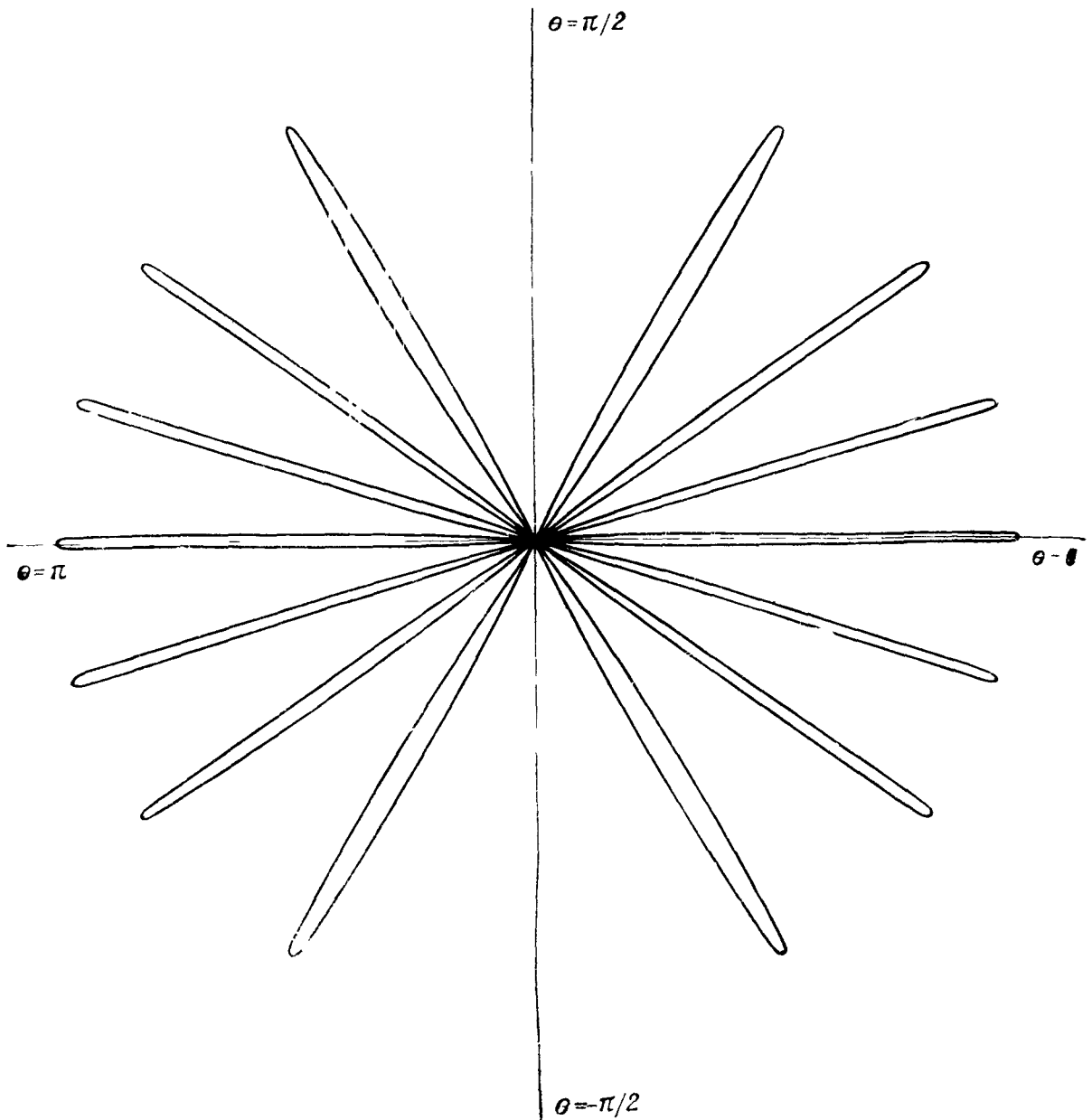


Рис. 289. Диаграмма направленности одномерной решетки в экваториальной плоскости в полярных координатах ( $N=6$ ,  $d=3,5 \lambda$ ). Показаны только главные лепестки. Они имеют те же направления, что и лепестки рис. 282,  $\varepsilon$ , но значительно тоньше.

нению с единицей. Разлагая радикал в степенной ряд с остаточным членом по формуле

$$\sqrt{1+h} = 1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8}(1+\alpha h) \quad (0 < \alpha < 1),$$

причем здесь

$$h = -2 \frac{x_n}{r_0} \sin \theta + \left(\frac{x_n}{r_0}\right)^2,$$

получим для него выражение (с точностью до малой величины порядка  $x_n^3/r_0^3$ )

$$1 - \frac{x_n}{r_0} \sin \theta + \frac{1}{2} \left( \frac{x_n}{r_0} \right)^2 - \frac{1}{8} \cdot 4 \frac{x_n^2}{r_0^2} \sin^2 \theta,$$

или

$$1 - \frac{x_n}{r_0} + \frac{1}{2} \left( \frac{x_n}{r_0} \right)^2 \cos^2 \theta.$$

Подставив в (8.8) вместо радикала это приближенное выражение, получим:

$$\Delta_n = x_n \sin \theta - \frac{1}{2} \frac{x_n^2}{r_0} \cos^2 \theta. \quad (8.10)$$

Из формулы же (8.5) следует:

$$\Delta_n = OQ_n \sin \theta = x_n \sin \theta.$$

Мы имеем право, очевидно, заменить точную формулу (8.10) приближенной формулой (8.5), если при этом ошибки в фазах *всех* складывае-

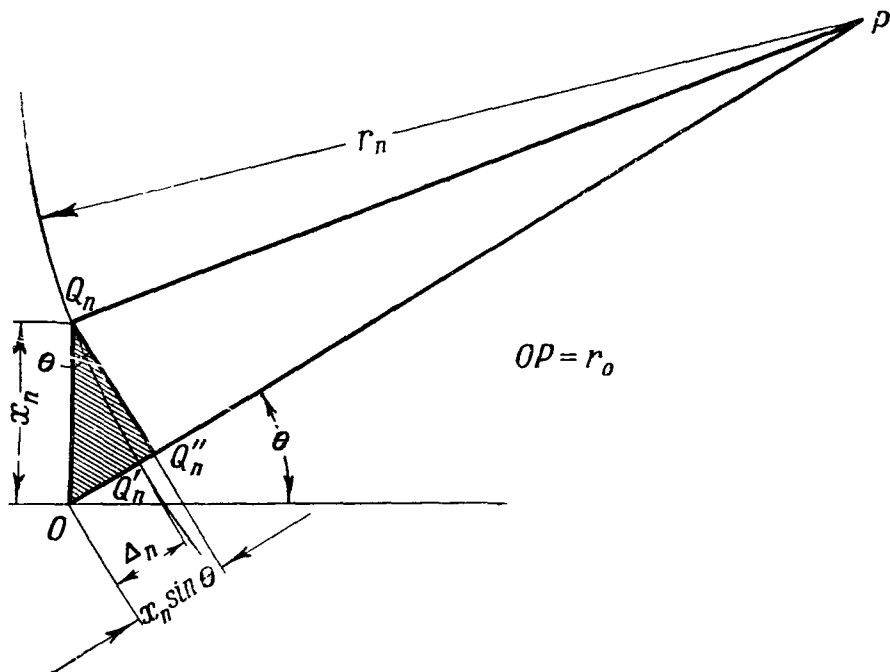


Рис. 290. Истинная разность хода  $OQ'_n$  отличается от приближенного значения, равного  $OQ''_n$ , на отрезок  $Q'_n Q''_n$ . Здесь  $OP = r_0$ ,  $PQ_n = PQ'_n = r_n$ .

щихся колебаний малы по сравнению с  $\pi$ , т. е. все ошибки в разностях хода  $\Delta_n$  (эти ошибки изображаются на рис. 290 отрезками  $Q'_n Q''_n$ ) малы по сравнению с  $\lambda/2$ . Для этого нужно, чтобы для всех  $x_n$  выполнялось условие

$$\frac{1}{2} \frac{x_n^2}{r_0} \cos^2 \theta \ll \frac{\lambda}{2}$$

и притом для всех значений  $\cos^2 \theta$ , в том числе для наибольшего значения  $\cos^2 \theta = 1$ , что дает:

$$\frac{x_n^2}{r_0} \ll \lambda,$$

откуда

$$r_0 \gg \frac{x_n^2}{\lambda}.$$

Взяв для  $|x_n|$  его наибольшее значение, а именно  $|x_n| = D/2$ , где  $D$  — общий размер решетки, получаем следующий критерий применимости приближенной формулы (8.2):

$$r_0 \gg \frac{D^2}{4\lambda}. \quad (8.11)$$

Так, например, для  $\lambda = 3$  м,  $D = 10$  м или для  $\lambda = 3$  см,  $D = 1$  м теория п. 1 практически применима, начиная с расстояния порядка 100 м. При расстояниях меньших, чем те, для которых выполнен критерий (8.11), мы не имеем права говорить о диаграмме направленности. Распределение интенсивности по углам зависит в этом случае от расстояния  $r_0$ .

Нетрудно дать качественную геометрическую интерпретацию критерия (8.11). Отрезок  $Q'_n Q''_n$  (рис. 290) для крайних антенн тем короче, чем меньше  $D$  и чем больше  $r_0$ . При данной длине отрезка  $Q'_n Q''_n$  набегающая на нем разность фаз тем меньше, чем больше  $\lambda$ . Следовательно, для того чтобы можно было применять формулу (8.5), т. е. пренебрегать изменением фазы на пути  $Q'_n Q''_n$ , длина волны и расстояние  $r_0$  должны быть достаточно велики, а размер  $D$  — достаточно мал.

Дадим другую формулировку критерия (8.11).

Введем безразмерный параметр

$$p = \frac{\sqrt{r_0 \lambda}}{D}.$$

Мы будем его называть *волновым параметром*. Условие (8.11) может быть переписано в виде

$$p^2 \gg \frac{1}{4},$$

откуда следует, что теория, развитая в п. 1, приближенно справедлива, если волновой параметр заметно превышает единицу. Она верна с тем большей точностью, чем больше волновой параметр.

При  $\lambda = 3$  м,  $D = 10$  м,  $r_0 = 100$  м имеем  $p^2 = 3$ ,  $p = \sqrt{3}$ . Такое же значение имеет волновой параметр при  $\lambda = 3$  см,  $D = 1$  м,  $r_0 = 100$  м.

**3. Число главных лепестков.** Каково число главных лепестков, или, что то же, число главных максимумов? Направления главных лепестков определяются, как это следует из (8.7), условиями

$$\frac{1}{2} kd \sin \theta = 0, \quad \pm \pi, \quad \pm 2\pi, \dots,$$

откуда

$$\sin \theta = m \frac{\lambda}{d} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (8.12)$$

(это — направления, по которым разность хода  $d \sin \theta$  волн, идущих от соседних вибраторов, равна нулю или целому числу длин волн). Наибольшее  $m$ , которому соответствует по формуле (8.12)  $|\sin \theta| \leq 1$ , а следовательно, *действительный угол*  $\theta$ , равно, очевидно, целой части отношения  $d/\lambda$ . Так, например, если  $d = 3,5 \lambda$ , имеются максимумы, соответствующие  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ . Каждому  $m < d/\lambda$  соответствуют два лепестка, симметричных относительно направлений  $\theta = \pi/2$ , так как если уравнению (8.12) удовлетворяет некоторое  $\theta = \theta_m$ , то ему удовлетворяет также  $\theta = \pi - \theta_m$ .

Если  $d/\lambda$  — не целое, то имеются два главных лепестка, соответствующих  $m = 0$ , и по четыре главных лепестка на каждое целое число, не пре-



восходящее  $d/\lambda$ . Таким образом, общее число главных лепестков есть

$$2 + 4 \left[ \frac{d}{\lambda} \right],$$

где символ  $[ ]$  означает «целая часть от».

При уменьшении  $d$  лепестки все больше расходятся и каждый из них, достигнув направления  $\theta = \pi/2$  или  $\theta = -\pi/2$ , при дальнейшем уменьшении  $d$  исчезает. Следовательно, делая решетку более густой (уменьшая  $d$ ), мы уменьшаем при данной длине волны  $\lambda$  число главных лепестков. Если  $d < \lambda$ , остаются только два главных лепестка — под углами  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$ . Диаграмма направленности для этого случая изображена на рис. 291.

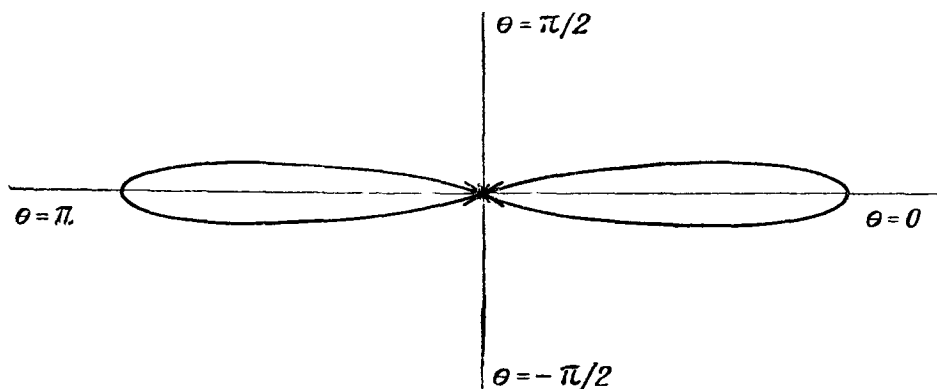


Рис. 291 Диаграмма направленности густой одномерной решетки в экваториальной плоскости ( $N=6$ ,  $d=0,5\lambda$ ).

**4. Ширина лепестков.** Направление главных лепестков определяется при данной длине волны, как мы выяснили, *периодом* решетки. Чем определяется *ширина* главных лепестков?

За меру ширины лепестков можно принять угол между ближайшими к оси лепестка направлениями, в которых нет излучения (рис. 292). Другая

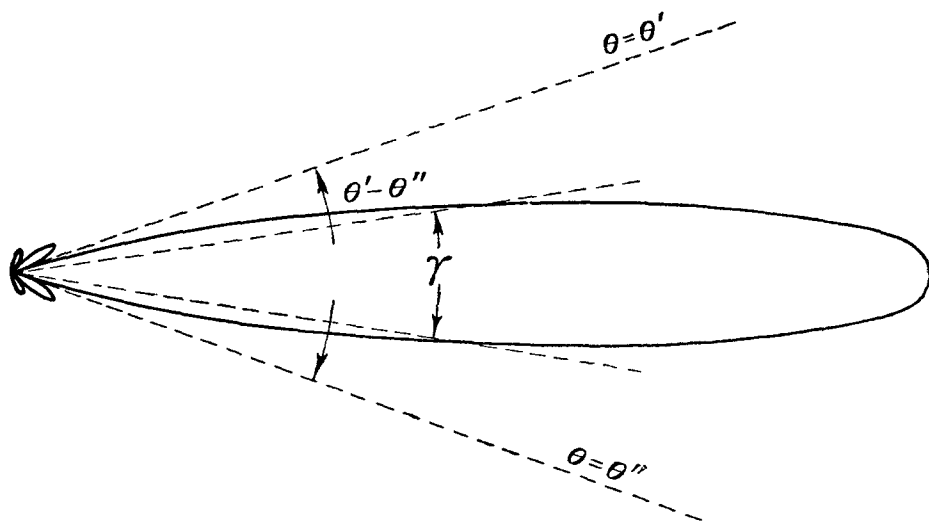


Рис. 292. К определению ширины главного лепестка.

мера ширины — угол  $\gamma$  между направлениями, которым соответствует поток энергии, равный половине потока по оси лепестка.

Согласно (8.7) ближайшие к  $m$ -му главному максимуму  $\theta = \theta_m$  направления  $\theta'_m$ ,  $\theta''_m$ , под которыми  $A^2 = 0$ , удовлетворяют условиям

$$N \cdot \frac{1}{2} kd \sin \theta'_m = Nm\pi + \pi,$$

$$N \cdot \frac{1}{2} kd \sin \theta''_m = Nm\pi - \pi,$$

откуда

$$\sin \theta'_m - \sin \theta''_m = \frac{2\lambda}{D},$$

где

$$D = Nd$$

можно рассматривать как общую длину решетки \*). Если отношение  $\lambda/D$  мало, углы  $\theta'_m, \theta''_m$  близки по величине. В этом случае имеем приближенно, разлагая  $\sin \theta'_m, \sin \theta''_m$  в ряды по степеням  $\theta'_m - \theta_m, \theta''_m - \theta_m$  и удерживая только первые два члена,

$$\begin{aligned} \sin \theta'_m &= \sin \theta_m - (\theta'_m - \theta_m) \cos \theta_m, \\ \sin \theta''_m &= \sin \theta_m - (\theta''_m - \theta_m) \cos \theta_m, \end{aligned}$$

откуда

$$\theta'_m - \theta''_m = \frac{2\lambda}{D \cos \theta_m}.$$

В частности, для нулей, ближайших к центральному главному максимуму ( $m = 0$ ), имеем:

$$\sin \theta'_0 = \frac{\lambda}{D}, \quad \sin \theta''_0 = -\frac{\lambda}{D} \quad (8.13)$$

и приближенно, если соотношение  $\lambda/D$  мало:

$$\theta'_0 - \theta''_0 = \frac{2\lambda}{D}. \quad (8.13a)$$

Итак, ширина — или обратная ей величина (острота) — главных лепестков не зависит от периода решетки, а определяется при данной длине волны общим размером решетки  $D$ . Чем длиннее решетка, тем острее главные лепестки.

Число побочных лепестков тем больше, чем больше число вибраторов  $N$ .

**5. Решетка из сдвоенных вибраторов.** Получение одного главного лепестка. Если сделать решетку достаточно густой ( $d < \lambda$ ) и достаточно большой по размерам, можно получить два острых главных лепестка. Можно избавиться от одного из них и получить, таким образом, диаграмму направленности, имеющую только один главный лепесток, что очень важно, например, в радиолокации.

Достигается это с помощью очень простого приема.

Построим решетку из сдвоенных вибраторов, причем каждый из них состоит из пары полуволновых вибраторов:  $M_1, N_1; M_2, N_2; \dots$  и т. д., расположенных,

как показано на рис. 293. Пусть расстояние между двумя вибраторами каждой пары равно  $\lambda/4$  и пусть токи в них сдвинуты по фазе на  $\pi/2$ .

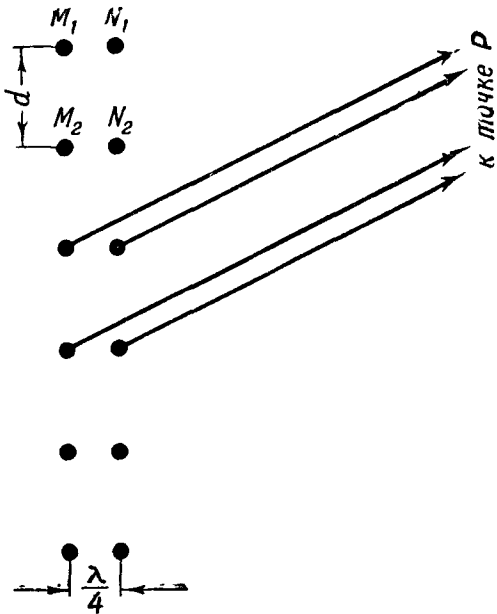


Рис. 293. Решетка из сдвоенных вибраторов проекция на плоскость  $\Pi$ ).

\*) Расстояние между крайними вибраторами равно  $(N-1)d$ . За длину решетки  $D$  мы берем это расстояние, увеличенное с обоих краев на  $d/2$ .

Диаграмму направленности каждого сдвоенного вибратора, например  $M_1, N_1$ , в экваториальной плоскости мы знаем (рис. 285). Он сильно излучает по направлению  $\theta = 0$  и близким к нему направлениям и ничего не излучает по направлению  $\theta = \pi$ . Пусть точка наблюдения настолько удалена, что разности хода колебаний, приходящих от соседних сдвоенных

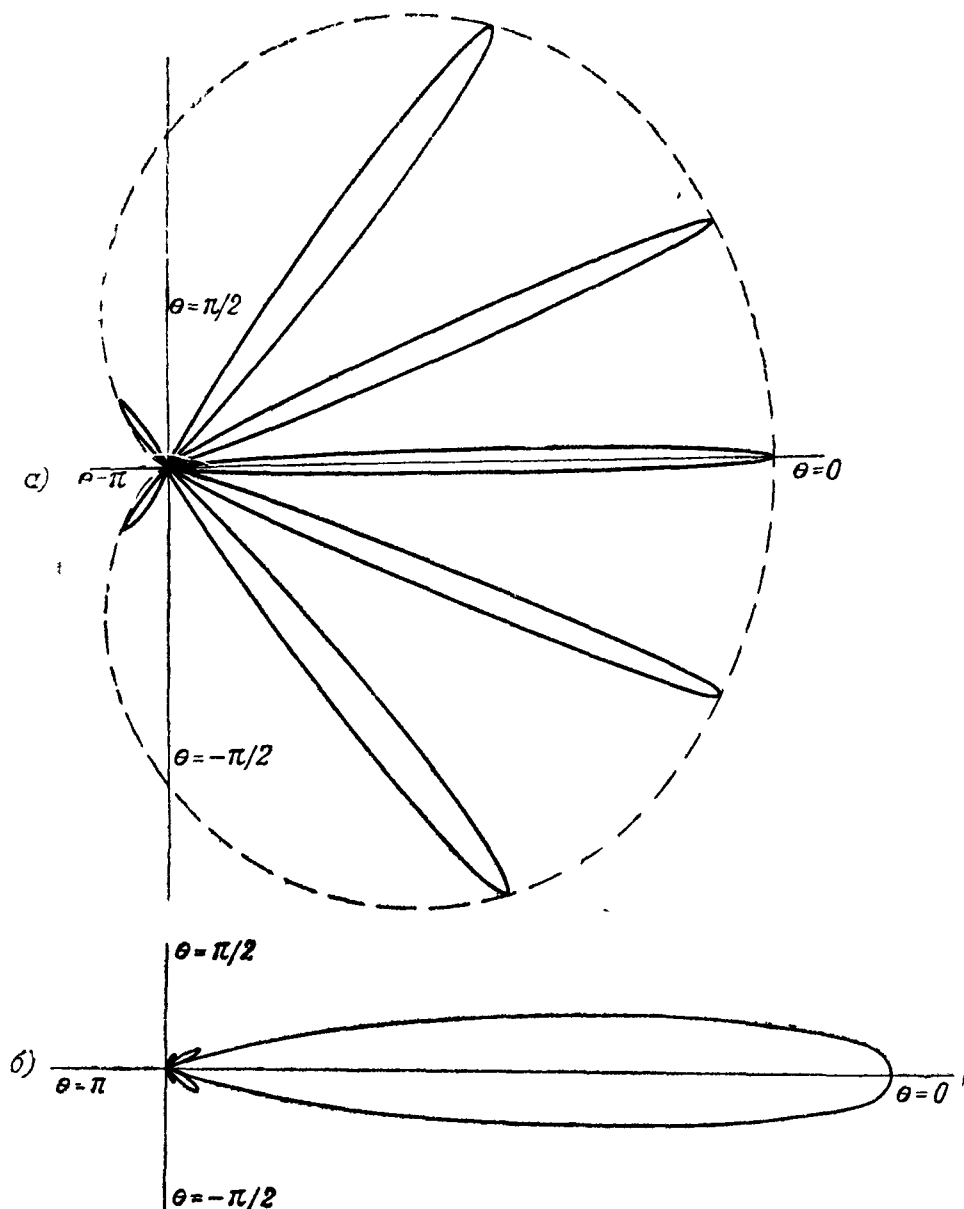


Рис. 294. Диаграмма направленности решетки из сдвоенных вибраторов в их экваториальной плоскости: а)  $N=6, d=2,5\lambda$ ; показаны только главные лепестки, пунктир—диаграмма направленности одного звена решетки (одного сдвоенного вибратора, ср. рис. 285); б)  $N=6, d=0,5\lambda$ ; показаны главный и побочные лепестки.

вибраторов, можно считать одинаковыми и равными  $d \sin \theta$  ( $d$  — период решетки). В этом случае к решетке из сдвоенных вибраторов можно применить формулу (8.7), заменив в ней множитель  $a^2$  выражением (8.4). Это дает:

$$A^2 = 4a^2 \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \frac{\sin^2 \left( N \cdot \frac{1}{2} kd \sin \theta \right)}{\sin^2 \left( \frac{1}{2} kd \sin \theta \right)}. \quad (8.14)$$

Для  $\theta = \pi$  получаем

$$A^2 = 0$$

в силу того, что обращается в нуль множитель, относящийся к отдельному сдвоенному вибратору. Главный лепесток  $\theta = \pi$  уничтожен: решетка ничего не излучает в направлении  $\theta = \pi$  вследствие того, что каждый из составляющих ее сдвоенных вибраторов ничего не излучает в указанном направлении. Для углов, близких к  $\theta = 0$ , выражение (8.4) приближенно равно  $4a^2$ , откуда

$$A^2 = 4a^2 \frac{\sin^2 \left( N \cdot \frac{1}{2} kd \sin \theta \right)}{\sin^2 \left( \frac{1}{2} kd \sin \theta \right)}. \quad (8.15)$$

Главный лепесток  $\theta = 0$  имеет (если он — острый, т. е.  $\lambda/D$  мало) практически такую же форму и в четыре раза большую интенсивность, чем для решетки из простых вибраторов.

Диаграмма направленности показана на рис. 294, а. Концы главных лепестков расположены на кривой (8.4), изображающей диаграмму одного сдвоенного вибратора. Если  $d < \lambda$ , диаграмма направленности принимает вид, показанный на рис. 294, б. Она имеет только один главный лепесток.

### § 5. Антенна в виде двумерной решетки

1. Для чего нужна двумерная решетка? Антенна, рассмотренная в § 3, не создает сильной направленности в меридиональных плоскостях (параллельных вибраторам). Достаточно показать это для плоскости  $x=0$ , перпендикулярной к прямой, соединяющей середины вибраторов.

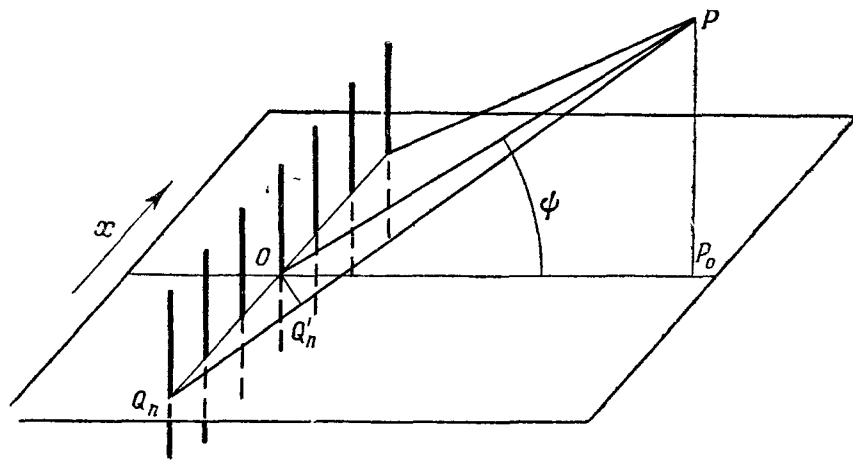


Рис. 295. Решетка из вибраторов. Точка наблюдения в плоскости  $x=0$  и вне экваториальной плоскости  $y=0$ .

Разности хода (например,  $Q_n Q'_n$  рис. 295) колебаний, приходящих от отдельных вибраторов в точку наблюдения  $P$ , стремятся к нулю при удалении точки наблюдения по *любому* направлению, лежащему в плоскости  $x=0$ . Следовательно, результирующая интенсивность в любой достаточно удаленной точке плоскости  $x=0$  будет равна  $N^2 a^2(\psi)$ , где  $a(\psi)$  — амплитуда, создаваемая отдельным вибратором. (Здесь явно обозначена ее зависимость от угла  $\psi$ .) Таким образом, диаграмма направленности решетки в рассматриваемой плоскости не отличается от диаграммы направленности отдельного полуволнового вибратора в его меридиональной плоскости (см. рис. 280).

Но можно получить острую направленность в двух измерениях, если заменить одномерную решетку *двумерной*. Прежде чем перейти к ее рассмотрению, мы решим следующую вспомогательную задачу.

**2. Одномерная цепочка вибраторов.** Одномерной цепочкой мы называем группу полуволновых вибраторов, расположенных, как показано на рис. 296 (на одной прямой, на одинаковых расстояниях одна от другой). Пусть  $d$  — расстояние между серединами соседних вибраторов ( $d$  — период цепочки). Каждый из них посылает по направлению  $\psi$  колебание амплитуды  $a(\psi)$ , причем функция  $a^2(\psi)$  изображается диаграммой направленности полуволнового вибратора в его меридиональной плоскости

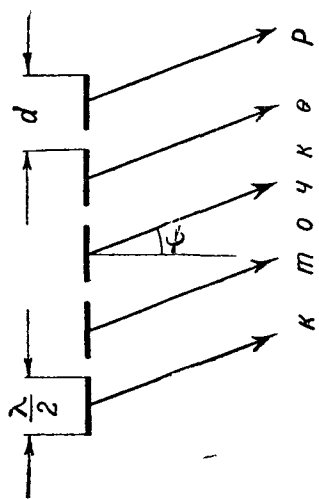


Рис. 296. Цепочка из полуволновых вибраторов.

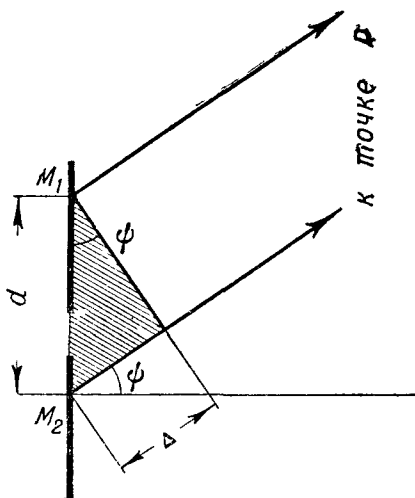


Рис. 297. Соответственные элементы двух соседних вибраторов цепочки и разность хода.

(см. рис. 280). Разность хода между колебаниями, приходящими в достаточно удаленную\*) точку наблюдения от соответственных элементов двух вибраторов, т. е. элементов, находящихся на расстоянии друг от друга, кратном  $d$ , например  $M_1$  и  $M_2$  (рис. 297), равна  $d \sin \psi$ , разность фаз

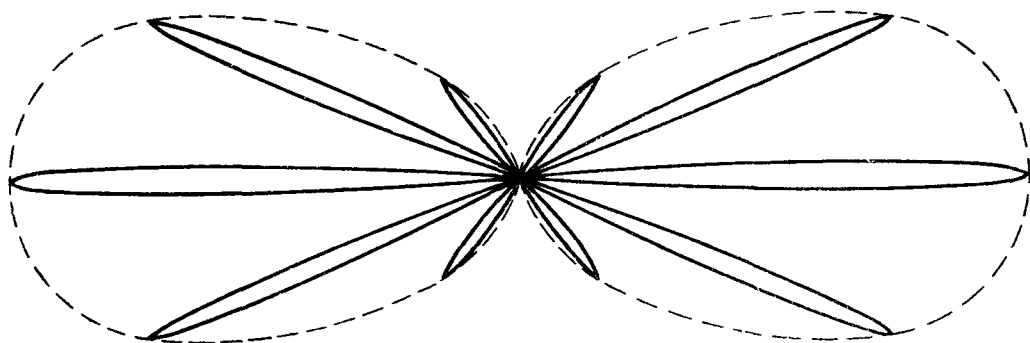


Рис. 298. Диаграмма направленности одномерной цепочки ( $N=6$ ,  $d=2,5\lambda$ ); пунктир—диаграмма направленности одного звена цепочки (одного полуволнового вибратора).

между этими колебаниями равна  $k d \sin \psi$ . Следовательно, такая же разность фаз существует и между суммарными колебаниями от отдельных вибраторов. Итак, по направлению  $\psi$  складывается  $N$  колебаний с одинаковыми амплитудами  $a(\psi)$ , фазы которых образуют арифметическую прогрессию с разностью  $k d \sin \psi$ .

\*) Это выражение имеет здесь тот же смысл, что и в § 4. Здесь критерий применимости приближенного выражения, которым мы пользуемся для разности хода, основан на оценке волнового параметра  $p = \sqrt{r_0 \lambda / D}$ , где теперь  $D$  — длина цепочки.

## Результирующая интенсивность

$$A^2 = a^2(\psi) \frac{\sin^2 \left( N \cdot \frac{1}{2} kd \sin \psi \right)}{\sin \left( \frac{1}{2} kd \sin \psi \right)}. \quad (8.16)$$

Здесь есть отличие от случая, разобранныго в § 4, п. 1. Оно состоит в том, что первый множитель здесь зависит от направления. Правда, зависимость эта довольно слабая, но тем не менее она приводит к тому, что отдельные главные лепестки имеют неодинаковую длину. Интенсивность излучения уменьшается с ростом номера главного лепестка (рис. 298).

3. Вывод формулы двумерной решетки. На рис. 299 схематически изображена антенна, имеющая вид двумерной решетки. Ее можно рас-

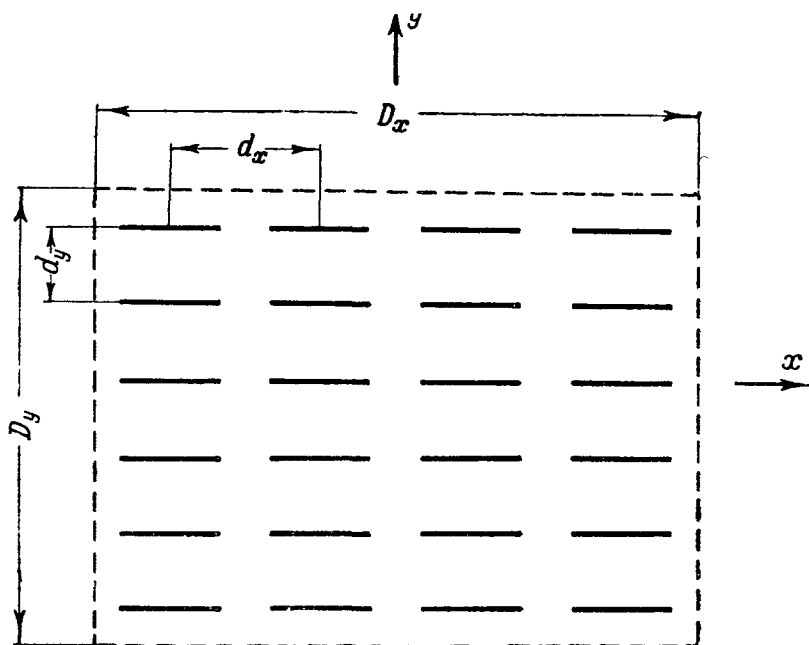


Рис. 299. Антенна в виде двумерной решетки из полуволновых вибраторов (схематически). Здесь  $d_x = 3\lambda/4$ ,  $d_y = 3\lambda/8$ ,  $N_x = 4$ ,  $N_y = 6$ ,  $D_x = 3\lambda$ ,  $D_y = 9\lambda/4$ .

смаивать как совокупность  $N_x$  одномерных решеток по  $N_y$  вибраторов каждая или  $N_y$  цепочек по  $N_x$  вибраторов каждая. Проведем ось  $x$  параллельно отдельным цепочкам, ось  $y$  — параллельно отдельным одномерным решеткам. Будем характеризовать направление наблюдения углами  $\alpha$ ,  $\beta$ , образуемыми им с осями  $x$ ,  $y$ . Пусть все вибраторы колеблются синфазно. Пусть  $d_x$ ,  $d_y$  — периоды соответственно цепочек и одномерных решеток. Из рис. 300 видно, что разности хода колебаний, приходящих в достаточно удаленную точку от любых двух соседних вибраторов одной цепочки, одинаковы и равны  $d_x \cos \alpha$  и что разности хода колебаний, приходящих от любых двух соседних вибраторов одной одномерной решетки, также одинаковы и равны  $d_y \cos \beta$ . Разности фаз, соответствующие этим разностям хода:

$$\varepsilon_x = kd_x \cos \alpha, \quad \varepsilon_y = kd_y \cos \beta. \quad (8.17)$$

Примем теперь за нуль фазу колебания, приходящего от левого верхнего вибратора. Тогда фазы колебаний, приходящих от 1-го, 2-го, 3-го, ...,  $N$ -го вибратора верхней цепочки, будут  $0, \varepsilon_x, 2\varepsilon_x, \dots, (N-1)\varepsilon_x$ , а фазы колебаний, приходящих от вибраторов левой решетки, будут  $0, \varepsilon_y, 2\varepsilon_y, \dots, (N-1)\varepsilon_y$ . На основании сказанного выше фазы колебаний,

приходящих от вибраторов второй сверху цепочки, будут в порядке продвижения слева направо  $\varepsilon_y, \varepsilon_y + \varepsilon_x, \varepsilon_y + 2\varepsilon_x, \dots, \varepsilon_y + (N_x - 1)\varepsilon_x$ . Рассуждая дальше таким же образом, мы получим следующую таблицу фаз колебаний, приходящих от отдельных вибраторов:

0	$\varepsilon_x$	$2\varepsilon_x$	...	$(N_x - 1)\varepsilon_x$
$\varepsilon_y$	$\varepsilon_y + \varepsilon_x$	$\varepsilon_y + 2\varepsilon_x$	...	$\varepsilon_y + (N_x - 1)\varepsilon_x$
$2\varepsilon_y$	$2\varepsilon_y + \varepsilon_x$	$2\varepsilon_y + 2\varepsilon_x$	...	$2\varepsilon_y + (N_x - 1)\varepsilon_x$
.....				
$(N_y - 1)\varepsilon_y$	$(N_y - 1)\varepsilon_y + \varepsilon_x$	$(N_y - 1)\varepsilon_y + 2\varepsilon_x$	...	$(N_y - 1)\varepsilon_y + (N_x - 1)\varepsilon_x$

Значения фаз расположены в этой таблице так же, как вибраторы на рис. 299.

Нам нужно просуммировать  $N_x N_y$  колебаний одинаковой амплитуды с фазами, указанными в таблице. Будем сначала находить суммы по строчкам, а затем просуммируем эти суммы. Первая строчка дает колебание

$$a \left| \frac{\sin \left( N_x \frac{\varepsilon_x}{2} \right)}{\sin \left( \frac{\varepsilon_x}{2} \right)} \right| \cos (\omega t - \chi),$$

где  $\chi$  — некоторая результирующая фаза (ее значение нас не интересует). Вторая строчка даст колебание той же амплитуды, что и первая, но запаздывающее по фазе относительно него на  $\varepsilon_y$ , так как *каждое* из колебаний второй строчки отстает на  $\varepsilon_y$  от записанного над ним колебания первой строчки. Таким образом, вторая строчка дает колебание

$$a \left| \frac{\sin \left( N_x \frac{\varepsilon_x}{2} \right)}{\sin \left( \frac{\varepsilon_x}{2} \right)} \right| \cos (\omega t - \chi - \varepsilon_y).$$

Третья строчка дает таким же образом колебание

$$a \left| \frac{\sin \left( N_x \frac{\varepsilon_x}{2} \right)}{\sin \left( \frac{\varepsilon_x}{2} \right)} \right| \cos (\omega t - \chi - 2\varepsilon_y)$$

и т. д.

Суммирование колебаний от отдельных цепочек сводится, таким образом, к суммированию  $N_y$  колебаний, имеющих одинаковую амплитуду

$$b = a \left| \frac{\sin \left( N_x \frac{\varepsilon_x}{2} \right)}{\sin \left( \frac{\varepsilon_x}{2} \right)} \right|, \tag{8.18}$$

причем фазы этих колебаний образуют арифметическую прогрессию с разностью  $\varepsilon_y$ . Эта задача нам хорошо знакома, и мы можем сразу написать результат, а именно: результирующее колебание от всей двумерной

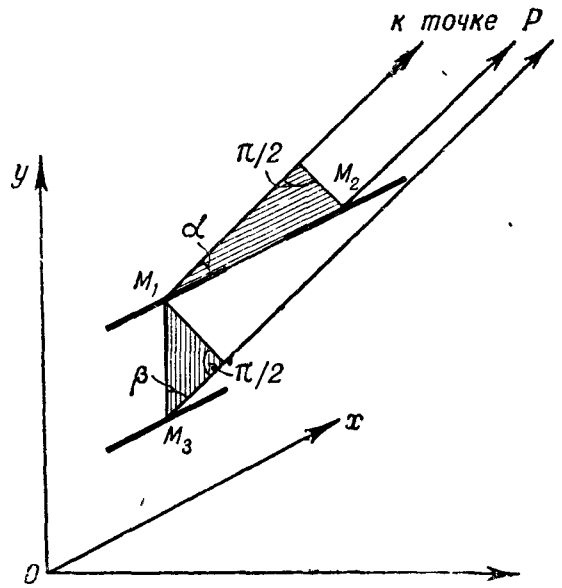


Рис. 300. К вычислению разностей хода для соседних вибраторов двумерной решетки.

решетки имеет амплитуду

$$b \left| \frac{\sin \left( N_y \frac{\varepsilon_y}{2} \right)}{\sin \left( \frac{\varepsilon_y}{2} \right)} \right|$$

или

$$a \left| \frac{\sin \left( N_x \frac{\varepsilon_x}{2} \right)}{\sin \left( \frac{\varepsilon_x}{2} \right)} \cdot \frac{\sin \left( N_y \frac{\varepsilon_y}{2} \right)}{\sin \left( \frac{\varepsilon_y}{2} \right)} \right|.$$

Введя явно посредством (8.17) зависимость  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  от направления наблюдения, получаем для результирующей интенсивности формулу

$$A^2 = a^2 \frac{\sin^2 \left( N_x \frac{1}{2} k d_x \cos \alpha \right)}{\sin^2 \left( \frac{1}{2} k d_x \cos \alpha \right)} \cdot \frac{\sin^2 \left( N_y \frac{1}{2} k d_y \cos \beta \right)}{\sin^2 \left( \frac{1}{2} k d_y \cos \beta \right)}. \quad (8.19)$$

Согласно сказанному, в п. 2 здесь  $a^2$  есть функция угла  $a$  (угол  $a$  здесь имеет тот же смысл, что  $\pi/2 - \psi$  в п. 2), описываемая диаграммой направленности полуволнового вибратора в его меридиональной плоскости. От  $\beta$  величина  $a^2$  не зависит.

**4. Обсуждение.** Пусть (для определенности) двумерная решетка расположена в вертикальной плоскости. При  $\beta = \pi/2$ , т. е. в горизонтальной плоскости, мы получаем на основании (8.19)

$$A^2 = a^2(\alpha) N_y^2 \frac{\sin^2 \left( N_x \frac{1}{2} k d_x \cos \alpha \right)}{\sin^2 \left( \frac{1}{2} k d_x \cos \alpha \right)}. \quad (8.19a)$$

Мы видим, что в горизонтальной плоскости распределение излучения по направлениям—такое же, как для отдельной цепочки, причем интенсивность излучения по всем направлениям в  $N_y^2$  раз больше, чем для отдельной цепочки.

При  $\alpha = \pi/2$ , т. е. для вертикальной плоскости, перпендикулярной к нашей двумерной решетке, формула (8.19) дает:

$$A^2 = a^2 \left( \frac{\pi}{2} \right) N_x^2 \frac{\sin^2 \left( N_y \frac{1}{2} k d_y \cos \beta \right)}{\sin^2 \left( \frac{1}{2} k d_y \cos \beta \right)} \quad (8.19b)$$

—такое же распределение излучения по направлениям, как от отдельной одномерной решетки, причем интенсивность излучения по всем направлениям в  $N_x^2$  раз больше, чем от отдельной одномерной решетки (ср. § 4, п. 1, причем  $\theta = \pi/2 - \beta$ ).

Мы не будем подробно рассматривать косые направления, для которых  $\cos \alpha$  и  $\cos \beta$  оба отличны от нуля. Достаточно ясное представление о них дает рис. 301, построенный по формуле (8.19).

Укажем лишь, что направлениям, для которых

$$d_x \cos \alpha = m_x \lambda, \quad d_y \cos \beta = m_y \lambda \quad (m_x, m_y = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (8.20)$$

(колебания от *всех* вибраторов приходят в фазе), соответствуют главные



максимумы каждого из множителей (8.19). В этих *двукратных* главных максимумах

$$A^2 = N_x^2 N_y^2 a^2.$$

Из формулы (8.20) видно, что двумерная решетка будет давать только два главных лепестка (по перпендикулярным к ней направлениям  $\alpha = \pi/2$ ,  $\beta = \pm \pi/2$ ), если  $d_x$  и  $d_y$  оба меньше  $\lambda$  (ср. § 4, п. 3). Ширина этих лепестков в горизонтальной плоскости определяется, если  $\lambda$  мало по сравнению с размерами решетки  $D_x$ ,  $D_y$ , соотношением

$$\alpha' - \alpha'' = \frac{2\lambda}{D_x}, \quad (8.21a)$$

их ширина в вертикальной плоскости, перпендикулярной к плоскости двумерной решетки, — соотношением

$$\beta' - \beta'' = \frac{2\lambda}{D_y}, \quad (8.21b)$$

где углы  $\alpha'$ ,  $\alpha''$ ,  $\beta'$ ,  $\beta''$  соответствуют ближайшим к оси лепестка направлениям нулевого излучения. Вывод этих соотношений совершенно аналогичен выводу формулы (8.13a).

Если решетка — квадратная ( $D_x = D_y$ ), ее излучение обладает одинаково острой направленностью в вертикальной и горизонтальной плоскостях и притом тем более острой, чем больше сторона квадрата. Если решетка имеет вид прямоугольника, то излучение обладает более острой направленностью в плоскости, перпендикулярной к решетке и параллельной длине прямоугольника, и менее острой — в плоскости, перпендикулярной к решетке и параллельной его ширине.

Двойная двумерная решетка (рис. 302), у которой расстояние между обеими плоскостями, содержащими вибраторы, равно  $\lambda/4$ , причем антенны каждой плоскости колеблются синфазно, а вибраторы обеих плоскостей —

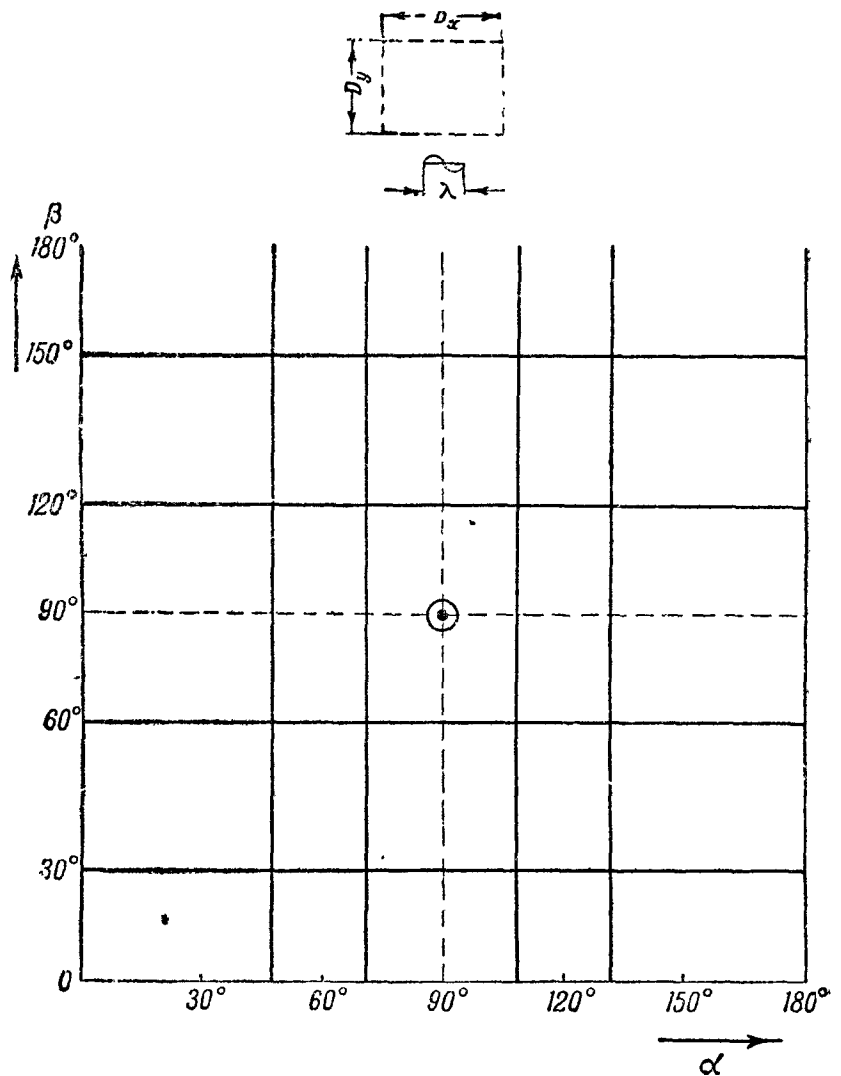


Рис. 301. Диаграмма излучения антенны, показанной на рис. 299 (ее общие размеры и — в том же масштабе — длина волны показаны наверху). Жирные прямые — направления нулевого излучения, для которых обращается в нуль один из множителей формулы (8.19). Прерывающиеся прямые — направления максимального излучения  $\alpha = \pi/2$  (при фиксированном  $\beta$ ) и  $\beta = \pi/2$  (при фиксированном  $\alpha$ ), их пересечение — направление оси главного пучка излучения (направление максимального излучения антенны). Центральный прямоугольник показывает границы главного пучка. Он подобен прямоугольнику  $D_x D_y$  и повернут относительно него на  $90^\circ$ . На диаграмме не изображено излучение в полупространство  $z < 0$  (оно уничтожается применением двойной двумерной решетки, изображенной на рис. 302).

со сдвигом фазы  $\pi/2$ , дает диаграмму направленности, имеющую *только один* главный лепесток (это легко доказать, рассуждая так же, как § 4, п. 5), перпендикулярный к плоскостям, содержащим двумерные решетки.

Если, кроме того,  $d_x < \lambda$ ,  $d_y < \lambda$ , такая решетка не имеет других главных лепестков.

В радиолокационных установках, работающих на волне длиной порядка 1 м, широко пользуются для получения направленного излучения антеннами только что рассмотренного типа. Колебания подводятся ко всем вибраторам от общего передатчика, что обеспечивает синхронность их колебаний. Вопрос о том, как осуществляются при этом указанные выше фазовые соотношения в вибраторах, относится к динамике антенн (ср. § 3, п. 3) и выходит за пределы этой книги.

Требование острой направленности противоречит требованию большой ком-

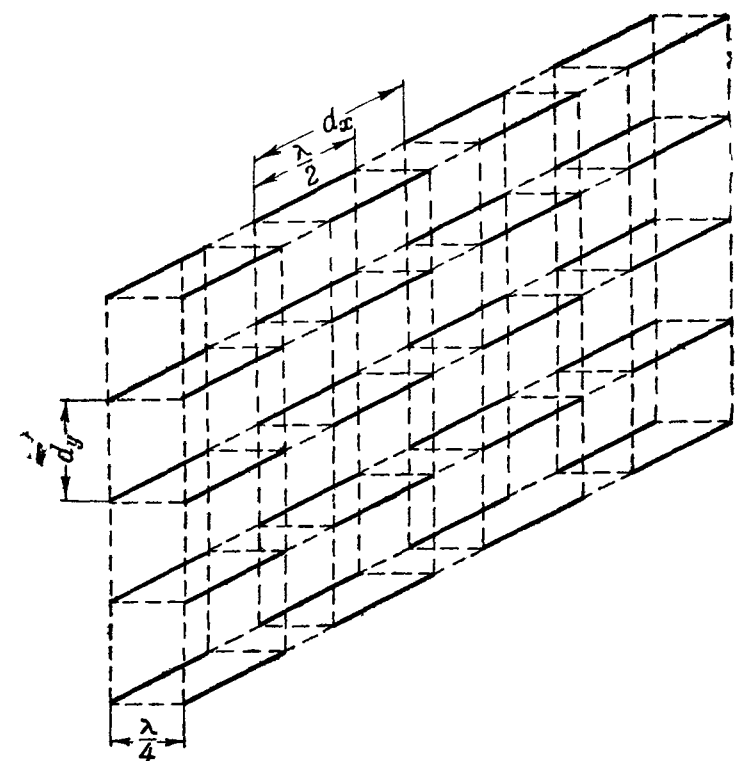


Рис 302. Антенна в виде двойной двумерной решетки (схематически).

пактности. На это указывают соотношения (8.21). Так, для получения на волне 1,5 м главных лепестков шириной приблизительно в  $6^\circ$  по  $\alpha$  и по  $\beta$  ( $\alpha' - \alpha'' = \beta' - \beta'' = 0,1$ ) должно быть:

$$D_x = D_y = \frac{3\text{ м}}{0,1} = 30 \text{ м},$$

т. е. нужна решетка огромных размеров. Ясно поэтому, что единственный практический путь для получения решетки с очень острой направленностью (ширина лепестков порядка  $1^\circ$  и меньше)—укорочение волны.

## § 6. Направленное акустическое излучение

Для подводной акустической локации (см. гл. VI, § 6) применяются акустические волны с частотой, лежащей далеко за пределами слышимости, — ультразвуки частоты порядка  $10^5$ — $10^6$  герц\*). Это делается главным образом для того, чтобы можно было посылать остро направленные пучки излучения: как мы увидим, для акустических излучателей существует соотношение между остротой направленности, длиной волны и размерами излучателя, аналогичное выведенному в § 4, 5 для сложных антенн.

**1. Пластинка как предельный случай решетки.** Представим себе, что излучателем акустических волн служит пластинка, колеблющаяся по толщине (рис. 303). На практике употребляются пластинки из пьезокварца, возбуждаемые по способу, указанному в гл. VI, § 3.

\*) Радиолокация неприменима для определения местонахождения предметов, погруженных в море, ввиду сильного поглощения радиоволн в морской воде.

Задачу о диаграмме направленности излучения пластинки мы легко решим, рассматривая пластинку как предельный случай целесообразно придуманной двумерной решетки.

Представим себе сначала двумерную решетку, состоящую из элементарных акустических излучателей (рис. 304) — поршеньков одинаковой площади, размеры которых малы по сравнению с длиной волны в окружающей среде, колеблющихся гармонически, перпендикулярно к плоскости решетки, с одинаковыми частотой, амплитудой и фазой. Мы можем применить к колебаниям давления  $\Delta p$  в акустической волне, излучаемой такой решеткой, формулу (8.19). При этом амплитуда  $a$  давления, создаваемого в точке наблюдения отдельным колеблющимся поршеньком, не зависит вследствие осевой симметрии излучения не только от угла  $\beta$ , но и от угла  $\alpha$  и пропорциональна амплитуде смещения поршня  $B^*$  и его площади  $S$  (ср. гл. VI, § 5, п. 4).

Итак, амплитуда  $A$  колебания, посылаемого по направлению  $\alpha, \beta$ , выражается формулой вида

$$A = hBS \left| \frac{\sin\left(\frac{1}{2}kD_x \cos \alpha\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}kd_x \cos \alpha\right)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{2}kD_y \cos \beta\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}kd_y \cos \beta\right)} \right|, \quad (8.22)$$

где  $h$  — коэффициент пропорциональности,  $k$  — волновое число в среде, окружающей пластинку,  $D_x, D_y$  — длина и ширина двумерной решетки.

Вообразим теперь, что число элементарных излучателей (поршеньков) неограниченно возрастает и притом так, что они образуют все более и более густую правильную двумерную решетку, сохраняющую неизменными общие размеры  $D_x, D_y$ . Иначе говоря, пусть

$$\begin{aligned} d_x &\rightarrow 0, & d_y &\rightarrow 0, \\ N_x &\rightarrow \infty, & N_y &\rightarrow \infty, \end{aligned}$$

причем

$$\begin{aligned} N_x d_x &= D_x = \text{const}, \\ N_y d_y &= D_y = \text{const}. \end{aligned}$$

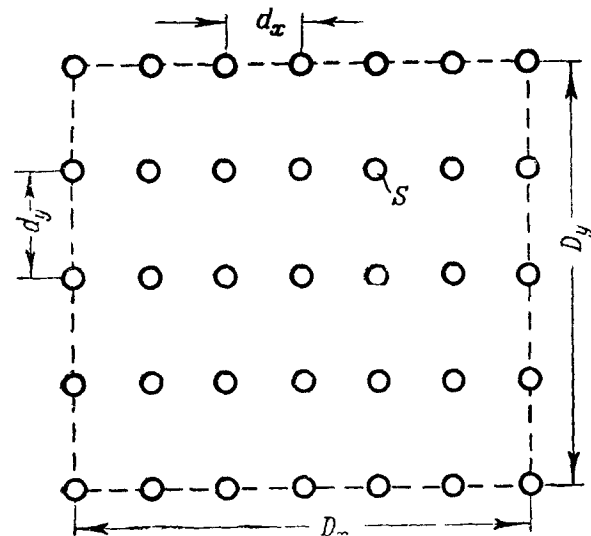


Рис. 304. Двумерная решетка из элементарных акустических излучателей.

Мы предположим, кроме того, что при этом площадь  $S$  каждого поршенька неограниченно убывает и притом так, что в пределе общая площадь всех поршеньков равна площади двумерной решетки:

$$N_x N_y S \rightarrow D_x D_y.$$

\*) Эта величина обозначалась в гл. VI, § 5 буквой  $A$ .

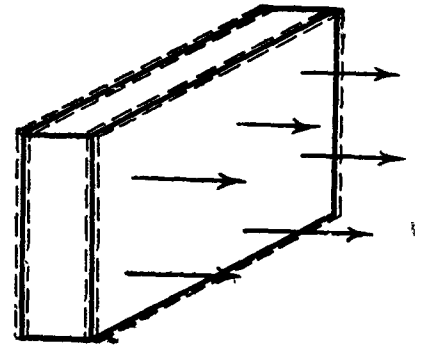


Рис. 303. Пластинка, колеблющаяся по толщине. Излагаемая в тексте теория предполагает, что пластинка граничит с неподвижной плоскостью, являющейся продолжением ее излучающей грани (в среднем положении последней).

Таким образом, в пределе двумерная решетка превращается в прямоугольный поршень, колеблющийся как целое. Излучение такого поршня, очевидно, — такое же, как излучение прямоугольной пластинки длины  $D_x$  и ширины  $D_y$ , колеблющейся по толщине.

Для того чтобы совершить в (8.22) указанный предельный переход, перепишем эту формулу в таком виде (опуская знак абсолютной величины):

$$A = \left\{ hB \sin \left( \frac{1}{2} k D_x \cos \alpha \right) \sin \left( \frac{1}{2} k D_y \cos \beta \right) \right\} \times \\ \times \frac{N_x N_y S}{N_x \sin \left( \frac{1}{2} k \frac{D_x}{N_x} \cos \alpha \right) \cdot N_y \sin \left( \frac{1}{2} k \frac{D_y}{N_y} \cos \beta \right)}.$$

При переходе к пределу выражение, заключенное в фигурные скобки, остается неизменным, а в его множителе числитель стремится по условию к значению  $D_x D_y$ , знаменатель — к значению

$$\frac{k^2}{4} D_x D_y \cos \alpha \cos \beta.$$

Следовательно, в пределе для амплитуды получается выражение

$$A = \frac{4hB}{k^2} \cdot \left| \frac{\sin \left( \frac{1}{2} k D_x \cos \alpha \right) \sin \left( \frac{1}{2} k D_y \cos \beta \right)}{\cos \alpha \cos \beta} \right|. \quad (8.23)$$

Если подставить для  $h$  его значение

$$h = \frac{\rho \omega^2}{2\pi r} = \frac{k^2 E}{2\pi r}$$

(ср. гл. VI, § 5, п. 4), где  $\rho$  — плотность,  $E$  — модуль упругости среды, получаем для интенсивности

$$A^2 = \frac{4E^2}{\pi^2} \frac{B^2}{r^2} \cdot \frac{\sin^2 \left( \frac{1}{2} k D_x \cos \alpha \right)}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{\sin^2 \left( \frac{1}{2} k D_y \cos \beta \right)}{\cos^2 \beta}. \quad (8.24)$$

**2. Обсуждение.** Зависимость интенсивности от углов  $\alpha$ ,  $\beta$  имеет вид, показанный на рис. 305. Она очень напоминает картину, получающуюся для густой решетки. Имеется один главный максимум при  $\alpha = \pi/2$  или  $\beta = \pi/2$ , затем чередуются нули (при  $D_x \cos \alpha = m\lambda$  или  $D_y \cos \beta = m\lambda$ , где  $m$  — целые числа) и побочные максимумы, убывающие довольно быстро по мере увеличения углов  $|\alpha - \pi/2|$  или  $|\beta - \pi/2|$ .

Излучение обладает тем более острой направленностью в плоскости  $y = 0$ , чем меньше угол  $\alpha_1$ , определяемый уравнением

$$\sin \alpha_1 = \frac{\lambda}{D_x}. \quad (8.25a)$$

и тем более острой направленностью в плоскости  $x = 0$ , чем меньше угол  $\beta_1$ , определяемый уравнением

$$\sin \beta_1 = \frac{\lambda}{D_y}. \quad (8.25b)$$

Таким образом, и здесь направленность в той и другой плоскостях тем острее, чем меньше отношение длины к соответствующему размеру излучающей системы. Для того чтобы получить  $\alpha_1 = 1^\circ$  при размере пластинки 5 см, необходима длина волны около 1 мм. Это соответствует в воде частоте колебания около 1,5 мегагерц, т. е. частоте, лежащей в радиодиапазоне.

Если длина и ширина пластинки меньше, чем длина волны, она излучает по всем направлениям: уравнения (8.25a), (8.25b) не удовлетво-

ряются ни при каких действительных  $\alpha_1, \beta_1$ . Если размеры  $D_x$  и  $D_y$  малы по сравнению с длиной волны, функция (8.22) мало меняется во всем интервале изменения  $\alpha, \beta$  от 0 до  $\pi$ , источник почти равномерно излучает по всем направлениям; он практически не отличается от рассмотренного в гл. VI, § 5 элементарного излучателя.

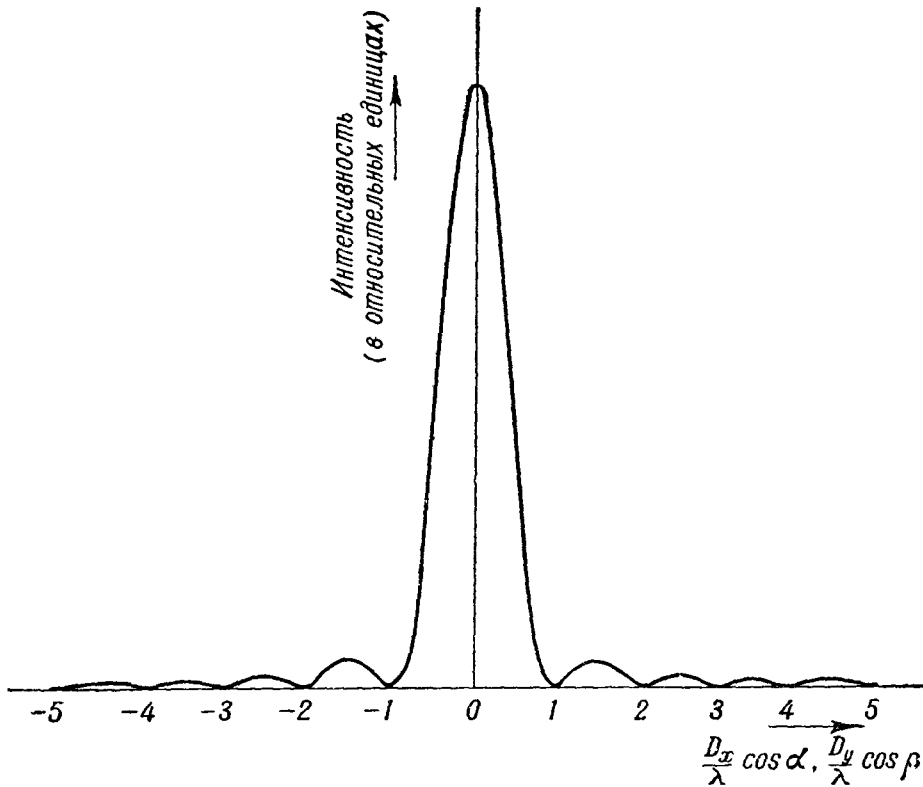


Рис. 305. Зависимость интенсивности излучения прямоугольной пластинки от угла  $\alpha$  (при фиксированном  $\beta$ ) или от угла  $\beta$  (при фиксированном  $\alpha$ ).

Подчеркнем, что при данной длине волны в случае пластинки (как и в случае решетки, см. § 5) *требования острой направленности излучения и компактности (малых размеров) излучающей системы противоречат друг другу*. Большая направленность несовместима, грубо говоря, с большой компактностью; она требует громоздкой излучающей системы. Смягчение этого противоречия возможно только путем уменьшения длины волны \*).

## § 7. Общее исследование акустической волны, излучаемой колеблющейся пластинкой

**1. Постановка задачи.** Нет ли противоречия между результатами исследования излучения пластинки, проведенного в § 6, и той картиной ультразвуковой волны, которая была дана в гл. VI, § 5. На рис. 204 волна, излучаемая прямоугольной пластинкой, изображена как пучок, заполняющий параллелепипед, основанием которого служит излучающая грань пластинки; пучок тем тоньше, чем меньше эта грань. В § 6 этой главы говорилось, что направленность тем острее (пучок тем тоньше), чем *больше* излучающая грань пластинки, ширина пучка в направлении оси  $x$  (или  $y$ ) тем меньше, чем *больше*  $D_x$  (или  $D_y$ ).

\*) Этот вывод может быть обобщен на все практически пригодные излучающие системы (см. гл. IX, § 10). В принципе мыслимы излучатели с очень сложным распределением источников, размеры которых малы по сравнению с  $\lambda$ , и имеющие очень острую направленность («мультипольные излучатели»). Но такие системы излучают ничтожно малую энергию и поэтому не представляют технического интереса.

Противоречие исчезает, если мы примем во внимание, что результаты § 6, как и результаты § 4, 5, на которых они основаны, справедливы только в области достаточно *больших* значений волнового параметра  $p = \sqrt{r_0 \lambda} / D$ , где  $D$  — наибольший общий размер излучателя (решетки или пластинки), а именно, в области  $p^2 \gg 1/4$ . Между тем рис. 204 показывает область пространства, соответствующую *малым* значениям волнового параметра ( $p \ll 1$ ). Здесь  $D/\lambda \approx 100$ ,  $r/D \leq 1$ , что соответствует  $p \leq 0,1$ ,  $p^2 \leq 0,01$ .

Рассмотрение с единой точки зрения *всей* структуры волны, излучаемой пластинкой, — рассмотрение, охватывающее как область больших ( $p \gg 1$ ), так и область средних ( $p \sim 1$ ) и малых ( $p \ll 1$ ) значений волнового параметра, — представляет очевидный интерес. Такое рассмотрение будет дано в этом параграфе.

Метод исследования, который мы будем применять, заключается в следующем.

Излучающая грань разбивается мысленно на малые клетки площади  $d\sigma$ . Каждая такая клетка может рассматриваться как элементарный акустический излучатель. Согласно сказанному в гл. VI, § 5 она излучает сферическую волну, в которой давление  $\Delta p$  описывается формулой (6.55), или, что то же,

$$\Delta p = \frac{a d\sigma}{r} \cos \left( \omega t - kr + \frac{\pi}{2} \right), \quad (8.26)$$

где для краткости введено обозначение

$$a = \frac{\rho \omega^2}{2\pi} A. \quad (8.27)$$

Согласно принципу суперпозиции волн, излучаемая всей колеблющейся гранью, описывается формулой

$$\Delta p = a \iint \frac{1}{r} \cos \left( \omega t - kr + \frac{\pi}{2} \right) d\sigma, \quad (8.28)$$

где двойной интеграл распространен на всю грань.

**2. Излучение узкой пластинки.** Мы рассмотрим сначала случай пластинки произвольной длины  $D_y$ , но ширина которой  $D_x$  мала по сравнению с длиной волны.

Для такой пластинки можно выбрать элементарные клетки так, как показано на рис. 306 (клетки длины  $dy$  и ширины  $D_x$ ), и следовательно, двойной интеграл превращается в простой:

$$d\sigma = D_x dy,$$

$$\Delta p = a D_x \int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{r} \cos \left( \omega t - kr + \frac{\pi}{2} \right) dy,$$

где  $y_1$ ,  $y_2$  — ординаты концов нашей узкой пластинки, или

$$\Delta p = b \int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{r} \cos \left( \omega t - kr + \frac{\pi}{2} \right) dy, \quad (8.29)$$

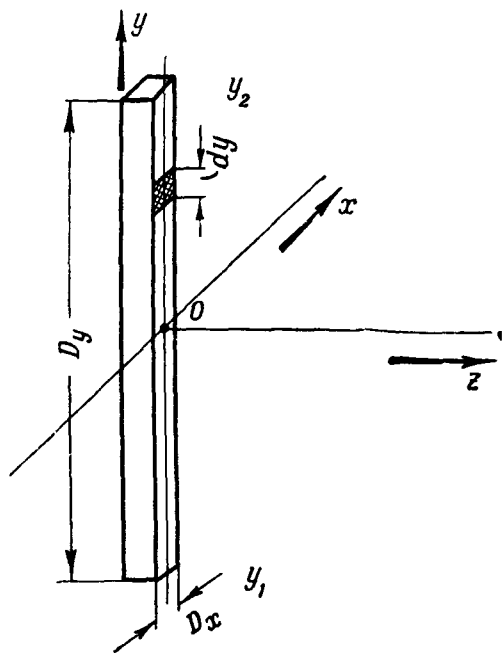


Рис. 306. Система координат для исследования излучения пластинки в области больших значений волнового параметра.

если для краткости положить:

$$b = aD_x. \quad (8.30)$$

Заметим, что

$$y_2 - y_1 = D_y. \quad (8.31)$$

Мы назовем здесь волновым параметром величину

$$p = \frac{\sqrt{r_0 \lambda}}{D_y}, \quad (8.32)$$

где  $r_0$  — расстояние от точки наблюдения до середины пластинки.

а) Область больших значений волнового параметра. Если  $p$  значительно превышает единицу, мы можем положить в амплитудном множителе выражения (8.29)

$$r = r_0, \quad (8.33)$$

а в фазовом —

$$r_0 - r = y \sin \theta, \quad (8.34)$$

где  $\theta$  — угол между направлением наблюдения и плоскостью  $y=0$  (ср. § 4). откуда

$$\Delta p = \frac{b}{r_0} \int_{y_1}^{y_2} \cos \left( \omega t - kr_0 + ky \sin \theta + \frac{\pi}{2} \right) dy$$

или после интегрирования, принимая во внимание (8.31),

$$\begin{aligned} \Delta p &= + \frac{b}{r_0 k \sin \theta} \left\{ \sin \left( \omega t - kr_0 + ky_2 \sin \theta + \frac{\pi}{2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \sin \left( \omega t - kr_0 + ky_1 \sin \theta + \frac{\pi}{2} \right) \right\} = \\ &= \frac{2b}{r_0 k \sin \theta} \sin \left( \frac{k}{2} D_y \sin \theta \right) \cos \left( \omega t - kr_0 + k \frac{y_1 + y_2}{2} \sin \theta + \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

Принимая во внимание (6.9), (8.27), (8.30), получаем для интенсивности

$$\frac{4b^2}{r_0^2 k^2 \sin^2 \theta} \sin^2 \left( \frac{k}{2} D_y \sin \theta \right) = \frac{(\omega A)^2}{r_0^2} \frac{\sin^2 \left( \frac{k}{2} D_y \sin \theta \right)}{\pi^2 \sin^2 \theta}. \quad (8.35)$$

Итак, интенсивность убывает при фиксированном направлении наблюдения обратно пропорционально квадрату расстояния  $r_0$  (сферическая волна), распределение интенсивности по направлениям не зависит от  $r_0$ . Диаграмма направленности в любой плоскости, содержащей ось  $y$ , имеет вид, соответствующий рис. 305. Ширина центрального лепестка тем меньше, чем больше длина пластинки.

б) Область средних и малых значений волнового параметра. Здесь приближение (8.34) не годится и нужно вычислять интеграл (8.29) по-другому.

Опустим перпендикуляр из точки наблюдения (рис. 307) на длинную ось пластинки (или ее продолжение). Возьмем основание  $O$  этого перпендикуляра за новое начало координат (начало координат перемещается при перемещении точки наблюдения), а длину перпендикуляра обозначим  $R$ . Имеем:

$$r = \sqrt{R^2 + y^2} = R \sqrt{1 + \left( \frac{y}{R} \right)^2} \quad (8.36)$$

или, разлагая радикал в ряд Тейлора,

$$r = R \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{y^2}{R^2} - \frac{1}{8} \frac{y^4}{R^4} + \dots \right\} = R + \frac{y^2}{2R} - \frac{1}{8} \frac{y^4}{R^3} + \dots$$

Удерживая при вычислении фазы подинтегрального выражения только первые два члена разложения, т. е. полагая

$$r = R + \frac{y^2}{2R}, \quad (8.37)$$

а при вычислении его амплитуды — только первый член\*), мы получаем вместо (8.29) формулу

$$\Delta p = \frac{b}{R} \int_{y_1}^{y_2} \cos \left( \omega t - kR - \frac{ky^2}{2R} + \frac{\pi}{2} \right) dy \quad (8.38)$$

( $y_1, y_2$  — ординаты концов пластинки при новом начале координат) или

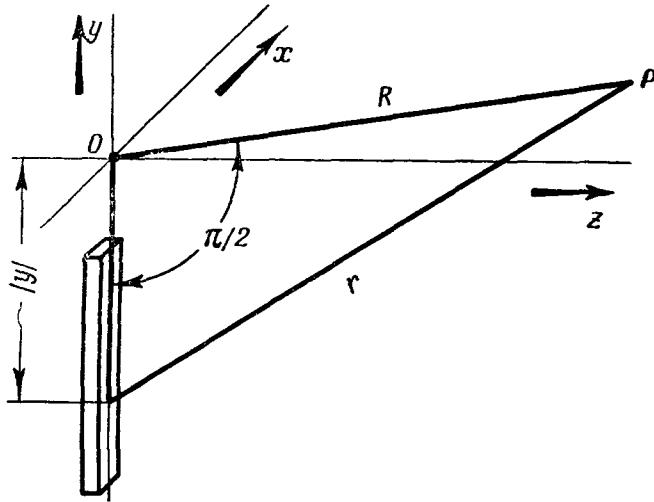


Рис. 307. Система координат для вычисления колебания в точке  $P$ , принадлежащей к области малых значений волнового параметра.

$$\Delta p = \frac{b}{R} \int_{y_1}^{y_2} \cos \left( \omega t' - \frac{ky^2}{2R} \right) dy, \quad (8.39)$$

если положить

$$\omega t - kR + \frac{\pi}{2} = \omega t' \quad (8.40)$$

(изменение начала счета времени).

Для удобства сделаем в формуле (8.39) замену переменной

$$y = \sqrt{\frac{\lambda R}{2}} v,$$

откуда

$$dy = \sqrt{\frac{\lambda R}{2}} dv \quad (8.41)$$

(изменение масштаба по оси  $y$ ). Эта замена приводит (8.39) к виду

$$\Delta p = B \int_{v_1}^{v_2} \cos \left( \omega t' - \frac{\pi v^2}{2} \right) dv, \quad (8.42)$$

где

$$B = b \sqrt{\frac{\lambda}{2R}}, \quad v_1 = y_1 \sqrt{\frac{2}{\lambda R}}, \quad v_2 = y_2 \sqrt{\frac{2}{\lambda R}}. \quad (8.43)$$

На основании соотношения

$$\cos \left( \omega t' - \frac{\pi v^2}{2} \right) = \cos \omega t' \cos \frac{\pi v^2}{2} + \sin \omega t' \sin \frac{\pi v^2}{2}$$

мы можем представить (8.42) в виде

$$\Delta p = B \left\{ \left[ \int_{v_1}^{v_2} \cos \frac{\pi v^2}{2} dv \right] \cos \omega t' + \left[ \int_{v_1}^{v_2} \sin \frac{\pi v^2}{2} dv \right] \sin \omega t' \right\}. \quad (8.44)$$

### 3. Интегралы Френеля. Спираль Корню. Функции

$$C(v) = \int_0^v \cos \frac{\pi v^2}{2} dv, \quad S(v) = \int_0^v \sin \frac{\pi v^2}{2} dv$$

\*) Относительно обоснования этого приема см. ниже (п. 4).





векторной диаграммы середину вектора  $\xi_0$  (точнее, вектора, изображающего колебание  $\xi_0$ ); этот вектор направлен по оси абсцисс векторной диаграммы. Совместим с концом этого вектора начало вектора  $\xi_1$ , с концом вектора  $\xi_1$  — начало вектора  $\xi_2$ , и т. д. Совместим, далее, с началом вектора  $\xi_0$  конец вектора  $\xi_{-1}$ , с началом вектора  $\xi_{-1}$  — конец вектора  $\xi_{-2}$ , и т. д. Мы получим цепочку векторов, часть которой показана на рис. 309. Длина

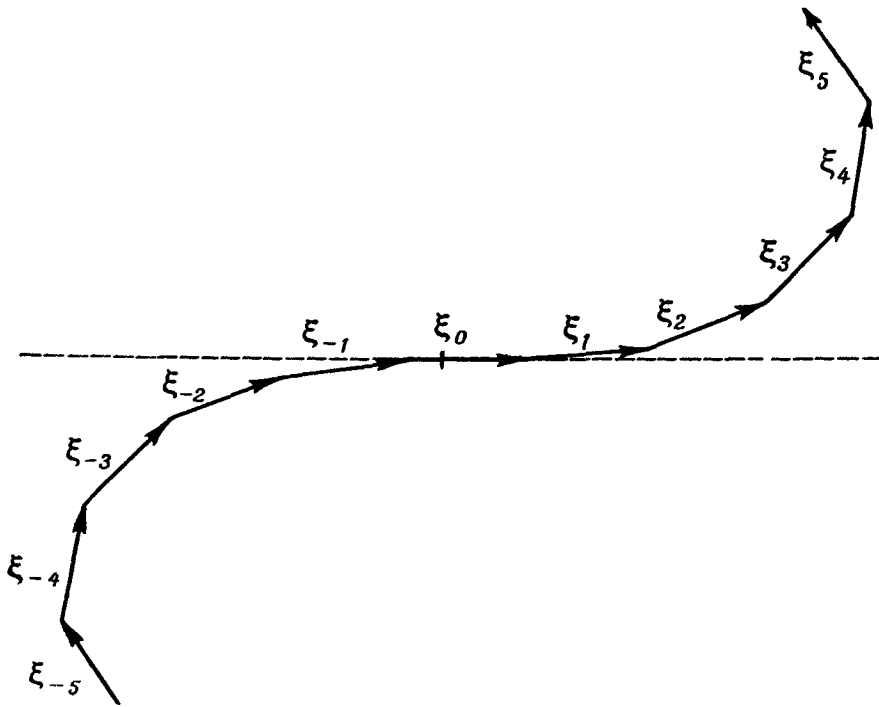


Рис. 309. Цепочка векторов, соответствующая (8.46) и переходящая в пределе при  $\Delta v \rightarrow 0$  в спираль Кюрню (рис. 311).

цепочки от начала координат до середины вектора  $\xi_n$  или вектора  $\xi_{-n}$  равна, очевидно,  $n\Delta v = v_n$ .

Предел суммы (8.46) при  $\Delta v \rightarrow 0$  есть интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\omega t' - \frac{\pi v^2}{2}\right) dv. \quad (8.47)$$

его векторная диаграмма — плавная кривая, в которую превращается цепочка рис. 309 при стремлении к нулю длины отдельных звеньев и неограниченном увеличении их числа. На векторной диаграмме интеграла  $I$  длина дуги между началом координат и точкой, соответствующей его элементу

$$\cos\left(\omega t' - \frac{\pi v^2}{2}\right) dv,$$

равна  $v$ , причем положительные (отрицательные)  $v$  соответствуют точкам, находящимся правее (левее) начала координат; угол  $\varphi$  между касательной к векторной диаграмме в этой точке и положительным направлением оси абсцисс векторной диаграммы равен  $\pi v^2/2$ .

Итак, векторная диаграмма интеграла  $I$  есть кривая  $C$  (рис. 308), характеризуемая тем, что между длиной дуги  $v$  и углом  $\varphi$  существует соотношение

$$\varphi = \frac{\pi v^2}{2}. \quad (8.48)$$

Это соотношение изображено графически на рис. 310.

Представим себе точку, движущуюся вдоль кривой  $C$ . Пусть точка выходит из начала координат ( $v = 0$ ) и движется в сторону возрастания  $v$ .

Пройдя путь  $v = \sqrt{2}$ , она совершит поворот по кривой  $C$  ( $\varphi = \pi$ ), пройдя путь  $v = \sqrt{4} = 2$ , еще поворот ( $\varphi = 2\pi$ ), пройдя путь  $v = \sqrt{6}$ , еще поворот, и т. д. Последовательные повороты происходят на все меньших «перегонах» длины

$$v_m - v_{m-1} = (\sqrt{m} - \sqrt{m-1})\sqrt{2} \quad (m = 1, 2, 3, \dots),$$

где  $v_m$  — длина дуги от начала координат до точки, где  $\varphi = m\pi$ . Мы придем к аналогичному результату, рассматривая движение точки из начала координат в сторону убывающих (отрицательных)  $v$ .

Отсюда ясно, что кривая  $C$  есть двойная спираль с последовательно уменьшающимися в обе стороны витками, расположенными в первом и третьем квадрантах. Эта спираль (называемая спиралью Корню) изображена на рис. 311.

Геометрическое рассуждение, основанное на соотношении (8.48), позволило нам качественно себе представить вид спирали Корню. Количественное ее построение выполняется на основании таблиц (или графиков) интегралов Френеля: абсцисса и ордината точки спирали  $v = V$  равны соответственно  $C(V)$ ,  $S(V)$ . Фокусы спирали  $F_1, F_2$  имеют координаты  $(+0,5, +0,5)$  и  $(-0,5, -0,5)$ . Отрезок, соединяющий фокусы, имеет, таким образом, длину  $\sqrt{2}$  и образует с осью абсцисс угол  $\pi/4$ .

Интеграл

$$\int_{v_1}^{v_2} \cos\left(\omega t' - \frac{\pi v^2}{2}\right) dv \quad (8.49)$$

может быть изображен на рис. 311 вектором  $V_{12}$  с началом в точке  $v = v_1$  и концом в точке  $v = v_2$ ; он представляет собой гармоническое колебание, амплитуда которого равна длине вектора  $V_{12}$ , а фаза — углу между вектором  $V_{12}$  и положительным направлением оси абсцисс векторной диаграммы. Колебание (8.42) изображается увеличенным в  $B$  раз вектором  $V_{12}$ .

4. Почему можно пользоваться формулой (8.38)? Заменяя  $r$  выражением  $R + y^2/2R$ , мы совершаем ошибку порядка  $y^4/8R^3$ . Соответственная ошибка в фазе колебания, приходящего от элемента пластинки  $y, y + dy$ , не существенна, пока

$$\frac{y^4}{8R^3} \ll \frac{\lambda}{2}, \text{ т. е. } y \ll \sqrt[4]{4R^3\lambda} \quad (8.50)$$

(ср. § 4, п. 2). Между тем мы пользовались формулой (8.37) для сколь угодно больших  $y$  (фокусы спирали Корню соответствуют  $y = \pm \infty$ ). Такое обращение с приближенным выражением для  $r$  нуждается в оправдании. Оно заключается, грубо говоря, в следующем: значения  $y$ , для которых не соблюдено условие (8.50), соответствуют, как показывает элементарный

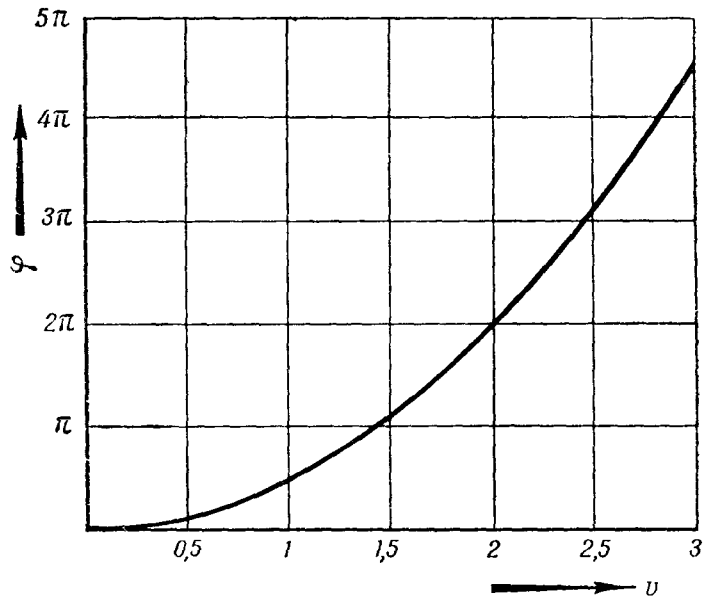


Рис. 310. Зависимость между  $v$  (длиной дуги векторной диаграммы) и  $\varphi$  (углом элемента дуги векторной диаграммы с осью абсцисс).

подсчет \*), очень далеким и мелким виткам векторной диаграммы, изображающей колебание (8.49); из-за малого размера этих витков даже большая относительная ошибка в вычислении даваемого ими вклада в интеграл

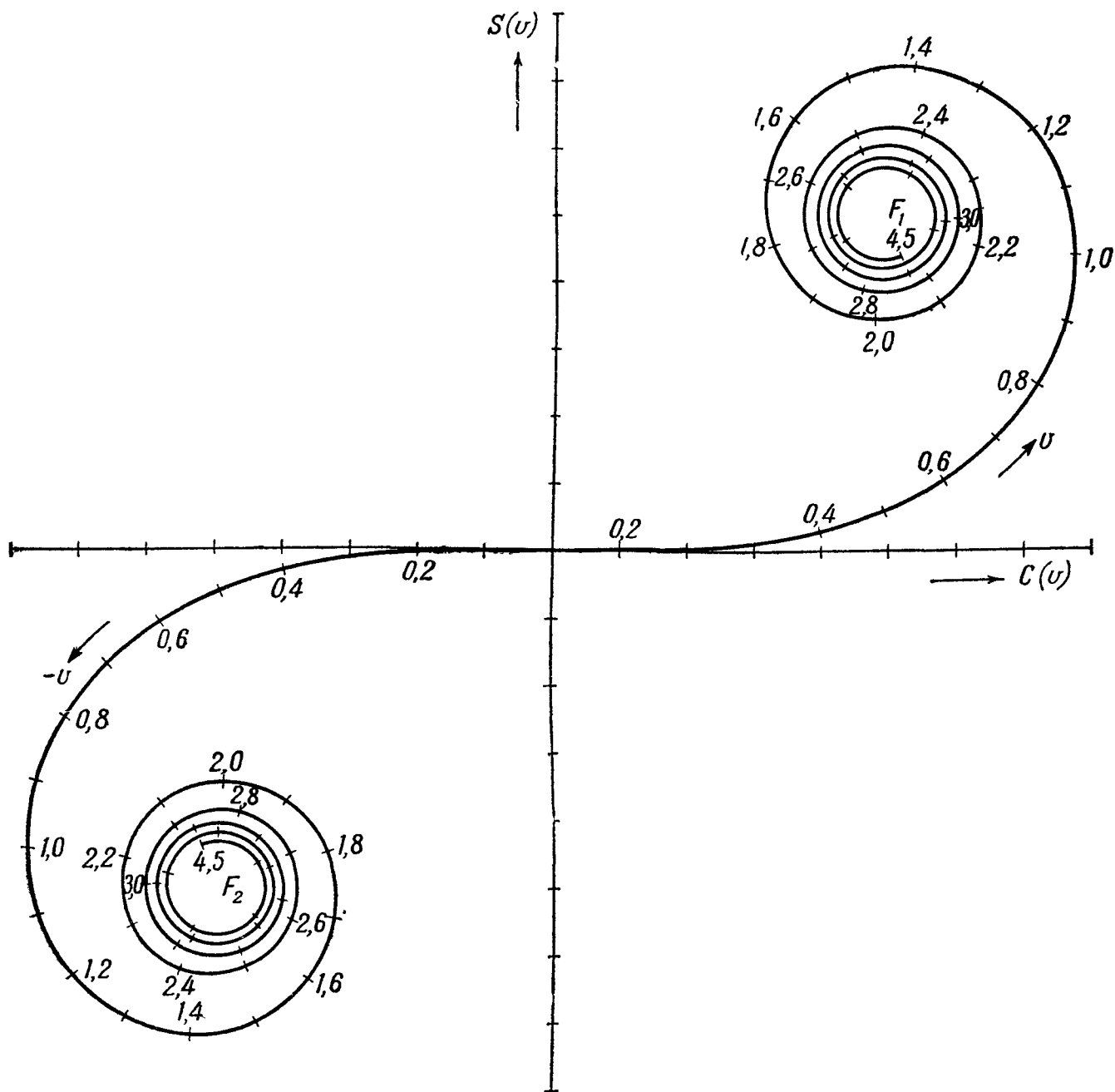


Рис. 311. Спираль Корню (векторная диаграмма интеграла  $I$ ). Отметки на спирали указывают значения  $v$ . Каждое деление на осях координат равно 0,1.

(8.49) дает лишь незначительную ошибку при вычислении этого интеграла \*\*).

**5. Исследование акустического поля узкой пластинки.** Структура волны в области больших значений волнового параметра  $p$  нам уже известна (§ 7, п. 2). Обсудим результат, полученный в п. 3 для средних и малых значений  $p$ .

\*) При  $y^4/R^3 = \lambda$  имеем  $y^2/R = \sqrt{\lambda R}$  или при обычных условиях ( $R \gg \lambda$ )  $y^2/R \gg \lambda$ ,  $y \gg \sqrt{R\lambda}$ .

\*\*) Строгое оправдание замены  $r$  на  $R + y^2/2R$  во всем интервале  $-\infty \leq y \leq \infty$  может быть проведено с помощью математических методов, выходящих за пределы применяемых в этой книге.

а) Пусть точка наблюдения  $P$  (рис. 307) расположена так, что точка  $O$  находится на самой пластинке на расстояниях, значительно превышающих  $\sqrt{R\lambda}$  от ее концов  $M_1, M_2$  (рис. 314). В этом случае точки векторной диаграммы  $v = v_1 < 0, v = v_2 > 0$  находятся на далеких витках соответственно левой и правой половины спирали Корню, и можно считать без

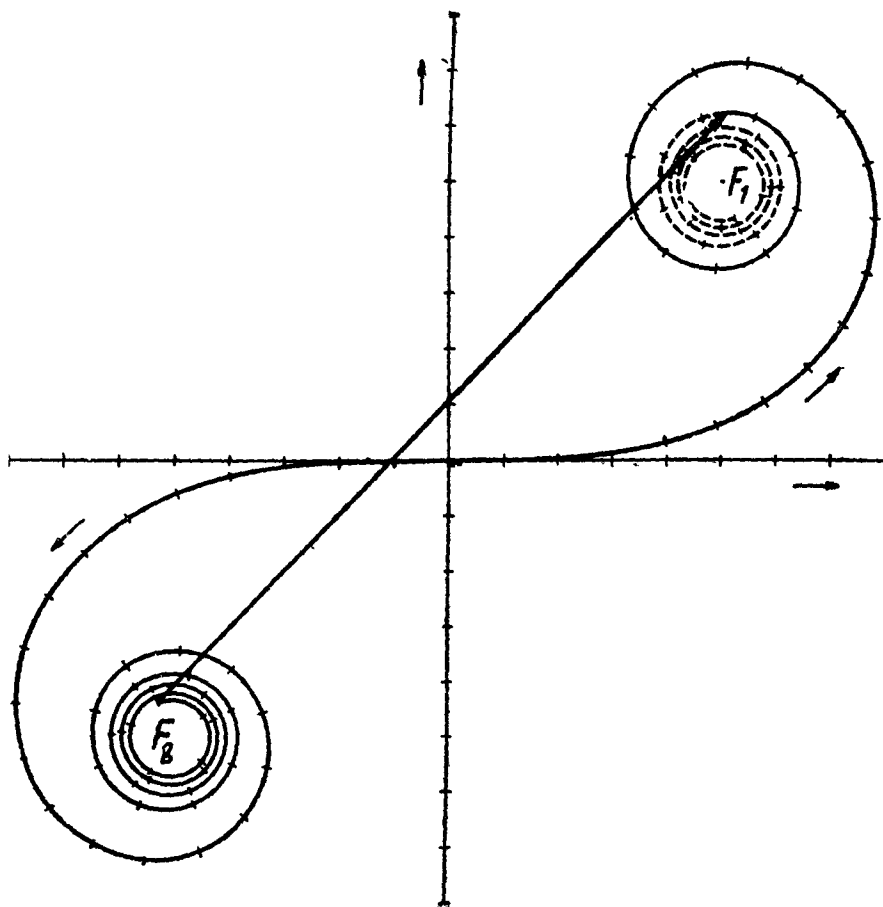


Рис. 312. Построение результирующего колебания в точке, для которой  $y_2 = \sqrt{3R\lambda}, |y_1| \gg \sqrt{R\lambda}$ .

существенной погрешности, что эти точки совпадают с фокусами спирали. Следовательно, амплитуда колебания  $\Delta p$  равна  $B\sqrt{2}$  (расстояние между фокусами равно  $\sqrt{2}$ ), его фаза равна  $\pi/4$  (фокусы находятся на биссектрисе координатного угла). Итак, здесь

$$\Delta p = B\sqrt{2}\cos\left(\omega t' - \frac{\pi}{4}\right)$$

или на основании (8.40), (8.43)

$$\Delta p = b\sqrt{\frac{\lambda}{R}}\cos\left(\omega t' - \frac{\pi}{4}\right) = aD_x\sqrt{\frac{\lambda}{R}}\cos\left(\omega t - kR + \frac{\pi}{4}\right). \quad (8.51)$$

Это — уравнение цилиндрической волны (ср. гл. V, § 2).

б) Когда точка наблюдения начинает перемещаться параллельно оси пластинки (скажем, вверх),  $y_2$  и  $v_2$  убывают,  $y_1$  и  $v_1$  растут по абсолютной величине. Пусть при этом  $y_2$  становится сравнимым с  $\sqrt{R\lambda}$ . Начало вектора, изображающего колебание (8.49), по-прежнему можно считать совпадающим с нижним фокусом спирали  $F_2$ , его конец скользит по виткам верхней полуспирали. Например, когда  $y_2 = \sqrt{3R\lambda}$ , т. е.  $v_2 = \sqrt{6}$  (рис. 312), длина вектора равна 1,54, когда  $y_2 = \sqrt{2R\lambda}$  ( $v_2 = 2$ ), длина вектора равна 1,33, когда  $y_2 = \sqrt{R\lambda}$  ( $v_2 = \sqrt{2}$ ), длина вектора равна 1,61. Таким образом, при приближении точки  $O$  к  $M_1$  в точке наблюдения  $P$  проходит попеременное

увеличение и уменьшение интенсивности. Наибольшая интенсивность соответствует приблизительно  $v = 1,2$ ,  $y_2 = 0,85 \sqrt{R\lambda}$ . При дальнейшем

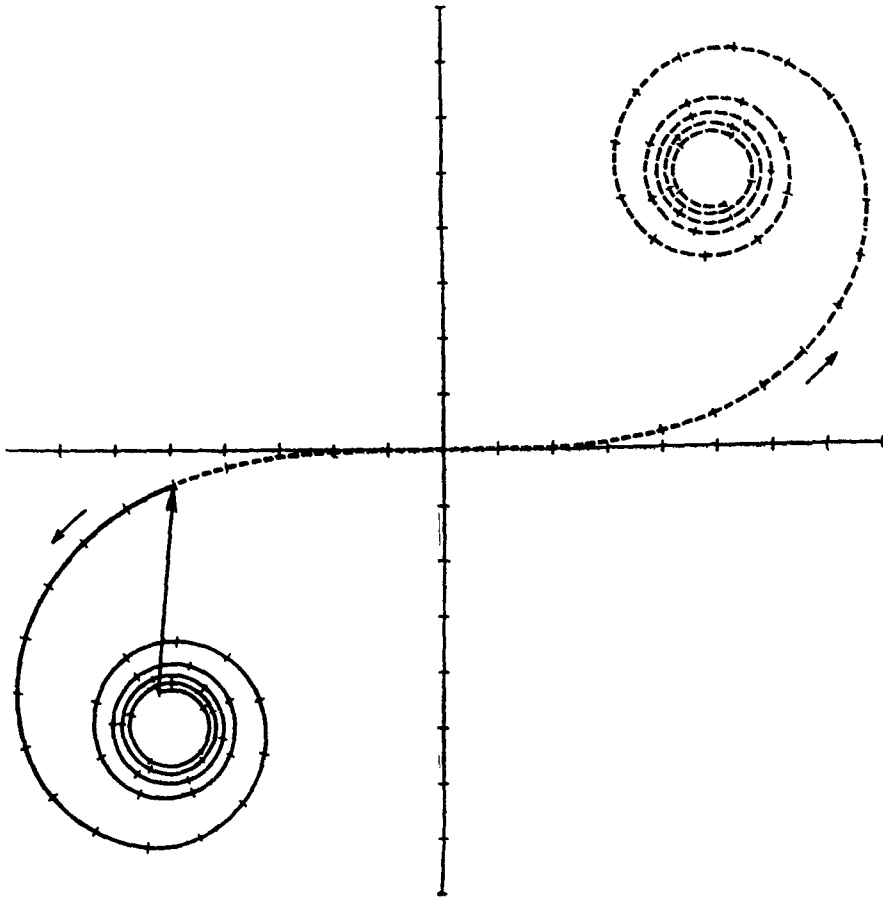


Рис. 313. Построение результирующего колебания в точке, для которой  $y_2 < 0$ .

уменьшении  $y_2$  происходит монотонное спадание интенсивности. При  $y_2 = 0$  ( $v_2 = 0$ ), т. е. совпадении  $O$  с  $M$ , имеем амплитуду, равную половине амплитуды (при том же  $R$ ) на перпендикуляре к середине пластинки и, следовательно, интенсивность, равную четверти интенсивности на этом перпендикуляре.

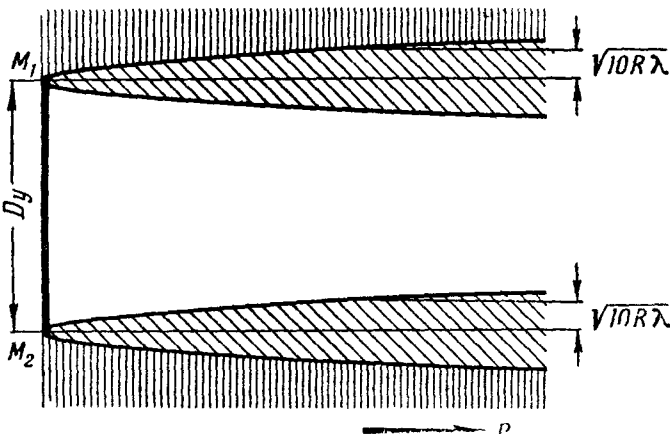


Рис. 314. Структура излучения узкой пластинки в области малых значений волнового параметра  $\sqrt{R\lambda}/D_y$ .  $M_1M_2$ —концы пластинки. Картина обладает осевой симметрией относительно оси  $M_1M_2$ . В незаштрихованной области волна является приблизительно цилиндрической. В густо заштрихованной области излучение практически отсутствует. Редкая штриховка показывает переходную область.

в) Пусть, наконец, точка  $O$  выходит за пределы пластинки. Величины  $y_2$  и  $v_2$  теперь отрицательны, векторная диаграмма имеет вид, показанный на рис. 313. По мере удаления  $O$  от конца пластинки амплитуда монотонно стремится к нулю. Ее можно считать практически равной нулю тогда, когда  $v$  соответствует достаточно большому числу  $n$  (скажем, 10) полувитков спирали, т. е.  $y_2 = \sqrt{10R\lambda}$ .

Мы приходим к картине, изображенной на рис. 314. Пока волновой параметр мал ( $p \ll 1$ ), волна, излучаемая пластинкой, почти не отличается

от заключенной между плоскостями, перпендикулярными к ее большой оси и проходящими через ее концы, части цилиндрической волны (8.51).

Отличие имеется только в очень тонких переходных слоях; их толщина порядка нескольких  $\sqrt{R\lambda}$ . При увеличении волнового параметра (при удалении от пластинки) толщина этих пограничных слоев увеличивается, область цилиндрической волны сокращается, и там, где  $\sqrt{R\lambda} \sim D_y$ ,

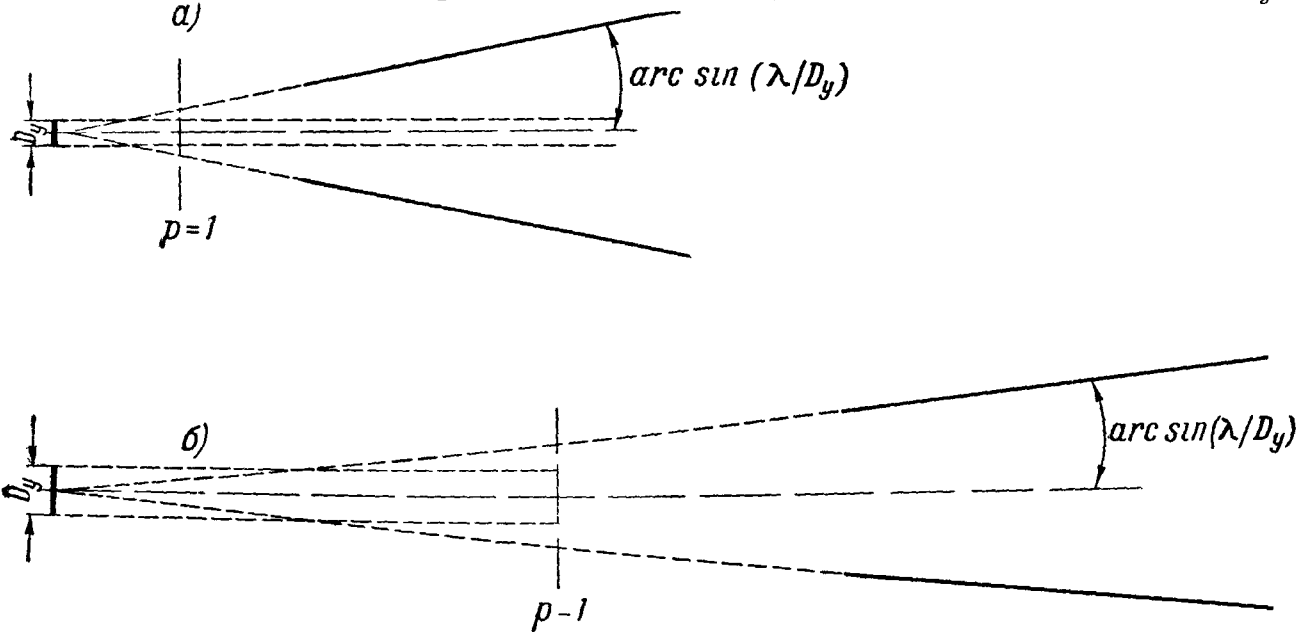


Рис. 315. Схематическое изображение структуры волны на различных расстояниях от излучающей пластинки. В случае а)  $D_y$  в два раза меньше, чем в случае б). С увеличением  $D_y$  растет длина области волнового поля, ограниченной (приблизительно) плоскостями, перпендикулярными к длине пластинки, и уменьшается растрор веера в области веерообразного распространения.

т. е.  $p \sim 1$ , волна уже совершенно не похожа на цилиндрическую. При дальнейшем увеличении волнового параметра, когда уже  $\sqrt{R\lambda} \gg D_y$  ( $p \gg 1$ ), волна принимает ту структуру, которая изображается диаграммой направленности рис. 305.

Итак, в области малых  $p$  звуковое поле имеет размер по направлению, параллельному длине пластинки, практически не зависящий от  $R$  (прямолинейное распространение), равный длине пластинки и, следовательно, тем меньший, чем она короче. В области больших  $p$  звуковое поле имеет по этому направлению размер, пропорциональный  $R$  (веерообразное распространение) и порядка  $\lambda R/D_y$ ; «растрор веера» тем больше, чем короче излучающая пластинка. Наши выводы иллюстрирует рис. 315.

**6. Прямоугольная пластинка произвольных размеров.** Вернемся к общему случаю задачи, поставленной в п. 1: длина и ширина излучающей пластинки—какие угодно. Из § 6 мы знаем картину акустического поля в области больших значений волновых параметров

$$p_x = \frac{\sqrt{\lambda r_0}}{D_x}, \quad p_y = \frac{\sqrt{\lambda r_0}}{D_y},$$

где  $r_0$ —расстояние от точки наблюдения до центра пластинки\*). Здесь

\*) Мы снова пришли бы к этой картине, вычислив двойной интеграл (8.28), положив в амплитудном множителе  $r=r_0$ , а в выражении для фазы приняв следующее приближение, справедливое в области достаточно больших  $p$ .

$$r-r_0 = x \cos \alpha + y \cos \beta,$$

где  $\alpha, \beta$ —углы между направлением наблюдения и осями  $x, y$

мы займемся другой областью пространства. Разобьем мысленно излучающую грань на очень узкие вертикальные полоски ширины  $dx$  (рис. 307). К каждой такой полоске можно применить результаты пп. 2—5. Рассмотрим такие положения точки наблюдения  $P$ , при которых волны, создаваемые отдельными полосками  $(x, x+dx)$ , не отличаются заметно от цилиндрических волн

$$\Delta p = a dx \sqrt{\frac{\lambda}{R}} \cos \left( \omega t - kR + \frac{\pi}{4} \right), \quad (8.52)$$

где опять  $R$ —длина перпендикуляра, опущенного из точки наблюдения на ось полоски или ее продолжение. Возьмем за начало координат основание  $O'$  перпендикуляра, опущенного из точки наблюдения на плоскость, содержащую излучающую грань. Тогда волны, создаваемые всей пластинкой, изображаются выражением

$$\Delta p = a \sqrt{\lambda} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{R}} \cos \left( \omega t - kR + \frac{\pi}{4} \right) dx, \quad (8.53)$$

где  $x_1, x_2$ —абсциссы краев пластинки, параллельных оси  $y$ .

Имеем формулу, аналогичную (8.37),

$$R = \sqrt{z^2 + x^2} = z + \frac{x^2}{2z} - \frac{1}{8} \frac{x^4}{z^3} + \dots,$$

где  $z = O'P$  и, следовательно, с таким же приближением, как при переходе от (8.29) к (8.38),

$$\Delta p = a \sqrt{\frac{\lambda}{z}} \int_{x_1}^{x_2} \cos \left( \omega t' - \frac{kx^2}{2z} \right) dx,$$

если выбрать новое начало счета времени, так чтобы было

$$\omega t - kz + \frac{\pi}{4} = \omega t'. \quad (8.54)$$

Сделаем замену переменной

$$x = \sqrt{\frac{\lambda z}{2}} v, \text{ откуда } dx = \sqrt{\frac{\lambda z}{2}} dv. \quad (8.55)$$

Получаем:

$$\Delta p = \frac{a\lambda}{\sqrt{2}} \int_{v_1}^{v_2} \cos \left( \omega t' - \frac{\pi v^2}{2} \right) dv, \quad (8.56)$$

где

$$v_1 = x_1 \sqrt{\frac{2}{\lambda R}}, \quad v_2 = x_2 \sqrt{\frac{2}{\lambda R}}. \quad (8.57)$$

Выражение (8.56) отличается от (8.49) только постоянным множителем. Для исследования интеграла можно снова воспользоваться спиралью Корню.

Ясно, прежде всего (ср. п. 3), если  $O'$  лежит внутри излучающей грани на расстоянии от ее краев, превышающем  $\sqrt{n z \lambda}$ , где  $n$ —достаточно большое число (скажем,  $n = 10$ ), интеграл не отличается существенно от

$$\sqrt{2} \cos \left( \omega t' - \frac{\pi}{4} \right),$$

откуда, воспользовавшись (8.54), получаем:

$$\Delta p = a\lambda \cos(\omega t - kz) \quad (8.58)$$



или на основании формул (6.9), (8.27)

$$\Delta p = \rho \omega A_0 \cos(\omega t - kz). \quad (8.58a)$$

Это — уравнение *плоской волны*. В ней смещение  $\xi = A \sin(\omega t - kz)$ , чего и следовало ожидать на основании (6.55).

Таким образом, внутри области, ограниченной поверхностями, описываемыми (при начале координат в центре пластинки) уравнениями

$$\begin{aligned} x &= -\frac{D_x}{2} + \sqrt{nz\lambda}, \\ x &= \frac{D_x}{2} - \sqrt{nz\lambda}, \\ y &= -\frac{D_y}{2} + \sqrt{nz\lambda}, \\ y &= \frac{D_y}{2} - \sqrt{nz\lambda}, \end{aligned} \quad (8.59)$$

( $n \approx 10$ ), волна мало отличается от плоской волны, изображенной на рис. 204.

Эта область имеет вид трубы, расширяющейся в сторону излучателя. Ее ось перпендикулярна к излучающей пластинке; сечения трубы плоскостями, параллельными излучающей пластинке, имеют вид прямоугольников, оба размера которых уменьшаются с ростом  $z$  (незаштрихованная область рис. 316). В «кайме», заключенной между поверхностями (8.59) и поверхностью параллелепипеда, описываемой (при начале координат в центре пластинки) уравнениями

$$\begin{aligned} x &= -\frac{D_x}{2}, \quad x = \frac{D_x}{2}, \\ y &= -\frac{D_y}{2}, \quad y = \frac{D_y}{2}, \end{aligned} \quad (8.60)$$

имеют место, как легко видеть, пользуясь спиралью Корню, колебания интенсивности, аналогичные тем, которые были описаны в п. 3. Вне параллелепипеда, ограниченного плоскостями, по мере удаления от его поверхности и на расстоянии порядка  $\sqrt{nz\lambda}$ , где  $n$  достаточно велико (скажем,  $n = 10$ ), интенсивность практически равна нулю.

Итак, в области малых значений волнового параметра волна, излучаемая прямоугольной пластинкой, почти не отличается от той части

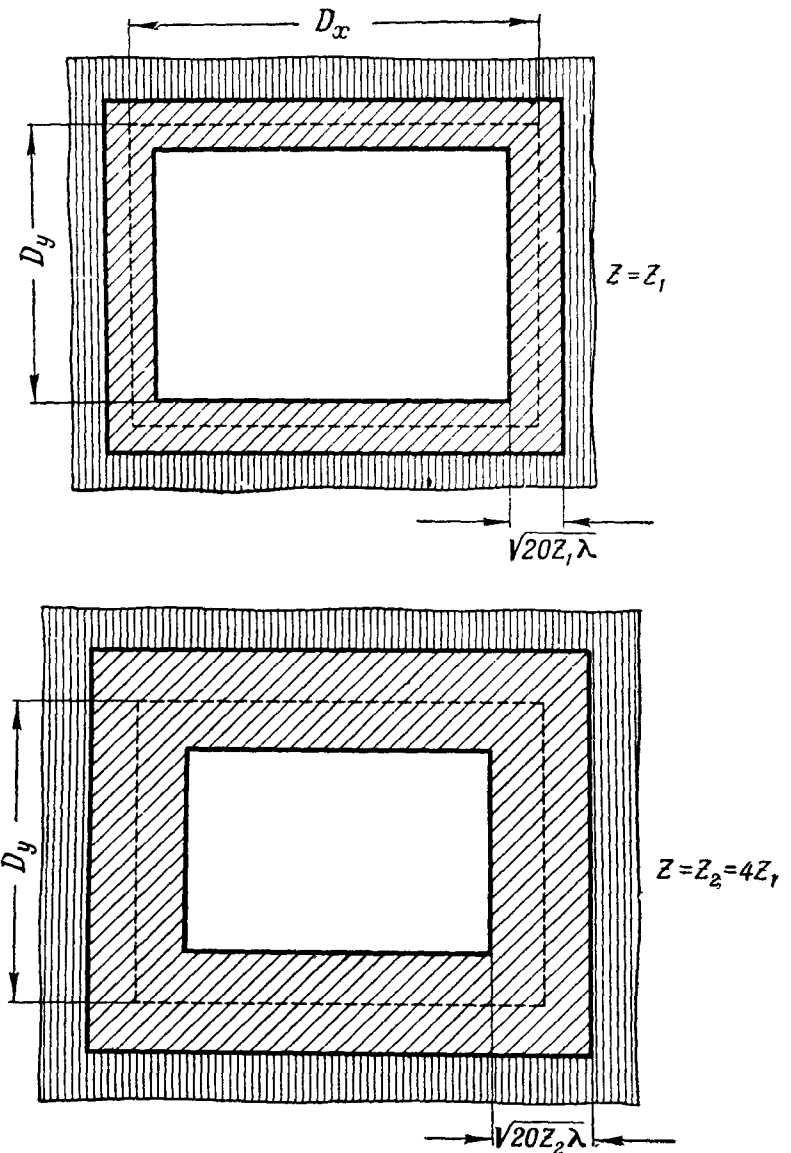


Рис. 316. Сечение излучения прямоугольной пластинки плоскостями, параллельными излучающей грани, в области малых значений волнового параметра. В незаштрихованной области волна приблизительно плоская. В густо заштрихованной области излучение практически отсутствует. Редкая штриховка показывает переходную область. Эта область расширяется по мере удаления от пластинки.

плоской волны (8.58), которая заключена в параллелепипеде, имеющем в основании излучающую грань пластинки. Отличие имеется только в тонких переходных слоях; их толщина порядка  $\sqrt{nz\lambda}$ . По мере увеличения волнового параметра картина усложняется и переходит к области  $p \gg 1$  (т. е. при  $\sqrt{z\lambda} \gg D_x$ ,  $\sqrt{z\lambda} \gg D_y$ ) снова в более простую картину, уже известную из § 6 и описываемую диаграммой направленности.

Можно сказать и так. В области *малых*  $p$  волновой пучок имеет практически вид параллелепипеда, основанием которого является излучающая грань пластинки; здесь его поперечные размеры можно считать равными  $D_x$ ,  $D_y$ . В области *больших*  $p$  волновой пучок расширяется по мере увеличения  $z$  и имеет поперечные размеры порядка  $z\lambda/D_x$ ,  $z\lambda/D_y$ , пропорциональные расстоянию от излучателя и длине волны и *обратно пропорциональные* соответственным размерам излучающей пластинки.

## § 8. Поле вблизи двумерной решетки из электрических вибраторов

1. **Постановка задачи.** Каково поле, создаваемое двумерной решеткой из вибраторов, в области *малых* значений волнового параметра  $p$ ? Сам

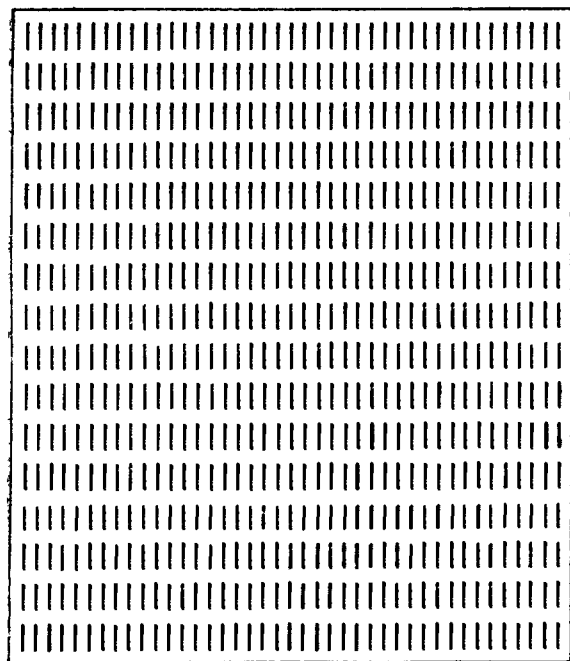
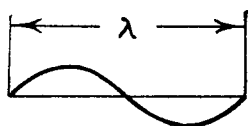


Рис. 317. Густая двумерная решетка из вибраторов, длина которых мала по сравнению с  $\lambda$ .

по себе этот вопрос не имеет большого значения, так как в радиотехнике всегда интересны большие значения  $p$ . Но решение этого вопроса даст нам ключ к пониманию механизма отражения, преломления и дисперсии электромагнитных волн и, в частности, света (§ 9 — 11).

Мы будем считать (в отличие от § 2 — 5), что длины вибраторов малы по сравнению с длиной волны (они излучают как элементарные вибраторы) и что периоды  $d_x$ ,  $d_y$  решеток и цепочек (ср. § 5) малы по сравнению с длиной волны (рис. 317). Задача очень напоминает ту, которая решалась в § 6, но не тождественна ей вследствие векторного характера электромагнитных волн и зависимости амплитуды колебания, создаваемого в точке  $P$  отдельным вибратором, от угла  $\psi$  (гл. VII, рис. 249).

Вектор  $E$  в точке  $P$  мы найдем, просуммировав сначала поля от вибраторов, составляющих отдельную цепочку, и вычислив затем сумму полей, создаваемых отдельными цепочками.

2. **Поле цепочки.** На основании (7.33) и (7.35) оно может быть записано в таком виде:

$$E = \sum \frac{Mk^2}{r_i} e_i \cos \psi_i \cos (\omega t - kr_i), \quad (8.61)$$

где  $e_i$  — единичный вектор, расположенный в плоскости, содержащей точку наблюдения и цепочку, и перпендикулярный к прямой, соединяющей  $i$ -й вибратор с точкой наблюдения (рис. 318);  $r_i$ ,  $\psi_i$  имеют для  $i$ -го вибратора тот же смысл, что  $r$ ,  $\psi$  в гл. VII, § 7. Сумма берется по всем вибраторам.

Разложим  $E$  на компоненту  $E_{||}$ , параллельную цепочке, и  $E_{\perp}$ , к ней перпендикулярную.

Если цепочка достаточно длинная и основание  $O$  перпендикулярно, опущенного на нее из  $P$ , находится достаточно далеко от ее концов, можно считать, что на основании симметрии

$$E_{\perp} = 0$$

(компоненты  $E_{\perp}$ , обусловленные вибраторами, симметричными относи-

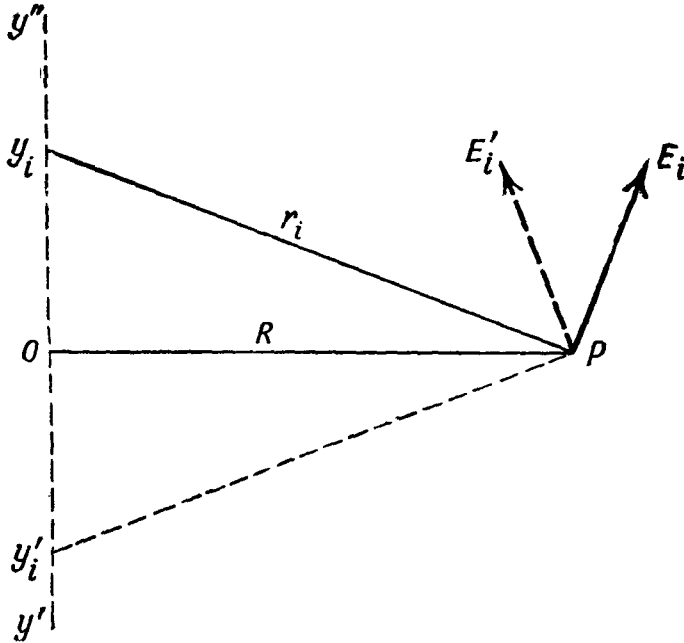


Рис. 318.  $E_i$ —поле  $i$ -го вибратора,  $E'_i$ —поле вибратора, симметричного ему относительно  $O$ . Вектор  $E_i + E'_i$  перпендикулярен к  $OP$ .

тельно  $O$ , дают в сумме нуль; влиянием очень далеких вибраторов можно пренебречь), и следовательно,

$$E = E_{||} = k^2 M \sum \frac{\cos^2 \psi_i}{r_i} \cos(\omega t - kr_i). \quad (8.62)$$

Разложим выражения

$$r_i = \sqrt{R^2 + y_i^2}, \quad \frac{\cos^2 \psi_i}{r_i} = \frac{R^2}{r_i^3} = \frac{1}{R} \left(1 + \frac{y_i^2}{R^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

в ряды по степеням  $y_i/R$ , где  $R$  — расстояние от точки наблюдения до цепочки,  $y_i$  — координата  $i$ -го вибратора (при начале координат  $O$ ):

$$r_i = R + \frac{1}{2} \frac{y_i^2}{R},$$

$$\frac{\cos^2 \psi_i}{r_i} = \frac{1}{R} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{y_i^2}{R^2} + \dots\right). \quad (8.63)$$

Пренебрегая в выражении для амплитуды членами, зависящими от  $y_i$ , а в выражении для фазы — членами порядка выше второго относительно  $y_i/R$  (обоснование такое же, как в § 7), получаем:

$$E = \frac{k^2 M}{R} \sum \cos\left(\omega t - kR - \frac{ky_i^2}{2R}\right). \quad (8.64)$$

В § 6 мы решили задачу о *сплошном* излучателе, опираясь на решение задачи о *дискретной* решетке. Здесь мы поступим наоборот: мы решим задачу о дискретной решетке, сведя ее (приближенно) к задаче о сплошном излучателе. Математически это будет выражаться в том, что сумму (8.64) мы заменим (приближенно) интегралом.

Разобьем цепочку на участки  $y_i, y_i + \Delta y$ , достаточно малые, чтобы можно было считать фазы колебаний, приходящих от вибраторов каждого участка, одинаковыми и вместе с тем содержащими большое число вибраторов (эти требования совместимы ввиду малости  $d_y$ ). Тогда (8.64) можно переписать в таком виде:

$$E = \frac{k^2 M}{R} \sum n_y \Delta y \cos \left( \omega t - kR - \frac{ky_i^2}{2R} \right), \quad (8.65)$$

где  $n_y \Delta y = \Delta y / d_y$  — число вибраторов на отрезке  $\Delta y$ ; сумма берется по всем участкам. Сумму можно приближенно заменить интегралом

$$E = \frac{k^2 M n_y}{R} \int_{y'}^{y''} \cos \left( \omega t - kR - \frac{ky^2}{2R} \right) dy, \quad (8.66)$$

где  $y', y''$  — координаты концов цепочки. Если

$$-y' \gg \sqrt{R\lambda}, \quad y'' \gg \sqrt{R\lambda}, \quad (8.67)$$

что мы здесь будем предполагать (рассмотрения этого случая достаточно для цели, указанной в п. 1), то имеем приближенно:

$$E = \frac{Mk^2 n_y}{R} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \left( \omega t - kR - \frac{ky^2}{2R} \right) dy \quad (8.68)$$

или, воспользовавшись результатами § 7, п. 5,

$$E = Mk^2 n_y \sqrt{\frac{\lambda}{R}} \cos \left( \omega t - kR - \frac{\pi}{4} \right) \quad (8.69)$$

(цилиндрическая волна).

**3. Суммирование по цепочкам.** Поля от всех цепочек (при сделанном в п. 2 приближении) коллинеарны друг другу и оси  $y$ . Величина результирующего поля от всех цепочек (т. е. от нашей двумерной решетки)

$$E = Mk^2 n_y \sqrt{\lambda} \sum \frac{1}{\sqrt{R_i}} \cos \left( \omega t - kR_i - \frac{\pi}{4} \right), \quad (8.70)$$

где  $R_i$  — расстояние от  $i$ -й цепочки до основания  $O'$  перпендикуляра, опущенного из  $P$  на плоскость решетки.

Подобно тому как это делалось в § 7, мы заменим  $R_i$  через  $z$  ( $z$  — расстояние точки наблюдения от плоскости решетки) в амплитудном множителе и через  $z + x_i^2 / (2z)$  под знаком косинуса ( $x_i$  — абсцисса  $i$ -й цепочки при начале координат  $O'$ ). Кроме того, здесь также мы заменим (приближенно) сумму интегралом. Пусть на участке  $x_i, x_i + \Delta x$  содержится  $n_x \Delta x$  цепочек ( $n_x = 1/d_x$ ). Тогда, поступая так же, как при переходе от (8.65) к (8.66), получим приближенно:

$$E = k^2 M n_x n_y \sqrt{\frac{\lambda}{z}} \int_{x'}^{x''} \cos \left( \omega t - kz - \frac{\pi}{4} - \frac{kx^2}{2z} \right) dz, \quad (8.71)$$

где  $x', x''$  — координаты краев решетки. Пусть

$$-x' \gg \sqrt{z\lambda}, \quad x'' \gg \sqrt{z\lambda}. \quad (8.72)$$

Тогда (приближенно)

$$E = k^2 M n_x n_y \sqrt{\frac{\lambda}{z}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \left( \omega t - kz - \frac{\pi}{4} - \frac{kx^2}{2z} \right) dz \quad (8.73)$$

или на основании результатов § 7, п. 6

$$E = 2\pi k M n_x n_y \cos \left( \omega t - kz - \frac{\pi}{2} \right). \quad (8.74)$$

Формула (8.74) описывает плоскую волну, амплитуда которой пропорциональна амплитуде электрического момента каждого вибратора и поверхностной плотности вибраторов (числу вибраторов  $n_x n_y$  на единицу площади решетки), фаза  $E$  в точке, находящейся на расстоянии  $z$  от решетки, отстает от фазы электрических моментов вибраторов (мы ее взяли за нуль) на величину  $kz + \pi/2$ . Как мы увидим, наличие здесь слагаемого  $\pi/2$  имеет существенное значение.

### § 9. Механизм отражения, преломления и дисперсии электромагнитных волн

**1. Предварительные замечания.** В гл. VII, § 8 мы рассматривали явления отражения, преломления, дисперсии электромагнитных волн феноменологически, т. е. не вдаваясь в «механизм» взаимодействия электромагнитных волн с частицами вещества, а характеризуя вещество «в целом» некоторым параметром — показателем преломления  $n$ . Пользуясь результатами § 8, мы сможем рассмотреть отражение и преломление электромагнитных волн (в частности, света) совсем по-другому, раскрыть («механизм» этих явлений). Заключается он в общих чертах в следующем\*). (Будем говорить для наглядности о видимом свете).

Волна, посылаемая источником света, — назовем ее *первичной волной* — вызывает, попадая на какое-нибудь тело, вынужденные колебания содержащихся в нем электронов. Эти электроны, колеблясь, становятся источниками новых световых волн — мы будем называть их *вторичными волнами*. Внутри и вне рассматриваемого тела имеет место суперпозиция первичной и вторичной световых волн.

Появление вторичных волн можно назвать рассеянием света на электронах. Это явление аналогично до известной степени рассеянию волн на поверхности воды препятствием (рис. 157).

Важно подчеркнуть, что все многообразие картин, которое мы воспринимаем нашими глазами, все видимые нами окраски и очертания предметов охватываются (если говорить о физической — не о физиологической — стороне процессов) следующей единой схемой: электроны светящихся тел (прежде всего, Солнца) испускают *первичные* электромагнитные волны; под действием этих волн электроны остальных тел испускают *вторичные* электромагнитные волны; на сетчатке глаза происходит *суперпозиция* первичных и вторичных волн.

Речь будет идти дальше о таких условиях эксперимента, когда первичную волну можно считать синусоидальной. В этом случае вторичные волны — синусоидальные волны той же частоты, что и первичная. Пусть рассматриваемое (прозрачное) тело имеет вид плоско-параллельной

\*) Все изложение здесь строится на основе *классической* электронной теории. Ряд явлений, относящихся к рассматриваемому кругу вопросов, может объяснить только *квантовая* теория.

пластинки. Тогда с той стороны пластинки, где находится источник света, вследствие суперпозиции вторичных волн возникает *отраженная* волна, а с другой стороны вследствие суперпозиции вторичных волн с первичной волной — *преломленная* волна.

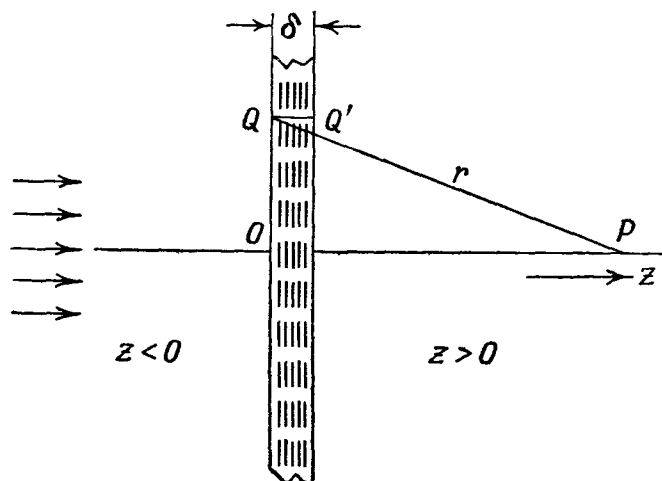


Рис. 319 К вычислению результирующей вторичной волны от оптически однородной тонкой пластинки.

Далее следует конкретный разбор образования отраженной и преломленной волны. Для простоты считается, что свет падает на пластинку нормально.

Размер атомов порядка  $10^{-8}$  см. Расстояния между соседними атомами в твердом теле того же порядка. Длина волны видимого света превосходит эти величины в тысячи раз (для зеленого света  $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$  см).

Пока не будет оговорено обратное, мы будем считать рассматриваемые тела *оптически однородными*, т. е. такими, что параллелепипеды  $\Delta x \Delta y \Delta z$ , где

$$d \ll \Delta x \ll \lambda, \quad d \ll \Delta y \ll \lambda, \quad d \ll \Delta z \ll \lambda$$

( $d$  — среднее расстояние между атомами), содержат одинаковое число атомов.

2. **Очень тонкая плоско-параллельная пластинка.** Пусть толщина пластинки  $\delta$  (рис. 319) мала по сравнению с длиной волны. Тогда можно считать, что во всей толще пластинки первичная волна имеет одинаковую фазу, а следовательно, вынужденные колебания электронов синфазны. Можно пренебречь, далее, разностью расстояний  $r$  до точки наблюдения  $P$  от атомов (например,  $Q, Q'$ ), находящихся на одной и той же нормали к пластинке. Если  $N$  — число рассеивающих электронов на единицу объема, число их в параллелепипеде  $\Delta x \Delta y \delta$  равно  $N \Delta x \Delta y \delta$ , и согласно только что сказанному для  $\delta \ll \lambda$ , можно считать при сложении приходящих от них вторичных волн, что все они находятся в плоскости  $z = 0$ .

Сделаем сначала простейшее предположение: возникающие под действием первичной волны

$$E^I = A_0 \cos(\omega t - kz) \quad (8.75)$$

электрические моменты отдельных атомов имеют вид

$$p = \beta A_0 \cos \omega t = M \cos \omega t,$$

где  $\beta$  — постоянная (поляризуемость атома).

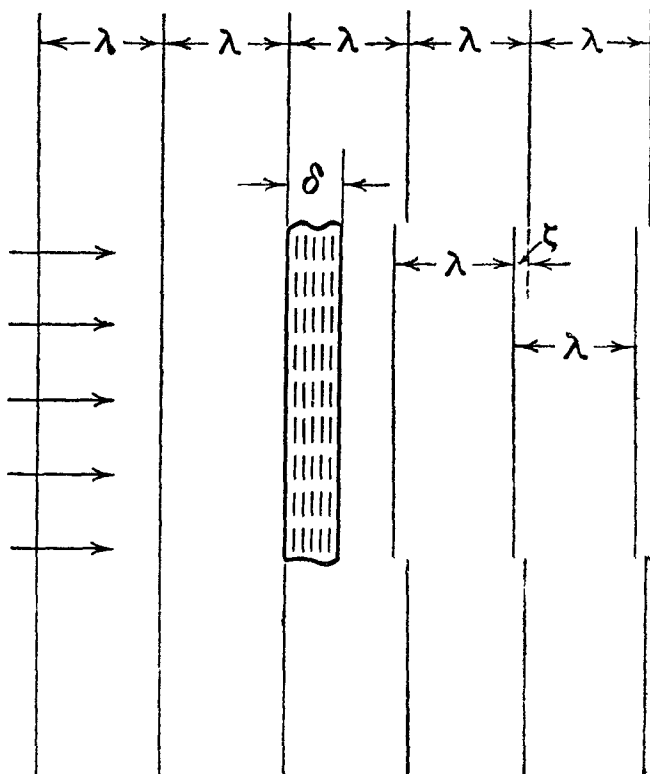


Рис. 320. Поверхности равной фазы волны, распространяющейся в сторону возрастающих  $z$ . «Задержка» фронта  $\zeta = \varphi/k = 2\pi\beta N\delta$ .

$$(8.76)$$

Электроны, колеблющиеся в соответствии с (8.75), образуют сложный излучатель (вернее «переизлучатель») уже рассмотренного нами типа (размеры излучателей и расстояние между ними малы по сравнению с длиной волны). Нахождение суммарной вторичной волны сводится к повторению вычислений § 8. Мы можем написать на основании (8.74), заменив  $M$  через  $\beta A_0$  и  $n_x n_y$  через  $N\delta$ :

$$E^{II} = 2\pi k \beta A_0 N \delta \cos \left( \omega t \mp kz - \frac{\pi}{2} \right). \quad (8.77)$$

Нижний знак относится к полупространству *левее* пластинки ( $z < 0$ ). Он указывает, что в этом полупространстве существует плоская волна, распространяющаяся навстречу падающей, т. е. *отраженная* волна. Верхний знак соответствует в формуле (8.77) полупространству  $z > 0$ . Первичная и результирующая вторичная волны распространяются здесь в *одном* направлении, но вторичная волна запаздывает по фазе на  $\pi/2$  по отношению к первичной. Имеем при  $z > 0$  для суммарной волны ( $E^I, E^{II}$  коллинеарны)

$$E = E^I + E^{II} = A_0 \cos(\omega t - kz) + 2\pi k \beta A_0 N \delta \cos \left( \omega t - kz - \frac{\pi}{2} \right) \quad (8.78)$$

или

$$E = A \cos(\omega t - kz - \varphi), \quad (8.79)$$

где

$$\operatorname{tg} \varphi = 2\pi k \beta N \delta$$

или, считая эту величину малой,

$$\varphi = 2\pi k \beta N \delta. \quad (8.80)$$

Согласно феноменологической теории, как нетрудно подсчитать на основании гл. VII, § 8, световая волна, выходящая из пластинки, имеет вид

$$E = A \cos [\omega t - nk\delta - k(z - \delta)] = A \cos [\omega t - kz - (n - 1)k\delta]. \quad (8.81)$$

Таким образом, мы пришли к тому же результату, который дают эксперимент и феноменологическая теория: *плоско-параллельная пластинка, параллельная фронту падающей волны, изменяет фазу света, прошедшего через нее, на некоторую постоянную величину, пропорциональную толщине пластинки* (рис. 320). Сравнивая (8.79), (8.80) с (8.81), мы получаем расшифровку феноменологической величины  $n$ :

$$n = 1 + 2\pi\beta N; \quad (8.82)$$

показатель преломления отличается от единицы на величину, пропорциональную поляризуемости отдельного атома и числу атомов в единице объема. Более точная теория, учитывающая переизлучение не только первичного поля (8.75), приводит к соотношению

$$n = \sqrt{1 + 4\pi\beta N}. \quad (8.82a)$$

Формула (8.82) получается отсюда как приближение, пригодное при  $4\pi\beta N \ll 1$ .

**3. Преломление в клине.** В случае ступенчатой пластинки (рис. 321, а) геометрическое место точек, где фаза  $kz + \varphi$  результирующей прошедшей волны  $E^I + E^{II}$  имеет одинаковое значение, т. е. поверхность

$$z + 2\pi N \beta \delta = \text{const} \quad (8.83)$$

( $\delta$  — толщина вещества, пройденного первичной волной) — теперь функция от  $y$ , имеет ступенчатый вид (мы отвлекаемся от явлений «на стыке» ступенек). Отсюда легко перейти к клину (рис. 321, б). Здесь  $\delta = ay$

( $a$ —постоянная) и поверхность (8.83) есть плоскость, образующая угол  $2\pi N\beta a$  (мы его считаем малым) с фронтом первичной волны. Здесь раскрывается

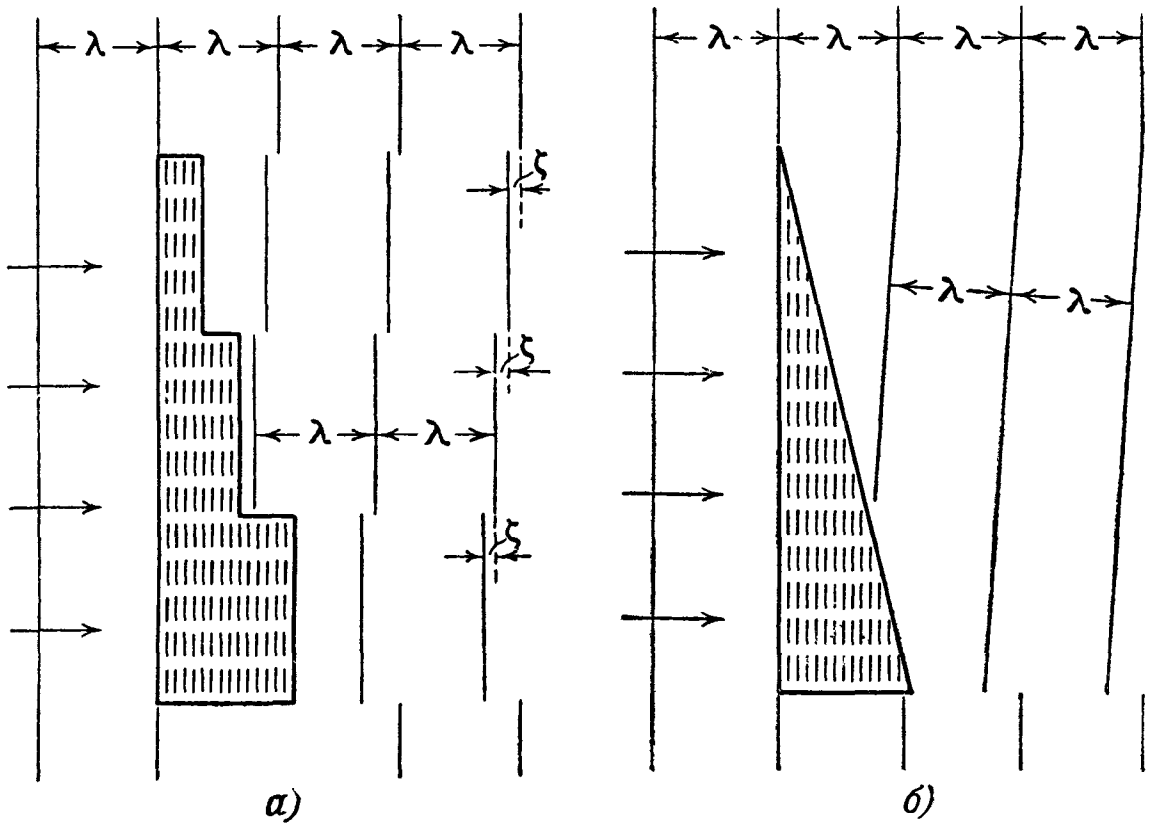


Рис. 321. Поверхности равной фазы волны, прошедшей:  $a$ —через ступенчатую пластинку,  $b$ —через призму (клин). Там, где показаны разрывы поверхностей равной фазы, в действительности имеют место дифракционные явления (типа описанных в гл. IX).

механизм преломления в его обычном понимании — изменения направления распространения света.

**4. Отражение от толстой пластинки.** Разбивая толстую пластинку (рис. 322) на слои толщины  $\Delta z \ll \lambda$ , мы можем представить отраженную волну как сумму вторичных волн, посылаемых в направлении убывающих  $z$  этими слоями.

Поле первичной волны имеет в слое  $z_i$ ,  $z_i + \Delta z$  фазу  $kz_i$ , следовательно, электроны этого слоя посылают навстречу первичной волне вторичную волну, описываемую выражением

$$2\pi k\beta A_0 N \Delta z_i \cos \left[ \omega t - kz_i + k(z - z_i) - \frac{\pi}{2} \right]. \quad (8.84)$$

Следовательно, результирующая вторичная волна в области  $z < 0$  имеет вид (суммируем по всем слоям)

$$E^{II} = 2\pi k\beta A_0 N \sum \Delta z_i \cos \left( \omega t + kz - 2kz_i - \frac{\pi}{2} \right)$$

или, перейдя к записи с помощью интеграла,

$$E^{II} = 2\pi k\beta A_0 N \int_0^{\delta} \cos \left( \omega t + kz - 2kz' - \frac{\pi}{2} \right) dz'. \quad (8.85)$$

Интегрируя, получаем:

$$\begin{aligned} E^{II} &= -\pi\beta A_0 N \left[ \sin \left( \omega t + kz - 2k\delta - \frac{\pi}{2} \right) - \sin \left( \omega t + kz - \frac{\pi}{2} \right) \right] = \\ &= 2\pi\beta A_0 N \sin k\delta \sin (\omega t + kz - k\delta). \end{aligned} \quad (8.86)$$



$A_0$  имеет здесь тот же смысл, что  $A_1$  в гл. VII, § 8. На основании (8.82) формула (8.86) совпадает с (7.64).

Таким образом, рассматривая отраженную волну как результат суперпозиции вторичных волн, идущих по всей толщине пластинки, мы пришли к такому же результату, как при феноменологическом рассмотрении, когда отраженная волна рассматривалась как суперпозиция двух волн, образующихся на границах раздела.

**5. Отражение от полупространства.** Покажем, что рассмотрение электронного механизма отражения приводит и для полупространства к тому же результату, что и феноменологическая теория. Для того чтобы можно было пренебречь влиянием второй границы пластинки (рассматривать ее как полупространство), необходимо

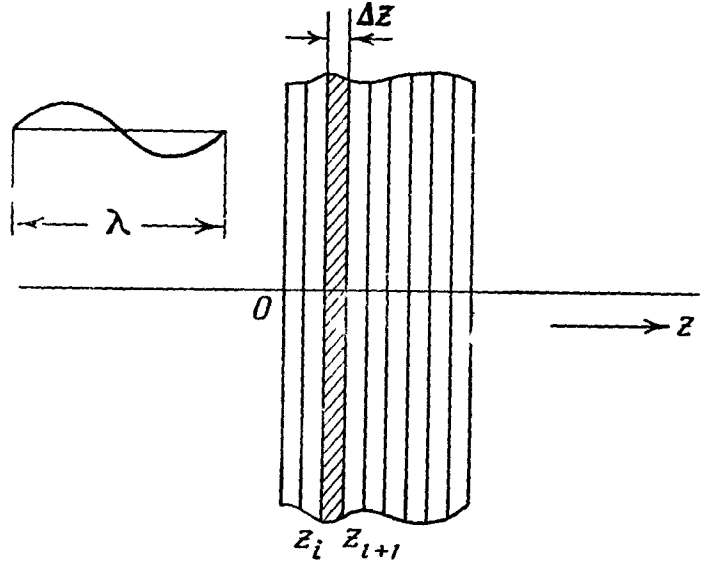


Рис. 322. Разбиение пластинки на тонкие слои.

учитывать поглощение света в ней (ср. гл. VII, § 8). Будем считать поэтому, что первичная волна очень медленно ослабевает по мере продвижения в глубь пластинки:

$$E^I = A_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - kz) \tag{8.87}$$

(ср. гл. VI, § 10). Теперь для волны, «переизлучаемой» назад слоем  $z_i, z_i + \Delta z_i$ , имеем вместо (8.84) выражение

$$2\pi k \beta A_0 N \Delta z_i e^{-2\alpha z_i} \cos\left[\omega t - kz_i + k(z - z_i) - \frac{\pi}{2}\right], \tag{8.88}$$

откуда, переходя к интегралу так же, как в п. 4,

$$E^{II} = 2\pi k \beta A_0 N \int_0^\infty e^{-2\alpha z'} \cos\left(\omega t + kz - 2kz' - \frac{\pi}{2}\right) dz'. \tag{8.89}$$

Интеграл легко вычислить\*), и мы получаем (приблизительно, учитывая, что  $\alpha \ll k$ ):

$$E^{II} = -\pi \beta A_0 N \cos(\omega t - kz) = -\frac{\Delta n}{2} A_0 \cos(\omega t - kz) \tag{8.90}$$

в согласии с формулой (7.46) при  $n_1 = 1, n_2 - 1 \ll 1$ .

\*) Интегрируя по частям, получаем:

$$\int e^{-2\alpha z'} \cos(2kz' - \gamma) dz' = \frac{e^{-2\alpha z'}}{4\alpha^2 + 4k^2} [2k \sin(2kz' - \gamma) - 2\alpha \cos(2kz' - \gamma)] + \text{const}$$

или приближенно, так как  $\alpha \ll k$ ,

$$\int e^{-2\alpha z'} \cos(2kz' - \gamma) dz' = \frac{e^{-2\alpha z'}}{2k} \sin(2kz' - \gamma),$$

$$\int_0^\infty e^{-2\alpha z'} \cos\left(2kz' - \omega t - kz + \frac{\pi}{2}\right) dz' = -\frac{1}{2k} \cos(\omega t - kz)$$

Легко дать наглядное толкование полученного результата, построив векторную диаграмму интеграла, входящего в (8.89).

Этот интеграл — предел суммы колебаний (8.88), фазы которых образуют арифметическую прогрессию, а амплитуды убывают в геометрической прогрессии. Его векторная диаграмма — скручивающаяся с ростом  $z'$  спираль, полувитки которой соответствуют слоям толщины  $\lambda/4$ . Длина первого полувитка равна сумме амплитуд всех колебаний (8.88), посылаемых слоем  $0 \leq z' \leq \lambda/4$ . Заменяя для этого слоя ввиду малости  $\alpha$  величину  $e^{-\alpha z'}$  единицей, получаем для длины  $s$  этого полувитка приближенное выражение

$$s = 2\pi k\beta A_0 N \frac{\lambda}{4} = \pi^2 \beta A_0 N.$$

Результирующая отраженная волна имеет амплитуду, равную радиусу первого полувитка, т. е.  $s/\pi = \pi\beta A_0 N = \frac{\Delta n}{2} A_0$ , что совпадает с (8.90).

6. Дисперсия. Дисперсия получает непринужденное объяснение с точки зрения классической модели (гл. VII, § 7), согласно которой электрон в атоме ведет себя, как гармонический осциллятор. Когда на электрон действует электрическое поле  $E = A_0 \cos \omega t$ , возникают вынужденные колебания (рис. 323), его смещение  $l$  подчиняется уравнению

$$m\ddot{l} = -Kl - eA_0 \cos \omega t,$$

где  $m$  — масса,  $(-e)$  — заряд электрона,  $K$  — «жесткость» связей (затуханием мы здесь пренебрегаем), откуда по умножении на  $-e$  получаем:

$$\ddot{p} + \omega_0^2 p = \frac{e^2}{m} A_0 \cos \omega t, \quad (8.91)$$

где

$$p = -el, \quad \omega_0^2 = \frac{K}{m} \quad (8.92)$$

( $\omega_0$  — собственная частота колебаний осциллятора). При установившемся режиме, который наступает вследствие наличия неучтенного в (8.91) затухания, имеют место (ср. гл. III, § 6) колебания с частотой внешней силы

$$p = \frac{\frac{e^2}{m} A_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t. \quad (8.93)$$

Сравнивая (8.93) с (8.76), получаем:

$$\beta = \frac{\frac{e^2}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2}; \quad (8.94)$$

поляризуемость зависит от частоты, зависимость изображается резонансной кривой (рис. 324) (ср. рис. 96).

При  $\omega = 0$  (электростатическое поле) или приближенно при  $\omega \ll \omega_0$  имеем:

$$\beta = \frac{\frac{e^2}{m}}{\omega_0^2} = \frac{e^2}{K}.$$

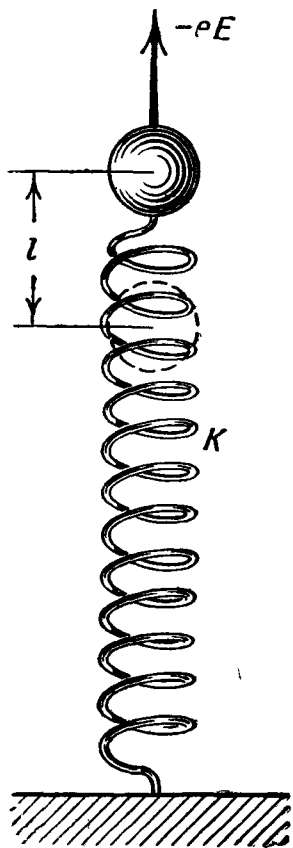


Рис. 323. Грубая механическая модель вынужденных колебаний электрона под действием световой волны; пунктиром показано положение равновесия.

С изменением частоты света  $\omega$  поляризуемость изменяется, а следовательно, согласно (8.82) изменяется также показатель преломления: это и есть явление дисперсии.

Построим на основании (8.82), (8.94) кривую зависимости  $n$  от частоты (рис. 325). Пока  $\omega < \omega_0$   $n$  растет с ростом  $\omega$ . При  $\omega > \omega_0$  имеется область отрицательных  $n$ , не имеющая непосредственного физического смысла. Мы скажем о ней несколько слов ниже. Затем  $n$  становится снова положительным и растет с ростом  $\omega$ , но при этом  $n < 1$ , так как  $\beta < 0$ . Здесь волна, выходящая из пластинки, опережает по фазе волну, идущую мимо пластинки, фазовая скорость в пластинке больше  $c$ .

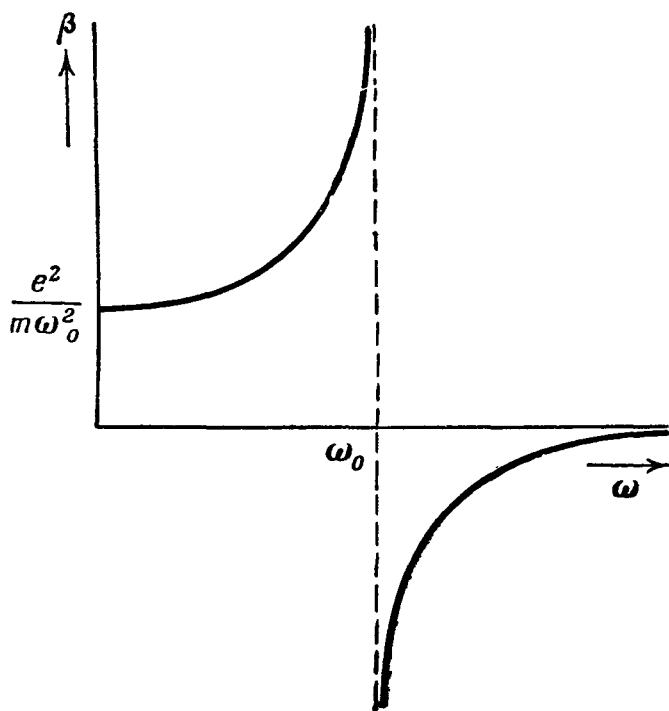


Рис. 324. Зависимость поляризуемости от частоты падающего света.

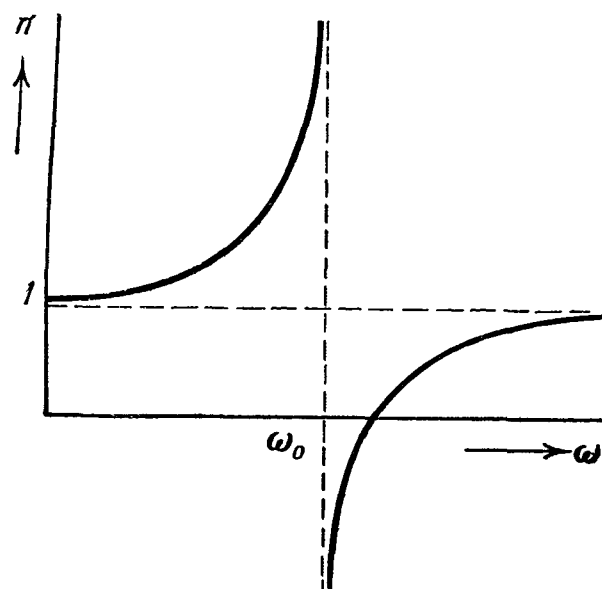


Рис. 325. Зависимость показателя преломления от частоты, построенная по формулам (8.82), (8.94).

Физический смысл этого результата очевиден: при  $\omega < \omega_0$  электроны колеблются *в фазе* с внешней силой ( $\beta > 0$ ) (ср. рис. 97, б) и результирующая вторичная волна *отстает* по фазе на  $\pi/2$  от первичной волны. После перехода через резонанс ( $\omega > \omega_0$ ) электроны колеблются в *противофазе* по отношению к внешней силе (ср. рис. 97, б), амплитуда результирующей вторичной волны (8.77) меняет знак; эта волна *опережает* по фазе на  $\pi/2$  первичную волну.

При  $\omega \gg \omega_0$  имеем приближенно  $n = 1$ , преломление отсутствует. Это соответствует рентгеновскому излучению, которое почти не преломляется веществом. Но здесь уже нельзя считать расстояния между соседними атомами малыми, по сравнению с  $\lambda$  (ср. § 10).

Все наше рассмотрение теряет смысл вблизи резонанса, так как здесь 1) вследствие большой амплитуды излучаемой каждым электроном вторичной волны нельзя пренебрегать, как мы это делали, взаимодействием между отдельными электронами, 2) существенную роль начинает играть (как всегда вблизи резонанса) затухание осцилляторов (вследствие излучения, соударений, ср. гл. X), не позволяющее амплитуде неограниченно возрастать при  $\omega \rightarrow \omega_0$ .

Вследствие наличия затухания при  $\omega$ , близких к  $\omega_0$ , имеет место сильное поглощение энергии волны, проникающей в рассматриваемое тело

(в интервале частот  $\Delta\omega$  порядка ширины резонансной кривой электронов).

Не приводя полного разбора задачи о явлениях вблизи резонанса, укажем основной результат (рис. 326): вблизи резонанса имеет место сильное поглощение (кривая  $b$ ) и уменьшение показателя преломления с ростом частоты (с уменьшением  $\lambda$ ) (кривая  $a$ ); последнее явление называется аномальной дисперсией. Результат, показанный на рис. 326, находится в полном согласии с опытом. Особенно наглядно это показывают опыты Д. С. Рождественского, в которых получают искривленные интерференционные полосы, вычерчивающие в определенном масштабе зависимость величины  $(n-1)$  от частоты света. Опыты Рождественского подробно описываются в курсах оптики.

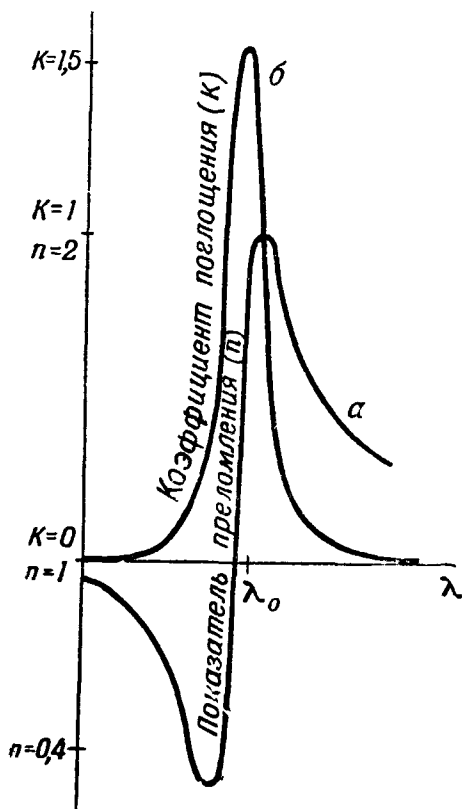


Рис. 326. Зависимости:  $a$ —показателя преломления  $n$ ,  $b$ —коэффициента поглощения от длины волны, вычисленные с учетом затухания осцилляторов ( $n$  и  $k$  даны в относительных единицах).

отношению к полю). Для показателя преломления получаем, пойма под  $N_e^2$ , число свободных электронов в единице объема,

$$n = 1 - \frac{2\pi N_e e^2}{m\omega^2},$$

откуда

$$u = \frac{c}{n} = \frac{c}{1 - \frac{2\pi N_e e^2}{m\omega^2}}.$$

Фазовая скорость радиоволн в ионосфере *больше* скорости света в пустоте. Она убывает с ростом  $\omega$  и при  $\omega \rightarrow \infty$  стремится к  $c$ .

Для групповой скорости легко получить, пользуясь формулой (5.38),

$$U = \frac{c}{1 + \frac{2\pi N_e e^2}{m\omega^2}}.$$

Групповая скорость, таким образом, *меньше* скорости света в пустоте.

вследствие чего формула для поляризуемости отдельного электрона принимает вид

$$\beta = -\frac{e^2}{m\omega^2}$$

(электрический момент — в противофазе по отношению к полю). Для показателя преломления получаем, пойма под  $N_e^2$ , число свободных электронов в единице объема,

мы имеем дело со *свободными* электронами: здесь

$$K = 0, \quad \omega_0^2 = 0,$$

вследствие чего формула для поляризуемости отдельного электрона принимает вид

$$\beta = -\frac{e^2}{m\omega^2}$$

(электрический момент — в противофазе по отношению к полю). Для показателя преломления получаем, пойма под  $N_e^2$ , число свободных электронов в единице объема,

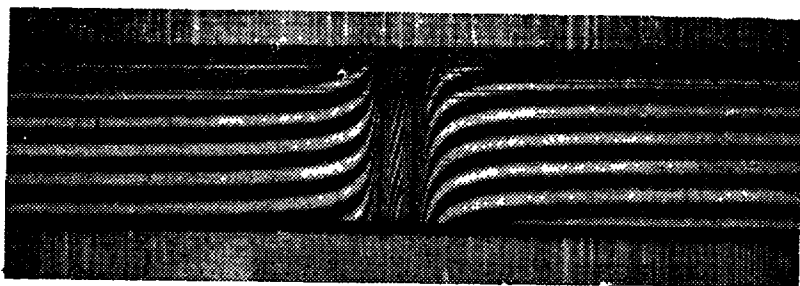


Рис. 327. Одна из картин, полученных методом Д. С. Рождественского.

Вспомним, что вся развитая здесь теория справедлива лишь, если  $n$  мало отличается от 1 (см. п. 2). Более полная теория, справедливая для  $n$ , сколь угодно отличного от 1, приводит для ионосферы к формулам

$$n = \sqrt{1 - \frac{4\pi N e^2}{m \omega^2}},$$

$$u = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{4\pi N e^2}{m \omega^2}}}$$

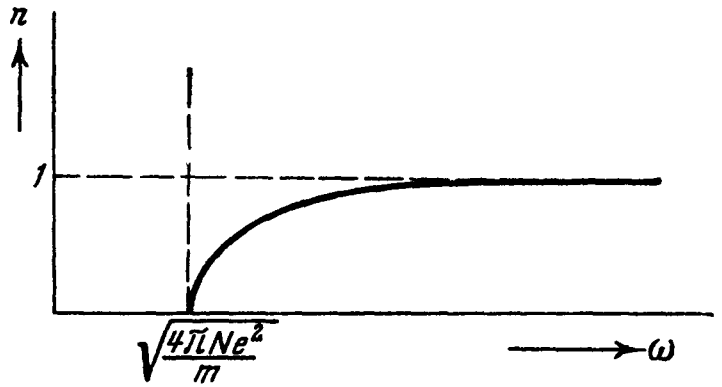


Рис. 328. Зависимость показателя преломления в ионосфере от частоты. При  $\omega^2 < 4\pi N e^2/m$  величина  $n$  — мнимая. Мнимость показателя преломления означает, что волна не распространяется в глубь среды.

(рис. 328). При этом, как показывает вычисление по формуле (5.27), имеет место для всех частот весьма простое соотношение

$$uU = c^2.$$

В случае, когда  $\omega_0^2 \neq 0$  (оптический случай), соотношение между  $u$  и  $U$  носит более сложный характер.

Подробный разбор распространения радиоволн в ионосфере выходит за рамки этой книги\*). Заметим лишь, что при частотах порядка  $10^8$  герц и выше  $n$  настолько близко к 1 даже в слоях с наибольшей ионизацией (с наибольшим  $N$ ), что ионосфера перестает оказывать существенное влияние на распространение электромагнитных волн (ср. сказанное об у. к. в. в гл. VII, § 8).

### § 10. Механизм двойного преломления и вращения плоскости поляризации

1. **Двойное преломление.** Примем, что «жесткость связей», действующих на электрон в атоме, различна по различным направлениям. Пусть собственные колебания электрона описываются уравнениями

$$m\ddot{l}_x + K_x l_x = 0, \quad m\ddot{l}_y + K_y l_y = 0, \quad m\ddot{l}_z + K_z l_z = 0,$$

где  $l_x, l_y, l_z$  — компоненты смещения по осям  $x, y, z$ ;  $K_x, K_y, K_z$  — жесткости по отношению к смещениям в направлении осей  $x, y, z$  (ср. модель рис. 329).

В этом случае вынужденные колебания под действием электрического поля  $E$  описываются уравнениями

$$\begin{aligned} m\ddot{l}_x + K_x l_x &= -eE_x, \\ m\ddot{l}_y + K_y l_y &= -eE_y, \\ m\ddot{l}_z + K_z l_z &= -eE_z. \end{aligned} \tag{8.95}$$

Пусть первичная волна распространяется параллельно оси  $z$  и в ней  $E = E_x$ . Электроны будут колебаться под действием этой волны параллель-

\*) Этому вопросу посвящена огромная журнальная литература и ряд монографий, например, А. Н. Ш у к и н, Физические основы распространения волн в ионосфере, Связьиздат, 1940; В. Л. Г и н з б у р г, Теория распространения радиоволн в ионосфере, Гостехиздат, 1949, [а также часть II книги Я. Л. А л ь п е р т а, В. Л. Г и н з б у р г а и Е. Л. Ф е й н б е р г а, Распространение радиоволн, Гостехиздат, 1953].

но оси  $x$  и, следовательно, в результирующей вторичной волне (ср. § 9)  $E$  будет иметь то же направление, что и в первичной. То же направление будет иметь  $E$  в суперпозиции первичной и результирующей вторичной волн. Отсюда ясно, что волна, в которой  $E = E_x$ , является нормальной волной (ср. гл. VII, § 9). Таким же образом убеждаемся, что волна, распространяющаяся параллельно оси  $z$ , причем  $E = E_y$ , также является нормальной волной.

Для волны, в которой  $E = E_x$ , вещество имеет поляризуемость и показатель преломления, равные соответственно

$$\beta_x = \frac{e^2}{\omega_x^2 - \omega^2}, \quad n_x =$$

$$= 1 + 2\pi N\beta_x \left( \omega_x^2 = \frac{K_x}{m} \right), \quad (8.96)$$

а для световой волны, в которой  $E = E_y$ , поляризуемость и показатель преломления равны соответственно

$$\beta_y = \frac{e^2}{\omega_y^2 - \omega^2}, \quad n_y =$$

$$= 1 + 2\pi N\beta_y \left( \omega_y^2 = \frac{K_y}{m} \right), \quad (8.97)$$

причем, если  $K_x \neq K_y$ ,

$$n_x \neq n_y.$$

Таким образом, получается простое объяснение явлений, описанных в гл. VII, § 9, пп. 1 — 3.

Рис. 329. Грубая механическая модель поведения электронов в анизотропной среде. Частоты собственных колебаний шарика в направлениях  $x$ ,  $y$ ,  $z$  не равны между собой. Если все четыре пружины, расположенные в горизонтальной плоскости, одинаковы, модель соответствует одноосной среде, причем оптическая ось направлена по вертикали.

Пусть  $\omega$  близко к  $\omega_x$  и сильно отличается от  $\omega_y$ . При этом согласно сказанному в § 9, п. 5 будет сильно поглощаться волна  $E = E_x$  и слабо — волна  $E = E_y$  (дихроизм).

2. Радиофизические иллюстрации. На рис. 330 показан набор двумерных решеток из параллельных узких алюминиевых полосок. Их длины подобраны следующим образом:

Номер решетки	Длина полосок
1	$\frac{\lambda}{4}$
2	$\frac{\lambda}{2}$
3	$\frac{3\lambda}{4}$

Количество металла во всех решетках приблизительно одинаково.

Несмотря на то, что  $d_x$ ,  $d_y$  у решеток не малы по сравнению с длиной волны, с помощью аппаратуры, о которой шла речь в гл. VII, § 5, и этих

решеток можно получить явления, поясняющие оптические явления, о которых говорилось в п. 1. Полоски играют при этом по отношению к радиоволнам ту же роль, что и атомы по отношению к свету. При этом

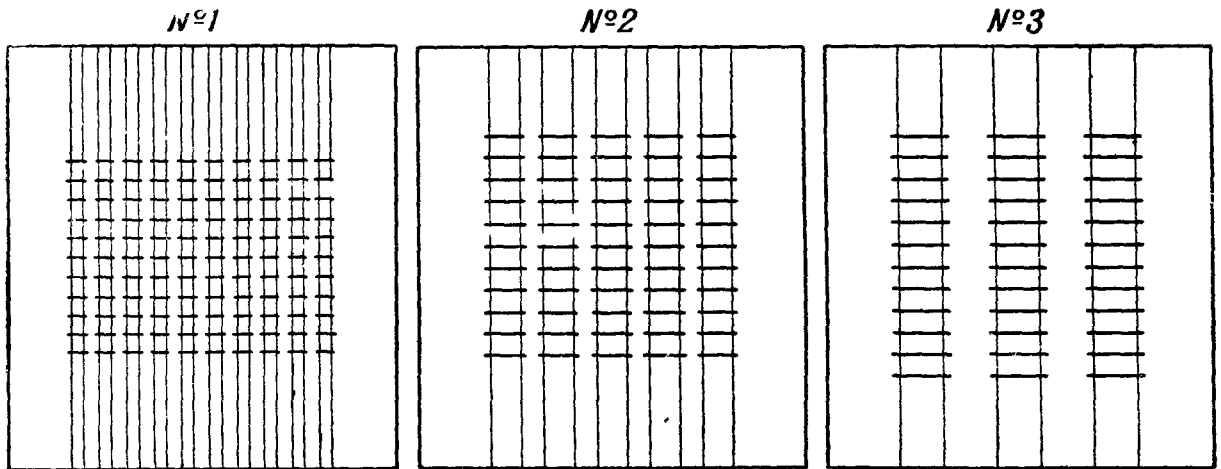


Рис. 330. Двумерные решетки из алюминиевых полосок. Полоски укреплены на резиновых нитях. Рамки сделаны из диэлектрика.

(ср. рис. 243) их поляризуемость гораздо больше для волны, у которой  $E$  параллельно длине полоски, чем для волны, у которой  $E$  перпендикулярно к длине полоски. Поэтому наши {решетки могут служить моделями анизотропного кристалла\*).

а) Поставим передатчик и приемник, как на рис. 242а (вибраторы параллельны), и поместим между ними решетку № 2, ориентируя ее плоскость перпендикулярно к направлению распространения волны, а полоски — параллельно вибраторам (рис. 331, а). Перемещая решетку параллельно самой себе, мы заметим (по громкости звука или по высоте осциллограммы в приемнике), что интенсивность воспринимаемого им колебания поочередно возрастает и убывает; в минимумах звук едва слышен. Расстояния между ближайшими минимумами (а также максимумами) оказываются равными  $\lambda/2$ . Интерпретация очевидна: решетка сильно отражает падающую на нее электромагнитную волну; между решеткой и зеркалом передатчика возникает почти стоячая волна (коэффициент бегучести очень мал), сквозь решетку просачивается за каждый период очень малая доля  $\gamma W$  ( $\gamma \ll 1$ ) энергии  $W$  стоячей волны; при расстояниях передатчик — решетка, отличающихся друг от друга на целое кратное  $\lambda/2$ , имеет место ряд резонансов; при резонансах в стоячих волнах запасается настолько большая энергия  $W$ , что потока энергии  $\gamma \Delta W$  достаточно, чтобы вызвать сильное звучание в приемнике.

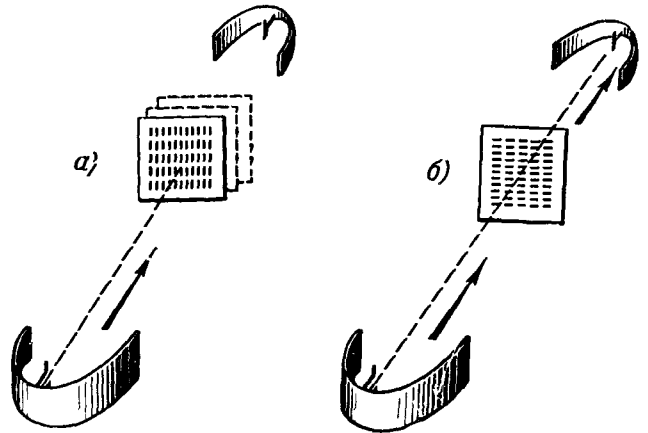


Рис. 331. а — полоски параллельны вибраторам; можно найти такие положения решетки, при которых связь почти прекращается; б — полоски перпендикулярны к вибраторам; решетка не дает заметного ослабления связи.

\*) Мы получили бы модель изотропного вещества, заменив полоски металлическими шариками.

б) Поставим решетку, так же ориентированную, как в опыте а), в положение, при котором она почти полностью прекращает связь между передатчиком и приемником. Повернем теперь решетку на  $90^\circ$  в ее плоскости (рис. 331,б). Связь почти полностью восстанавливается, громкоговоритель звучит почти так же громко, как в отсутствие решетки.

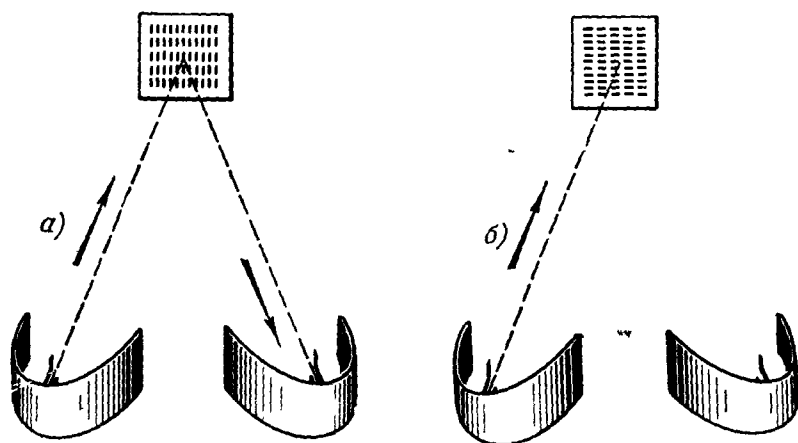


Рис. 332. а—есть сильное отражение; б—нет заметного отражения

в) Расположим передатчик и приемник, как на рис. 240, но вместо металлического листа поставим в положение 2 нашу решетку. Когда полосы параллельны вибраторам передатчика и приемника (рис. 332, а), имеет место сильное отражение; когда они перпендикулярны вибраторам (рис. 332,б), нет заметного отражения.

г) Прделав то же, что в опытах а), б), в), с остальными решетками, мы получим следующий результат: при полосках, параллельных вибраторам, решетка № 1 дает значительно более слабое отражение, чем решетка № 2; решетка № 3 не дает заметного отражения. Это вполне понятно,

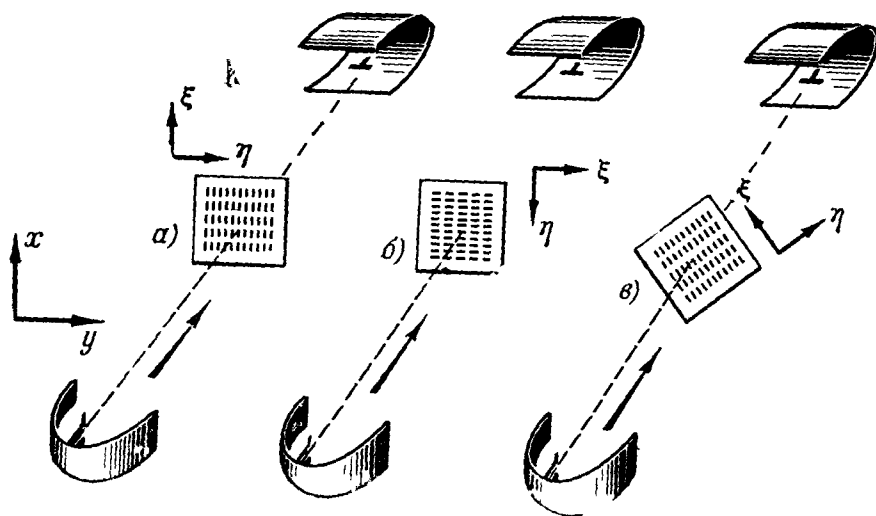


Рис. 333. а и б—связи нет; в—связь есть.

так как полосы решетки № 2 настроены в резонанс на волну нашего передатчика (их длина равна  $\lambda/2$  и поляризуемость гораздо больше, чем для решеток № 1 и 3\*).

д) Расположим передатчик и приемник так, как показано на рис. 242, б. Связи нет. Внесем между передатчиком и приемником решетку № 2, предварительно ориентируя ее полосы вертикально (рис. 333, а). Связи опять нет. Повторим опыт, предварительно ориентируя полосы горизонтально (рис. 333, б). Связи опять нет. Повторим опыт, предварительно

\*) Резонанс металлических полосок применялся во время второй мировой войны для дезориентации радиолокационных станций противника: с самолета сбрасывались в большом количестве металлизированные полоски длины  $\lambda/2$ , где  $\lambda$ —длина волны радиолокационной станции противника. Сильное отражение, отмечавшееся на ее экране, создавало ложное впечатление, что летит большая воздушная эскадра



ориентировав полоски под углом  $45^\circ$ , к вибраторам (рис. 333, в). Теперь связь *есть*, хотя звук значительно слабее, чем когда решетка отсутствовала, но вибраторы передатчика и приемника были ориентированы параллельно.

Полученный результат объясняется следующим образом. Представим вектор  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_x$  волны, падающей на решетку, в виде

$$\mathbf{E}_x = \mathbf{E}_\xi + \mathbf{E}_\eta, \quad (8.98)$$

где ось  $\xi$  ориентирована по длине,  $\eta$  — по ширине полосок, причем (рис. 334)

$$\mathbf{E}_\xi = \mathbf{E}_x \cos \psi, \quad \mathbf{E}_\eta = \mathbf{E}_x \sin \psi, \quad (8.99)$$

где  $\psi$  — угол между осью полоски и осью вибратора передатчика. Здесь можно считать, что через решетку проходит только компонента  $\mathbf{E}_\eta$ , а компонента  $\mathbf{E}_\xi$  полностью задерживается (отражается и поглощается).

На вибратор приемника действует только компонента электрического поля волны, прошедшей сквозь решетку, параллельная его оси, т. е.  $\mathbf{E}'_y$ , причем

$$\mathbf{E}'_y = \mathbf{E}_\eta \cos \psi = \mathbf{E}_x \sin \psi \cos \psi. \quad (8.100)$$

Когда полоски параллельны вибратору передатчика,  $\sin \psi = 0$  и, следовательно,  $\mathbf{E}'_y = 0$ . Когда полоски параллельны вибратору приемника,  $\cos \psi = 0$  и снова  $\mathbf{E}'_y = 0$ . Когда же  $\psi = \pi/4$  или  $3\pi/4$ , имеем:

$$\mathbf{E}'_y = \pm \frac{\mathbf{E}_x}{2},$$

интенсивность колебания в вибраторе приемника равна четверти интенсивности при параллельных вибраторах передатчика и приемника (в отсутствие решетки).

Легко осуществить оптический аналог опыта д). При расположении поляроидов, показанном на рис. 179, б (поляроиды скрещены, свет не про-

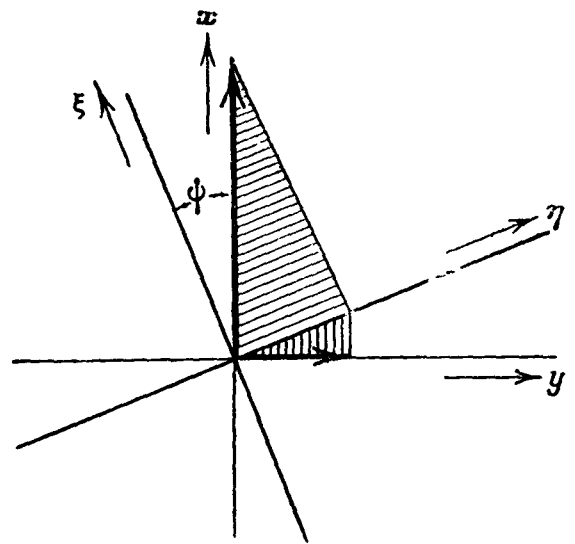


Рис. 334. К выводу формулы (8.99). Жирная стрелка изображает  $\mathbf{E}_x$ .

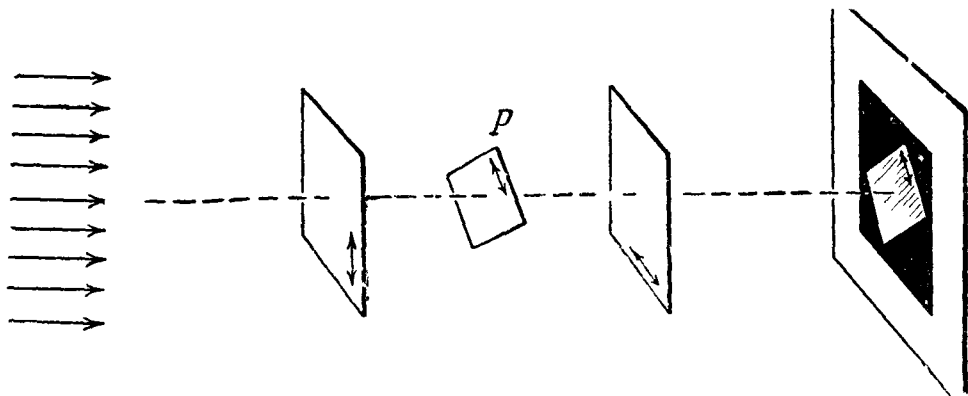


Рис. 335. Поляриод  $P$  вызывает при косо́й ориентации просветление на экране.

ходит), поместим между ними третий поляриод. Свет не проходит по-прежнему, если его ось параллельна оси одного из первых двух поляриодов. В остальных случаях на экране наблюдается просветление. Интенсивность света на экране максимальна, если ось третьего поляриода образует угол  $45^\circ$  с осями первых двух (рис. 335).

е) Расположим передатчик и приемник, как на рис. 336 (вibrator передатчика вертикален, vibrator приемника — горизонтален). Решетка № 2 не дает заметного отражения, если ее полосы расположены вертикально или горизонтально, но дает заметное отражение при других ориентациях. Отражение сильнее всего выражено, когда полосы расположены под углом  $45^\circ$  к вертикали. Толкование опыта аналогично толкованию опыта д) с тем отличием, что в волне, попадающей в приемник (отраженной от решетки), вектор  $E$  колеблется *параллельно* длине полосок.

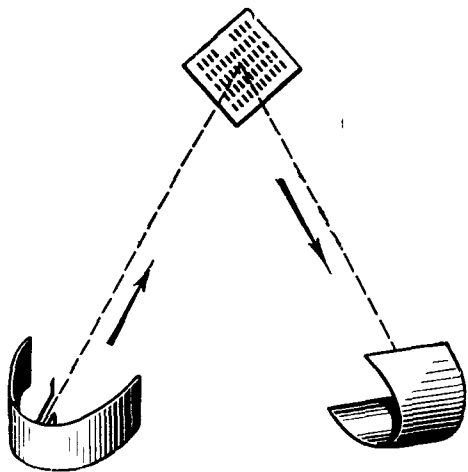


Рис. 336. Положение решетки, при котором интенсивность отраженной волны максимальна.

3. Вращение плоскости поляризации. Объяснение «механизма» этого явления сводится к построению модели среды, для которой нормальными волнами являются только волны, поляризованные по кругу (ср. гл. VII, § 9). Мы здесь приведем простейшую модель, удовлетворяющую поставленным требованиям.

Рассмотрим вещество, молекулы которого изображаются схемой (механической моделью) рис. 337: здесь существенно, прежде всего, что молекулы *не* обладают зеркальной симметрией, т. е. не могут быть совмещены со своим зеркальным изображением (рис. 338).

Существенно, далее, что отдельные части молекулы (*радикалы* по химической терминологии) неизотропны в оптическом отношении: радикал  $P$  имеет конечную поляризуемость в направлении оси  $\xi$  (система координат  $\xi, \eta, \zeta$  жестко связана с молекулой) и поляризуемости, равные нулю, в направлениях осей  $\eta, \zeta$ ; радикал  $Q$  имеет поляризуемость, отличную от нуля, только в направлении оси  $\eta$ . Существенно, наконец, что оптические электроны радикалов  $P, Q$  не могут смещаться независимо что изображено на модели косою пружиной).

Примем для простоты, что жесткости «пружин»  $P, Q$  совершенно одинаковы. Тогда поляризуемость радикала  $P$  в направлении  $\xi$  равна поляризуемости радикала  $Q$  в направлении  $\eta$ . Эти поляризуемости мы обозначим  $\beta$ .

Рассмотрим теперь пластинку (двумерную решетку), состоящую из пар молекул рассматриваемого типа, расположенных, как показано на рис. 339. Пусть на пластинку падает первичная волна (поляризованная по кругу влево)

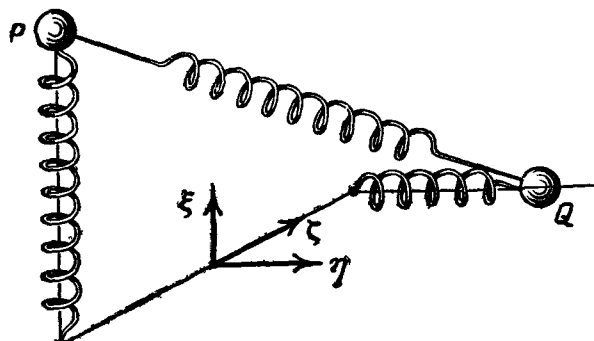


Рис. 337. Простейшая механическая модель молекулы вещества, вращающего плоскость поляризации. Шарики изображают электроны, содержащиеся в радикалах  $P, Q$ . Оси  $\xi, \eta, \zeta$  жестко связаны с молекулой.

$$\left. \begin{aligned} E_x^{(\pi)} &= A \cos(\omega t - kz), \\ E_y^{(\pi)} &= A \sin(\omega t - kz). \end{aligned} \right\} \quad (8.101)$$

Для обеих молекул каждой пары  $E_x = E_z$ , поэтому компонента  $E_x^{(\pi)}$  вызывает появление в радикалах  $P_1, P_2$  моментов, направленных

по оси  $x$

$$\beta A \cos \omega t, \beta A \cos (\omega t - kl),$$

где  $\beta$  — постоянная. Мы здесь учитываем — и, как будет видно из дальнейшего, это существенно — изменение фазы первичной волны на протяжении расстояния  $l$  между радикалами  $P, Q$ . Согласно принятой модели (вспомним пружину  $PQ$ ) в радикалах  $Q_1, Q_2$  возникают моменты, направленные по оси  $y$ :

$$\gamma A \cos \omega t, -\gamma A \cos (\omega t - kl),$$

где  $\gamma$  — постоянная. Отличие в знаках перед этими выражениями вызвано тем, что направление оси  $\eta_1$

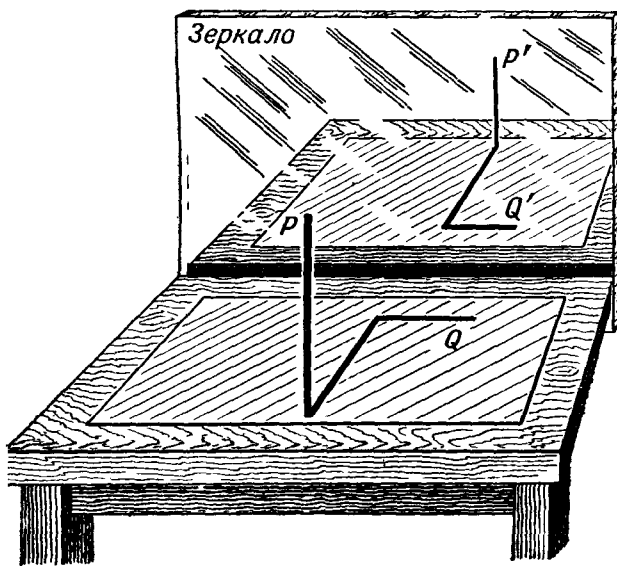


Рис. 338. Молекула  $PQ$  не может быть совмещена со своим зеркальным изображением  $P'Q'$ . (Советуем читателю убедиться в этом, согнув из проволоки модели молекул  $PQ$  и  $P'Q'$ .)

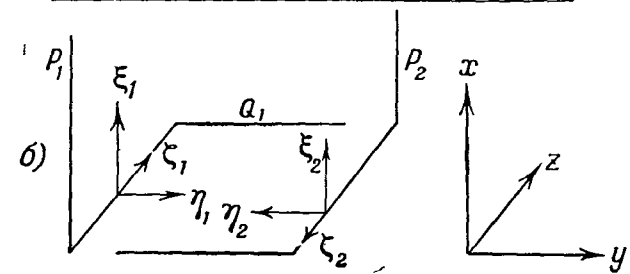
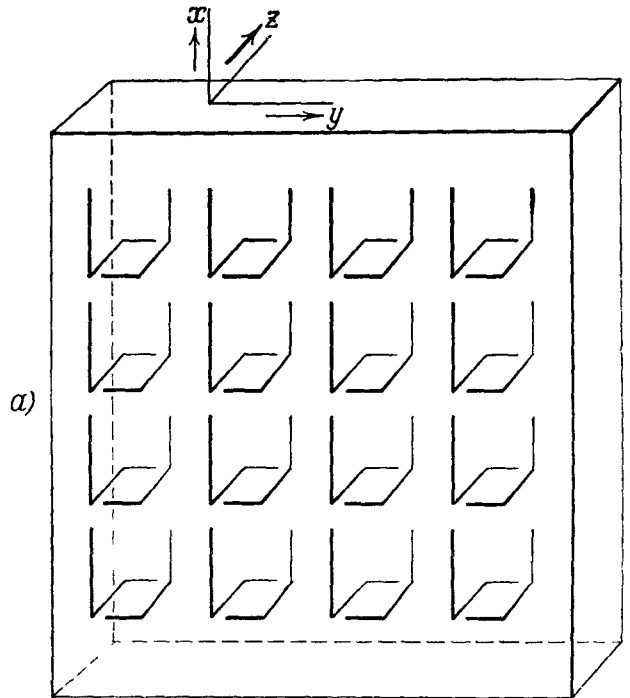


Рис. 339.  $a$  — двумерная решетка из пар одинаковых молекул типа данных на рис. 338;  $b$  — молекулы каждой пары расположены так, что оси  $\xi_1, \xi_2$  направлены в одну сторону, а оси  $\eta_1, \eta_2$ , а также  $\zeta_1, \zeta_2$  — в противоположные стороны.

совпадает с направлением оси  $y$ , а направление оси  $\eta_2$  противоположно направлению оси  $y$ .

Суммарный момент  $\mathbf{p}^{(lx)}$  пары молекул, возникающий под действием компоненты  $E_x^{(\pi)}$ , имеет составляющие

$$\left. \begin{aligned} p_x^{(lx)} &= \beta A \cos \omega t + \beta A \cos (\omega t - kl), \\ p_y^{(ly)} &= \gamma A \cos \omega t - \gamma A \cos (\omega t - kl). \end{aligned} \right\} \quad (8.102)$$

Путем аналогичных рассуждений мы придем к заключению, что компонента  $E_y^{(\pi)}$  волны (8.101) вызывает в нашей паре молекул появление момента  $\mathbf{p}^{(ly)}$  с компонентами

$$\left. \begin{aligned} p_x^{(ly)} &= \gamma A \sin (\omega t - kl) - \gamma A \sin \omega t, \\ p_y^{(ly)} &= \beta A \sin (\omega t - kl) + \beta A \sin \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (8.103)$$

Вектор

$$\mathbf{p}^{(л)} = \mathbf{p}^{(lx)} + \mathbf{p}^{(ly)},$$

т. е. суммарный момент пары молекул, возбуждаемый поляризованной по кругу волной (8.101), имеет, как легко подсчитать, компоненты

$$\left. \begin{aligned} p_x^{(\pi)} &= p_x^{(\pi x)} + p_x^{(\pi y)} = 2(\beta - \gamma) A \sin \frac{kl}{2} \cos \left( \omega t - \frac{kl}{2} \right), \\ p_y^{(\pi)} &= p_y^{(\pi x)} + p_y^{(\pi y)} = 2(\beta - \gamma) A \sin \frac{kl}{2} \sin \left( \omega t - \frac{kl}{2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (8.104)$$

Компоненты  $p_x^{(\pi)}$ ,  $p_y^{(\pi)}$  имеют равные амплитуды и такой же сдвиг фаз ( $\pi/2$ ), как соответствующие компоненты  $E_x^{(\pi)}$ ,  $E_y^{(\pi)}$  поля первичной волны\*): конец вектора  $p^{(\pi)}$  описывает окружность в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения, вращаясь в ту же сторону, что и конец вектора  $E^{(\pi)}$ . Поэтому вторичная волна, излучаемая нашей парой молекул в направлении оси  $z$ , обладает, как и первичная волна, левой круговой поляризацией, и такой же поляризацией обладает, очевидно, результирующая вторичная волна за пластинкой\*\*).

Ясно, что суперпозиция первичной и результирующей вторичной волны — также волна, поляризованная по кругу влево. Таким образом, волна, поляризованная по кругу влево, является нормальной волной.

Пусть теперь на пластинку падает первичная волна, поляризованная по кругу *вправо*:

$$\left. \begin{aligned} E_x^{(\pi)} &= A \cos(\omega t - kz), \\ E_y^{(\pi)} &= -A \sin(\omega t - kz). \end{aligned} \right\} \quad (8.105)$$

Рассуждая так же, как для (8.101), мы получим для компонент возбуждаемого ею электрического момента  $p^{(\pi)}$  пары молекул выражение

$$\left. \begin{aligned} p_x^{(\pi)} &= 2(\beta + \gamma) A \sin \frac{kl}{2} \cos \left( \omega t - \frac{kl}{2} \right), \\ p_y^{(\pi)} &= -2(\beta + \gamma) A \sin \frac{kl}{2} \sin \left( \omega t - \frac{kl}{2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (8.106)$$

Эти формулы получаются из (8.104) изменением знака членов, обусловленных компонентой  $E_y^{(\pi)}$ .

Эти компоненты имеют равные амплитуды и сдвиг фаз ( $-\pi/2$ ); конец вектора  $p^{(\pi)}$  описывает окружность в плоскости фронта волны, вращаясь в ту же сторону, что  $E^{(\pi)}$ . Отсюда следует (см. выше), что волна, поляризованная по кругу вправо, также является нормальной волной.

Из формул (8.104), (8.106) видно, что «правая» и «левая» поляризуемости *не* равны друг другу:

$$\beta^{(\pi)} = 2(\beta + \gamma) \sin \frac{kl}{2}, \quad \beta^{(\pi)} = 2(\beta - \gamma) \sin \frac{kl}{2}, \quad (8.107)$$

откуда для правого и левого показателей преломления следует согласно (8.82)

$$n^{(\pi)} = 1 + 2\pi(\beta + \gamma) \sin \frac{kl}{2}, \quad n^{(\pi)} = 1 + 2\pi(\beta - \gamma) \sin \frac{kl}{2}, \quad (8.108)$$

$$n^{(\pi)} - n^{(\pi)} = 4\pi\gamma \sin \frac{kl}{2}. \quad (8.109)$$

\*) Советуем читателю построить векторные диаграммы формул (8.102), (8.103), (8.104).

\*\*\*) Мы можем себе представить такую радиофизическую модель: двумерная решетка из скрещенных вертикальных и горизонтальных вибраторов; все вибраторы колеблются с одинаковой амплитудой, все вертикальные вибраторы синфазны, все горизонтальные — также, между вертикальными и горизонтальными вибраторами имеется сдвиг фаз  $\pi/2$ .

Таким образом, поставленная цель достигнута: рассмотренная модель дает вращение плоскости поляризации. Общая теория механизма вращения плоскости поляризации довольно сложна. Но рассмотренная здесь модель\*) позволяет понять существенное в этом механизме.

Отсутствие у молекул зеркальной симметрии, оптическая анизотропия частей молекулы и наличие связи между поляризациями различных частей молекулы являются *необходимыми* свойствами всякой модели, приводящей к вращению плоскости поляризации; учет конечности размера молекулы в направлении распространения волны также необходим для объяснения вращения плоскости поляризации: мы не получили бы отличия между  $n^{(n)}$  и  $n^{(n)}$ , если бы пренебрегли размером молекул  $l$  по сравнению с  $\lambda$ , т. е. положили бы  $kl = 0$ .

Всякая *плоская* фигура может быть совмещена со своим зеркальным изображением. Отсюда ясно, что плоские модели молекул не годятся для объяснения вращения плоскости поляризации. Ясно, далее, что если вещество состоит из молекул типа  $P'Q'$  (рис. 338), т. е. являющихся зеркальным изображением молекул  $PQ$ , нужно вместо  $\gamma$  писать  $(-\gamma)$ , и следовательно, для такого вещества  $n^{(n)} > n^{(n)}$ , если для первого было  $n^{(n)} > n^{(n)}$  (вращение плоскости поляризации в обратную сторону). Некоторые вещества (кварц, виннокаменная кислота) встречаются в двухразнозначностях: лево- и правовращающей.

Из этих замечаний понятно, какой громадный интерес представляет явление вращения плоскости поляризации для стереохимии) учение о пространственном расположении атомов в молекулах).

Формула (8.109) показывает, что чем меньше  $\lambda$ , тем больше  $|n^{(n)} - n^{(n)}|$ . В существовании этой *дисперсии вращения* легко убедиться на опыте. Указанный здесь механизм дисперсии вращения определяется конечностью размеров молекул, т. е. имеет совсем другую природу, чем дисперсия, вследствие зависимости  $\beta$  от частоты, рассмотренной в § 9.

## § 11. Рассеяние рентгеновского излучения

В кристаллах атомы образуют правильную трехмерную решетку. Простейший геометрически мыслимый тип решетки показан на рис. 340. Здесь все атомы одинаковы и имеют координаты

$$x = ld_x, \quad y = md_y, \quad z = nd_z \quad (l, m, n = 0, 1, 2, \dots). \quad (8.110)$$

В действительности кристаллы столь простой структуры не встречаются, но модель достаточна для понимания основных черт интересующего нас здесь явления. Пусть на кристалл падает первичная плоская электромагнитная волна с  $\lambda$  порядка межатомных расстояний. Это — случай рентгеновских лучей, для которой  $\lambda$  порядка  $10^{-8}$  см. Такого же порядка, как уже указывалось, расстояния между соседними атомами кристалла. Нас будет интересовать суперпозиция вторичных волн в области больших значений волнового параметра  $\sqrt{\lambda D}/r$  ( $D$  — наибольший размер кристалла,  $r$  — расстояние до точки наблюдения) (ср. § 4).

Пусть первичная волна распространяется параллельно оси  $z$ . Во всех атомах каждой из двумерной решеток  $z = nd_z$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), из которых состоит трехмерная кристаллическая решетка, она возбуждает колебания электронов, синфазные и одинаковой амплитуды. Поэтому каждая такая двумерная решетка излучает при этом вторичную волну того же типа, что и волна, излучаемая антенной в виде двумерной решетки,

\*) Она заимствована из курса оптики, читанного М. А. Леонтовичем в МГУ

рассмотренной в § 5. Нетрудно видеть, что между результирующими вторичными волнами от двух смежных двумерных решеток  $z = nd_z$  и  $z = (n+1)d_z$  существует сдвиг фаз

$$\varepsilon_z = kd_z \cos \gamma, \quad (8.111)$$

где  $\gamma$  — угол между направлением наблюдения и осью  $z$ . Это следует из того, что сдвиг фаз, выражаемый формулой (8.111), существует, как видно из рис. 341, между колебаниями, посылаемыми под углом  $\gamma$  к оси  $z$  каждой парой соответственных атомов, т. е. атомов с одинаковыми  $l, m$  плоскостей  $z = nd_z$  и  $z = (n+1)d_z$  (ср. рассуждение § 5, п. 3). Следовательно, колебание, посылаемое кристаллом по направлению, образуящему с осями координат углы  $\alpha, \beta, \gamma$ , причем (для любых  $\alpha, \beta, \gamma$ )

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1, \quad (8.112)$$

является суперпозицией  $N_z$  колебаний одинаковой амплитуды, посы-

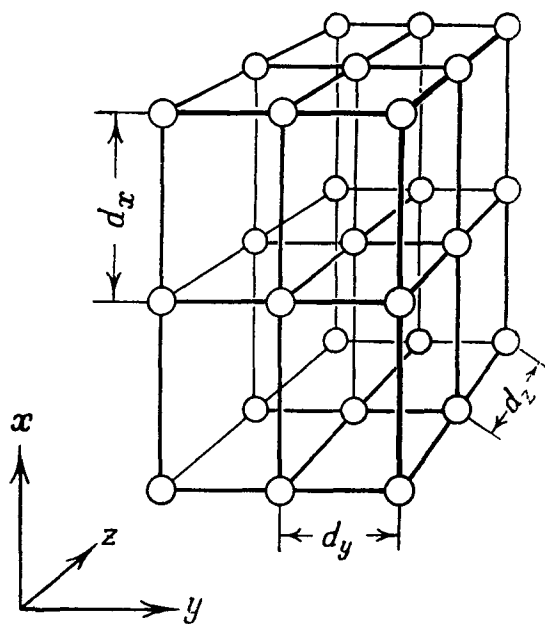


Рис. 340. Простейшая пространственная решетка.

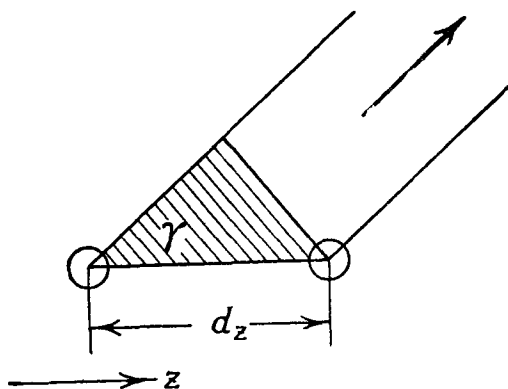


Рис. 341. К выводу формулы (8.111).

лаемых отдельными двумерными решетками  $z = nd_z [n = 0, 1, 2, \dots, (N-1)]$ . Фазы этих колебаний образуют арифметическую прогрессию с разностью  $\varepsilon_z$ . Интенсивность результирующего колебания от всего кристалла равна, таким образом, интенсивности колебания от отдельной двумерной решетки, умноженной на

$$\frac{\sin^2 \left( N_z \frac{\varepsilon_z}{2} \right)}{\sin^2 \left( \frac{\varepsilon_z}{2} \right)} = \frac{\sin^2 \left( \frac{1}{2} N_z k d_z \cos \gamma \right)}{\sin^2 \left( \frac{1}{2} k d_z \cos \gamma \right)}.$$

Согласно (8.19) интенсивность колебаний от отдельной двумерной решетки имеет вид

$$a^2 \frac{\sin^2 \left( \frac{1}{2} N_x k d_x \cos \alpha \right)}{\sin^2 \left( \frac{1}{2} k d_x \cos \alpha \right)} \cdot \frac{\sin^2 \left( \frac{1}{2} N_y k d_y \cos \beta \right)}{\sin^2 \left( \frac{1}{2} k d_y \cos \beta \right)},$$

где  $a^2$  — интенсивность колебания от отдельного атома. Поэтому результирующая интенсивность от всего кристалла

$$A^2 = a^2 \frac{\sin^2 \left( \frac{1}{2} N_x k d_x \cos \alpha \right)}{\sin^2 \left( \frac{1}{2} k d_x \cos \alpha \right)} \cdot \frac{\sin^2 \left( \frac{1}{2} N_y k d_y \cos \beta \right)}{\sin^2 \left( \frac{1}{2} k d_y \cos \beta \right)} \cdot \frac{\sin^2 \left( \frac{1}{2} N_z k d_z \cos \gamma \right)}{\sin^2 \left( \frac{1}{2} k d_z \cos \gamma \right)} \quad (8.113)$$

Пусть  $\lambda$  задано. Как мы знаем (§ 5, п. 4), направлениям, для которых

$$d_x \cos \alpha = m_x \lambda, \quad d_y \cos \beta = m_y \lambda \quad (m_x, m_y = 0, \pm 1, 2, \dots),$$

соответствуют двукратные главные максимумы интенсивности волн, излучаемых отдельными двумерными решетками. Такие двукратные главные максимумы существуют при *любом*  $\lambda$  (один, если  $\lambda > d_x$ ,  $\lambda > d_y$ , несколько в остальных случаях).

Возникает вопрос: существуют ли для трехмерной решетки *тройные* главные максимумы — направления, для которых

$$d_x \cos \alpha = m_x \lambda, \quad d_y \cos \beta = m_y \lambda, \quad d_z \cos \gamma = m_z \lambda \quad (8.114)$$

$$(m_x, m_y, m_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

т. е. колебания от всех атомов трехмерной решетки приходят в фазе? Уравнения (8.112) и (8.114) образуют систему *четырёх* уравнений относительно *трех* неизвестных  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$ . Эти уравнения, вообще говоря, несовместны. Более конкретно: если мы подставим в третье уравнение (8.114) значение

$$\cos \gamma = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \frac{m_x^2 \lambda^2}{d_x^2} - \frac{m_y^2 \lambda^2}{d_y^2}},$$

найденное из (8.112) и первых двух уравнений (8.114), его левая часть не будет равна целому кратному  $\lambda$ .

Таким образом, если  $\lambda$  дано, вообще говоря, не существует трехкратных главных максимумов. Но они существуют при некоторых *особых* значениях  $\lambda$ , таких, что

$$d_z \sqrt{1 - \frac{m_x^2 \lambda^2}{d_x^2} - \frac{m_y^2 \lambda^2}{d_y^2}} = m_z \lambda,$$

т. е.

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{m_x^2}{d_x^2} + \frac{m_y^2}{d_y^2} + \frac{m_z^2}{d_z^2}, \quad (8.115)$$

где  $m_x$ ,  $m_y$ ,  $m_z$  — целые числа.

При этом уравнения (8.112), (8.114) совместны, и в направлениях, определяемых уравнениями (8.114), интенсивность

$$A^2 = N_x^2 N_y^2 N_z^2 a^2. \quad (8.116)$$

Таким образом, при ряде *особых* (дискретных) значений длины волны  $\lambda$  падающего излучения, определяемых уравнением (8.115), возникает (по отдельным направлениям, зависящим от  $\lambda$ ) *исключительно сильное рассеянное излучение*.

Мы рассмотрели лишь случай, когда падающая волна распространяется параллельно оси  $z$ . Легко обобщить наши вычисления на случай произвольного направления падающего излучения. При этом также имеет место только что указанное свойство — существование трехкратных главных максимумов при дискретной группе значений  $\lambda$ ; оно является, таким образом, характерным для трехмерной решетки.

Радиофизическую модель рассеяния рентгеновских лучей кристаллом можно осуществить с помощью объемной решетки из металлических вибраторов. Такую модель впервые построил и исследовал Н. А. Капцов в 1921 г. Он работал с затухающими электромагнитными волнами длиной около 3 см.

## § 12. Дополнительные замечания

Теория сложных излучателей, с которой мы познакомились в этой главе, является еще одним убедительным примером единства закономерностей колебаний и волн различной физической природы. Вместе с тем она позволяет привести некоторые конкретные соображения, помогающие уяснить, в чем заключается в данном случае корень таких общих закономерностей. В широкой постановке вопрос этот трудный и нуждается в тщательной разработке.

Возьмем конкретный пример—двумерную решетку элементарных излучателей. Решетка может быть акустической или электромагнитной. В первом случае мы записываем колебание в точке наблюдения в виде

$$p(t) = \sum_i p_i \left( t - \frac{r_i}{c} \right),$$

во втором случае—

$$E(t) = \sum_i E_i \left( t - \frac{r_i}{c} \right),$$

где через  $p_i$  обозначено давление воздуха, а через  $E_i$ —электрическое поле в волне, посылаемой  $i$ -м излучателем решетки,  $r_i$ —расстояние от этого излучателя до точки наблюдения,  $c$ —скорость распространения волн, соответственно, либо акустических, либо электромагнитных.

Различие обозначений  $p$  и  $E$  служит здесь указанием на то, что речь идет о двух качественно различных формах движения материи: механической и электромагнитной. Но имеет место тождественность математических формул, описывающих образование  $p$  из  $p_i$  и образование  $E$  из  $E_i$ . Эта тождественность не является формальной. Она отражает тождественность пространственно-временного соотношения между  $p$  и  $p_i$ , с одной стороны, и между  $E$  и  $E_i$ —с другой. Порядок чередования в пространстве и времени звуковых и электромагнитных колебаний или импульсов одинаков.

Конечно, необходимо отчетливо понимать, что  $p$  и  $E$  обозначают качественно различные величины. Но вместе с тем необходимо видеть аналогию между образованием  $p$  из  $p_i$  и  $E$  из  $E_i$  и владеть этой аналогией. Приведенные выше (гл. II, § 7) слова В. И. Ленина о единстве природы находят в этом примере наглядную иллюстрацию. Сложение импульсов происходит в пространстве и времени, и тождественность закономерностей (в данном случае—кинематических) при этом сложении влечет за собой аналогию явлений. Отсюда же вытекает и тот факт, что один и тот же чертеж позволяет изображать сразу оба явления.

Но, быть может, именно здесь уместно подчеркнуть о г р а н и ч е н о с т ь аналогий между колебаниями и волнами различной физической природы и, снова используя конкретный пример, указать на существование предела применимости таких аналогий.

В гл. VI говорилось об упругих волнах и, в частности, рассматривалось излучение акустических волн колеблющимся кварцем, а в гл. VII говорилось об электромагнитных волнах и, в частности, об излучении этих волн антенной. Может сложиться впечатление, что и здесь существует аналогия между механизмом излучения акустических волн колеблющимся твердым телом (стр. 205—207) и электромагнитных волн антенной (стр. 264—268). Между тем здесь аналогия отсутствует и, наоборот, отчетливо выступает качественное различие между электромагнитными и механическими колебаниями.



В самом деле, в случае колеблющейся пластинки первоначально накопленный запас энергии находится в н у т р и самой пластинки. При ее колебаниях поток вектора Умова направлен на пластинки н а р у ж у. В случае антенны первоначальный запас энергии находится в н е антенны, в ее «ближайшей окрестности» (т. е. в окружающем ее электрическом поле. Речь идет о с в о б о д н ы х колебаниях пластинки и антенны, так что в начальный момент пластинка деформирована, например сжата, а антенна — или вибратор — разноименно заряжена на концах). Когда происходит процесс излучения, поток вектора Умова — Пойнтинга на поверхности антенны направлен в н у т р ь антенны (если она обладает конечной проводимостью.) Излучение уносит энергию не из антенны, а из окружающего ее поля.

Этот пример делает вместе с тем более ясной и н е т р и в и а л ь н о с т ь того обстоятельства, что колебания и волны различной физической природы имеют существенные общие черты. Это вовсе не нечто само собой разумеющееся, и именно поэтому единый подход к физически различным колебательным и волновым процессам является, как это уже давно выяснилось, столь плодотворным.

---

## ГЛАВА IX ДИФРАКЦИЯ

### § 1. «Узкий» и «широкий» смысл термина «дифракция»

Повседневный опыт учит, что непрозрачные предметы, освещаемые Солнцем, свечой или всяким другим источником света, имеющим малую угловую протяженность, отбрасывают резкие тени. Очертание тени определяется построением, показанным на рис. 342: освещаемый предмет проектируется на экран прямыми линиями («лучами»), выходящими из источника.

Это построение лежит в основе геометрической оптики, элементы которой известны нашему читателю из школьного курса физики \*). В геометрии

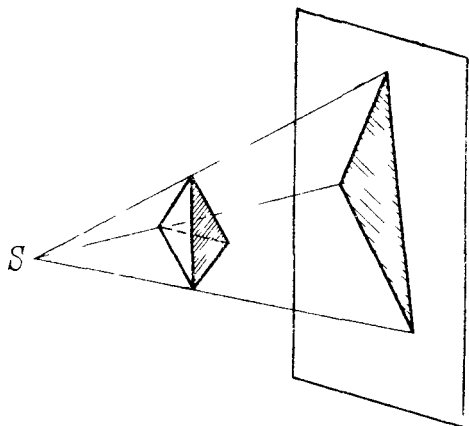


Рис. 342 Построение тени от непрозрачного тетраэдра согласно геометрической оптике.

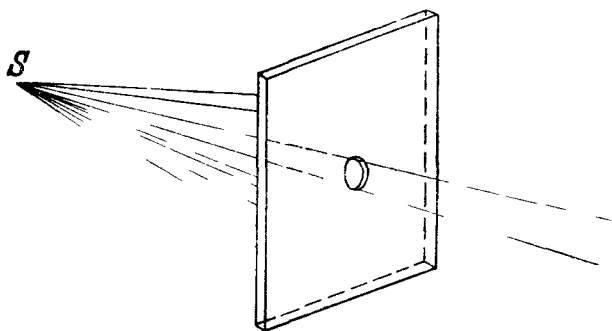


Рис. 343 Прохождение света через отверстие согласно геометрической оптике.

ческой оптике с лучами обращаются так, как будто отдельные лучи «существуют на самом деле», т. е. так, как если бы можно было, сузив достаточно отверстие (рис. 343), выделить сколь угодно тонкий прямолинейный луч. Необходимо, однако, подчеркнуть, что построения рис. 342 и 343 пока что логически никак не связаны с известными нам свойствами световых волн. Более того, возникает сомнение—совместимо ли построение теней по правилам геометрической оптики с волновой теорией света?

В самом деле, образуются ли резкие «тени» от преград, стоящих на пути других известных нам волн—водяных волн, звуковых волн, радиоволн? Простые опыты и даже житейские наблюдения убеждают в обратном

Проведем с помощью уже известной (гл. V) водяной ванны со стеклянным дном такой эксперимент: поставим на некотором расстоянии от

\*) Мы пользовались геометрической оптикой, например в гл. V, § 7, когда строили световые пучки, отраженные от зеркала (рис. 178), или в гл. VII, § 8, когда чертили световые пучки, выходящие из призмы (рис. 256).

источника волн вертикальную пластинку, опирающуюся на дно и выходящую из воды. Мы увидим на экране, что волны огибают пластинку. Другой пример: мы открываем окно, и в комнату врывается неслышный раньше шум уличного движения; отойдя в глубину комнаты, мы продолжаем отчетливо его *слышать*, несмотря на то что не можем *видеть* предметы, производящие этот шум. Последний пример: будем перемещать перпендикулярно к прямой, соединяющей антенны передатчика и приемника микрорадиоволн, большой лист металла; мы заметим, что интенсивность колебаний в приемнике начнет изменяться, становясь то больше, то меньше еще *до* того, как край листа пересечет эту прямую, и будет еще вполне заметной *после* того, как край довольно далеко продвинется *за* нее.

Итак, *волны огибают препятствия*. Это известно было уже во времена Гюйгенса и Ньютона. Наличие резкой границы света и тени долго считалось большинством физиков весьма убедительным аргументом против волновой теории света. Попытка Гюйгенса устранить противоречие с помощью построения «вторичных волн» и их огибающих, приводимого и теперь в учебниках оптики (рис. 344), была далека от полной убедительности. Между тем теория, согласно которой свет состоит из корпускул, летящих по инерции и не пропускаемых непрозрачными телами, непосредственно приводит к построению рис. 342 и 343.

Но подойдем к вопросу с другой стороны.

Является ли граница между светом и тенью действительно *абсолютно* резкой в согласии с построением рис. 342 и 343? Внимательное наблюдение показывает, что всегда существует (хотя бы очень узкая) переходная область, где свет постепенно переходит в тень. Эта область называется полутенью. Ее существование вполне естественно объясняют, не выходя за пределы геометрической оптики, тем, что в действительности источник не является точечным: полутень—это та часть экрана, которая освещается не всеми точками источника. Оставаясь в пределах представлений геометрической оптики, следует ожидать, что при достаточном уменьшении размеров источника область полутени станет как угодно узкой и мы как угодно близко подойдем к абсолютно резкому скачку от света к тени.

Подвергнем этот вывод опытной проверке. С помощью микрометрического винта будем постепенно сужать щель, через которую монохроматический источник освещает металлическое лезвие, край которого параллелен щели, и будем наблюдать тень лезвия на удаленном экране (рис. 345). Сначала полутень будет сужаться, и переход от света к тени будет становиться более резким в соответствии с тем, что следовало ожидать, исходя из представлений геометрической оптики. Однако, когда освещающая щель достигнет ширины порядка 1 мм (при расстоянии порядка 2 м между лезвием и экраном), дальнейшее ее сужение не приводит к увеличению резкости границы света и тени на экране. Более того, возникает совсем другое явление: начинают все более отчетливо вырисовываться светлые и темные вертикальные полосы в той области, где согласно геометрической оптике должна быть равномерная освещенность, и возникает постепенное и очень плавное спадание освещенности при углублении в область «геометрической тени» (т. е. там, где согласно геометрической оптике должно быть абсолютно темно). Картина очень напоминает то, что наблюдается

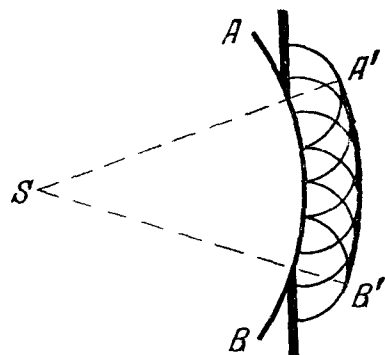


Рис. 344. Построение Гюйгенса.  $AB$ —фронт волны в некоторый момент  $t$ ,  $A'B'$ —фронт волны в момент  $t + \Delta t$  ( $A'B'$ —огибающая малых полусфер радиуса  $c\Delta t$ ,  $c$ —скорость света).

в опыте с антеннами и металлическим листом, о котором только что говорилось \*).

Итак, в случае очень узкого источника истинная картина перехода от света к тени совсем не та, которую указывает геометрическая оптика. Подобно звуку или радиоволнам *свет огибает препятствия*. Геометрическая оптика правильно передает то, что делается в области *A* (рис. 345), где освещенность практически постоянна и отлична от нуля, а также в области *C*, где освещенность практически постоянна и равна нулю, но не то,

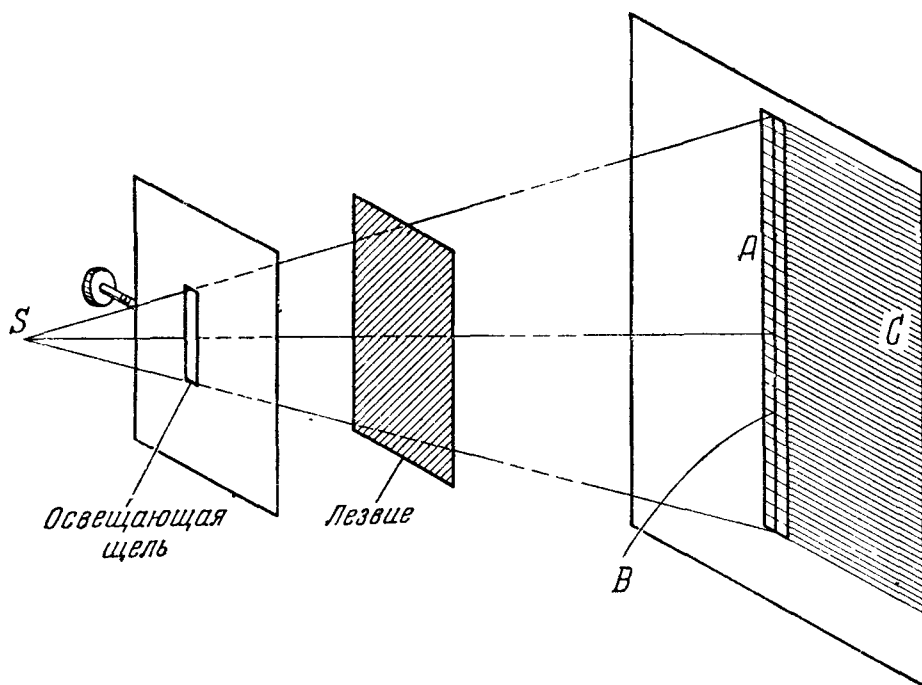


Рис. 345. Схематическое изображение истинной структуры тени лезвия, освещаемого узкой щелью. Рисунок не передает характера распределения освещенности в промежуточной области *B* (ср. рис. 373).

что делается в переходной области *B*. В этой области наблюдаются, как говорят, оптические *дифракционные явления*, или *дифракция света*. Здесь термин «дифракция» употребляется в смысле: отклонение от того, чего требует «закон прямолинейного распространения света», т. е. построение рис. 342, 343. (Этот закон, как будет выяснено подробно в этой главе, является лишь приближением, обладающим, как и всякое приближение, ограниченной годностью.) Аналогично можно говорить о дифракции водяных волн, звука, радиоволн в опытах, о которых шла речь выше; в этих опытах наблюдались явления, которые нельзя было бы описать, применяя построение рис. 342 \*\*).

\*) Она будет рассмотрена подробно в § 7. Заметим, что уже при описании опыта Френеля с зеркалами (гл. V, § 7) нам пришлось отметить наряду с интерференционными полосами наличие отступлений от геометрической оптики.

\*\*) Существует важное практическое отличие между дифракцией света (понимаемой в только что указанном узком смысле; ср. следующую страницу) и дифракцией остальных волн, о которых здесь шла речь. При «обычных» условиях дифракция света явно не наблюдается, ее нужно специально *искать*, что мы и делали, сужая щель (рис. 345). Между тем при «обычных» условиях всегда наблюдается дифракция звука, водяных волн или радиоволн: здесь нужно специально искать такие условия, при которых дифракция практически отсутствует. Мы увидим впоследствии, как нужно искать такие условия. Подчеркнем уже здесь, что отмеченное отличие между светом и остальными рассуждаемыми здесь волнами — совсем не принципиальное. Оно обусловлено, как мы увидим, лишь различным порядком величины длины волны.

Можно, однако, вложить в понятие «дифракция» гораздо более обширное содержание.

Прозрачная среда, заключающая в себе непрозрачное «препятствие» — частный случай *неоднородной среды*, т. е. среды, свойства которой различны в различных местах. Другой частный случай неоднородной среды: прозрачная среда, показатель преломления которой различен в различных местах, например в оптике — среда, состоящая из воздуха и зеркал, призм, линз. *Дифракцией в широком смысле* мы будем называть совокупность всех явлений, происходящих при распространении волн в неоднородной среде. Всюду в дальнейшем мы будем понимать термин «дифракция» именно в этом *широком* смысле.

Но при столь широком понимании термина «дифракция», подумает читатель, мало, пожалуй, найдется таких волновых явлений, которые нельзя было бы рассматривать как частные случаи дифракции. И читатель будет вполне прав. Именно такому пониманию дифракции стремится научить эта книга. Целесообразно рассматривать как частные случаи дифракции такие явления, как, например, рассеяние света капельками тумана, образование изображений зеркалами, линзами, системами линз (например, микроскопом), образование направленного радиоизлучения с помощью вогнутого зеркала (радиопрожектор) и даже отбрасывание резкой тени освещаемым непрозрачным предметом. Одна из важнейших задач теории дифракции, понимаемой в широком смысле, — выяснение тех условий, когда можно пользоваться в качестве приближения понятием лучей и построениями геометрической оптики.

Оправдание такого широкого понимания термина «дифракция» (как всегда в подобных случаях) — его плодотворность. Например, техника создания микроскопов получила научную основу и смогла быть доведена до высокого совершенства лишь после того, как была построена теория, рассматривающая образование оптического изображения как один из случаев дифракции.

## § 2. Принцип Гюйгенса—Френеля: основная идея

Волновая теория света смогла победить лишь после того, как удалось построить удовлетворительную теорию дифракции и вывести из нее в качестве приближения, годного при определенных условиях, «закон прямолинейного распространения света». Это сделал Френель. В основу своей теории дифракции он положил упомянутую выше идею Гюйгенса о «вторичных волнах», но существенно ее видоизменив, а именно: внося в нее отсутствовавшее у Гюйгенса представление о том, что суперпозиция волн приводит, в зависимости от фазовых соотношений, к их усилению или ослаблению. Возникший таким образом *принцип Гюйгенса—Френеля* оказался чрезвычайно плодотворным и сохранил большое значение, несмотря на дальнейшее усовершенствование теории дифракции. Наше изложение будет основано на этом принципе.

Вообразим некоторую (произвольную) замкнутую поверхность  $\sigma$ , охватывающую источник волн (рис. 346). Поверхность  $\sigma$  мы будем называть вспомогательной поверхностью. Основная идея принципа Гюйгенса —

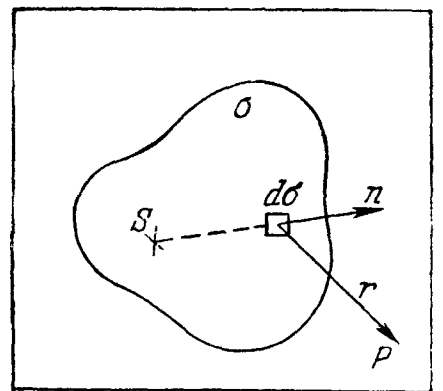


Рис. 346. Источник света  $S$ , вспомогательная поверхность  $\sigma$ , точка наблюдения  $P$ .

Френеля заключается в следующем. Колебание, создаваемое *реальным* источником  $S$  в произвольной точке  $P$ , может быть представлено как суперпозиция колебаний, которые создавали бы в этой точке *фиктивные* (воображаемые) источники, непрерывно распределенные по поверхности  $\sigma$ ; при этом величины, характеризующие фиктивные источники (амплитуда, фаза, вид диаграммы направленности), находящиеся на некотором элементе  $d\sigma$  поверхности  $\sigma$ , зависят определенным образом от величин (амплитуды, фазы, направления распространения), характеризующих реальное колебание, создаваемое источником  $S$  в точках этого же элемента  $d\sigma$ .

Реальный источник  $S$  часто называют *первичным* источником, излучаемую им волну—*первичной* волной, фиктивные источники, о которых только что шла речь,—*вторичными* источниками, волны, которые «излучают» вторичные источники,—*вторичными* волнами. Можно сказать, пользуясь этими терминами: принцип Гюйгенса—Френеля позволяет представить первичную волну вне  $\sigma$  как суперпозицию вторичных волн, излучаемых точками поверхности  $\sigma$ . Задача о *распространении* первичной волны сводится в результате к задаче о *суперпозиции* вторичных волн, т. е. задаче, аналогичной тем, которые были рассмотрены в гл. VIII. Благодаря этому тот факт, что в зависимости от фазовых соотношений волны могут как усиливать, так и ослаблять друг друга, приобретает решающее значение для понимания явлений дифракции, в частности образования тени или оптического изображения.

Картина распространения волны, которую дает принцип Гюйгенса—Френеля, кое в чем напоминает электронную модель отражения и преломления. Некоторые вычисления, которые нам здесь предстоят, будут напоминать вычисления гл. VIII, § 9. Но нужно ясно понимать следующие существенные отличия. Там речь шла о *реальных* вторичных источниках—электронах, совершающих вынужденные колебания под действием первичной волны; здесь идет речь о *фиктивных* вторичных источниках (поверхность  $\sigma$  может быть проведена в пустом пространстве, где нет колеблющихся электронов). Там речь шла о *добавлении* к первичной волне вторичных волн, испускаемых электронами, здесь—о *замене* первичной волны суперпозицией вторичных волн.

Принцип Гюйгенса—Френеля можно доказать, исходя из трехмерного волнового уравнения, являющегося обобщением одномерного волнового уравнения, рассмотренного в гл. V, § 8. При этом получаются формулы, устанавливающие количественную связь между величинами, характеризующими источники вторичных волн, и величинами, описывающими реальное колебание в соответствующих точках поверхности  $\sigma$ . Такое доказательство выходит за пределы математических методов, применяемых в этой книге \*), и нам придется пойти по другому пути.

Мы примем общую идею принципа Гюйгенса—Френеля, высказанную выше. Затем с помощью целесообразно подобранного примера (§ 4) мы выясним, как должны зависеть величины, характеризующие источники вторичных волн, от величин, характеризующих реальные колебания в соответствующих точках поверхности  $\sigma$ , для того, чтобы принцип Гюйгенса—Френеля приводил к правильным результатам. Но, прежде чем это сделать, мы покажем на другом, весьма важном, примере (дифракционная решетка, § 3), сколь далеко идущие—и правильные—выводы можно сделать на основании уже одной этой общей идеи.

\*) Оно излагается в теоретических курсах оптики и в курсах математической физики.

### § 3. Дифракция Фраунгофера на периодической структуре (дифракционные решетки)

1. Дифракционные решетки; дифракция Фраунгофера. Оптики называют дифракционными решетками стеклянные или металлические пластинки, на которые с помощью делительной машины, снабженной алмазным резцом, нанесены через строго одинаковые интервалы параллельные штрихи. Стеклянная дифракционная решетка дает дифракционные явления в проходящем свете, металлическая—в «отраженном» («отражательная решетка»). В более общем смысле можно назвать дифракционной решеткой всякую периодическую структуру (или близкую к периодической), влияющую на распространение волн той или иной природы.

Интересный пример оптической дифракционной решетки представляет прозрачная жидкость или газ, в которых с помощью пьезокварца возбуждены бегущие или стоячие ультразвуковые волны (гл. VI, § 5): здесь периодическая структура образуется вследствие сгущений и разрежений, периодически чередующихся в пространстве, и ее периодом является длина ультразвуковой волны; эта структура влияет на распространение света вследствие того, что показатель преломления в местах сгущений—больше, а в местах разрежений—меньше, чем в отсутствии ультразвука. Дифракционную решетку для микрорадиоволн можно получить, вырезав в листе металла ряд одинаковых и одинаково отстоящих друг от друга щелей. Каменная лестница является отражательной дифракционной решеткой для звука (ср. гл. XI, § 4).

Пространственный период дифракционной решетки (его называют также *постоянной* решетки) мы будем обозначать буквой  $d$ . Участок решетки длины  $d$  мы будем называть *элементом* решетки; точки решетки, отстоящие на целое кратное  $d$ , — соответственными точками. Общий размер решетки в направлении, перпендикулярном к ее элементам,

$$D = Nd,$$

где  $N$  — число элементов.

Наибольший интерес в случае дифракционной решетки представляют дифракционные явления, происходящие при следующих условиях опыта или им эквивалентных (см. § 11).

1. Источник  $S$  и точка наблюдения  $P$  находятся в плоскости, перпендикулярной к элементам решетки и проходящей через ее середину (рис. 347).

2. Источник волн—точечный и находится в «бесконечности», т. е. на столь большом расстоянии  $SO = R_0$  от центра решетки  $O$ , что падающую на нее волну можно считать плоской. Говоря точнее,  $R_0$  настолько велико, что разность фаз колебаний, посылаемых в любые две точки решетки  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ , равна с точностью до малой доли  $\pi$

$$k(x_2 - x_1) \sin \theta_0, \quad (9.1)$$

где  $\theta_0$  — угол между нормалью к решетке и направлением решетка — источник.

3. Точка наблюдения  $P$  также находится «в бесконечности», т. е. на столь большом расстоянии  $OP = R$  от центра решетки, что, если поместить в любых двух точках  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  решетки точечные источники, колеблющиеся с одинаковой фазой, разность фаз колебаний, которые они будут создавать в  $P$ , будет равна с точностью до малой доли  $\pi$

$$k(x_1 - x_2) \sin \theta, \quad (9.2)$$

где  $\theta$  — угол между нормалью к решетке и направлением решетка — точка наблюдения.

Для того чтобы выполнялись соотношения (9.1), (9.2), должны выполняться условия

$$R_0 \gg \frac{D^2}{4\lambda}, \quad R \gg \frac{D^2}{4\lambda}. \quad (9.3)$$

Аналогичным условиям должен удовлетворять размер решетки в направлении, параллельном штрихам. Дифракционные явления, происходящие

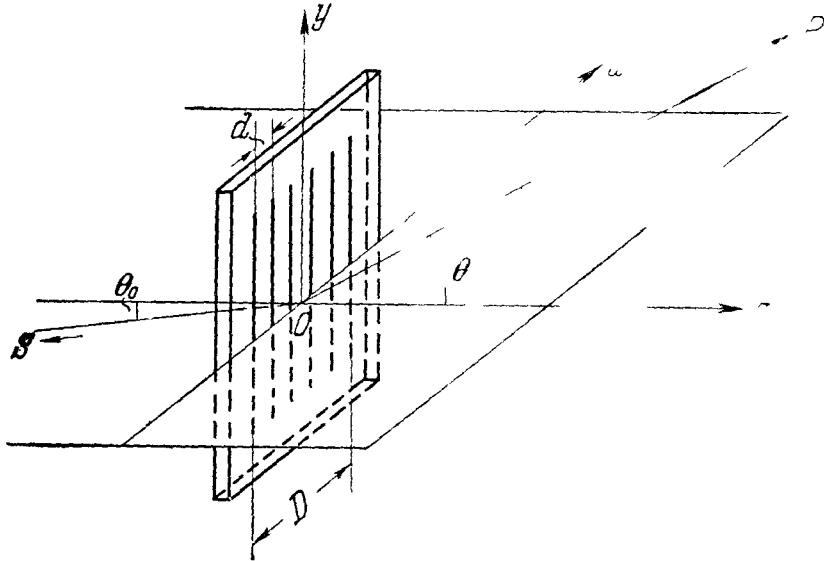


Рис. 347. К теории дифракции Фраунгофера на решетке

при соблюдении этих условий или им эквивалентных (§ 11), называются *дифракцией Фраунгофера* на решетке.

**2. Нормальное падение волн на решетку.** Предположим, что мы имеем дело с «пропускающей» решеткой, на которую волна падает нормально ( $\theta_0 = 0$ ). Источник находится по одну сторону решетки, точка наблюдения — по другую. Проведем поверхность  $\sigma$  так, чтобы она вплотную прилегла к решетке с той ее стороны, где находится точка наблюдения. Каковы амплитуды и фазы в различных точках поверхности  $\sigma$ ? На этот вопрос очень трудно дать точный ответ, но можно сделать следующее весьма естественное предположение: *амплитуды и фазы в соответственных точках решетки одинаковы.*

Применим основную идею принципа Гюйгенса—Френеля.

Из только что сделанного предположения следует, что совокупность фиктивных источников, «покрывающих» отдельный элемент решетки, посылает в точку наблюдения колебание амплитуды  $a(R_0, R, \theta)$ , одинаковой для всех элементов, и что разность фаз между результирующими колебаниями от смежных элементов одинакова и равна  $kd \sin \theta$ . Основная идея принципа Гюйгенса—Френеля и сделанное выше предположение сводят, таким образом, задачу о дифракции Фраунгофера на решетке к уже хорошо известной нам задаче о суперпозиции  $N$  колебаний одинаковой амплитуды, фазы которых образуют арифметическую прогрессию. Мы можем написать для результирующей интенсивности подобно (8.7):

$$A^2 = a^2(R_0, R, \theta) \frac{\sin^2 \left( N \frac{kd \sin \theta}{2} \right)}{\sin^2 \left( \frac{kd \sin \theta}{2} \right)}. \quad (9.4)$$



Зависимость множителя  $a^2(R_0, R, \theta)$  от  $R_0$  и  $R$  очевидна: он обратно пропорционален  $R_0^2 R^2$ . Зависимость же от  $\theta$  определяется весьма сложными соотношениями и в большинстве случаев нам заранее в точности не известна. Зато второй множитель, играющий наиболее важную роль, мы сразу смогли написать, пользуясь принципом Гюйгенса—Френеля.

Формула (9.4) показывает, что распределение интенсивности на большом расстоянии от дифракционной решетки описывается диаграммой направленности, похожей на ту, которую дает решетка из одинаковых синфазных излучателей рис. 289. Имеется ряд главных максимумов под углами, определяемыми уравнением

$$\sin \theta = m \frac{\lambda}{d} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Распределение интенсивностей между главными максимумами определяется функцией  $a^2(R_0, R, \theta)$ , зависящей от свойств отдельного элемента

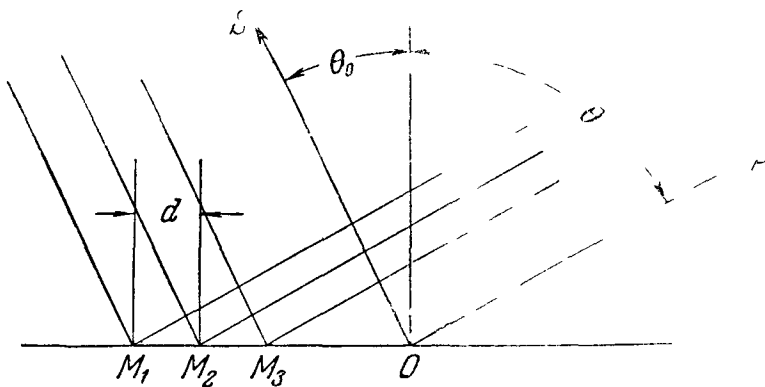


Рис. 348. Косое падение на отражательную решетку.

решетки и различной, вообще говоря, для различных решеток одного и того же периода.

Опыт вполне подтверждает полученный результат. Нужно, однако, подчеркнуть, что в оптическом случае условия (9.3) трудно осуществимы. При  $D = 1$  см (обычный порядок величины для оптических дифракционных решеток) условие (9.3) дает для  $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$  см

$$R_0 \gg 50 \text{ м}, \quad R \gg 50 \text{ м}.$$

Мы увидим, однако (§ 11), что, пользуясь фокусировкой, легко создать для света условия, эквивалентные (9.3), при гораздо меньших расстояниях и наблюдать дифракцию Фраунгофера от решетки в обычной лабораторной обстановке.

**3. Косое падение.** Рассмотрим для определенности отражательную решетку (рис. 348). Все, что здесь будет сказано, легко перенести на случай «пропускающей» решетки.

При косом падении ( $\theta_0 \neq 0$ ) первичная волна имеет в различных местах решетки различную фазу. Проведем и здесь поверхность  $\sigma$  так, чтобы она вплотную прилежала к решетке ( $\sigma$  той стороны, где находятся источник  $S$  и точка наблюдения  $P$ ), и сделаем предположение, являющееся естественным обобщением того, которое было положено в основу п. 2: фазы колебаний в соответственных точках решетки  $M_1, M_2, \dots, M_N$  составляют арифметическую прогрессию с разностью  $kd \sin \theta_0$ , определяемой разностью хода

$$SM_2 - SM_1 = SM_3 - SM_2 = \dots = SM_N - SM_{N-1}.$$

Если бы вторичные источники в ближайших соответственных точках имели одинаковую фазу, то колебания от них приходили бы в точку наблюдения  $P$  с разностью фаз  $-kd \sin \theta$ . Но поскольку вторичные источники имеют различные фазы (отличающиеся в каждом двух соседних точках на  $kd \sin \theta_0$ ), то разность фаз между колебаниями, приходящими в точку наблюдения от ближайших соответственных точек, будет равна

$$\epsilon = kd (\sin \theta_0 - \sin \theta). \quad (9.5)$$

Такова же, очевидно, разность фаз между результирующими колебаниями от двух смежных элементов решетки.

Итак, отдельные элементы решетки посылают в  $P$  колебания одинаковой амплитуды  $a(R_0, \theta_0, R, \theta)$ , фазы которых образуют арифметическую прогрессию с разностью (9.5). Следовательно, здесь результирующая интенсивность выражается формулой

$$A^2 = a^2(R_0, \theta_0, R, \theta) \frac{\sin^2 \left[ \frac{1}{2} Nkd (\sin \theta - \sin \theta_0) \right]}{\sin^2 \left[ \frac{1}{2} kd (\sin \theta - \sin \theta_0) \right]}. \quad (9.6)$$

Согласно (9.6) главные максимумы соответствуют теперь углам, удовлетворяющим условию

$$d (\sin \theta - \sin \theta_0) = m\lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (9.7)$$

причем непосредственный физический смысл имеют по-прежнему лишь значения  $|\sin \theta|$ , меньшие единицы. Число главных максимумов положительного порядка теперь меньше, чем число главных максимумов отрицательного порядка. При  $\theta_0$ , достаточно близком к  $\pi/2$ , имеются только максимумы отрицательного порядка.

Введем обозначение

$$\chi_m = \theta_m - \theta_0.$$

$\chi_m$  есть отклонение направления пучка, соответствующего  $m$ -му главному максимуму, от направления, в котором отражался бы свет от плоского зеркала, причем плоскость зеркала совпадала бы с плоскостью решетки. Если это отклонение мало, имеем приближенно

$$\sin(\theta_0 + \chi_m) = \sin \theta_0 + \chi_m \cos \theta_0,$$

откуда на основании (9.7)

$$\chi_m = m \frac{\lambda}{d \cos \theta_0}. \quad (9.8)$$

Таким образом,  $\chi_m$  тем больше, чем меньше  $\cos \theta_0$ , т. е. чем более косо падает свет на решетку.

Формула (9.8) указывает, что при угле падения  $\theta_0$  решетка периода  $d$  дает такое же угловое расхождение главных максимумов разных порядков, как в случае нормального падения ( $\theta_0 = 0$ ) решетка с *меньшим* периодом  $d' = d \cos \theta_0$ . В случае «скользящего» падения ( $\theta_0$  близко к  $\pi/2$ )  $d'$  гораздо меньше, чем  $d$ . Поэтому при скользящем падении получаются сильно расходящиеся дифрагированные пучки даже от таких решеток, период которых очень велик по сравнению с длиной волны. Удастся наблюдать, применяя очень косое падение, дифракцию рентгеновского излучения ( $\lambda$  порядка  $10^{-8}$  см) на оптической дифракционной решетке ( $d$  порядка  $10^{-4}$  см).

#### § 4. Принцип Гюйгенса—Френеля (продолжение): количественная формулировка

**1. Постановка задачи.** Руководствуясь общей идеей принципа Гюйгенса—Френеля, мы смогли частично (с точностью до множителя  $a^2$  и фазы) решить задачу о дифракции на решетке; для полного решения задачи о решетке, а также для решения других дифракционных задач этой общей идеи недостаточно. Нужно более точное количественное исследование.

Постараемся найти количественную формулировку принципа Гюйгенса—Френеля, пригодную для приближенного вычисления интенсивности и фазы в интересующих нас точках пространства.

Исследование будет состоять из двух этапов. *Первый:* отыскание связи между первичной волной и вторичными волнами, т. е. соотношения между величинами, характеризующими реальное колебание в точках элемента  $d\sigma$  вспомогательной поверхности  $\sigma$  (рис. 346), и величинами, характеризующими «находящиеся» на элементе  $d\sigma$  фиктивные вторичные источники. *Второй:* построение первичной волны, т. е. отыскание метода, позволяющего узнать хотя бы приближенно, каковы при данных условиях опыта реальные колебания в различных точках целесообразно выбранной вспомогательной поверхности  $\sigma$ .

**2. Связь между первичной волной и вторичными волнами.** Рассмотрим распространение плоской волны в однородной среде. Это поможет нам найти искомую связь, так как здесь мы заранее знаем, какова первичная волна и каков должен быть результат суперпозиции вторичных волн.

Итак, пусть распространяется волна

$$s = A \cos(\omega t - kz - \varphi).$$

Возьмем в качестве поверхности  $\sigma$  плоскость  $z = 0$ , перпендикулярную к направлению распространения. Тогда на поверхности  $\sigma$

$$s_\sigma = A \cos(\omega t - \varphi),$$

а в произвольной точке  $P$  ( $z = z_P$ )

$$s_P = A \cos(\omega t - kz_P - \varphi). \quad (9.9)$$

Нас будут интересовать только те точки  $P$ , для которых  $z_P > 0$ , т. е. находящиеся с той стороны вспомогательной поверхности, куда распространяется волна. Задача состоит в том, чтобы представить реальное колебание  $s_P$  в таких точках как суперпозицию бесконечно малых колебаний  $ds_P$ , создаваемых фиктивными источниками, «находящимися» на отдельных элементах  $d\sigma$  поверхности  $\sigma$  (рис. 349).

Естественно принять, что фиктивные источники, «покрывающие» элемент  $d\sigma$ , создают в точке  $P$  колебание вида

$$ds_P = \frac{ad\sigma}{r} \cos(\omega t - \psi - kr),$$

где  $r$  — длина радиуса-вектора  $\mathbf{r}$ , проведенного из  $d\sigma$  в  $P$ ,  $a$  — величина, зависящая от амплитуды  $A$  реального колебания на элементе  $d\sigma$ ,  $\psi$  — величина, зависящая от фазы этого колебания. Так как амплитуда суммарной вторичной волны в точке  $P$  должна оказаться равной  $A$ , а ее фаза — равной

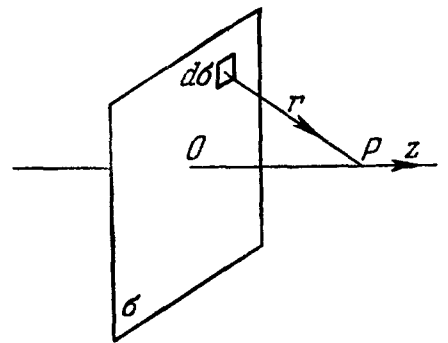


Рис. 349. К представлению колебания в точке  $P$  в виде суперпозиции вторичных волн.

$\varphi + kz_P$ , естественно принять, что амплитуда  $a \frac{d\sigma}{r}$  колебания, создаваемого в  $P$  *каждым* элементом  $d\sigma$ , пропорциональна  $A$ , а его фаза  $\psi + kr$  отличается на постоянную величину от  $\varphi + kr$ :

$$\frac{ad\sigma}{r} = \frac{KA d\sigma}{r}, \quad \psi = \varphi + \alpha,$$

где  $K$ ,  $\alpha$  не зависят ни от  $A$ , ни от  $r$ , ни от  $\varphi$ .

Принимая это предположение, напишем:

$$ds_P = \frac{KA d\sigma}{r} \cos(\omega t - \varphi - \alpha - kr), \quad (9.10)$$

$$s_P = \iint \frac{KA d\sigma}{r} \cos(\omega t - \varphi - \alpha - kr),$$

причем двойной интеграл берется по всей плоскости  $z = 0$ .

Сделаем, далее, простейшее предположение, что для интересующего нас  $z_P > 0$ , т. е. для  $r$ , образующего острый угол с нормалью к реальной волне (она направлена по оси  $z$  в сторону возрастающих  $z$ ), величина  $K$  не зависит от направления  $r$ .

В таком случае

$$s_P = KA \iint \frac{dx dy}{r} \cos(\omega t - \varphi - \alpha - kr). \quad (9.10a)$$

Этот двойной интеграл имеет такой же вид, как рассмотренный в гл. VIII (8.28). То обстоятельство, что там мы имеем дело с *реальными* вторичными источниками, а здесь — с фиктивными, не играет в данном вычислении никакой роли. Мы можем написать на основании (8.58)

$$s_P = KA\lambda \cos\left(\omega t - \varphi - \alpha - kz_P - \frac{\pi}{2}\right). \quad (9.11)$$

Но мы знаем, что  $s_P$  выражается формулой (9.9). Требуя, чтобы (9.11) было тождественно равно (9.9), получаем соотношения

$$K = \frac{1}{\lambda}, \quad \alpha = -\frac{\pi}{2}. \quad (9.12)$$

Подставляя (9.12) в (9.10), мы получаем, таким образом, для элементарной вторичной волны выражение

$$ds_P = \frac{Ad\sigma}{\lambda r} \cos\left(\omega t - \varphi - kr + \frac{\pi}{2}\right). \quad (9.13)$$

Первое из соотношений (9.12) обеспечивает равенство амплитуды суммарной вторичной волны в точке  $P$  и амплитуды реальной волны, второе — равенство их фаз. Второе условие может быть истолковано следующим образом. Согласно гл. VIII, § 7, если бы каждый из источников, заполняющих плоскость  $\sigma$ , создавал в точке  $P$  колебание с фазой  $\varphi + kr$ , создаваемое всеми этими источниками, суммарное колебание имело бы фазу  $\varphi + kz_P + \frac{\pi}{2}$ . Для того чтобы фаза суммарного колебания была равна  $\varphi + kz_P$ , необходимо, чтобы каждый источник посылал колебание с фазой  $\varphi + kr - \frac{\pi}{2}$ .

Заметим, что выражение (9.13) годится только для  $z_P > 0$ , т. е. только по ту сторону вспомогательной поверхности  $\sigma$ , куда распространяется реальная волна. При  $z_P < 0$  оно дало бы (как в случае реальных вторичных

источников, гл. VIII) волну, распространяющуюся в сторону отрицательных  $z$ , что противоречит условию задачи. В этом — одно из существенных отличий введенных здесь *фигтивных* вторичных источников от реальных вторичных источников, например колеблющихся электрических зарядов.

По смыслу принципа Гюйгенса — Френеля в случае первичной волны произвольной формы (например, шаровой, цилиндрической) соотношение между величинами, характеризующими первичную волну в заданном месте пространства, и «находящимися» там вторичными источниками, должно быть таким же, как в случае плоской первичной волны. Это — *локальное* (местное) соотношение, не зависящее от того, как ведет себя первичная волна в остальном пространстве. Поэтому, если первичная волна произвольной геометрической формы имеет на элементе  $d\sigma$  (рис. 346) амплитуду  $A$ , фазу  $\varphi$  и направление распространения  $\mathbf{n}$ , мы должны принять, раз уж мы приняли (9.13), что вторичная волна, посылаемая элементом  $d\sigma$  в направлениях, образующих острые углы с  $\mathbf{n}$  (остальные направления нас не будут интересовать), описывается также выражением (9.13).

Необходимо сделать два существенных замечания:

а) Мы видели в гл. VIII, § 8, что интеграл вида (9.10а) практически меняется, если ввести под знак интеграла дополнительный множитель, равный единице, при  $\mathbf{r}$ , направленном по оси  $z$ , и очень медленно спадающий с ростом угла между  $\mathbf{r}$  и осью  $z$ . Поэтому вместо  $K = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{r}$  можно принять следующее более общее соотношение:

$$K = \frac{1}{\lambda} F, \quad (9.12a)$$

где  $F = 1$  при  $\mathbf{r}$ , направленном по нормали  $\mathbf{n}$  к первичной волне, и очень мало отличается от единицы при не очень больших углах между  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{n}$ .

б) На том же основании, что и в гл. VIII, § 8, мы можем применять формулу (9.13) не только к случаю скалярных волн, но и к случаю, когда  $s$  есть одна из компонент вектора  $\mathbf{E}$  (или  $\mathbf{H}$ ) электромагнитной волны. В этом случае нужно себе представить, что вторичные источники излучают в сторону  $(\mathbf{r}\mathbf{n}) > 0$  волны, поляризованные так же, как если бы их излучали реальные источники с  $\mathbf{p}$ , параллельным всюду вектору  $\mathbf{E}$  реальной волны на вспомогательной поверхности.

3. **Приближенное построение первичной волны.** Представим себе, что на пути волны, испускаемой реальным точечным источником, стоит совершенно непрозрачный для этой волны тонкий экран, имеющий одно или несколько отверстий. Требуется найти колебание  $s_P$  в точке  $P$  за экраном. Такова одна из типичных дифракционных задач.

Возьмем в качестве вспомогательной поверхности  $\sigma$  поверхность, прилегающую вплотную к экрану с той стороны, где находится точка  $P$ , и затягивающую отверстия. Будем рассматривать колебание в  $P$  как суперпозицию волн, испускаемых фиктивными источниками, «находящимися» на поверхности  $\sigma$ :

$$s_P = \frac{1}{\lambda} \iint \frac{AF}{r} \cos \left( \omega t - \varphi - kr + \frac{\pi}{2} \right) d\sigma. \quad (9.14)$$

Здесь  $A$ ,  $\varphi$  — соответственно амплитуда и фаза первичной (реальной) волны  $s$  на элементе  $d\sigma$  поверхности,  $\sigma$ ,  $r$  — расстояние от этого элемента до точки  $P$ ; интегрирование распространено на всю поверхность  $\sigma$ . Все это находится в соответствии с тем, что было сказано в п. 2. Но на первый взгляд формула (9.14) кажется совершенно бесполезной: для того чтобы вычислить интеграл, нам нужно, прежде всего, узнать амплитуду  $A$

и фазу  $\varphi$  первичной волны во всех точках поверхности  $\sigma$ . А заранее мы их не знаем, так же как амплитуду и фазу интересующего нас колебания  $s_p$ .

Формула (9.14) становится пригодной для вычислений, если сделать, следуя Френелю, следующее предположение: будем считать, что на тех частях поверхности  $\sigma$ , которые прилегают к непрозрачным частям экрана, амплитуда первичной волны равна нулю ( $A = 0$ ), а на тех частях, которые затягивают отверстия,  $A$  и  $\varphi$  такие же, как если бы экрана не было. Тем самым подинтегральная функция полностью определена.

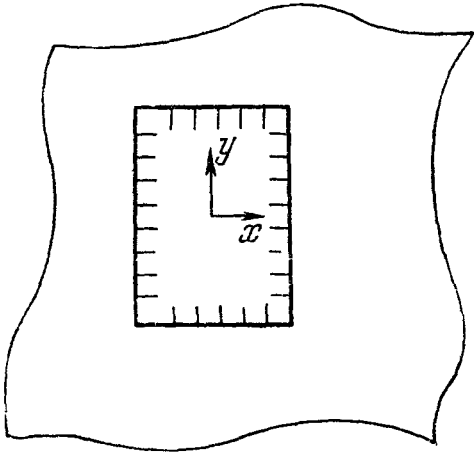


Рис. 350. Направление электрических силовых линий у краев прямоугольного отверстия в металлическом экране.

Но правильно ли предположение Френеля? Нетрудно видеть, что *нет*. Достаточно это показать на одном примере. Пусть  $s$  представляет собой компоненту  $E_y$  электрического поля  $\mathbf{E}$ , создаваемого в плоскости экрана (рис. 350)  $z = 0$  вертикальным вибратором. В отсутствие экрана в этой плоскости  $\mathbf{E}$  всюду вертикально и, следовательно,  $E = E_y \neq 0$ . Пусть экран — металлический. Граничные условия (7.58) требуют, чтобы вектор  $\mathbf{E}$  был на границе с металлом (мы считаем его бесконечно проводящим) перпендикулярен к его поверхности.

Следовательно, у вертикальных краев щели  $E_y = 0$ , т. е. заведомо не такое, как если бы не было экрана.

Тем не менее предположение Френеля оказывается весьма хорошим приближением в тех случаях, когда размеры отверстий велики по сравнению с длиной волны и прямые, ведущие от точек отверстий к точке  $P$ , образуют не очень большие углы с нормалью к поверхности  $\sigma$ . Результаты вычислений, основанных на предположении Френеля, находятся в таких случаях в хорошем согласии с результатами опыта. Это объясняется тем, что явления, подобные изображенному на рис. 350 (искажения волны около экрана), играют существенную роль только на расстояниях порядка  $\lambda$  от экрана. Мы будем рассматривать предположение Френеля как небезупречный, но практически весьма ценный рецепт, превращающий формулу (9.14) в действенный инструмент для приближенного решения большого и важного класса дифракционных задач.

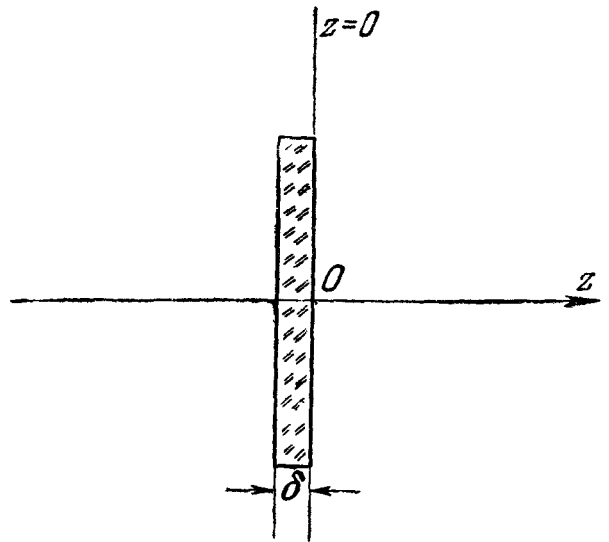


Рис. 351. Прозрачная пластинка на пути плоской волны.

Аналогичный рецепт может быть дан для случая, когда дифракция вызвана не присутствием непрозрачных тел, а тел, показатель преломления которых отличается от показателя преломления окружающей среды. Если, например, на пути плоской волны стоит прозрачная пластинка (рис. 351) с показателем преломления  $n$ , мы можем принять приближенно, что амплитуда первичной волны на всей плоскости  $z = 0$  одинакова, а фаза

на той части плоскости, которая прилегает к пластинке, отличается на

$$nk\delta - k\delta = (n - 1)k\delta \quad (9.15)$$

( $\delta$  — толщина пластинки) от фазы волны на остальной части этой плоскости.

### § 5. Простейшие дифракционные задачи с осевой симметрией

1. Непрозрачный экран с круглым отверстием. Пусть точечный источник  $S$  и точка наблюдения  $P$  находятся на прямой, проходящей через центр круглого отверстия в непрозрачном плоском бесконечном экране

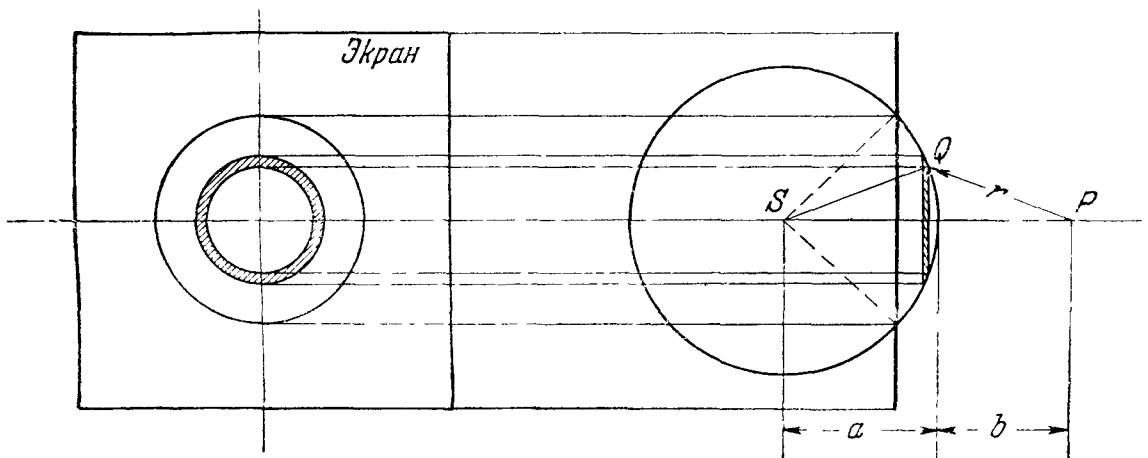


Рис. 352. Разбиение контрольной поверхности на кольца (вид со стороны точки  $P$  и сбоку).

и перпендикулярной к плоскости экрана. Здесь удобно взять в качестве поверхности  $\sigma$  поверхность, состоящую из части сферы с центром в  $S$ , проходящей через край отверстия, — мы ее назовем  $\sigma'$ , — и из части плоскости, образуемой стороной экрана, обращенной к  $P$ . На основании § 4

мы можем написать (по крайней мере, если всюду в отверстии угол  $\widehat{(n, r)}$  не очень велик)

$$s_P = \frac{A}{\lambda} \iint \frac{d\sigma}{r} \cos \left( \omega t - \varphi - kr + \frac{\pi}{2} \right),$$

где интеграл берется только по  $\sigma'$ ,  $A$  — амплитуда,  $\varphi$  — фаза колебания, создаваемого на  $\sigma'$  источником  $S$ .

Разобьем мысленно  $\sigma'$  на тонкие кольца, ограниченные близкими окружностями с центрами, расположенными на прямой  $SP$  (рис. 352). Для всех точек каждого кольца  $r$  одинаково, и следовательно, группируя элементы  $d\sigma$  по кольцам, мы можем написать:

$$s_P = \frac{A}{\lambda} \iint \frac{d\sigma_1}{r} \cos \left( \omega t - \varphi - kr + \frac{\pi}{2} \right), \quad (9.16)$$

где  $d\sigma_1$  — площадь кольца.

Заметим теперь, что

$$d\sigma_1 = 2\pi a \sin \alpha \cdot a d\alpha = 2\pi a^2 \sin \alpha d\alpha, \quad (9.17)$$

где  $\alpha$  — угол, под которым виден из  $S$  радиус кольца,  $a$  — радиус поверхности  $\sigma'$ .

Из треугольника  $SQP$  (рис. 352) имеем, обозначив  $b = SP - a$ ,

$$(a + b)^2 + a^2 - 2a(a + b) \cos \alpha = r^2,$$

откуда, дифференцируя при постоянных  $a$ ,  $b$ , получаем:

$$\sin a \, da = \frac{r \, dr}{a(a+b)} \quad (9.18)$$

Подставляя (9.18) в (9.17), имеем:

$$d\sigma_1 = \frac{2\pi a r \, dr}{a+b} \quad (9.19)$$

Подставляя (9.19) в (9.16), имеем, далее,

$$s_P = \frac{kaA}{a+b} \int_b^R \cos \left( \omega t - \varphi - kr + \frac{\pi}{2} \right) dr, \quad (9.20)$$

где  $R$  — расстояние от точки  $P$  до края отверстия.

Для исследования формулы (9.20) удобно сдвинуть начало счета времени вперед так, чтобы колебание, приходящее в  $P$  из ближайшей точки поверхности  $\sigma'$ , имело фазу нуль, и изменить масштаб длин, взяв за единицу величину  $\lambda/2\pi$ . Положим для этого

$$\left. \begin{aligned} k(r-b) &= \xi, & \text{откуда } k \, dr &= d\xi, \\ \omega t - \varphi - kb + \frac{\pi}{2} &= \omega t'. \end{aligned} \right\} \quad (9.21)$$

Подставляя (9.21) в (9.20), получаем:

$$s_P = A_0 \int_0^{\xi_1} \cos(\omega t' - \xi) \, d\xi. \quad (9.22)$$

где

$$\xi_1 = kR, \quad A_0 = \frac{a}{a+b} A. \quad (9.22a)$$

Здесь  $\xi_1$  есть измеренное в новом масштабе расстояние точки  $P$  от края отверстия, а  $A_0$  — та амплитуда, которая существовала бы в точке  $P$ , если бы экран был убран. В случае, когда на экран падает плоская волна (источник  $S$  находится в бесконечности,  $a = \infty$ ), имеем, очевидно,  $A_0 = A$ .

Интеграл, входящий в (9.22), есть суперпозиция элементарных колебаний вида

$$d\xi \cos(\omega t' - \xi), \quad (9.23)$$

амплитуды и фазы которых равны соответственно  $d\xi$  и  $\xi$ . Его удобно изобразить с помощью векторной диаграммы. Чтобы найти вид этой диаграммы, представим себе интеграл как предел суммы колебаний вида

$$\Delta\xi \cdot \cos(\omega t' - n\Delta\xi) \quad \left( n = 0, 1, 2, \dots, \frac{\xi_1}{\Delta\xi} \right) \quad (9.24)$$

при  $\Delta\xi \rightarrow 0$ . Векторная диаграмма суммы колебаний вида (9.24) (их амплитуды одинаковы,

а фазы образуют арифметическую прогрессию) есть, как мы знаем (рис. 35), часть правильного многоугольника. Следовательно, в пределе мы получим в качестве векторной диаграммы дугу окружности длины  $\xi_1$ , причем угол между касательными к ней в крайних точках также

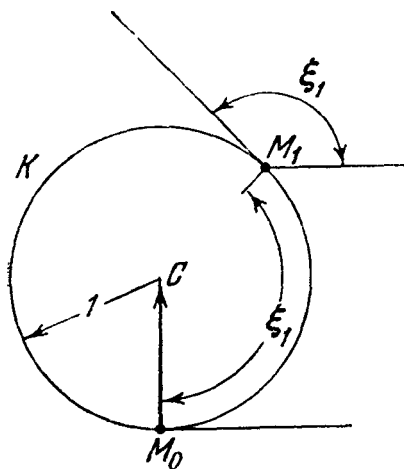


Рис. 353. Векторная диаграмма в предположении, что  $k=1$ .



равен  $\xi_1$ . Радиус окружности, в которой угол между двумя касательными равен длине дуги, заключенной между точками касания, равен, очевидно, единице.

Итак, интеграл формулы (9.22) представляет собой синусоидальное колебание, амплитуда и фаза которого могут быть найдены графически посредством построения, показанного на рис. 353. Строится окружность радиуса, равного единице; длина хорды, стягивающей дугу  $M_0M_1$ , имеющую длину  $\xi_1$ , равна амплитуде, угол между хордой и касательной в точке  $M_0$  — фазе этого колебания. Амплитуду колебания  $sr$  мы найдем, умножив длину хорды на  $A_0$ , его фазу — прибавив к найденному углу величину  $\varphi + kb - \frac{\pi}{2}$ .

Пусть радиус отверстия постепенно растет, начиная с нуля. При этом один конец  $M_0$  вектора, изображающего интеграл (9.23), неподвижен,

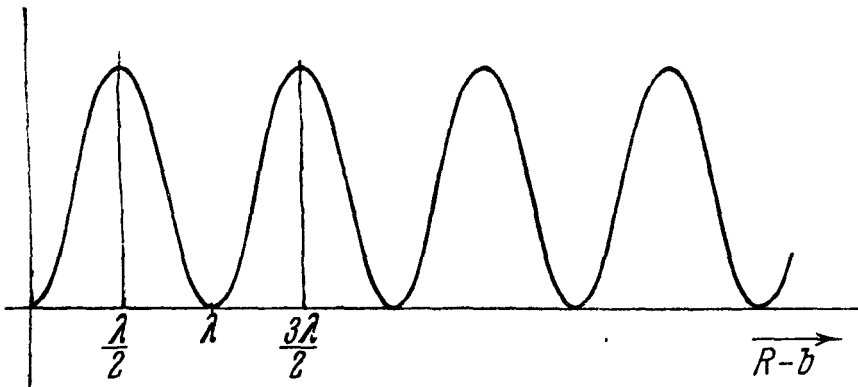


Рис. 354. Зависимость интенсивности от  $R-b$ .

другой конец  $M_1$  вращается против часовой стрелки по окружности (рис. 353; вектор  $M_0M_1$  на рисунке не показан).

Если  $m$  — число полуоборотов, описанных концом вектора, имеем:

$$\xi_1 = m\pi, \quad R = b + m \frac{\lambda}{2}.$$

На протяжении первого полуоборота ( $\xi_1$  растет от 0 до  $\pi$ ,  $R$  растет от  $b$  до  $b + \frac{\lambda}{2}$ ) амплитуда колебания в точке  $P$  растет от 0 до значения  $2A_0$ . При дальнейшем расширении отверстия, пока  $\xi_1$  растет от значения  $\pi$  до значения  $2\pi$  (и соответственно  $R$  от значения  $b + \frac{\lambda}{2}$  до  $b + \lambda$ ), происходит спадание амплитуды от значения  $2A_0$  снова до нуля, и т. д. Получается зависимость интенсивности от  $R - b$ , показанная на рис. 354.

Полученный результат легко может быть проверен на опыте для света, ультразвуковых волн, микрорадиоволн. Необходимо лишь, чтобы источник действительно можно было считать точечным, а край отверстия — окружностью. Условия, при которых источник света может считаться точечным, мы сможем указать лишь в гл. X. Условия, при которых реальный край отверстия может считаться окружностью, будут выяснены в § 10 этой главы.

**2. Зоны Френеля.** Часть поверхности  $\sigma'$ , находящуюся внутри окружности  $r = b + \frac{\lambda}{2}$ , называют *первой зоной Френеля*, часть этой поверхности, находящуюся между окружностями  $r = b + \frac{\lambda}{2}$  и  $r = b + \lambda$ , — *второй зоной Френеля*, и т. д. (рис. 355). Правая полуокружность рис. 353 изображает в определенном масштабе колебание, приходящее в  $P$  от всех элементарных

колец, составляющих первую зону Френеля, а также третью, пятую и т. д. Можно сказать то же самое о левой полуокружности и зонах Френеля четного номера. Колебания, приходящие от смежных зон Френеля, имеют противоположные фазы.

В том случае, когда падающая волна—плоская ( $a = \infty$ ), внешний радиус  $m$ -й зоны Френеля  $\rho_m$  равен, очевидно,

$$\rho_m = \sqrt{\left(b + m \frac{\lambda}{2}\right)^2 - b^2} = \sqrt{mb\lambda + \left(\frac{m\lambda}{2}\right)^2},$$

или приближенно, если  $m\lambda$  мало по сравнению с  $b$ , т. е.  $b \gg \lambda$  и зон не очень большого номера,

$$\rho_m = \sqrt{mb\lambda}. \quad (9.25)$$

Радиусы  $\rho_m$  растут с  $m$ , пока  $m$  мало, приблизительно как квадратные корни из чисел натурального ряда.

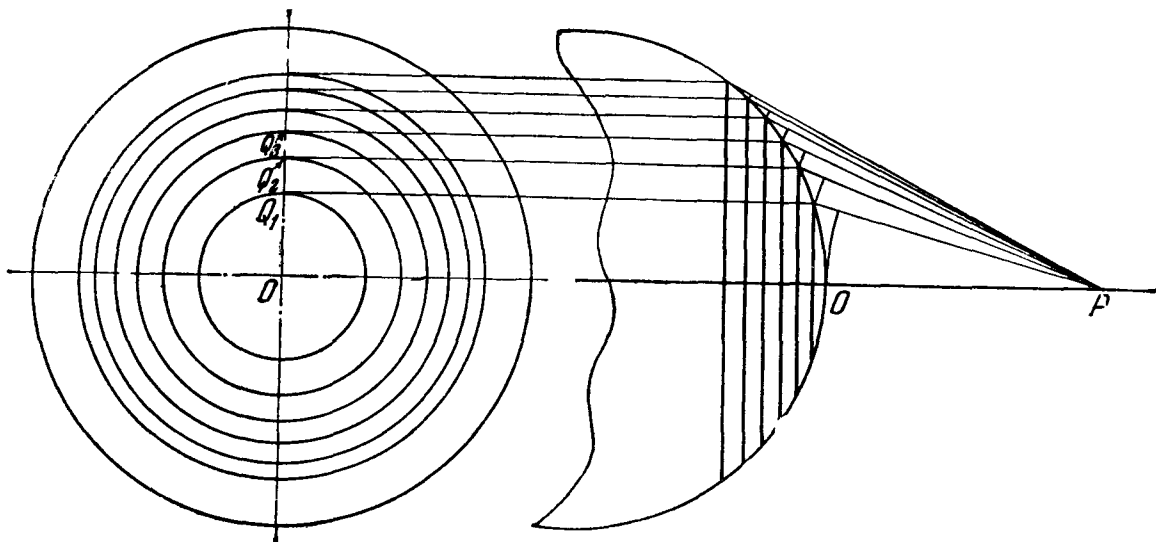


Рис. 355. Зоны Френеля (вид со стороны точки  $P$  и сбоку).  $PQ_1 = PO + \lambda/2$ ,  $PQ_2 = PQ_1 + \lambda/2$ ,  $PQ_3 = PQ_2 + \lambda/2$  и т. д.

В случае сферической падающей волны легко получить для внешних радиусов зон не очень большого номера с тем же приближением, что и (9.25), выражение

$$\rho_m = \sqrt{\frac{mab\lambda}{a+b}}.$$

Результат, изображаемый рис. 354, можно сформулировать так: если меняется число зон Френеля, укладывающихся в отверстии, интенсивность в точке  $P$  проходит через максимум, когда число зон—нечетное, и через нуль, когда число зон—четное.

Заметим, что параметр  $\xi_1$  и, следовательно, число зон Френеля, укладывающихся в отверстии, меняются не только при изменении размера отверстия, но и при изменении расстояния точек  $S$  или  $P$  от плоскости экрана.

Не следует удивляться тому, что согласно полученному в п. 1 результату при *увеличении* размера отверстия может происходить *уменьшение* интенсивности в точке  $P$ . Достаточно вспомнить, что колебания, посылаемые в  $P$  смежными зонами Френеля, имеют противоположные фазы.

**3. Свободно распространяющаяся волна.** Рассмотрим случай волны, распространяющейся в отсутствие экрана. Здесь  $s_P$  нам заранее известно на основании (9.22а)

$$s_P = A_0 \cos(\omega t - \varphi - kb). \quad (9.26)$$

Таким образом, колебание в отсутствие экрана есть половина колебания, которое существовало бы в точке  $P$ , если бы на пути волны был помещен экран с круглым отверстием, край которого совпадает с границей первой зоны Френеля. Следовательно, колебание (9.26) изображается на векторной диаграмме (рис. 353) вектором с началом в  $M_0$  и концом, совпадающим с центром  $C$  окружности.

Для того чтобы согласовать этот результат с результатами п. 1, нужно допустить (эта возможность была предусмотрена в § 4, п. 2), что величина  $F$  (точнее ее среднее значение по кольцу) постепенно уменьшается от 1 до 0 от кольца к кольцу по мере увеличения  $r^*$ , вследствие чего в действительности векторная диаграмма имеет вид не окружности, а спирали (рис. 356); первые витки спирали, для которых  $F$  можно считать равным единице, практически совпадают с окружностью рис. 353; ее предельная точка совпадает с центром  $C$  этой окружности.

4. Круглый экран. Рассмотрим случай, когда между источником  $S$  и точкой наблюдения находится экран в виде круглого диска из непрозрачного материала с центром на прямой  $SP$  (рис. 357), причем плоскость диска перпендикулярна к прямой  $SP$ .

Пусть в отсутствие экрана колебание в точке  $P$  выражается формулой (9.26). Каково колебание в точке  $P$  при наличии экрана?

Пусть  $R$ —расстояние от  $P$  до края экрана. Тогда, пользуясь векторной диаграммой рис. 356 и преобразованием масштаба (9.21), мы можем сказать, что «экран вычеркивает из векторной диаграммы» дугу  $M_0M$  длины  $\xi_1 = k(R - b)$ . Результирующее колебание изображается теперь

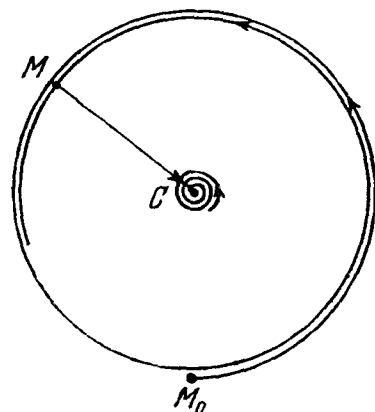


Рис. 356. Векторная диаграмма с учетом зависимости  $F$  от угла между  $r$  и  $n$ .

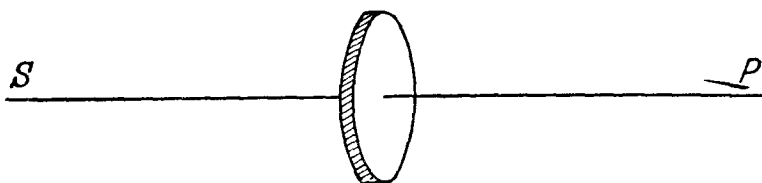


Рис. 357. Круглый непрозрачный экран на пути волны.

вектором с началом в точке  $M$  и концом в предельной точке спирали  $C$ . Если  $R - b$  не очень велико и угол  $(n, r)$  мал, точка  $M$  находится почти на окружности рис. 353 и амплитуда колебания практически такая же, как в случае  $\xi = 0$ , т. е. в отсутствие экрана!

Очевидно, мы приходим к тому же результату, заменив диск непрозрачным шаром с центром  $C$ .

Тот вывод, что согласно волновой теории света круглый экран почти не меняет освещенности на продолжении прямой, соединяющей точечный источник с центром экрана, был сделан Пуассоном, считавшим его противоречащим опыту и тем самым опровергающим эту теорию (1818 г.). Однако

\*) Вопрос о том, как именно меняется  $F$  от кольца к кольцу, не существен при той точности, которую мы здесь требуем от теории, и не может быть выяснен применяемыми методами. Теория, упомянутая в § 2, указывает, что для скалярной волны  $2F = 1 + \cos(n, r)$ .

Араго показал на опыте, что действительно в центре тени от шарика имеется светлая точка, где освещенность — такая же, как в отсутствие шарика. Этот опыт ознаменовал окончательную победу волновой теории света над корпускулярной.

### § 6. Фокусировка

1. Зонные пластинки. Представим себе, что с помощью непрозрачных экранов, имеющих вид колец подходящего размера, нам удалось закрыть

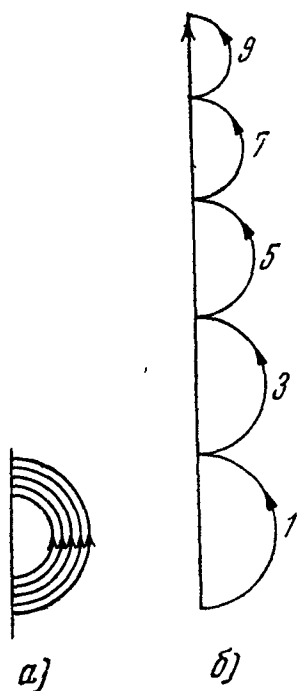


Рис. 358. Изменение векторной диаграммы рис. 356 в результате закрытия зон четного номера.

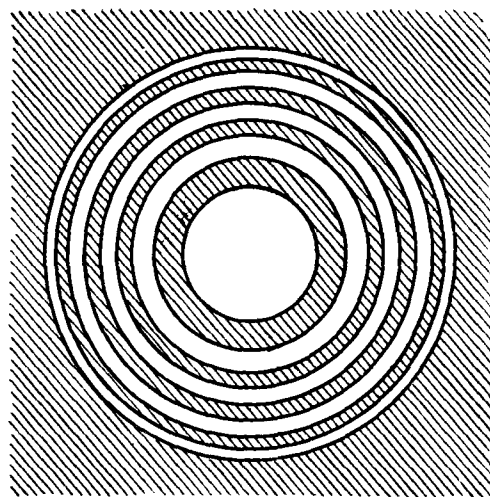


Рис. 359. Зонная пластинка, не пропускающая зоны четного номера.

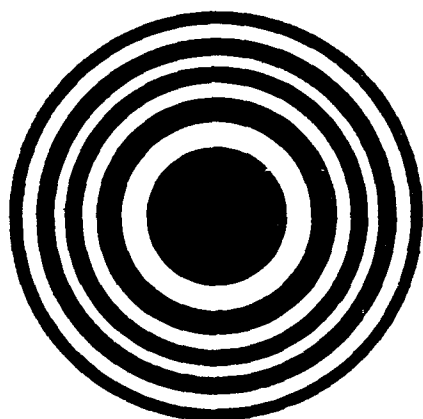


Рис. 360. Фотопластинка с негативным изображением этого чертежа есть зонная пластинка, не пропускающая зоны нечетного номера.

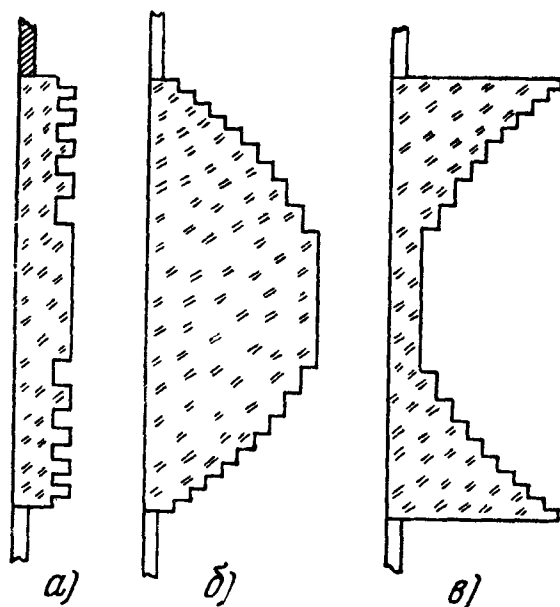


Рис. 361. Пластинки, изменяющие на  $\pi$  фазу света, приходящего от зон четного номера (рельеф сильно преувеличен).

все четные зоны Френеля, соответствующие определенной точке  $P$ . Тогда для этой точки векторная диаграмма принимает вид, показанный на

рис. 358, а. От спирали рис. 356 остаются только полувитки нечетного номера. Эту векторную диаграмму можно перечертить так, как показано на рис. 358, б. Ясно, что результирующая амплитуда будет во много раз больше, чем при свободном распространении волны, т. е. без экранов (аналогичный результат получится, если закрыть все нечетные зоны Френеля).

Такой опыт можно осуществить с помощью «зонной пластинки» (рис. 359). Зонную пластинку для света можно изготовить фотографическим путем, получив на фотопластинке негативное изображение чертежа, воспроизведенного на рис. 360. Для микрорадиоволн зонную пластинку легко вырезать из металлического листа, для ультразвука ее можно сделать из любого сильно отражающего или поглощающего материала.

Мы получили бы, конечно, еще большее увеличение амплитуды в точке  $P$ , если вместо того, чтобы *устранять* колебания от четных зон Френеля, находящиеся в противофазе по отношению к колебаниям от нечетных зон, нам удалось бы *повернуть* их фазы на  $\pi$ , т. е. сделать колебания от всех зон синфазными. Это можно сделать с помощью прозрачной пластинки, толщина которой в местах, соответствующих четным и нечетным зонам Френеля, отличается на величину  $\delta$  такую, что (см. § 4, п. 3)

$$(n - 1)k\delta = \pi, \text{ откуда } \delta = \frac{\lambda}{2(n - 1)},$$

где  $\lambda$  — длина волны в воздухе,  $n$  — показатель преломления пластинки (рис. 361, а). Такой же результат получится, если толщина пластинки уменьшается или увеличивается от  $m$ -й зоны к  $(m + 1)$ -й на ступеньки толщины  $\delta$  (рис. 361, б, в.) Фаза колебаний от  $m$ -й зоны поворачивается при этом на  $(m - 1)\pi$ , или, что сводится к тому же, поворачивается на  $\pi$  для четных зон и остается прежней для нечетных. Мы получаем векторную диаграмму, показанную на рис. 362, а, б. Амплитуда, создаваемая в  $P$  такой фазовой зонной

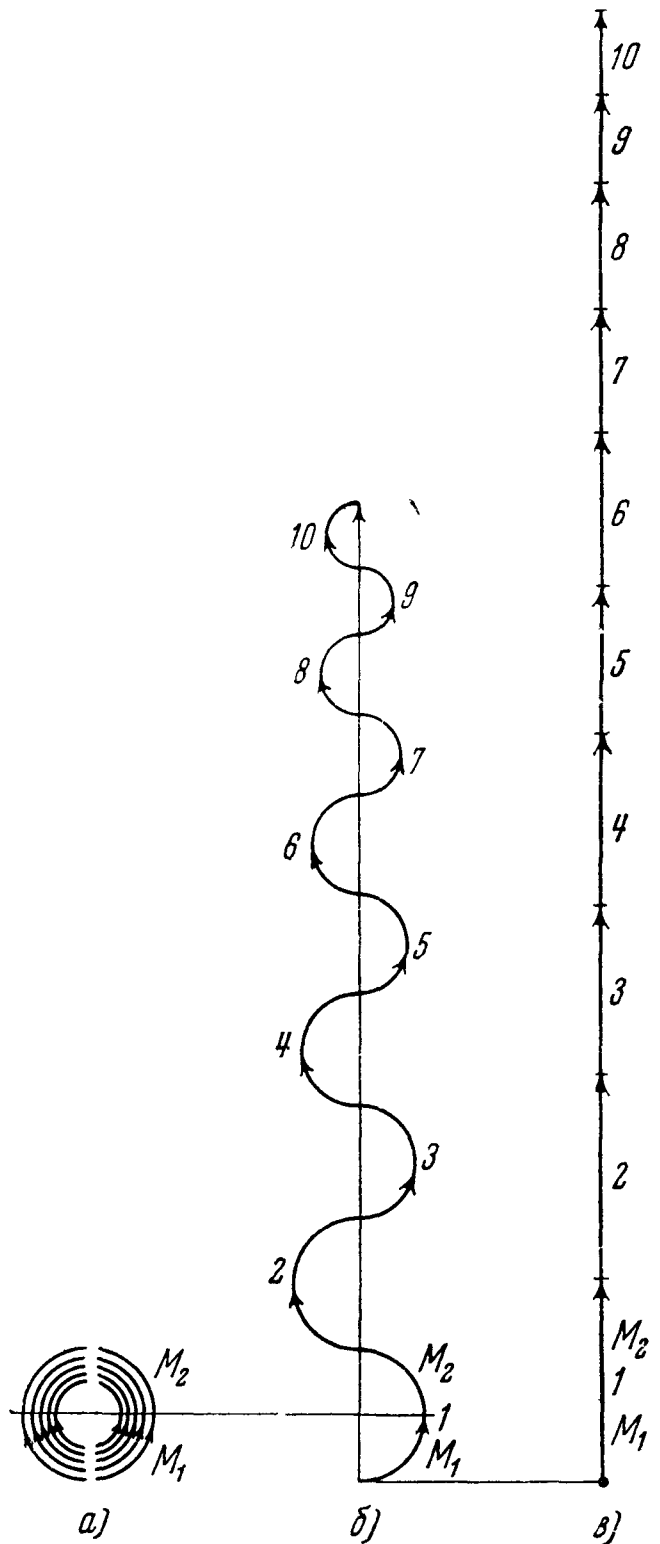


Рис. 362. Изменение [векторной] диаграммы рис. 356 в результате изменения на  $\pi$  фазы колебаний приходящих от зон четного номера (а, б), и полной [компенсации] разностей фаз колебаний от всех элементарных колец (б).

пластинкой, будет вдвое больше (интенсивность в четыре раза больше) чем в случае *амплитудной* зонной пластинки, о которой говорилось выше.

Достигнут ли этим предел возможного увеличения амплитуды в точке  $P$  при данном радиусе пластинки? Нет, так как остаются разности фаз между колебаниями, приходящими от различных колец одной и той же зоны, например колец, соответствующих элементам  $M_1, M_2$  векторной диаграммы (рис. 362, *a, б*). Нельзя ли скомпенсировать эти разности фаз и таким образом полностью «размотать» для точки  $P$  дугу спирали, изображающей приходящее в нее колебание, т. е. спрямить векторную диаграмму, как показано на рис. 362, *в*? Это будет достигнуто, очевидно, если мы заменим ступенчатое изменение толщины, показанное на рис. 361, *б*,

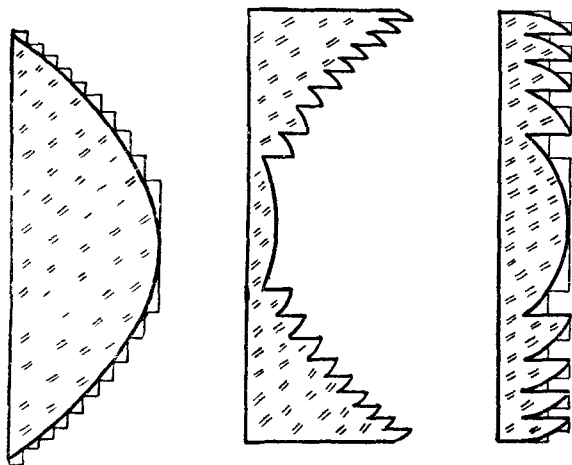


Рис. 363. Линза—предельный случай ступенчатой структуры рис. 361, *б*.

Рис. 364. Структуры, эквивалентные линзе рис. 363.

плавным изменением, показанным на рис. 363. В последнем случае получается не что иное, как *собирательная линза*, фокусом которой является точка  $P$ . Линзу можно рассматривать, таким образом, как предельный случай фазовой зонной пластинки (рис. 361, *б*).

Разумеется, ступенчатая пластинка рис. 361, *в* не превратится в собирательную линзу при замене ступенчатого профиля плавным. Здесь при такой замене полувиток спирали от каждой зоны Френеля будет скручиваться сильнее и превратится в полный виток (будет «набегать» разность фаз  $2\pi$  вместо  $\pi$ ); амплитуда колебания, создаваемого в точке  $P$  каждой зоной, обратится в нуль, и следовательно, обратится в нуль суммарная амплитуда от всех зон. Но действие фазовой пластинки рис. 361, *a* или 361, *в* усилится при изменении профиля, показанном на рис. 364: здесь опять происходит выпрямление полувитков от каждой зоны.

**2. Идеальная линза.** Мы называем *идеальной* линзу, в точности компенсирующую при определенном положении источника  $S$  разности фаз вторичных колебаний, приходящих в некоторую точку (фокус)  $P$ . Такая линза является телом вращения около некоторой оси, называемой оптической осью линзы. Если точка  $S$  находится в бесконечности на оптической оси, точка  $P$  называется главным фокусом линзы и обычно обозначается буквой  $F$ .

Пусть линза ограничена плоской и выпуклой поверхностями. Найдем, какова должна быть выпуклая поверхность для того, чтобы линза была идеальной в случае, когда источник находится в бесконечно удаленной точке оптической оси.

Разность фаз колебаний, приходящих в  $F$  из точек  $O$  и  $M$  (рис. 365), равна

$$k[MF - (nQO + OF)].$$

Для того чтобы  $F$  была главным фокусом, должно быть для любой точки  $M$

$$MF = (nQO + OF)$$

или, если обозначить

$$OF = f, \quad QM = \rho, \quad QO = \zeta$$

( $f$  называется фокусным расстоянием),

$$\sqrt{(f + \zeta)^2 + \rho^2} = n\zeta + f,$$

откуда

$$\rho^2 = 2f(n - 1)\zeta + (n^2 - 1)\zeta^2. \quad (9.27)$$

Таково уравнение выпуклой поверхности нашей идеальной линзы. Эта поверхность — гиперboloид вращения с вершиной  $O$ . Радиус кривизны этого гиперboloида в его вершине, как легко вычислить, равен  $(n - 1)f$ .

В случае, когда источник  $S$  находится на конечном расстоянии, возможна идеальная линза вида, показанного на рис. 366. Она ограничена сферической поверхностью с центром в  $S$  и поверхностью, удовлетворяющей условию

$$n \cdot AB + BP = \text{const.}$$

Нахождение уравнения этой поверхности предоставляется читателю.

До сих пор говорилось только о колебании в фокусе  $P$  (в частности  $F$ ). Ясно, что в точках, достаточно близких к фокусу, разности фаз между вторичными волнами сколь угодно малы и, следовательно, амплитуда сколь угодно мало отличается от амплитуды в фокусе. Следовательно, фокус окружен некоторой областью, имеющей конечные размеры, где интенсивность (в оптике освещенность) — того же порядка, что в самом фокусе. Эта область называется *изображением* точки  $S$ . Таким образом, изображение точечного источника, даваемое идеальной линзой, не является точкой.

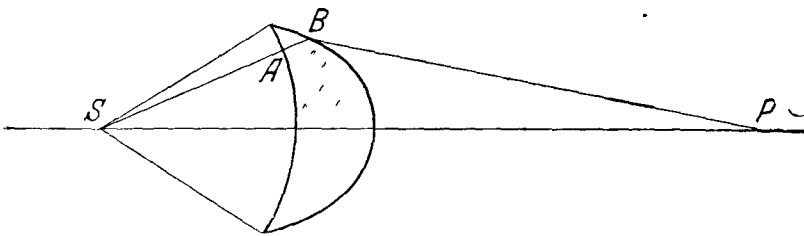


Рис. 366. К выводу уравнения поверхности идеальной линзы для фокусировки сферической волны.

а) **П о п е р е ч н ы й р а з м е р.** Очевидно, освещенность уже будет существенно меньше, чем в фокусе  $P$  (рис. 367), в такой точке  $P'$  ( $P'P \perp OP$ ), для которой

$$NP' - MP' = \lambda, \quad (9.28)$$

причем

$$MP = NP \quad (9.29)$$

( $M, N$  — концы одного из диаметров контура линзы). Действительно, в точке  $P'$  колебания, приходящие из окрестности точки  $M$ , гасятся колебаниями, приходящими из окрестности точки  $Q$ , лежащей на оптической оси  $SP$  (разность хода  $\lambda/2$ ), колебания, приходящие из окрестности точки  $M'$ , — колебаниями, приходящими из окрестности точки  $Q'$  (та же разность хода), и т. д. Обозначая расстояние  $2PP'$  буквой  $\delta_1$ , имеем приближенно из рис. 367

$$MP' = MP - \frac{\delta_1}{2} \sin \alpha, \quad NP' = NP + \frac{\delta_1}{2} \sin \alpha, \quad (9.30)$$

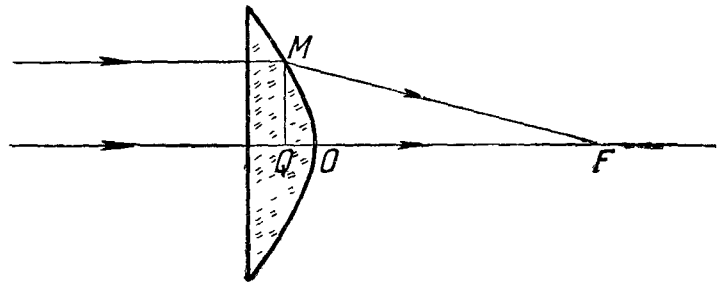


Рис. 365. К выводу уравнения поверхности идеальной линзы для фокусировки плоской волны.

Нетрудно оценить порядок величины изображения точки, даваемого идеальной линзой.

где  $\alpha$  — угол  $MPQ$ ; угол  $2\alpha$  мы будем называть *выходной апертурой* линзы. На основании (9.28), (9.29), (9.30) имеем:

$$\delta_1 \sin \alpha = \lambda,$$

откуда

$$\delta_1 = \frac{\lambda}{\sin \alpha}. \quad (9.31)$$

К вопросу о распределении интенсивности в плоскости изображения мы еще вернемся в § 11.

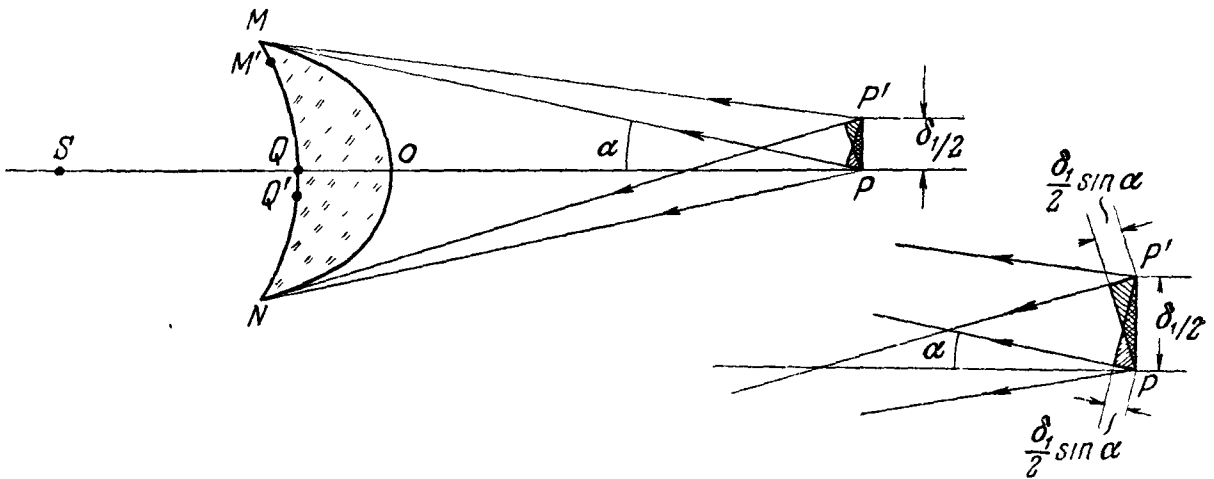


Рис. 367. К оценке поперечного размера изображения точки  $S$ .

б) Продольный размер. Очевидно, освещенность будет существенно меньше, чем в  $P$ , в такой точке  $P''$  оптической оси (рис. 368),

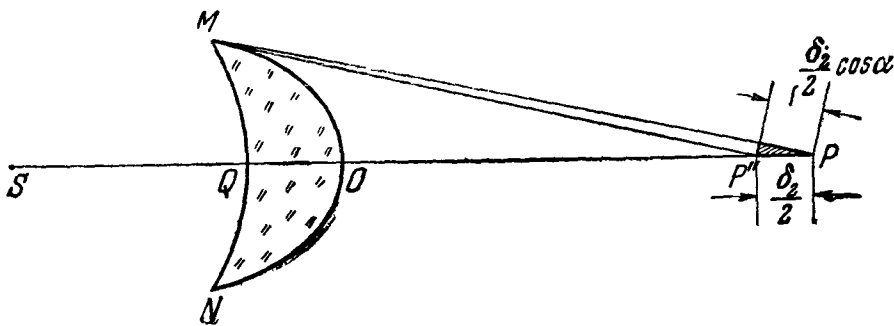


Рис. 368. К оценке продольного размера изображения точки  $S$ .

для которой линза эквивалентна отверстию, содержащему две зоны Френеля, т. е.

$$MP'' - (nQO + OP'') = \lambda, \quad (9.32)$$

причем

$$MP - (nQO + OP) = 0. \quad (9.32a)$$

Последнее равенство следует из определения идеальной линзы. Обозначив  $2PP''$  буквой  $\delta_2$ , имеем:

$$OP'' = OP - \frac{\delta_2}{2} \quad (9.33)$$

и, кроме того (приближенно),

$$MP'' = MP - \frac{\delta_2}{2} \cos \alpha. \quad (9.34)$$



На основании (9.32), (9.32а), (9.33), (9.34) получаем:

$$\delta_2 \frac{1 - \cos \alpha}{2} = \lambda$$

или

$$\delta_2 = \frac{\lambda}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}. \quad (9.35)$$

Формулы (9.31), (9.35) показывают, что размеры изображения тем меньше, чем меньше длина волны и чем больше апертура линзы. Если угол  $2\lambda$  близок к  $90^\circ$  (больше  $90^\circ$  он, разумеется, быть не может), имеем приближенно:

$$\delta_1 = \lambda, \quad \delta_2 = 2\lambda.$$

Таким образом, наименьшие возможные размеры изображения — порядка длины волны.

Чем меньше длина электромагнитной (в частности, световой) или акустической волны, тем лучше можно приблизиться, взяв линзу с очень большой апертурой, к точечному изображению точечного источника.

Поток энергии, входящий в линзу, равен величине вектора Умова — Пойнтинга  $S_0$  в падающей волне, умноженной на площадь отверстия  $\Pi$ . Линза концентрирует этот поток энергии. Его сечение в плоскости изображения (плоскость, перпендикулярная к оптической оси, проходящей через фокус) имеет на основании (9.31) площадь порядка  $\pi (\lambda/\sin \alpha)^2$ .

Обозначив  $S$  среднюю плотность потока энергии через сечение изображения, имеем согласно закону сохранения энергии

$$S\pi \left( \frac{\lambda}{\sin \alpha} \right)^2 = S_0\Pi,$$

откуда

$$\frac{S}{S_0} = \frac{\Pi \sin^2 \alpha}{\pi \lambda^2}.$$

При данной  $\lambda$  это отношение, называемое в радиофизике *выигрышем* линзы, может быть сделано сколь угодно большим посредством увеличения  $\Pi$ , а при данных  $\Pi$  и  $\alpha$  — путем уменьшения  $\lambda$ .

**3. Аберрация. Идеальный объектив.** Речь шла об идеальной линзе, точно компенсирующей в некоторой точке  $P$  разности фаз всех вторичных волн при определенном положении точечного источника  $S$ . Если сместить источник  $S$  вдоль оптической оси или перпендикулярно к ней, то, как легко проверить вычислением, уже не будет такой точки, для которой разности фаз вторичных волн компенсируются точно. Это отсутствие точек полной компенсации разностей фаз для всех положений источника, кроме одного, мы будем называть *геометрической аберрацией* идеальной линзы. Ясно, далее, из формулы (9.27), что идеальная линза компенсирует разности фаз вторичных волн при определенных  $S$  и  $P$  для *всех* длин волн лишь в том случае, если показатель преломления  $n$  не зависит от длины волны. Показатель преломления в оптике, как мы знаем (гл. VII), зависит от длины волны (дисперсия) и, следовательно, данная линза может быть идеальной, т. е. удовлетворять уравнению (9.27) лишь для одной определенной длины волны. Отсутствие полной компенсации разностей фаз в точке  $P$  для остальных длин волн (остальных цветов) называют *хроматической аберрацией*.

В оптике обычно имеют дело с линзами, ограниченными *сферическими* поверхностями. Ясно, что такие сферические линзы не могут быть

идеальными, т. е. не могут компенсировать в точности разности фаз вторичных волн ни при каком выборе  $S$  и  $P$ . Это отличие от идеальной линзы называется *сферической аберрацией*. Сферическая аберрация не играет существенной роли, если диаметр линзы настолько мал, что отрезки  $MM_0$ ,

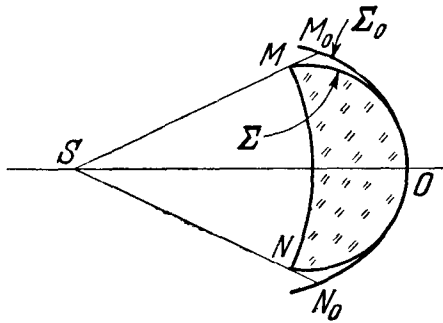


Рис. 369. Отличие между сферической и идеальной линзами.

ставим себе комбинацию линз (объектив), обладающую тем свойством, что каждой точке  $S$  определенной части пространства соответствует «сопряженная» ей точка  $P$ , для которой происходит, если точечный источник помещен в  $S$ , полная компенсация разностей фаз вторичных волн. Такую комбинацию линз мы будем называть *идеальным объективом*. Оптическая промышленность умеет изготавливать объективы, очень близкие к идеальным. Но даже в идеальном объективе изображение точечного источника не может быть точечным: изображение точки  $S$  — не сама точка  $P$ , а маленькая область, содержащая точку  $P$ . Искусство оптика-конструктора состоит в том, чтобы добиваться возможно лучшей компенсации разностей фаз в самих точках  $P$ . Но никакое искусство не может уничтожить ту расплывчатость изображения, о которой шла речь в п. 2: ее наименьшая величина определяется длиной световой волны  $\lambda$ .

**4. Радиолинзы.** С молекулярной точки зрения среда, преломляющая свет, есть часть пространства, где равномерно размещены резонаторы, совершающие вынужденные колебания под действием световой волны и испускающие вследствие этого вторичные волны (здесь идет речь о *реальных* вторичных источниках, рассмотренных в гл. VIII). Строя колоссально увеличенные модели светопреломляющей среды, удастся осуществить

$NN_0$  (рис. 369) малы по сравнению с длиной волны. Здесь  $\Sigma$  — сферическая поверхность, а  $\Sigma_0$  — соприкасающаяся с ней в точке  $O$  поверхность, удовлетворяющая условию (9.27). Однако уменьшение сферической аберрации путем уменьшения диаметра линзы вызовет увеличение дифракционной расплывчатости изображения, рассмотренной в п. 2.

В основе техники изготовления оптических инструментов лежат детально разработанные методы компенсации аберраций путем комбинирования сферических линз различной кривизны, различного показателя преломления и различной дисперсии. Пред-

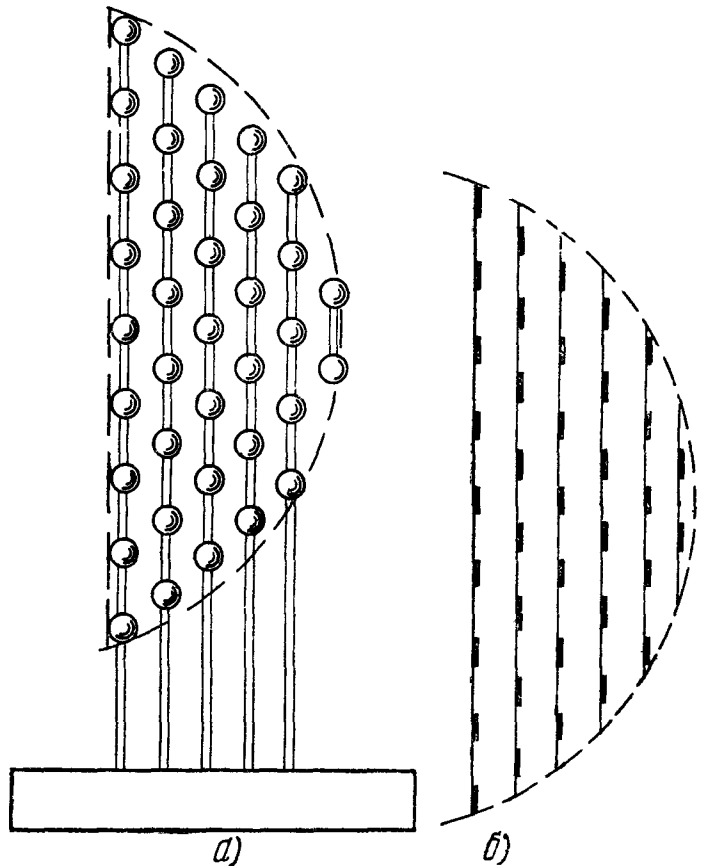


Рис. 370. Линзы для микрорадиоволн (разрез):  $a$  — металлические шарики, укрепленные на диэлектрических стержнях;  $b$  — металлические проволочки, укрепленные на тонких листах из диэлектрического материала.

линзы для фокусировки микрорадиоволн. Схемы некоторых радиолинз показаны на рис. 370, *а*, *б*. Первая построена из металлических шариков, вторая — из отрезков проволоки. Те и другие играют роль реальных вторичных источников. Здесь выпуклую поверхность легко выполнить в виде гиперboloида вращения и избежать, таким образом, сферической аберрации. Хроматическая аберрация, разумеется, существует и здесь, так как поляризуемость каждого шарика или проволоочки зависит от частоты (ср. гл. VIII, § 9). Показатель преломления линзы из шариков не зависит, разумеется, от направления вектора  $\mathbf{E}$ ; такая линза имеет фокусное расстояние, не зависящее от поляризации радиоволн. Линза же из проволочек имеет гораздо больший показатель преломления для волн, в которых  $\mathbf{E}$  параллельно проволочкам, чем для волн, в которых  $\mathbf{E}$  перпендикулярно к ним. Поэтому она имеет на каждой частоте *два* фокусных расстояния — сравнительно небольшое для  $\mathbf{E}$  параллельного и очень большое для  $\mathbf{E}$ , перпендикулярного к проволочкам. Такая радиолинза подобна в этом отношении оптической линзе из материала, обладающего очень сильно выраженным двойным преломлением (ср. гл. VII, § 9).

## § 7. Дифракция от длинной прямой щели

1. Сведение к задаче о длинном прямом излучателе. В случае круглого отверстия или круглого экрана мы легко смогли вычислить амплитуду и фазу колебания в точках оси  $SP$ . Вычисление амплитуды и фазы в других точках требует математических знаний, выходящих за пределы тех, которые предполагаются у читателя этой книги (умение оперировать бесцелевыми функциями). Между тем очень важно полностью решить дифракционную задачу — выяснить, каковы амплитуды и фазы во всем пространстве. Это необходимо, в частности, для того, чтобы знать, насколько структура волны отличается от той, которая соответствовала бы геометрической оптике, а также при каких условиях и в каком смысле последняя может явиться хорошим приближением к действительности.

Легче всего полностью решить дифракционную задачу в случае непрозрачного экрана, прорезанного прямоугольным отверстием (рис. 371).

Мы будем считать, что точечный источник  $S$  находится в бесконечности, и возьмем за поверхность  $\sigma$  плоскость, прилегающую к экрану с неосвещенной стороны. Если принять допущения, сделанные в § 4, все вторичные источники, «покрывающие» ту часть плоскости, которая затягивает отверстие, имеют одинаковые амплитуду и фазу. Следовательно, принцип Гюйгенса — Френеля сводит задачу о прохождении плоской волны через прямоугольное отверстие к уже известной задаче о прямоугольном плоском излучателе. Мы получим достаточное приближение, ведя расчет так, как в гл. VIII, § 7, 8, пренебрегая, в частности, зависимостью  $K$  (см. § 4) от направления. Мы придем к выводу, что за экраном волна имеет такую же структуру, как волна, излучаемая пьезокварцевой прямоугольной пластинкой, все точки которой колеблются с одинаковой амплитудой и фазой.

Пусть волна, падающая на экран, описывается уравнением

$$s = A \cos(\omega t - kz).$$

Примем плоскость экрана за плоскость  $z = 0$ . Тогда согласно формулам (9.13), (9.14) (в последней мы здесь полагаем  $F = 1$ ) колебание, создаваемое элементом  $dx dy$  в произвольной точке наблюдения за экраном,

$$ds = \frac{A dx dy}{\lambda r} \cos\left(\omega t - kr + \frac{\pi}{2}\right),$$

а колебание, посылаемое в  $P$  всем отверстием, выражается формулой

$$s = \frac{A}{\lambda} \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{r} \cos \left( \omega t - kr + \frac{\pi}{2} \right) dy,$$

где  $x_1, x_2, y_1, y_2$  — координаты краев отверстия при начале координат в основании перпендикуляра, опущенного из  $P$  на плоскость экрана.

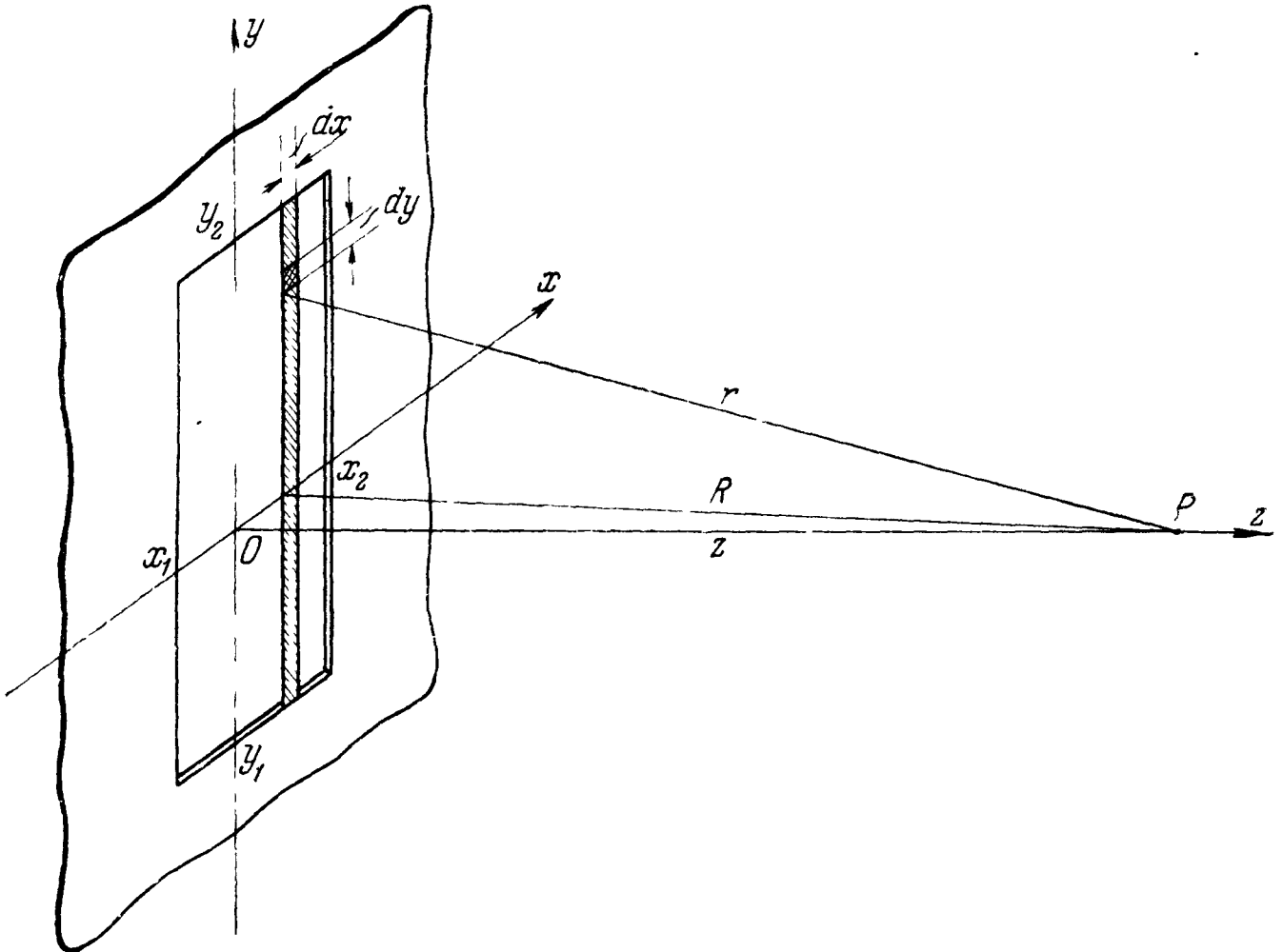


Рис. 371. К задаче о дифракции от прямоугольного отверстия. Пояснение обозначений.

Здесь, как и в гл. VIII, § 7, мы можем сначала найти, пользуясь спиралью Корню, колебание

$$\frac{A dx}{\lambda} \int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{r} \cos \left( \omega t - kr + \frac{\pi}{2} \right) dy,$$

создаваемое узкой лентой  $y_1 \leq y \leq y_2$  ширины  $dx$ , а затем, снова пользуясь спиралью Корню, найти  $s$  как суперпозицию колебаний, создаваемых всеми такими узкими лентами.

Мы предположим, что размеры отверстия по оси  $y$  настолько велики, что отверстие можно рассматривать как бесконечно длинную прямую щель. Как было показано в гл. VIII, § 7, можно считать ленту  $y_1 \leq y \leq y_2$  бесконечно длинной (т. е. создаваемое ею колебание — практически таким же, как если бы было  $y_1 = -\infty, y_2 = \infty$ ), если

$$|y_1| \gg \sqrt{R\lambda}, \quad |y_2| \gg \sqrt{R\lambda},$$

или, так как  $R$  и  $z$  одного порядка, если

$$|y_1| \gg \sqrt{z\lambda}, \quad |y_2| \gg \sqrt{z\lambda}.$$

При этом

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{r} \cos \left( \omega t - kr + \frac{\pi}{2} \right) dy = \sqrt{\frac{\lambda}{R}} \cos \left( \omega t - kR + \frac{\pi}{4} \right)$$

и, следовательно,

$$s = \frac{A}{\sqrt{\lambda}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{R}} \cos \left( \omega t - kR + \frac{\pi}{4} \right) dx \quad (9.36)$$

или, с теми же приближениями, что и при переходе от (8.53) к (8.56),

$$s = \frac{A}{\sqrt{2}} \int_{v_1}^{v_2} \cos \left( \omega t' - \frac{\pi v^2}{2} \right) dv, \quad (9.37)$$

где

$$\omega t' = \omega t - kz + \frac{\pi}{4},$$

$$v_1 = x_1 \sqrt{\frac{2}{z\lambda}}, \quad v_2 = x_2 \sqrt{\frac{2}{z\lambda}}. \quad (9.37a)$$

Заметим, что

$$v_2 - v_1 = (x_2 - x_1) \sqrt{\frac{2}{z\lambda}} = D \sqrt{\frac{2}{z\lambda}}, \quad (9.37b)$$

где  $D$  — ширина щели.

Проведем на плоскости  $\sigma$  прямые

$$x = \pm \sqrt{z\lambda}, \quad \pm \sqrt{2z\lambda}, \quad \pm \sqrt{3z\lambda} \dots$$

Расстояния между прямыми каждой пары равны внешним диаметрам 1-й, 2-й, 3-й, ... зон Френеля, соответствующих точке  $P$ . Полоски, на которые эти прямые разбивают плоскость  $\sigma$ , мы назовем поэтому полосами Френеля.

Мы рассмотрим сначала ряд характерных случаев, соответствующих различным соотношениям величин  $D$ ,  $z$ ,  $\lambda$ , а затем выясним, как меняется дифракционная картина при плавном изменении этих параметров.

**2. Явления при малых значениях волнового параметра.** Пусть

$$p = \frac{\sqrt{z\lambda}}{D} \ll 1.$$

Это условие может быть сформулировано и так: ширина щели велика по сравнению с радиусом первой зоны Френеля.

Если точка наблюдения  $P$  находится против оси щели (рис. 372, *a*), «работает» практически вся спираль Корню. Амплитуда интеграла формулы (9.37) равна  $\sqrt{2}$  и, следовательно, интенсивность равна  $A^2$ . Пусть теперь точка наблюдения  $P$  перемещается, скажем, влево. Вместе с ней перемещается и точка  $O$  — основание перпендикуляра, опущенного из  $P$  на плоскость экрана (рис. 371). Интенсивность в  $P$  не будет заметно меняться до тех пор, пока слева от  $O$  остается много френелевых полос, так

как из спирали выпадают лишь очень далекие и мелкие витки в ее левой половине. Но когда между  $O$  и краем щели останется лишь небольшое число этих полос, интенсивность будет заметно отклоняться от  $A^2$ . Она будет больше  $A^2$ , если число полос между  $O$  и краем щели — нечетное (рис. 372, б), и меньше  $A^2$ , если это число — четное (рис. 372, в). Наибольшая интенсивность будет приблизительно тогда, когда между  $O$  и краем щели умещается только первая левая полоса Френеля (рис. 372, г).

Пусть теперь  $O$  находится на самом краю щели (рис. 372, д). Теперь работает только правая половина спирали. Амплитуда интеграла в (9.37)

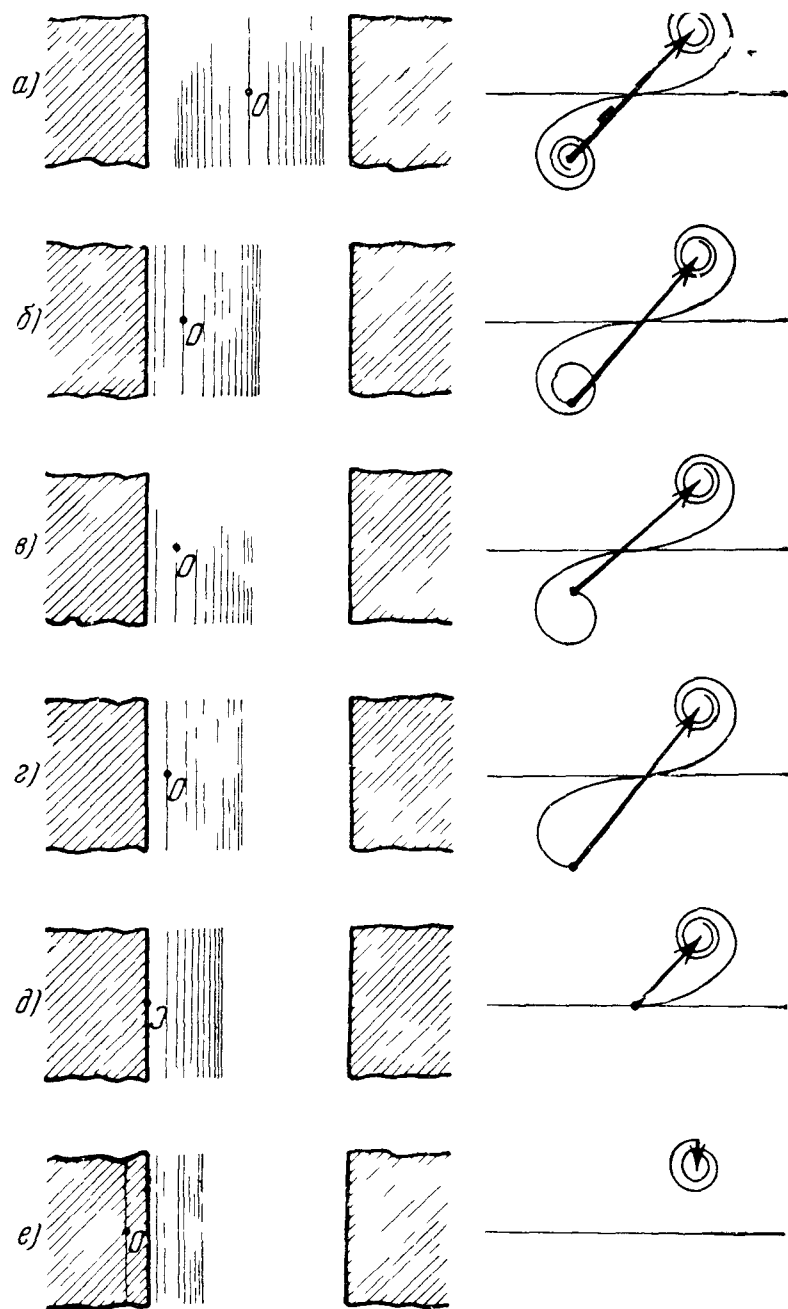


Рис. 372. Изменение амплитуды и фазы колебаний при перемещении точки  $P$  вдоль прямой, параллельной оси  $x$ .  $O$  — основание перпендикуляра, опущенного из  $P$  на плоскость  $z=0$ . Вертикальные линии — границы полос Френеля.

Здесь существуют две практически независимые группы дифракционных полос  $D_1$ ,  $D_2$ . Первая не зависит от положения правого края щели, вторая — от положения левого, лишь бы соблюдалось условие  $p \ll 1$ . Каждую из этих групп дифракционных полос можно назвать *дифракционной картиной от края экрана*.

равна  $\sqrt{2}/2$ , интенсивность в точке  $P$  равна  $A^2/4$  — четверти интенсивности в отсутствие экрана.

Пусть, наконец,  $P$  начинает углубляться в область «геометрической тени», т. е. в ту часть пространства, где (если говорить о свете) было бы абсолютно темно, если бы свет следовал закону прямолинейного распространения. Точка  $O$  теперь находится на экране, ограничивающем щель слева (рис. 372, е). Интенсивность теперь меньше, чем  $A^2/4$ , и монотонно убывает по мере углубления  $P$  в «геометрическую тень». Когда справа от  $O$  остается восемь покрытых экраном полос Френеля, т. е. расстояние от  $O$  до края щели равно  $\sqrt{8z\lambda}$ , интенсивность равна приблизительно  $0,0025 A^2$ .

Если точка  $O$  движется вправо, будет наблюдаться, разумеется, картина, симметричная по отношению к только что описанной. Мы приходим, таким образом, к распределению интенсивности, показанному на рис. 373. Пунктиром показано то распределение освещенности, которое указывает геометрическая оптика.

Распределение освещенности, наблюдаемое в опыте с лезвием (рис. 345; здесь можно считать  $D = \infty$ ), соответствует левой части графика рис. 373.

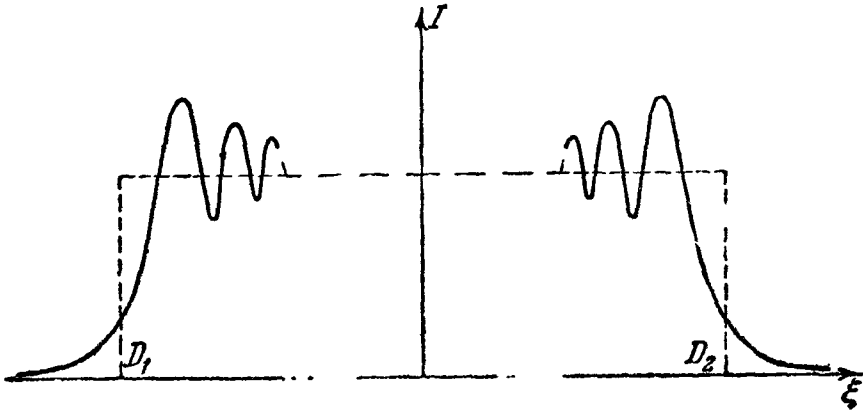


Рис. 373. Зависимость интенсивности от расстояний  $\xi = PP_0$  ( $P_0$ —точка находящаяся против середины щели,  $PP_0$ —параллельно оси  $x$ ).

**3. Явления при значениях волнового параметра порядка единицы.** В этом случае ширина щели и ширина первых полос Френеля—одного порядка. В отличие от предыдущего случая колебания интенсивности существуют уже около середины области «геометрического света», т. е. той области, которая была бы равномерно освещена, если бы свет следовал законам геометрической оптики.

На рис. 374 показана наглядная модель, позволяющая легко уяснить себе всю задачу. На толстую проволоку, согнутую в виде спирали Корню, надет «чулок»—гибкая нерастягивающаяся трубка; к концам чулка прикреплены тонкая резинка. Длина чулка изображает постоянную величину  $v_2 - v_1$ , длина резинки—амплитуду колебания в точке  $P$ . Перемещению точки  $P$  (изменению  $v_1$  и  $v_2$ ) соответствует скольжение чулка по проволоке: изменение длины резинки показывает, как при этом изменяется амплитуда в точке  $P$ .

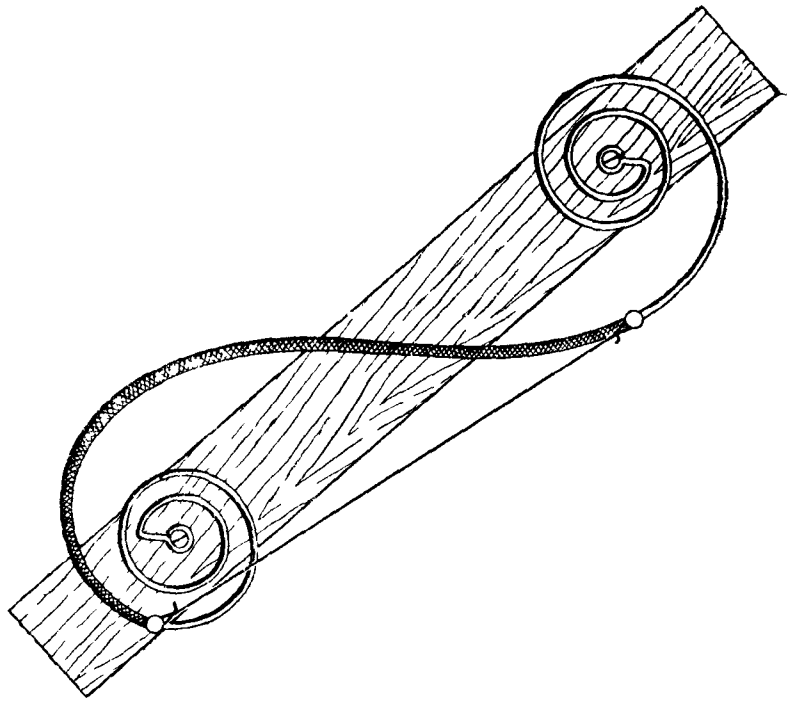


Рис. 374. Проволочная модель спирали Корню

Рассмотрим для определенности два частных случая:

а)  $D = 1,9 \sqrt{2z\lambda}$ , т. е.  $v_2 - v_1 = 1,9 \lambda$ ; интенсивность в точках, находящихся против середины щели,—минимальна (рис. 375, а). При перемещении точки наблюдения интенсивность попеременно растет и падает; эти колебания продолжаются (в отличие от случая  $p \ll 1$ ) в области геометрической тени.

б)  $D = 1,7 \sqrt{2z\lambda}$ , т. е.  $v_2 - v_1 = 1,7 \lambda$ . Интенсивность в точках, находящихся против середины щели,—максимальна (рис. 375, б). При перемещении точки наблюдения интенсивность попеременно падает и растет. Коле-

бания интенсивности и в этом случае продолжают в области геометрической тени. На рисунке пунктиром показано для сравнения то, что дает геометрическая оптика.

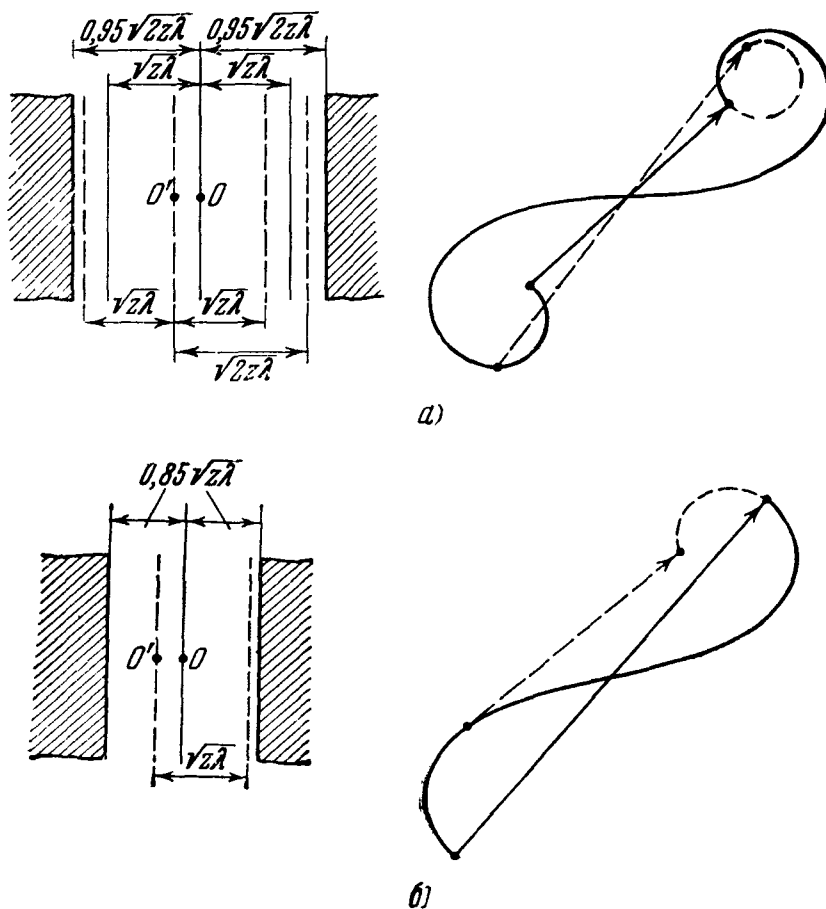


Рис. 375. *a*—минимум интенсивности при  $D=1,9\sqrt{2z\lambda}$ ;  
*б*—максимум интенсивности при  $D=1,7\sqrt{z\lambda}$ .

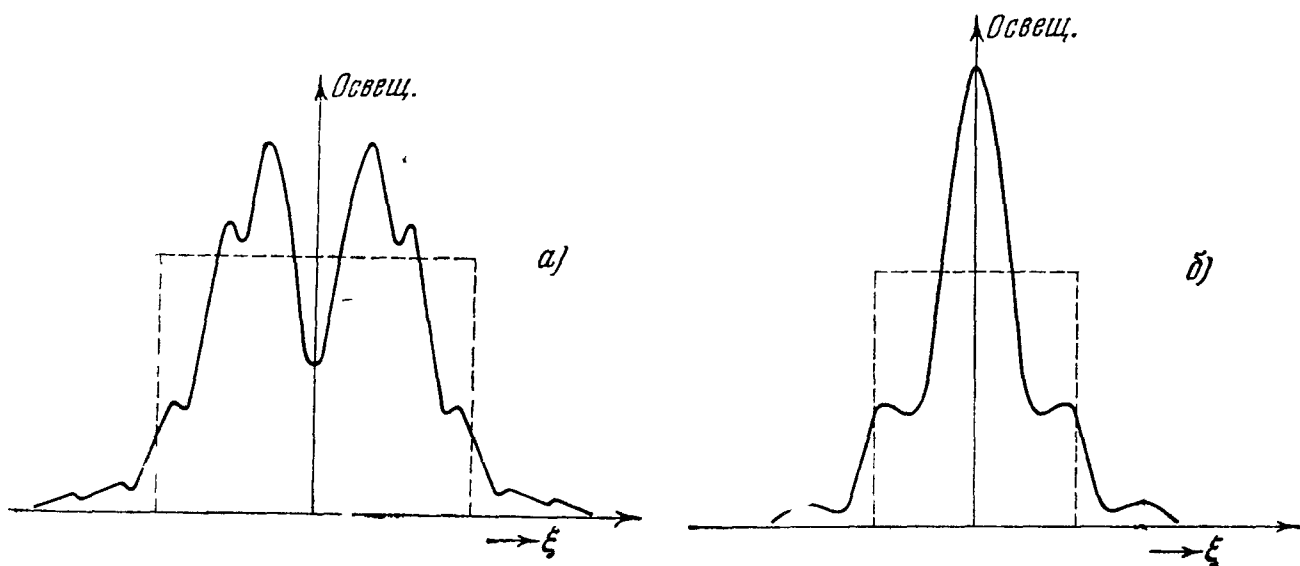


Рис. 376. Распределение интенсивности (освещенности) в плоскости, параллельной экрану *a*—при  $D=1,9\sqrt{2z\lambda}$ ; *б*—при  $D=1,7\sqrt{z\lambda}$ . Пунктир показывает распределение освещенности согласно геометрической оптике.

4. Явления при больших значениях волнового параметра (дифракция Фраунгофера). Пусть, наконец,

$$p = \frac{\sqrt{z\lambda}}{D} \gg 1.$$



Теперь ширина щели составляет малую часть ширины первой полосы Френеля. Для точки наблюдения  $P$ , расположенной в середине области «геометрического света», щель заполняет лишь небольшую часть полос номера  $\pm 1$  (рис. 377). Все колебания, приходящие в эту точку, имеют практически одинаковую фазу — дуга спирали, изображающая совокупность этих колебаний, практически совпадает с хордой. Когда точка  $P$  уходит в сторону, дуга скользит по спирали. Длина хорды, а следовательно, и амплитуда колебаний начинают существенно изменяться — а именно, уменьшаться — лишь тогда, когда дуга попадает на далекие витки спирали. Это будет при расстоянии тем большем, чем меньше дуга, т. е. чем уже щель. Таким образом, на экране, находящемся в области больших  $r$ , в середине дифракционной картины находится максимум интенсивности и притом тем более расплывчатый, чем уже щель.

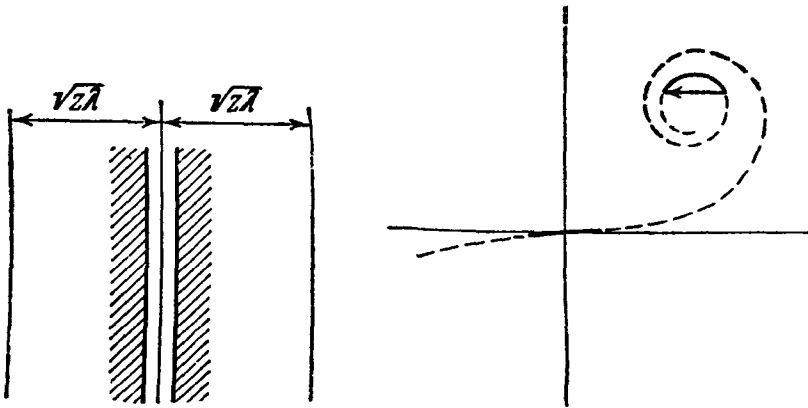


Рис. 377. Построение амплитуды при  $D \ll \sqrt{z\lambda}$ .

Область больших  $r$  есть область дифракции Фраунгофера, где разность хода колебаний, приходящих от полосок, отстоящих друг от друга на  $\xi$ , выражается с достаточным приближением формулой

$$\Delta = k\xi \sin \theta$$

(ср. § 3). Легко получить, исходя из этого, аналитическое выражение для интенсивности в области больших  $r$ . Вернемся к формуле (9.36) для колебания от отдельной полоски. Теперь

$$R = R_0 - \xi \sin \theta, \quad (9.38)$$

где  $R_0$  — расстояние от точки  $P$  до оси щели, причем  $\xi$  также отсчитывается от этой оси. Подставляя (9.38) в (9.36), принимая во внимание, что  $dx = d\xi$  и что краям щели соответствуют значения  $\xi = \pm (D/2)$ , а также, пренебрегая в амплитудном множителе  $1/\sqrt{R}$  разностью между  $R$  и  $R_0$ , имеем:

$$s = \frac{A}{\sqrt{\lambda R_0}} \int_{-\frac{D}{2}}^{+\frac{D}{2}} \cos(\omega t' + k\xi \sin \theta) d\xi,$$

где

$$\omega t' = \omega t - kR_0 + \frac{\pi}{4}.$$

Интеграл легко берется (ср. гл. VIII, § 7). Он равен

$$\frac{1}{k \sin \theta} \left[ \sin(k\xi \sin \theta + \omega t') \right]_{-\frac{D}{2}}^{+\frac{D}{2}} = \frac{2 \sin\left(\frac{kD}{2} \sin \theta\right)}{k \sin \theta} \cos \omega t'.$$

Следовательно,

$$= \frac{AD}{2\sqrt{\lambda R_0}} \frac{\sin\left(\frac{kD}{2} \sin\theta\right)}{\frac{kD}{2} \sin\theta} \cos\left(\omega t - kR_0 + \frac{\pi}{4}\right) \quad (9.39)$$

Таким образом, распределение интенсивности в дифракционной картине Фраунгофера от щели описывается с точностью до множителя, не зависящего от  $\theta$ , функцией

$$f(u) = \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2, \quad \text{где } u = \frac{kD}{2} \sin\theta$$

Ее график показан на рис. 378. Значению  $u=0$ , т. е. направлению  $\theta=0$ , соответствует центральный, наиболее высокий максимум интенсивности; значениям  $u$ , кратным  $\pi$ , т. е. направлениям

$$\sin\theta = n \frac{\lambda}{D}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (9.39a)$$

— нули интенсивности; между нулями расположены максимумы, постепенно убывающие по мере удаления от центрального максимума.

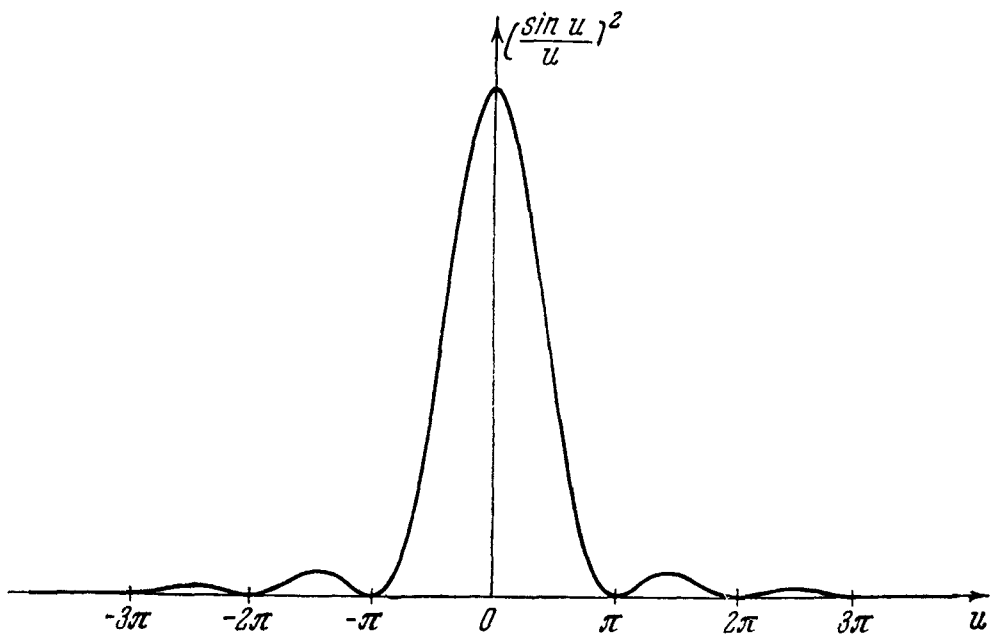


Рис. 378. График функции  $\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2$ .

**5. Изменение дифракционной картины при сужении щели.** Сужая постепенно щель, мы можем наблюдать на опыте последовательность дифракционных картин, изображенных на рис. 379.

Возьмем реальные условия демонстрационного опыта в оптике, например  $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$  см (зеленый свет),  $z = 200$  см,  $\sqrt{z\lambda} = 0,1$  см.

Пусть вначале щель имеет ширину 2 см ( $p=0,05$ ). Мы увидим распределение освещенности того типа, который показан на рис. 379, б. Уже здесь вполне заметно отличие распределения света от того, которое указывает геометрическая оптика. Но это отличие существует лишь в сравнительно узких полосах ширины порядка нескольких миллиметров по краям дифракционной картины. Пренебрегая им, можно сказать, что свет распространяется от щели к экрану в виде прямого пучка, т. е. равномерно заполняя незачерненную область (рис. 379, б). Нужно, однако, подчерк-

нуть, что уже здесь эта схема лишь *грубо* соответствует действительной картине, так как отклонения интенсивности от  $A^2$  вблизи границы геометрической тени вовсе не малы (рис. 373) и не уменьшаются при расширении щели. Расширение щели (рис. 379, а) приводит лишь к уменьшению *относительной* ширины области отклонения от геометрической оптики, т. е. отношения ширины той части пучка, где геометрическая оптика *грубо* неверна, к ширине всего пучка.

Будем теперь медленно сужать щель с помощью микрометрического винта. При  $D$  порядка 1 мм (при  $D = 1$  мм имеем  $\sqrt{z\lambda} = D$ ) дифракционные полосы заполняют всю освещенную область экрана, и теперь геометрическая оптика сохраняет лишь то отношение к действительности, что приблизительно указывает положение и ширину освещенной части экрана. Это схематически изображает рис. 379, в.

При дальнейшем сужении щели происходит нечто, в корне противоположное тому, чего следовало бы ожидать на основании геометрической оптики: в полном согласии с формулой (9.39) освещенная область не только не сужается, но *быстро расширяется* (рис. 379, г, д).

Мы убеждаемся, что невозможно, сужая щель, получить сколь угодно узкий пучок света, т. е. неограниченно приблизиться к тем бесконечно тонким световым лучам, с которыми оперирует геометрическая оптика (ср. § 1). Наименьшая толщина пучка, которую можно получить при длине волны  $\lambda$  на расстоянии  $z$  от щели, вырезающей пучок, — порядка ширины щели при  $p = 1$ , т. е. порядка  $\sqrt{z\lambda}$ . Так, на экране, отстоящем от щели на  $z = 200$  см, нельзя получить с зеленым светом светлое пятно ширины меньшей, чем 1 мм.

6. Изменение дифракционной картины при удалении от щели. Не менее поучительны наблюдения, которые можно сделать при заданной ширине щели, увеличивая постепенно расстояние  $z$ .

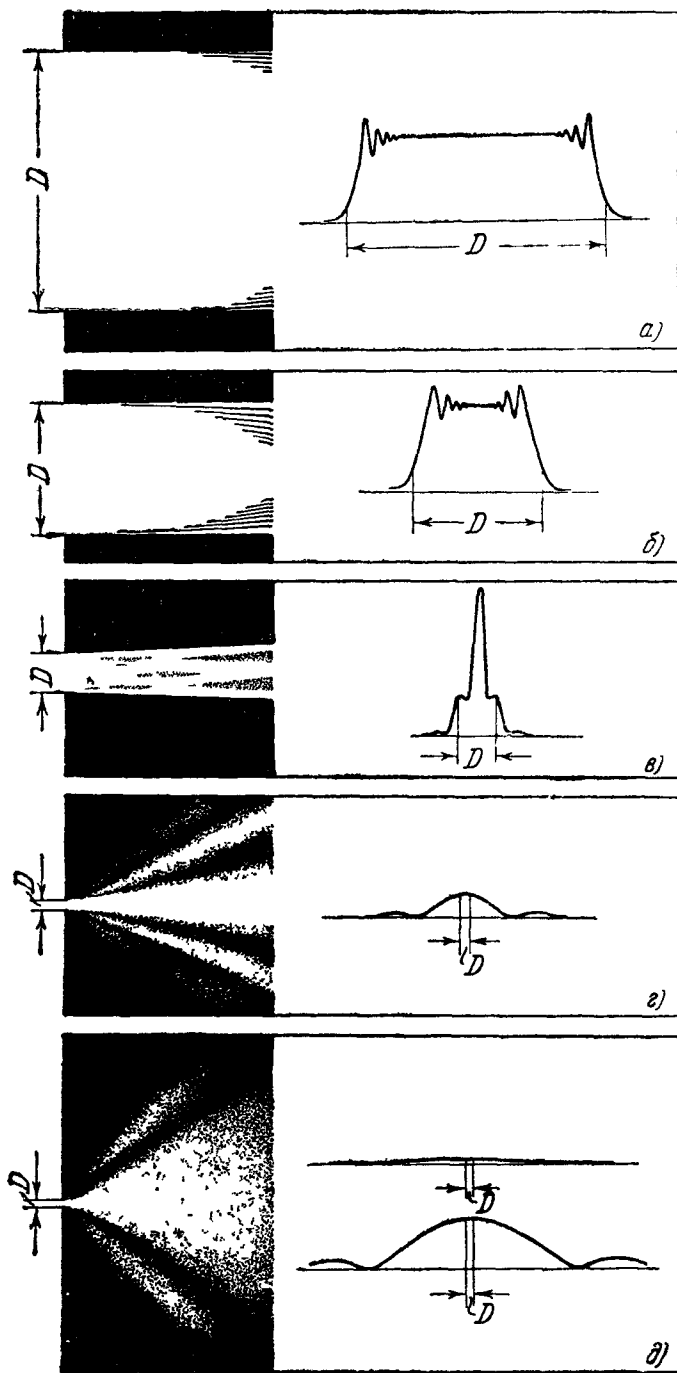


Рис. 379. Распределение освещенности в плоскости  $z = \text{const}$  при различной ширине щели  $D$ . Масштаб по оси  $z$  гораздо мельче масштаба по оси  $x$ . На рис. д верхний график построен в том же масштабе, что и графики г, на нижнем графике освещенность показана в увеличенном масштабе.

Пусть, скажем,  $D = 1$  мм. Начнем с  $z$  порядка 1 см. Мы не заметим невооруженным глазом на экране никаких дифракционных полос (они слишком мелки, их ширина порядка 0,1 мм). Однако их можно увидеть в лупу. Удаляя экран, мы будем сначала видеть на нем освещенную полосу практически постоянной ширины: свет, выходящий из щели, «распространяется прямолинейно». Но, когда  $z$  станет равно 26,3 см (при этом  $D = 1,9 \sqrt{2z\lambda}$ ), середина освещенной полосы станет темной и получится распределение освещенности, показанное на рис. 376, а. При дальнейшем росте  $z$  распределение освещенности будет меняться сложным образом, и здесь уже нельзя говорить о прямолинейном пучке.

Наконец, если мы сможем дойти до  $z$  порядка 10 м, то мы получим распределение освещенности типа, показанного на рис. 378, причем здесь уже относительная освещенность различных точек экрана — функция только угла  $\theta$ .

Итак, вблизи щели имеет место в грубом приближении геометрическая оптика, свет имеет вид «луча» постоянного сечения; вдали от щели свет распространяется «веером», тем более широким, чем уже щель. Здесь нельзя говорить о «сечении пучка», а нужно говорить о диаграмме направленности. Структура волны, выходящей из щели, соответствует тому, что показано на рис. 315.

**7. Изменение дифракционной картины при уменьшении длины волны.** Если  $D$  и  $z$  фиксированы, уменьшение  $\lambda$  приведет к уменьшению параметра  $p$ . При  $\lambda \rightarrow 0$  распределение освещенности стремится к тому, которое указывает геометрическая оптика (пунктирная линия на рис. 373). Но это утверждение не следует понимать упрощенно. Приближение к пределу — неравномерное. Колебания освещенности около границ геометрической тени сохраняются, как бы ни была мала длина волны. Эти колебания не сглаживаются при  $\lambda \rightarrow 0$ , высота максимумов и минимумов не зависит от  $\lambda$ . По мере уменьшения  $\lambda$  стремится к нулю только ширина той области, где заметны отступления от геометрической оптики.

**8. Заключительное замечание.** Можно иногда встретить утверждение, что геометрическая оптика есть приближение, сколь угодно близкое к действительности, если размеры препятствий или отверстий, встречаемых светом на своем пути, достаточно велики по сравнению с длиной волны. Изложенное выше показывает, что это не верно. Как бы ни было велико отношение  $D/\lambda$ , распределение освещенности на достаточно большом расстоянии резко отличается от указываемого геометрической оптикой. Во всех затронутых здесь вопросах важно значение не отношения  $D/\lambda$ , а другого безразмерного параметра  $p$ , являющегося комбинацией трех величин: длины волны, ширины отверстия и расстояния до точки наблюдения \*).

## § 8. Неправильности краев экранов

**1. Непрямолинейность края.** Край экрана никогда не является идеальной прямой линией. Даже хорошо направленное лезвие бритвы имеет вид, показанный на рис. 380. Выясним, как влияет на характер

\*) Предоставляем читателю установить предел применимости геометрической оптики для случая, когда вдоль оси широкой щели ( $D \gg \sqrt{z\lambda}$ ) натянута длинная прямая непрозрачная проволока. В этом случае колебание в точке наблюдения изображается геометрической суммой векторов, замыкающих две дуги спирали Корню, соответствующие незакрытым частям первичной волны справа и слева от проволоки. Легко показать, что если диаметр проволоки мал по сравнению с  $\sqrt{z\lambda}$ , она практически не дает тени. При этом диаметр проволоки может быть очень велик по отношению к  $\lambda$ .

дифракционной картины от края экрана (§ 9, п. 2) отклонение края от прямолинейности. Рассмотрим для этого несколько типичных случаев.

а) Основание и высота выступов и зазубрин малы по сравнению с  $\sqrt{z\lambda}$ . Если (рис. 381, а) точка наблюд-

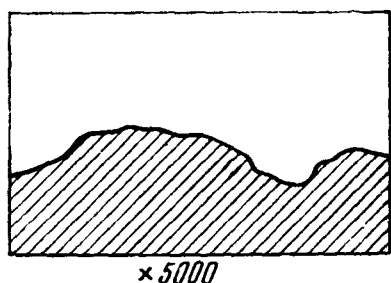


Рис. 380. Изображение края лезвия безопасной бритвы, полученное с помощью электронного микроскопа.

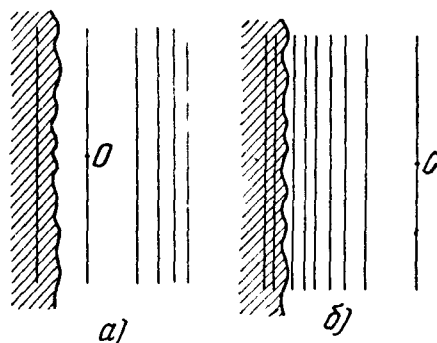


Рис. 381. Выступы и впадины края, малые по сравнению с  $\sqrt{z\lambda}$ .

ния расположена так, что край экрана проходит по полосе Френеля (или двум смежным полосам) небольшого номера (их ширина — порядка  $\sqrt{z\lambda}$ ), неправильности края будут лишь незначительно изменять амплитуду и фазу колебания от этой (или этих) полос и совершенно не будут влиять на колебания от остальных полос. Если (рис. 381, б) точка наблюдения расположена так, что край проходит по полосам очень большого номера, посылаемые ими колебания сильно искажены неправильностями края; но эти колебания, как мы знаем, очень малы и мало влияют на суммарное колебание. Мы приходим к заключению, что дифракционная картина приблизительно совпадает с той, которую давал бы экран с идеально прямолинейным краем.

б) Основание и высота выступов и зазубрин — порядка  $\sqrt{z\lambda}$ . Точка  $P$  расположена так, что край экрана проходит по полосам небольшого номера (рис. 382). Колебания от этих полос будут сильно искажены по сравнению с тем, что было бы в случае прямого экрана. Одни части экрана (например, около точки  $M_1$ ) оставляют открытыми две первые полосы слева от  $O$ , что соответствует *минимуму* интенсивности в точке  $P$ ; другие части экрана (например, около точки  $M_2$ ) оставляют открытой только одну первую полосу слева от  $O$ , что соответствует *максимуму* освещенности в точке  $P$ . Неправильности края экрана приводят, таким образом, к сглаживанию максимумов и минимумов освещенности, т. е. исчезновению дифракционных полос. Такое исчезновение дифракционных полос нельзя считать переходом к геометрической оптике, так как согласно геометрической оптике мы должны были бы иметь на экране при точечном источнике тень с резкой границей, воспроизводящей форму выступов и зазубрин.

в) Имеются высокие выступы и глубокие впадины (их высота и глубина могут быть велики по сравнению с  $\sqrt{z\lambda}$ ), но очень пологие: на участках, длина которых велика по сравнению с  $\sqrt{z\lambda}$ , край экрана всюду отстоит от

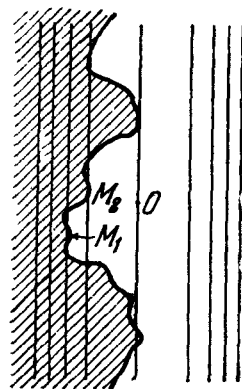


Рис. 382. Выступы и впадины, сравнимые с  $\sqrt{z\lambda}$ .

касательной к нему в любой точке участка на расстоянии, малом по сравнению с  $\sqrt{z\lambda}$  (рис. 383). Ясно, что к каждому такому участку применима теория дифракции от прямого края. Здесь просто происходит изгибание дифракционной картины. Изгибы дифракционных полос воспроизводят с точностью до масштаба по оси  $x$  изгибы края экрана.

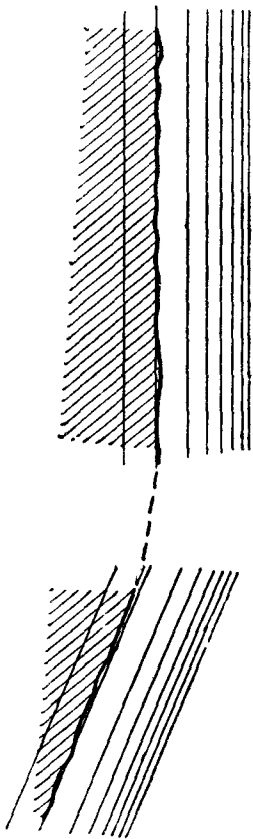


Рис. 383. К отдельным участкам края экрана применима теория дифракции от прямого края.

Пусть, например, наблюдается дифракция света от края экрана (лезвия). Пусть  $z = 2$  м,  $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$  см. Здесь  $\sqrt{z\lambda} = 1$  мм и допустимы зазубрины размерами порядка 0,1 мм. Для того чтобы наблюдать такую же дифракционную картину, как от идеально прямого края, вовсе не нужно иметь хорошо направленное лезвие. Но если  $z = 2$  см, нужно уже, чтобы зазубрины были не больше 0,01 мм.

В радиофизике оценка неправильностей края экрана связана с совсем другими масштабами. Например, если  $\lambda = 1$  м,  $z = 10$  км ( $\sqrt{z\lambda} = 100$  м), возвышенность, покрытая деревьями и постройками (рис. 384), даст слегка изогнутую, но почти не «замазанную» систему дифракционных полос.

**2. Нарушения осевой симметрии.** Все сказанное в § 5 может быть подтверждено на опыте лишь в том случае, если край экрана достаточно близок к идеальной окружности. (Если экраном служит не тонкая пластинка, а «объемное» тело, то этим краем является видимый из точки наблюдения  $P$  «горизонт» — геометрическое место касательных к экрану, проведенных из  $P$ .) Здесь есть существенное отличие от п. 1, где на колебание в точке  $P$  влияет практически только часть края протяжением [порядка нескольких

$\sqrt{z\lambda}$ . В случае, рассмотренном в § 5, на колебание в точке  $P$  одинаково влияют **н**еправильности в любом месте края.

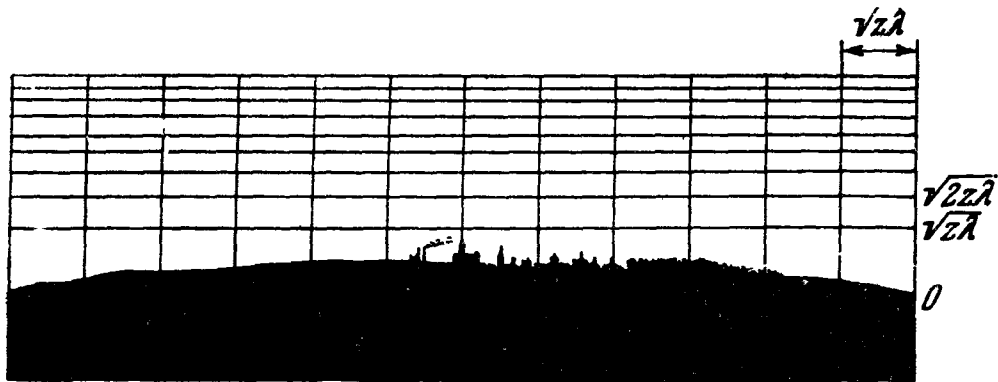


Рис. 384. Возвышенность, дифрагирующая радиоволны, и сетка для оценки характера дифракционной картины.

Пусть, например, край имеет вид, показанный на рис. 385, *a*. Колебания  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $s_3$ , приходящие от секторов  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$ ,  $\Sigma_3$ , легко найти по методу § 5, рассматривая вместо полных колец площади  $d\sigma_k$  их части, лежащие в соответствующем секторе. Имеем согласно § 5, п. 4

$$s_1 = \frac{\alpha_1}{2\pi} A \cos(\omega t - \varphi_1), \quad s_2 = \frac{\alpha_2}{2\pi} A \cos(\omega t - \varphi_2), \quad s_3 = \frac{\alpha_3}{2\pi} A \cos(\omega t - \varphi_3),$$

где  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$  — углы, соответствующие дугам  $M_0M_1$ ,  $M_0M_2$ ,  $M_0M_3$

(рис. 385, б), причем дуги  $M_0M_1$ ,  $M_0M_2$ ,  $M_0M_3$  равны соответственно  $k(R_1 - b)$ ,  $k(R_2 - b)$ ,  $k(R_3 - b)$ , где  $R_1^2 = \rho_1^2 + b^2$  и т. д. Амплитуда суммарного колебания в точке  $P$   $s = s_1 + s_2 + s_3$  может иметь любое

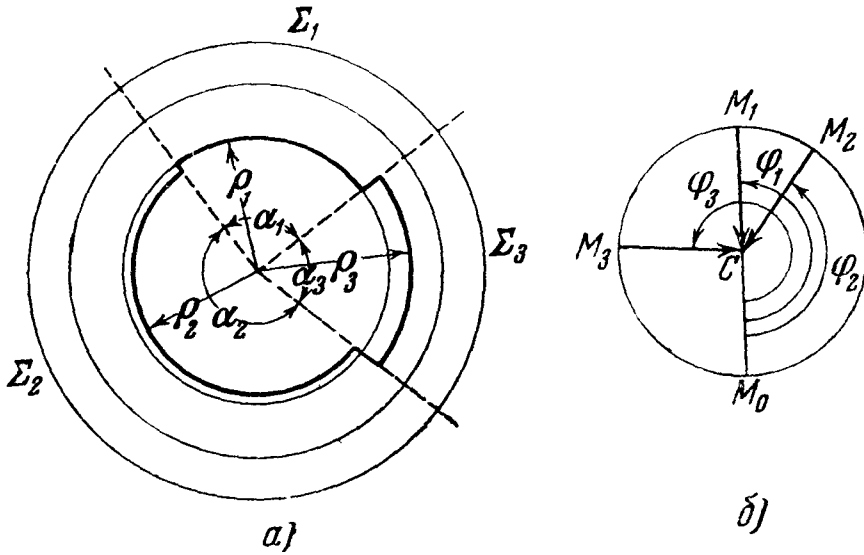


Рис 385. К задаче о дифракции на диске, ограниченном дугами окружностей, имеющих общий центр.

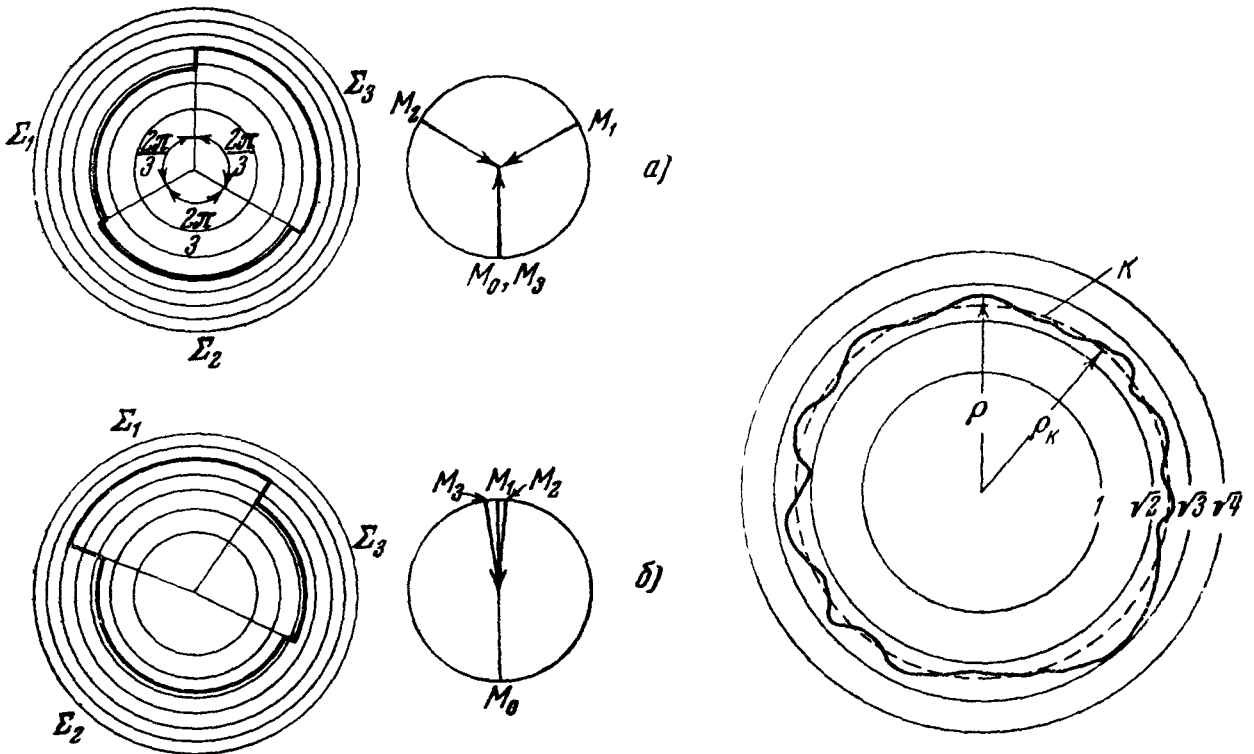


Рис 386. В случае а освещенность в  $P$  равна нулю, в случае б освещенность приблизительно такая же, как в отсутствие диска

Рис 387. Пояснение понятия средней неправильности края.

значение между 0 и  $A$ . Она равна нулю, если, например,  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 2\pi/3$ ,  $\varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_3 - \varphi_2 = 2\pi/3$  (рис. 386, а), и близка к  $A$  (амплитуде при идеально круглом крае), если фазы  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  отличаются между собой на малые доли  $\pi$  или на величины, отличающиеся от малых долей  $\pi$  на целые кратные  $2\pi$  (рис. 386, б).

Аналогичное рассуждение может быть проведено при любом виде неправильности края. Очевидно, что для точки  $P$  край практически не отличается от круглого, если среднее значение  $\rho$  неправильности края  $\rho - \rho_k$  (рис. 387) мало по сравнению с шириной  $\rho_m - \rho_{m-1}$  зоны Френеля, по которой проходит средняя линия края (окружность  $K$  радиуса  $\rho_k$ )

Примем для радиусов зон Френеля, считая падающую волну плоской, приближенное выражение (9.25). Тогда

$$\rho_m = \sqrt{mb\lambda}, \quad \rho_m - \rho_{m-1} = \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{m}}\right) \rho_m. \quad (9.40)$$

Приближенно при большом  $m$

$$\rho_m - \rho_{m-1} = \frac{\rho_m}{2m}. \quad (9.41)$$

Исключая  $m$  из (9.40) и (9.41), получаем:

$$\rho_m - \rho_{m-1} = \frac{b\lambda}{2\rho_m}. \quad (9.42)$$

Условие малости  $\delta$  по сравнению с  $\rho_m - \rho_{m-1}$  может быть записано в таком виде:

$$\delta \ll \frac{b\lambda}{2\rho_m} \quad \text{или} \quad \delta \ll \frac{b\lambda}{2\rho}, \quad (9.43)$$

где  $\rho$  — радиус средней линии края.

Рассмотрим два примера.

а) В оптике ( $\lambda$  порядка  $5 \cdot 10^{-5}$  см), если  $b = 100$  см,  $\rho = 0,5$  см, условие (9.43) дает:

$$\delta \ll 5 \cdot 10^{-2} \text{ см.}$$

Этому условию удовлетворяет, например, стальной шарик от подшипника. С таким шариком, следовательно, можно наблюдать светлое пятно в центре тени, о котором говорилось в § 5.

б) Пусть центр Луны находится на прямой, соединяющей некоторый точечный источник радиоизлучения с радиостановкой для измерения интенсивности радиоизлучения звезд (рис. 388). Можно ли утверждать, что интенсивность радиоволн, приходящих от этого источника, будет такая же, как в отсутствие Луны?

Луна видна с Земли приблизительно под углом  $0,5^\circ$ , т. е. около  $10^{-2}$  радиана. Следовательно, здесь  $2\rho/b$  — порядка  $10^{-2}$ , и условие (9.43) дает:

$$\delta \ll 100\lambda.$$

Сквозь ионосферу (см. гл. VII, § 8) проникают лишь волны короче 10 м. Является ли Луна «достаточно круглой» для того, чтобы для таких волн выполнялось полученное условие?

Экспериментальные данные по этому вопросу пока отсутствуют.

[Соображения и оценки, приведенные в этом параграфе и касающиеся условий сохранения идеальной дифракционной картины, могут быть применены и в других случаях. В качестве препятствий, находящихся на пути от источника к точке наблюдения  $P$ , здесь рассматривались непрозрачные тела. Неровности их краев искажали в той или иной мере распределение амплитуд колебаний, приходящих от отдельных френелевских полос или колец. Но размывание дифракционной картины будет происходить и тогда, когда препятствие не поглощает волн, а нарушает правильное распределение фаз колебаний.]

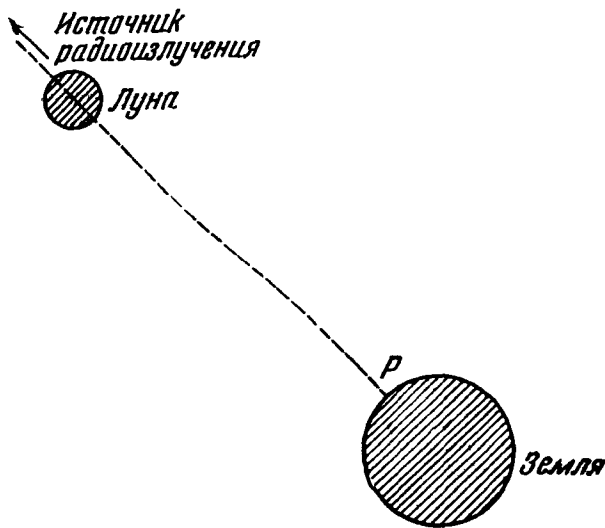


Рис. 388. Луна в роли экрана для радиоизлучения, приходящего в точку  $P$ .



Пусть, например, на пути от источника к точке наблюдения поставлена прозрачная пластинка (достаточно большая, т. е. покрывающая все существенные зоны Френеля), у которой толщина и (или) показатель преломления неодинаковы в разных ее точках  $(x, y)$ . Расположим вспомогательную плоскость  $\sigma$  (см. рис. 349) непосредственно позади пластинки. Фазы колебаний, приходящих от элементов  $d\sigma = dx dy$  этой плоскости, будут отличаться от правильного значения (9.13) на вносимую пластинкой величину  $\alpha(x, y)$ . В результате идеальная дифракционная картина, которая получилась бы при постоянстве  $\alpha$  на всей пластинке и представляла бы собой в данном случае просто регулярное распространение первичной волны, будет нарушена: появятся волны, дифрагированные неоднородностями пластинки. Характер явления будет зависеть, конечно, от вида неоднородностей  $\alpha(x, y)$ . Случай периодической зависимости  $\alpha$  только от одной координаты  $x$  рассмотрен в следующем параграфе (фазовые решетки). Если же распределение  $\alpha$  по пластинке хаотично, то это приведет к диффузному рассеянию: пластинка будет в той или иной степени мутной. Диаграмма направленности или, как говорят в оптике, индикатриса рассеяния будет определяться опять-таки видом функции  $\alpha(x, y)$ , т. е. размерами и формой неоднородностей, их расположением и т. д.

Очевидно, если фазовый сдвиг  $\alpha$ , вносимый пластинкой, будет в каждой точке  $(x, y)$  мал по сравнению с  $\pi/2$ , то регулярное распространение практически не нарушится. Условие  $\alpha \ll \frac{\pi}{2}$  является достаточным. Оно может быть значительно смягчено, если, например, неоднородности занимают лишь малую долю площади существенных зон Френеля.

Сказанное о прохождении волн через неоднородную прозрачную пластинку (рефракционную структуру) можно применить и к отражению волн от неровного зеркала. Примем для упрощения оценок, что неровности представляют собой плоские участки, приподнятые на высоту  $h$  от плоскости зеркала. Если первичная волна падает на зеркало под углом скольжения  $\theta$ , то фаза колебания, приходящего от приподнятого элемента  $d\sigma$  поверхности зеркала, будет сдвинута на величину  $\alpha = 2kh \sin \theta = \frac{4\pi h}{\lambda} \sin \theta$  по сравнению с той, какая была бы в отсутствие неровности. Условие  $\alpha \ll \frac{\pi}{2}$  принимает в этом случае вид

$$\lambda \gg 8h \sin \theta. \quad (a)$$

Таким образом, для достаточно длинных волн  $\lambda$  зеркало с любой заданной «шероховатостью»  $h$  будет действовать все же как плоское, т. е. будет давать регулярное отражение. Условие (a) может выполняться и тогда, когда  $\lambda \gtrsim h$ , если только достаточно мал угол  $\theta$ .

Примером может служить отражение света от листа бумаги. При не очень наклонном падении поверхность листа представляется матовой, т. е. рассеивает свет диффузно. Но если посмотреть на источник света, держа плоскость листа параллельно и близко к прямой, соединяющей глаз и источник (скользящее падение), то на поверхности бумаги можно увидеть зеркальное отражение источника. Аналогичное явление имеет место для радиоволн при их отражении от поверхности моря: если выполнено условие (a), то эта поверхность будет действовать как зеркальная даже при сильном волнении. Это обстоятельство иногда используется в радиоастрономических наблюдениях для получения интерференции. Приемная антенна располагается на некоторой высоте на берегу и направлена на горизонт. Благодаря достаточно широкой диаграмме она принимает радиоизлучение, приходящее как непосредственно от наблюдаемого внеземного источника, так и отраженное поверхностью моря. Для длин волн, удовлетворяющих условию (a), интерференционная картина оказывается вполне регулярной. Пусть, например, источник находится на угловой высоте над горизонтом  $\theta < 10'$ , т. е.  $\sin \theta < 0,003$ . Согласно (a), при метровой высоте морских волн ( $h = 1$  м) зеркальное отражение будет иметь место уже для дециметровых волн.

Итак, в вопросах распространения волн понятия «гладкости», или «шероховатости» поверхности тела не имеют какого-то раз навсегда фиксированного содержания, а зависят от длины волны и ориентации поверхности.]

## § 9. Некоторые важные случаи дифракции Фраунгофера

**1. Решетка из прямоугольных отверстий.** Рассмотрение дифракции на структуре, изображенной на рис. 389 (непрозрачный экран с прямоугольными отверстиями), является хорошей иллюстрацией сказанного в § 3 относительно соотношения между картиной, даваемой отдельным элементом решетки, и картиной, даваемой всей решеткой.

Для элемента решетки (отверстия) имеем на основании (9.39) (рассматривая только дифракцию в плоскости, перпендикулярной к длине щелей)

$$a^2 = a_0^2 \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}kd_1 \sin \theta\right)}{(kd_1 \sin \theta)^2}.$$

Следовательно, картина от всей решетки описывается формулой

$$A^2 = a_0^2 \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}kd_1 \sin \theta\right)}{(kd_1 \sin \theta)^2} \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}Nkd \sin \theta\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}kd \sin \theta\right)}.$$

Кривая зависимости интенсивности от  $\theta$  получается перемножением ординат кривой, изображающей распределение интенсивности, даваемое

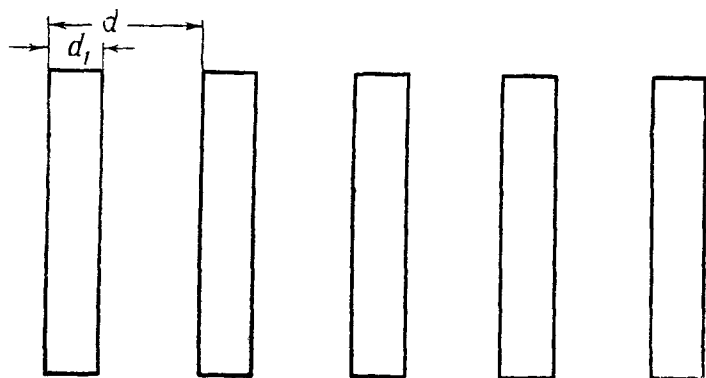


Рис. 389. Решетка из прямоугольных щелей.

отдельной щелью, и распределение интенсивности того типа, которое дает решетка из вибраторов, рассмотренная в гл. VIII, § 4 (см. рис. 288).

## 2. Фазовые решетки.

Представим себе абсолютно прозрачную пластинку, показатель преломления которой  $n$  является периодической функцией  $x$ :  $n = n(x)$ . Когда на пластинку падает плоская волна, волна на выходе пластинки

(в плоскости  $z = 0$ ) имеет всюду одинаковую амплитуду, но ее фаза — периодическая функция  $x$ , имеющая тот же период, что  $n(x)$ . Описанная структура называется *фазовой дифракционной решеткой* \*).

Сделаем расчет дифракции Фраунгофера для простейшей фазовой решетки, для которой  $n(x)$  имеет вид, показанный на рис. 390.

Элемент решетки состоит из полосок ширины  $d/2$ , имеющих показатели преломления  $n_1$  и  $n_2$ . Первая дает в точке наблюдения  $P$  колебания вида

$$a_0 \frac{\sin\left(\frac{kd}{4} \sin \theta\right)}{kd \sin \theta} \cos \omega t$$

(при подходящем выборе начала счета времени), вторая — колебания вида

$$a_0 \frac{\sin\left(\frac{kd}{4} \sin \theta\right)}{kd \sin \theta} \cos\left(\omega t - \frac{kd}{2} \sin \theta - \alpha\right),$$

где  $\alpha$  — разность фаз на выходе полосок  $n_1$ ,  $n_2$ .

\*) [Другой способ осуществления фазовой дифракционной решетки: на отражающую грань призмы внутреннего отражения наносятся параллельные полоски металла (например, серебра), периодически чередующиеся с пустыми промежутками. Отражение света от полосок (граница стекло—металл) и от промежутков (граница стекло—воздух) практически одинаково полное и различен только сдвиг фазы при отражении. См. статью С. М. Рытова и И. Л. Фабелинского «Новый вид фазовой дифракционной решетки», Журнал экспериментальной и теоретической физики, т. 20, вып. 4 (1950), стр. 340.]

Интенсивность колебания, приходящего от обеих половинок элемента решетки, имеет вид

$$2a_0^2 \frac{\sin^2\left(\frac{kd}{4} \sin \theta\right)}{k^2 d^2 \sin^2 \theta} \left[ 1 + \cos\left(\frac{kd}{2} \sin \theta + \alpha\right) \right],$$

интенсивность колебания, приходящего от всей решетки, получится умножением на

$$\frac{\sin^2\left(\frac{1}{2} Nkd \sin \theta\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2} kd \sin \theta\right)}.$$

Если  $\alpha = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$ , множитель в квадратных скобках превращается в

$$\left[ 1 - \cos\left(\frac{kd}{2} \sin \theta\right) \right].$$

При этом углу  $\theta = 0$  соответствует нулевая интенсивность: главный максимум нулевого порядка отсутствует. Легко видеть, что отсутствуют и другие главные максимумы четного порядка.

Замечательный пример фазовой оптической дифракционной решетки представляет собою прозрачное тело, в котором возбуждена ультразвуковая волна (в местах сгущения показатель преломления больше, чем в местах разрежения, период решетки есть длина ультразвуковой волны). Однако при обычных условиях эксперимента такую решетку следует рассматривать как *трехмерную*. Возникающая при этом дифракционная задача аналогична в значительной степени задаче, рассмотренной в гл. VIII, § 11 о рассеянии рентгеновых лучей на трехмерной кристаллической решетке \*).

**3. Решетка с синусоидальной пропусканием.** Пусть поле в плоскости  $z = 0$  (непосредственно за решеткой) имеет вид

$$E = b \sin Kx \cos \omega t,$$

где  $b$  — постоянная,

$$K = \frac{2\pi}{d},$$

$d$  — период решетки. Решетка, обладающая таким свойством, называется решеткой с синусоидальной пропусканием или, короче, синусоидальной решеткой. Она получится из фазовой решетки, рассмотренной в п. 2, если  $\alpha = \pi$  и прозрачность меняется соответствующим образом в зависимости от  $x$ .

В волне, дифрагированной отдельным элементом ( $0 \leq x \leq d$ ), поле пропорционально выражению

$$\int_0^{2\pi/K} \sin Kx \cos(\omega t + kx \sin \theta) dx$$

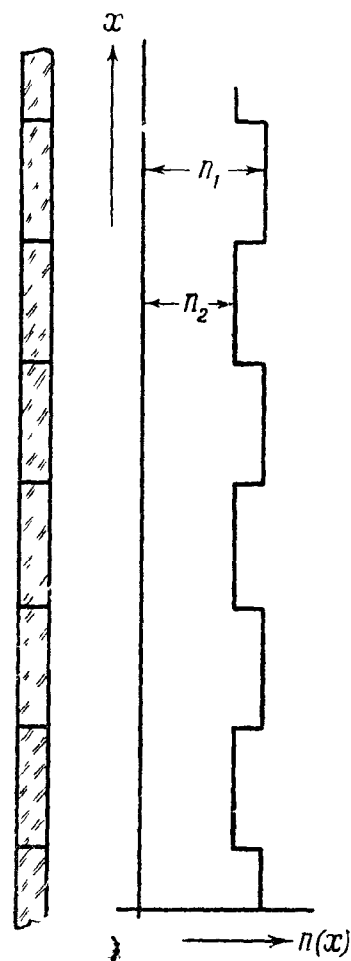


Рис. 390. Простейшая фазовая решетка.

\*) См. статью С. М. Рытова «Дифракция света на ультразвуковых волнах». Изв. АН СССР, серия физ., № 2 (1937), 223.

(при подходящем выборе начала счета времени) или после интегриации

$$-\frac{\sin\left(\frac{1}{2}kd\sin\theta\right)}{K-k\sin\theta}\sin\left(\omega t-\frac{1}{2}kd\sin\theta\right)+\frac{\sin\left(\frac{1}{2}kd\sin\theta\right)}{K+k\sin\theta}\sin\left(\omega t+\frac{1}{2}kd\sin\theta\right).$$

Умножив это выражение на

$$\frac{\sin\left(\frac{1}{2}Nkd\sin\theta\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}kd\sin\theta\right)},$$

получаем для всей решетки

$$-\frac{\sin\left(\frac{1}{2}Nkd\sin\theta\right)}{K-k\sin\theta}\sin\left(\omega t-\frac{1}{2}kd\sin\theta\right)+\frac{\sin\left(\frac{1}{2}Nkd\sin\theta\right)}{K+k\sin\theta}\sin\left(\omega t+\frac{1}{2}kd\sin\theta\right).$$

Волна, дифрагированная под углом  $\theta$ , состоит из двух слагаемых с амплитудами

$$\left|\frac{\sin\left(\frac{1}{2}Nkd\sin\theta\right)}{K-k\sin\theta}\right|, \quad \left|\frac{\sin\left(\frac{1}{2}Nkd\sin\theta\right)}{K+k\sin\theta}\right|.$$

Учитывая, что  $DK/2 = N\pi$ , где  $D = Nd$ , мы можем написать для амплитуд выражения

$$a \left|\frac{\sin\left\{\frac{D}{2}(k\sin\theta-K)\right\}}{k\sin\theta-K}\right|, \quad a \left|\frac{\sin\left\{\frac{D}{2}(k\sin\theta+K)\right\}}{k\sin\theta+K}\right|,$$

где  $a$  — коэффициент пропорциональности.

Здесь имеются только два главных максимума  $(+1)$ -го и  $(-1)$ -го порядка, соответствующие

$$k\sin\theta = \pm K, \quad \text{т. е.} \quad d\sin\theta = \pm \lambda.$$

Если  $N$  велико (острые главные максимумы), можно считать приближенно, что при  $\theta > 0$  суммарная амплитуда описывается первым выражением, при  $\theta < 0$  — вторым.

**4. Призма.** Пусть пучок света, падающий на призму, имеет поперечный размер  $D_0$ , задаваемый отверстием в диафрагме (рис. 391). Поперечный размер пучка у выхода из призмы можно найти по законам геометрической оптики, так как там мы имеем дело с областью малых значений волнового параметра. Вследствие дисперсии этот поперечный размер зависит (при данных геометрических условиях падения и данном угле при вершине призмы) от волнового числа  $k$ . Обозначим его  $D(k)$ .

Распределение освещенности в области больших значений волнового параметра

$$p = \frac{\sqrt{\lambda R}}{D(k)},$$

где  $R$  — расстояние от призмы, мы можем найти, взяв за вспомогательную поверхность плоскость, перпендикулярную к пучку, выходящему из призмы, и пересекающую его вблизи призмы (в области малых значений волнового параметра).

Задача совпадает с задачей о дифракции Фраунгофера от прямоугольной щели ширины  $D(k)$ , и распределение амплитуд дается функцией

$$a \frac{\sin \left[ \frac{1}{2} kD(k) \sin \theta' \right]}{\frac{1}{2} kD(k) \sin \theta'}$$

где  $a$  при данной амплитуде падающего света зависит также от  $k$  (это

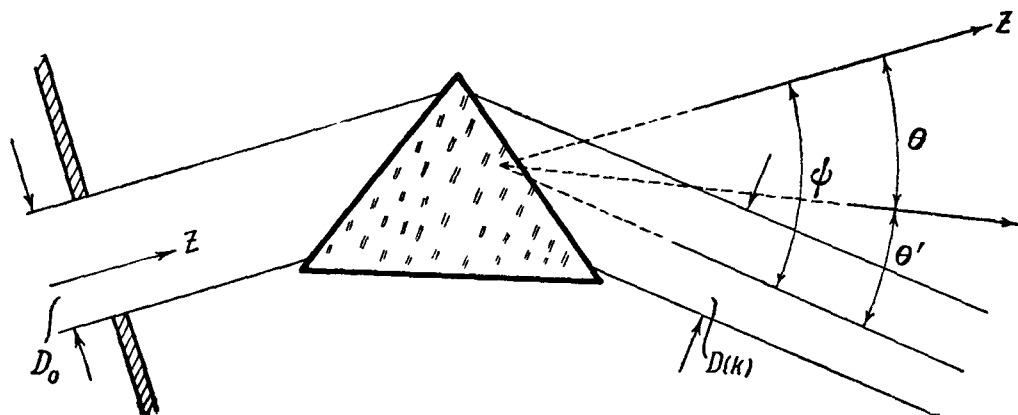


Рис. 391. К выводу формулы для призмы. Здесь  $\theta'$  отрицательно.

следует из формул Френеля (гл. VII, § 8), если учесть дисперсию):

$$a = a(k).$$

$\theta'$  — угол между рассматриваемым направлением и направлением распространения преломленной волны, определяемым геометрической оптикой.

Обозначив через  $\psi(k)$  угол, на который призма отклоняет пучок света от его первоначального направления, и понимая под  $\theta$  угол между направлением наблюдения и направлением пучка, падающего на призму, имеем:

$$\theta' = \theta - \psi(k),$$

где вид зависимости  $\psi(k)$  определяется углом призмы и свойствами стекла. Следовательно, распределение амплитуды по углам  $\theta$  дается функцией.

$$\Phi(k, \theta) = a(k) \frac{\sin \left\{ \frac{kD(k)}{2} \sin [\theta - \psi(k)] \right\}}{\frac{kD(k)}{2} \sin [\theta - \psi(k)]}$$

**5. Круглое отверстие.** На больших расстояниях от круглого отверстия в непрозрачном экране, а именно таких, что

$$p = \frac{\sqrt{z\lambda}}{D} \gg 1,$$

где  $D$  — диаметр отверстия, имеют место дифракционные явления Фраунгофера. Здесь интенсивность убывает по данному направлению обратно пропорционально квадрату расстояния. На данном расстоянии она зависит от угла  $\theta$  между направлением наблюдения и осью  $z$  (рис. 392).

Геометрическими местами точек одинаковой интенсивности являются кольца, расположенные, как показано на рис. 392.

Вычисление зависимости интенсивности от  $\theta$  требует знания бесселевых функций, и мы его здесь не можем излагать. Приведем лишь готовый результат.

На рис. 393 изображена зависимость интенсивности от величины  $\frac{\pi D}{\lambda} \sin \theta$ . Имеется главный максимум при  $\theta = 0$  (ось  $z$ ) и ряд максимумов (светлые коль-

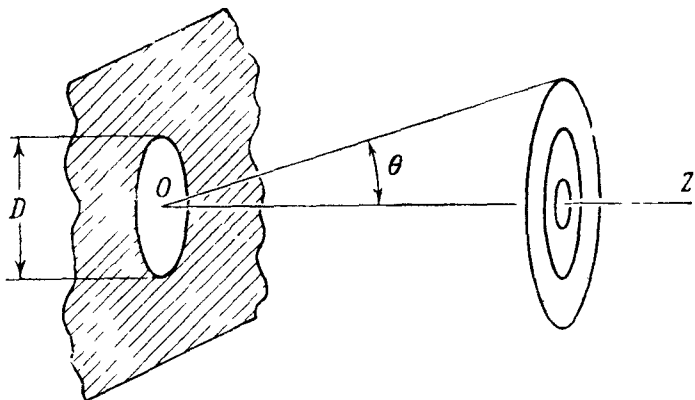


Рис. 392. Пояснение структуры дифракционной картины от круглого отверстия.

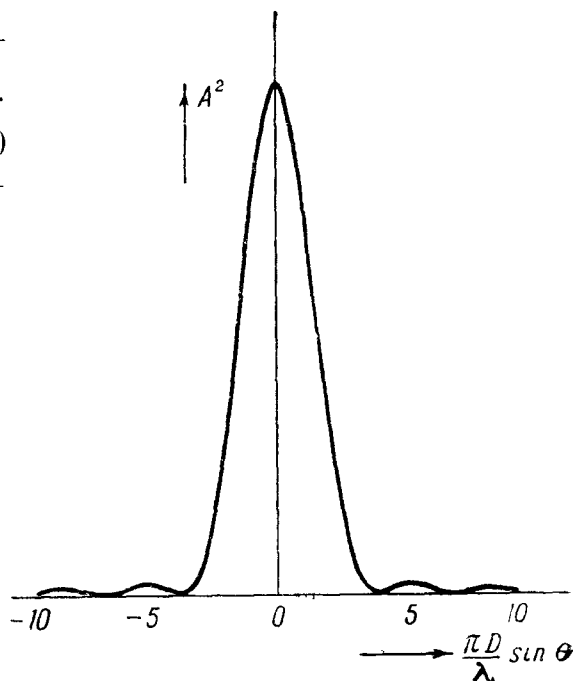


Рис. 393. Распределение интенсивности в дифракционной картине Фраунгофера от круглого отверстия.

ца) и минимумов (темные кольца), тем более близких между собой, чем больше  $D$  и чем меньше  $\lambda$ .

Таким образом, как и в случае прямоугольного отверстия, с уменьшением размера отверстия и увеличением  $\lambda$  дифракционная картина все больше расплывается. Первый минимум соответствует

$$\sin \theta = 1,22 \frac{\lambda}{D} .$$

## § 10. Проектор в оптике, акустике и радио

1. Распределение амплитуды и фазы в отверстии прожектора. Пусть металлическое зеркало имеет вид параболоида вращения и источник волн (источник света или звука, вибратор, излучающий микрорадиоволны), размер которого мал по сравнению с диаметром зеркала. Таковое устройство оптических прожекторов, а также некоторых приборов, употребляемых для излучения микрорадиоволн и акустических волн. Мы их также будем называть прожекторами.

Согласно геометрической оптике лучи, отраженные от зеркала, имеющего вид параболоида вращения, образуют пучок, параллельный оси параболоида: действительно (рис. 394), нормаль  $MN$  в любой точке  $M$  параболоида делит пополам угол  $FMP$ , где  $MP$  параллельна оси параболоида.

Пусть глубина зеркала  $H$  и его диаметр  $D$  — одного порядка и велики по сравнению с длиной волны. В этом случае, очевидно,

$$D \gg \sqrt{H\lambda}, \quad (9.44)$$

и путем рассуждений, аналогичных приведенным в § 9 для случая  $P \ll 1$ , можно прийти к заключению, что структура волны на расстоянии порядка  $H$  от источника приблизительно соответствует геометрической оптике. Мы можем принять поэтому, что в плоскости  $z = 0$ , проходящей через край зеркала, распределение амплитуды и фазы таково: внутри отверстия зеркала амплитуда отлична от нуля и всюду одинакова, фаза также всюду одинакова; вне отверстия амплитуда равна нулю. Величину амплитуды волны в отверстии прожектора легко вычислить, если известен поток энергии, излучаемый источником.

Условие (9.44) всегда выполняется в оптическом прожекторе, где  $D, H$  — порядка  $(10^6 - 10^7)\lambda$ . Его можно считать выполненным и в случае радиопрожектора или акустического прожектора, если  $D$  и  $H$  — порядка метра, а  $\lambda$  — порядка дециметра или меньше. До сих пор в нашем изложении нет существенного отличия между оптическим прожектором, радиопрожектором и акустическим прожектором.

Опыт в первом приближении оправдывает принятое здесь распределение амплитуды и фазы в отверстии. Более тонкое исследование структуры волны в отверстии обнаружит около края отверстия отступления от геометрической оптики, и притом гораздо более значительные в случае радиоволн и звука, чем в случае света. Но для разбираемых здесь вопросов эти тонкие явления около края зеркала не имеют существенного значения.

**2. Дифракционные явления на малых и больших расстояниях от прожектора.** Предположим сначала, что отверстие прожектора закрыто непрозрачным экраном с квадратным отверстием (рис. 395). В этом случае, применяя принципы Гюйгенса — Френеля и принимая за поверхность  $z = 0$ , мы можем утверждать, что вся картина излучения прожектора практически совпадает с картиной акустического излучения колеблющейся пластинки, рассмотренной в гл. VIII, § 6, 7.

На малых расстояниях  $r$  от прожектора, т. е. в области малых значений волнового параметра

$$p = \frac{\sqrt{\lambda r}}{a},$$

там, где

$$r \ll \frac{a^2}{\lambda},$$

приближенно верна геометрическая оптика; если отвлечься от небольшой дифракционной каймы по краям волнового пучка, он имеет вид параллелепипеда, основанием которого является излучающее отверстие. Волновой пучок тем тоньше, чем меньше это отверстие.

На больших расстояниях, т. е. в области, где

$$p \gg 1, \quad r \gg \frac{a^2}{\lambda},$$

распределение интенсивности описывается диаграммой направленности.

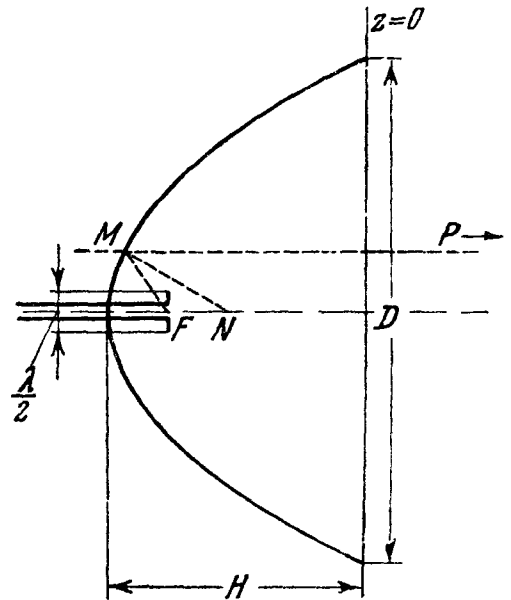


Рис. 394. Разрез радиопрожектора. Фокус  $F$  совпадает с серединой полуволнового вибратора, питаемого с помощью параллельных проводов.

Излучение обладает тем большей направленностью, чем больше отверстие прожектора. Угловой раcтвор главного лепестка диаграммы направленности определяется соотношением

$$\sin \theta_1 = \frac{\lambda}{a}, \quad (9.45)$$

откуда приближенно, если  $\lambda/a$  много меньше единицы,

$$\theta_1 = \frac{\lambda}{a}. \quad (9.46)$$

Пусть теперь излучение происходит непосредственно из *круглого* отверстия прожектора.

На малых расстояниях от прожектора, т. е. там, где

$$p = \frac{\sqrt{\lambda r}}{D} \ll 1, \quad r \ll \frac{D^2}{\lambda}$$

( $D$  — диаметр прожектора), существует (геометрическая оптика) цилиндрический волновой пучок\*), тем более тонкий, чем меньше диаметр прожектора. На больших расстояниях, там, где

$$p \gg 1, \quad r \gg \frac{D^2}{\lambda},$$

имеет место дифракция Фраунгофера, излучение описывается диаграммой направленности, совпадающей с той, о которой шла речь в § 9, п. 5: интенсивность убывает обратно пропорционально квадрату расстояния и зависит от угла  $\theta$  между направлением наблюдения и осью прожектора. Зависимость имеет вид, показанный на рис. 393. Направленность тем острее, чем больше диаметр прожектора. Направление  $\theta_1$ , соответствующее первому минимуму и характеризующее угловой раcтвор главного лепестка, дается формулой

$$\sin \theta_1 = 1,22 \frac{\lambda}{D} \quad (9.47)$$

или приближенно, при малых  $\lambda/D$ ,

$$\theta_1 = 1,22 \frac{\lambda}{D}, \quad (9.48)$$

**3. Отличие в масштабах между оптикой, с одной стороны, радио и акустикой, с другой стороны.** Как в случае оптического прожектора, так и в случаях радиопрожектора и акустического прожектора практические требования ограничивают  $D$  величинами порядка нескольких метров.

В оптике, где  $\lambda$  порядка  $5 \cdot 10^{-5}$  см, имеем при этом:

$$\frac{D^2}{\lambda} \sim 10^9 \text{ см} = 10^4 \text{ км}, \quad p \sim \frac{\sqrt{r}}{100} \quad (r \text{ — в км}).$$

Радиус действия оптического прожектора не превышает из-за рассеяния и поглощения света в атмосфере величины порядка 10 км. Следо-

\*) Из-за конечных размеров источника при обычных условиях отсутствуют явления на оси, отмеченные в § 5 (ср. гл. X, § 10).

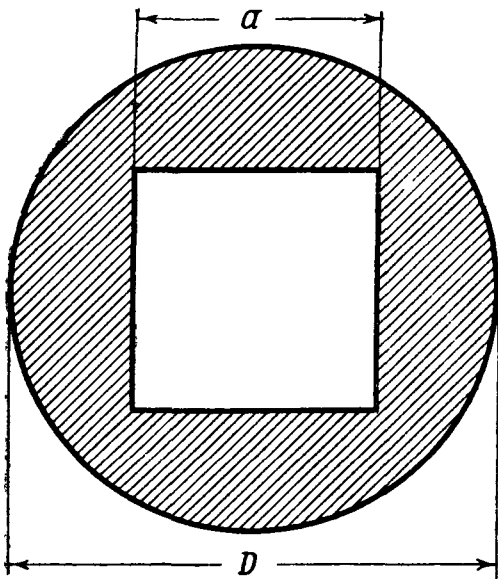


Рис. 395. Прожектор закрыт экраном с квадратным отверстием.



вательно, в случае оптического прожектора мы всегда имеем дело с *малыми* значениями волнового параметра. Поэтому оптический прожектор всегда можно рассчитывать по правилам геометрической оптики. Площадь светлого пятна, создаваемого прожектором на поверхности освещаемого им предмета (облака, корабля), тем *больше*, чем больше диаметр прожектора (здесь имеется в виду случай идеальной фокусировки).

Для микрорадиоволн ( $\lambda$  порядка нескольких сантиметров) имеем:

$$\frac{D^2}{\lambda} = 10^4 \text{ см} = 0,1 \text{ км}, \quad p \sim \frac{\sqrt{r}}{0,3} \quad (r - \text{в км}).$$

Радиус действия локационных установок, в состав которых входит радиопрожектор, достигает десятков километров. При  $r$  порядка нескольких километров и больше мы имеем дело в случае микрорадиоволнового прожектора с большими значениями волнового параметра (диффракция Фраунгофера). Здесь «освещаемая» площадь тем меньше, чем острее главный лепесток диаграммы направленности. Следовательно, «освещаемая» площадь тем *меньше*, точность определения направления на цель тем больше, чем больше диаметр прожектора и чем меньше длина волны.

Подчеркнем, что оптический прожектор и прожектор для микрорадиоволн представляет собой два совершенно различных случая: расстояние  $R$  порядка 10 км является в отношении диффракционных явлений малым для оптического прожектора и большим для радиопрожектора такого же размера.

Иногда говорят: геометрическая оптика верна для оптического прожектора потому, что его диаметр велик по сравнению с длиной волны. Это не верно. Если бы критерием справедливости геометрической оптики была малость отношения  $\lambda/D$ , она была бы применима и к радиопрожектору. Критерием справедливости геометрической оптики является малость волнового параметра  $p = \sqrt{\lambda r}/D$ . Геометрическая оптика применима к оптическому прожектору только потому, что для него выполняется *этот* критерий. Если когда-нибудь удастся построить оптический прожектор, достаточно мощный для того, чтобы осветить Луну ( $r = 384\,000$  км), он будет освещать на ней тем *меньшую* площадь, чем *больше* будет его диаметр.

Для акустических прожекторов имеют место приблизительно такие же оценки, как для микрорадиоволн (при  $\nu = 10^3$  герц имеем в воздухе  $\lambda = 33$  см).

**4. Противоречие между направленностью излучения и компактностью излучателя.** Сопоставим результаты, полученные здесь для области больших значений волнового параметра, с результатом, полученным (также для области больших значений волнового параметра) при рассмотрении сложных излучателей (гл. VIII, § 4—7).

Если мы назовем величину  $1/D$  *компактностью* излучателя ( $D$  — диаметр прожектора или общий размер сложного излучателя), а величину  $1/\sin \theta_1$  — его *направленностью* (эта величина тем больше, чем острее главный лепесток), мы можем написать для обоих типов излучателей на основании формул (8.13), (8.25), (9.47) и (9.48) соотношение

$$\text{компактность} \times \text{направленность} \sim \frac{1}{\lambda}.$$

Это — универсальный и весьма важный с точки зрения физики и техники результат. Он указывает, во-первых, что *при данной длине волны требование большой компактности излучателя и требование большой направленности излучения противоречат друг другу*. Увеличение направленности излучения может быть достигнуто лишь путем уменьшения компактности излучателя, увеличение компактности излучателя — лишь путем

уменьшения направленности излучения. Полученный результат указывает, во-вторых, что *противоречие между требованием компактности излучателя и требованием острой направленности излучения может быть смягчено укорочением волны*: чем короче волна, тем бóльшая компактность возможна при данной направленности, тем бóльшая направленность возможна при данной компактности.

Здесь опять видно то преимущество укорочения волны, о котором говорилось в гл. VIII и которое вызвало «борьбу» за короткую волну», характерную для развития радиотехники за последние 15—20 лет.

## § 11. Дифракционная картина вблизи фокуса

1. Предварительные сведения. Рассмотрим комбинацию оптических линз, ограниченных кусками сферических поверхностей, центры которых расположены на одной прямой (центрированная система; прямая, на которой расположены центры линз, называется оптической осью системы). Пусть эта центрированная система (рис. 396) такова, что ее можно рассмат-

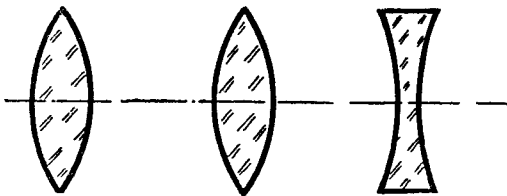


Рис. 396. Центрированная оптическая система.

ривать с достаточным приближением как идеальный объектив (§ 6, п. 3): при каждом положении  $S$  точечного источника в определенной части пространства по одну сторону объектива существует фокус-такая точка  $P$  по другую сторону объектива, в которой происходит практически полная компенсация разностей фаз вторичных волн.  $P$  называется точкой, сопряженной  $S$ .

Точки  $F_1, F_2$ , сопряженные бесконечно удаленным точкам  $S_1, S_2$  оптической оси, называются главными фокусами объектива (слово «идеальный» мы будем для краткости опускать). Плоскости, перпендикулярные к оптической оси и проходящие через  $F_1, F_2$ , называются фокальными плоскостями.

Теория показывает <sup>\*</sup>), что точка  $P$ , сопряженная  $S$ , может быть найдена с помощью построения рис. 397. Здесь  $H_1, H_2, N_1, N_2$  — точки, положе-

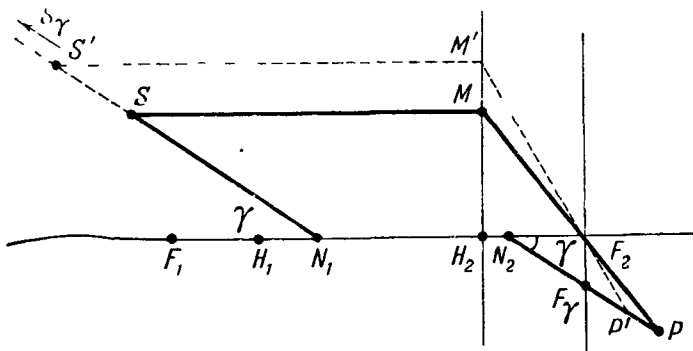


Рис. 397. Построение точек, сопряженных  $S$  и  $S'$ .

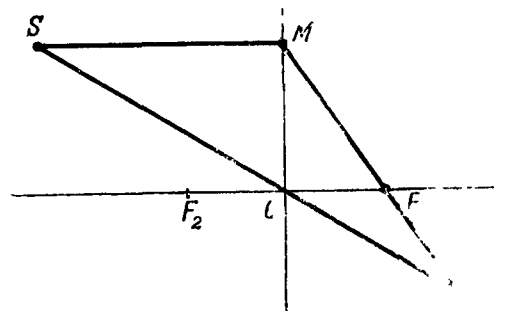


Рис. 398. Построение точки, сопряженной  $S$  в случае тонкой линзы.

ние которых (как и положение главных фокусов) определяется конструкцией объектива.  $H_1, H_2$  называются главными точками,  $N_1, N_2$  — узловыми точками объектива. Прямые  $SN_1$  и  $N_2P$  параллельны между собой, прямая  $SM$  параллельна оптической оси,  $M$  лежит в главной плоскости (плоско-

<sup>\*</sup>) Подробнее см. курсы оптики, например, Г. С. Ландсберг, Оптика. Гостехиздат, 1952 (стр. 210 и следующие).

сти, перпендикулярной к оптической оси и проходящей через  $H_2$ ). Построение повторено (пунктиром) для точки  $S'$ , лежащей на продолжении прямой  $N_1S$ . Ясно, что бесконечно удаленной точке  $S_\gamma$  продолжения прямой  $N_1S$ , образующей угол  $\gamma$  с оптической осью, сопряжена точка  $F_\gamma$  фокальной плоскости такая, что  $N_2F_\gamma$  параллельна  $S_\gamma N_1$  (предельный случай:  $MF_2$  перпендикулярно к оптической оси). Частным случаем построения рис. 397 является известное из средней школы построение изображения, даваемого тонкой линзой (рис. 398). Здесь предположение о том, что для каждой точки  $S$  существует сопряженная точка  $P$ , является весьма грубой идеализацией. Рис. 397 переходит в рис. 398 при слиянии точек  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $N_1$ ,  $N_2$ . Центр тонкой линзы  $C$  играет в ней роль двойной узловой и двойной главной точек.

2. Дифракционная картина в фокальной плоскости в случае бесконечно удаленного источника. На основании принципа Гюйгенса — Френеля волна, выходящая из объектива, если точечный источник находится в  $S_\gamma$  (рис. 399, а), может быть представлена как суперпозиция вторичных волн, посылаемых источниками, расположенными в любой плоскости  $\pi_\gamma$ , перпендикулярной к прямой  $S_\gamma N_1$ . Эти источники синфазны, так как плоскость  $\pi_\gamma$  совпадает с фронтом первичной волны. По условию (объектив идеальный) вторичные волны от указанных источников приходят в  $F_\gamma$  с одинаковыми фазами. Отсюда следует, что если поместить в произвольных точках  $M_1$ ,  $M_2$  плоскости  $\pi_\gamma$  источники с какими угодно фазами, то колебания, создаваемые ими в  $F_\gamma$ , будут иметь ту же разность фаз, что и сами источники.

Рассмотрим теперь опыт, схема которого показана на рис. 399, б. Перед входным отверстием объектива расположен экран  $E_1$  с отверстием произвольной формы. Точечный источник  $S$  находится на оптической оси объектива в «бесконечности», т. е. там, где волновой параметр  $\sqrt{\lambda R_0/D}$  ( $R_0$  — расстояние от  $S$  до экрана,  $D$  — размер отверстия) очень велик. Это условие заведомо выполнено, если, например, источником света является звезда. Наблюдают дифракционную картину в фокальной плоскости объектива (экран  $E_2$ , на пример фотопластинка).

Применим принцип Гюйгенса — Френеля, взяв за поверхность  $\sigma$  плоскость  $\pi_\gamma$ , проходящую через отверстие в экране  $E_1$ . Согласно сказанному в связи с рис. 399, а разность фаз вторичных волн, приходящих в  $F$  из

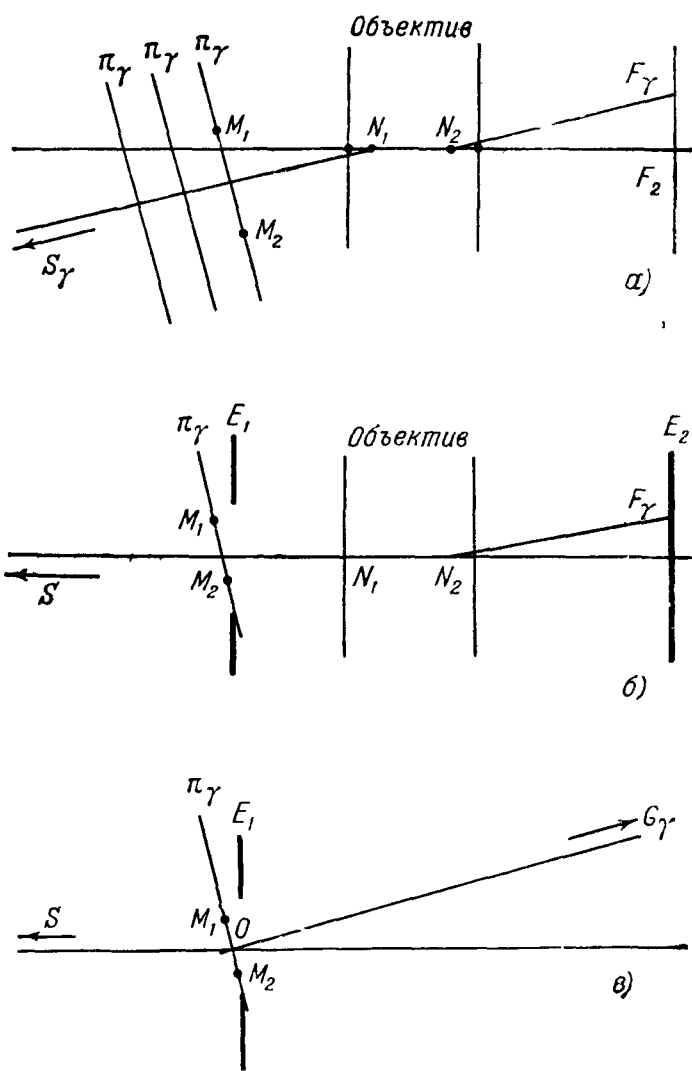


Рис. 399. Освещенность в  $F_\gamma$  в случае б) пропорциональна освещенности в  $G_\gamma$  в случае в).

любых двух точек плоскости  $\pi_\gamma$  (например,  $M_1, M_2$ ), равна разности фаз между колебаниями в самих этих точках. Но такое же значение имеет (если объектив убран) разность фаз между колебаниями, приходящими от  $M_1, M_2$  в бесконечно удаленную точку  $G_\gamma$  прямой  $OG_\gamma$ , (рис. 399, в), параллельной  $N_2F_\gamma$ . Итак, колебания, приходящие в  $F_\gamma$  при наличии объектива и в  $G_\gamma$  в отсутствие объектива, находятся в одинаковых фазовых соотношениях. Следовательно, освещенность в  $F_\gamma$  при наличии объектива пропорциональна освещенности в  $G_\gamma$  в отсутствие объектива. Мы считаем отверстие объектива настолько большим, что практически весь свет, дифрагированный отверстием в экране  $E_1$ , проходит через объектив\*). Следовательно, дифракционная картина в фокальной плоскости идеального объектива подобна дифракционной картине, которая получилась бы без объектива на «бесконечно удаленном» экране (на экране, расположенном

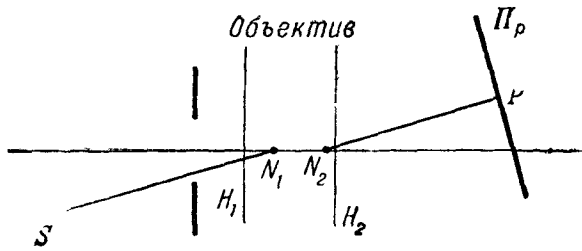


Рис. 400. К обобщению понятия дифракции Фраунгофера.

в области больших значений волнового параметра  $\sqrt{\lambda R}/D$ , где  $R$  — расстояние от отверстия до точки наблюдения). Дифракционную картину, образующуюся при бесконечно удаленном источнике в фокальной плоскости идеального объектива, называют поэтому, так же как дифракционную картину в области больших значений волнового параметра, дифракционной картиной Фраунгофера.

Аналогичные соображения могут быть высказаны для параболического зеркала. Если источник находится в бесконечности на оси параболоида, в фокальной плоскости последнего (плоскости, перпендикулярной к оси параболоида и проходящей через его фокус) образуется дифракционная картина Фраунгофера.

Путем рассуждений, аналогичных проведенным в п. 2, можно обосновать следующее утверждение.

Если точечный источник находится в произвольной точке  $S$  (рис. 400), дифракционная картина в плоскости  $\Pi_P$ , содержащей  $P$  и перпендикулярной к  $N_2P$ , подобна той дифракционной картине, которая получится в бесконечности, если убрать объектив и отодвинуть источник в бесконечность вдоль прямой  $N_1S$ . Таким образом, всякая дифракционная картина, наблюдаемая вблизи точки, сопряженной точечному источнику, может быть названа дифракционной картиной Фраунгофера.

**3. Наблюдение дифракции Фраунгофера от решетки и отверстия с помощью объектива.** Как было показано в § 3, практически трудно (ввиду малости  $\lambda$ ) наблюдать оптическую дифракционную картину от решетки при больших значениях  $\sqrt{\lambda R_0}/D$  и  $\sqrt{\lambda R}/D$ . Но мы увидим картину, отличающуюся только масштабом от той, о которой шла речь в § 3, собрав установку, показанную на рис. 401. С помощью такой установки можно

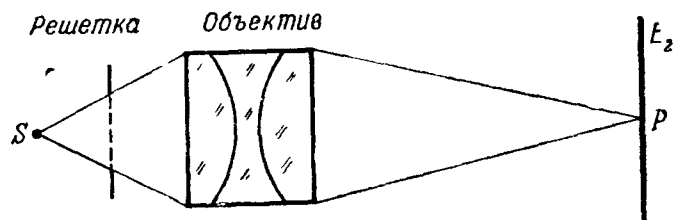


Рис. 401. Реальные условия наблюдения дифракции Фраунгофера на решетке в оптике (для наглядности показан «ход лучей» по геометрической оптике).

\*) Мы пренебрегаем также зависимостью коэффициента отражения стекла от угла падения.

также наблюдать, заменив решетку экраном с прямоугольным или круглым отверстием, Фраунгоферовы дифракционные картины, подобные тем, о которых шла речь в предыдущих параграфах.

В частности, можно увидеть оптическую дифракционную картину Фраунгофера, помещая дифрагирующий предмет между точечным источником света и глазом (рис. 402) и аккомодируя глаз на источник. Здесь роль объектива играет оптическая система глаза, роль экрана  $E_2$  — его сетчатка. Практически точечным источником может являться

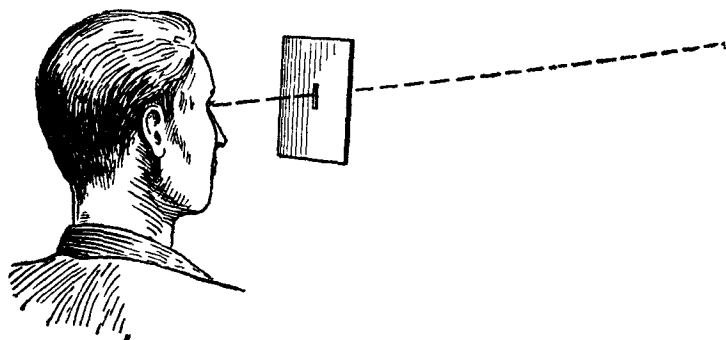


Рис. 402. Наблюдение дифракции Фраунгофера невооруженным глазом.

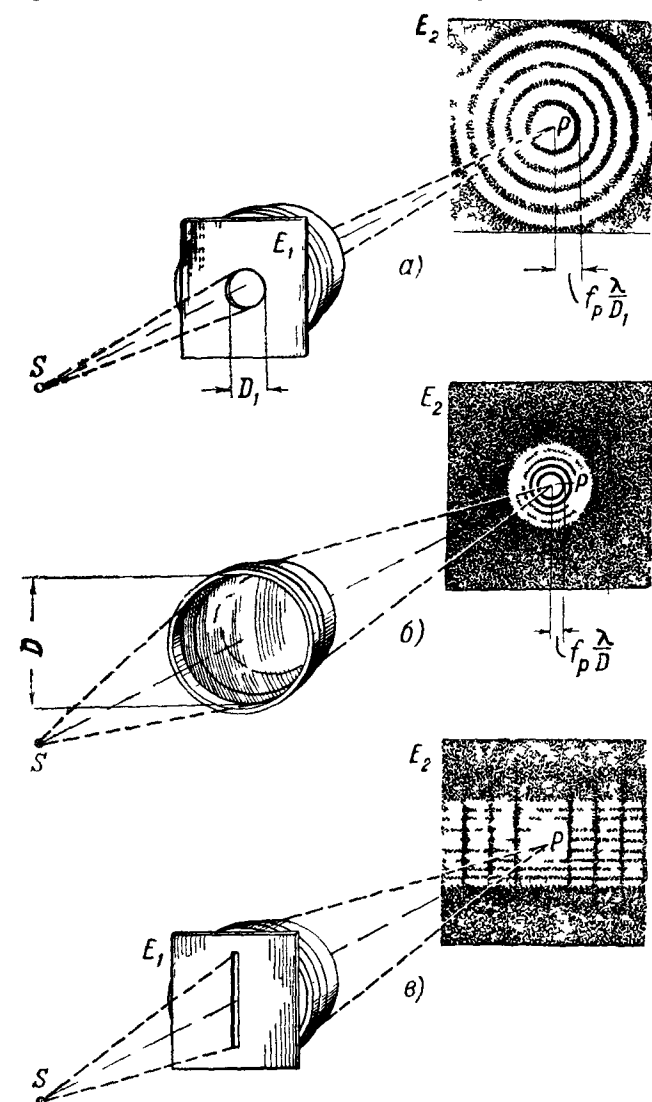


Рис. 403. Оптическое изображение точечного источника  $S$ , даваемое объективом: *а* — при сильно задиафрагмированном отверстии объектива, *б* — без диафрагмы, *в* — при наблюдении через узкую щель. Для наглядности показан «ход лучей» по геометрической оптике. Дифракционная картина на экране  $E_2$  показана в сильно увеличенном масштабе. В действительности при  $f\rho = 10D_1$  радиус первого темного кольца близок для зеленого света к 0,01 мм.

электрической лампы накаливания и даже Солнце (ср. гл. X, § 10, 11). Таким способом легко наблюдать дифракционную картину Фраунгофера от щели, прорезанной бритвой в листе бумаги, или от отверстия, проколотого в нем острой иглой, а также дифракцию от отражательной решетки, которую образуют борозды граммофонной пластинки или полумиллиметровые деления хорошей линейки. Здесь период решетки очень велик по сравнению с длиной волны, и для наблюдения дифракции нужно, чтобы свет падал на пластинку или линейку очень косо (ср. § 3, п. 3).

4. Оптическое изображение точечного источника. Сказанное в п. 3 остается справедливым, если экран с отверстием непосредственно прилегает к объективу и, в частности, если имеет место случай, показанный на рис. 403, *а*: экран имеет круглое отверстие (диафрагма) с центром на оптической оси. В частности, контур диафрагмы может совпадать с контуром входного отверстия объектива. Этот случай не отличается от того, когда нет экрана перед объективом и входящая в него волна ограничена только его оправой (рис. 403, *б*)

Из сказанного в п. 3 следует, что в фокальной плоскости образуется дифракционная картина Фраунгофера от отверстия в экране, закрывающего входное отверстие объектива, или от отверстия,

ограниченного оправой самого объектива. Эта дифракционная картина и есть *оптическое изображение* точечного источника. (Как уже подчеркивалось в § 6, изображение даже точечного источника принципиально не может быть точкой.)

Ясно, что вид оптического изображения точечного источника здесь определяется контуром входного отверстия. В случае круглого отверстия изображением является круглое светлое пятно, окруженное системой концентрических дифракционных колец. Распределение освещенности описывается кривой рис. 393. Угол  $\theta$  соответствует расстоянию

$$\rho = f_P \operatorname{tg} \theta \quad (f_P = N_2 P)$$

от фокуса  $P$ . Радиус первого темного кольца равен, таким образом, приблизительно (если угол  $\theta$  мал)

$$1,22 f_P \frac{\lambda}{D},$$

радиус второго темного кольца — приблизительно

$$2,24 f_P \frac{\lambda}{D}$$

и т. д. Здесь  $D$  — диаметр отверстия диафрагмы или в отсутствие ее — оправы объектива.

При расширении диафрагмы изображение сжимается и освещенность в его середине увеличивается. Чем больше диаметр входного отверстия объектива, тем меньше и тем освещеннее в отсутствие диафрагмы центральное пятнышко картины, составляющей оптическое изображение.

В случае прямоугольного отверстия распределение освещенности в изображении носит такой же характер, как распределение интенсивности акустической волны, излучаемой произвольной пластинкой, в области больших значений волнового параметра (гл. VIII, § 7, ср. также рис. 301). Изображение состоит из светлых пятен, вытянутых в направлении, параллельном меньшей стороне отверстия.

## ГЛАВА X

### СТАТИСТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ

#### § 1. Предварительные замечания

1. **Необходимость отказа от синусоидальной идеализации.** Представление о синусоидальных колебаниях и волнах в сочетании с теорией суперпозиции синхронных синусоидальных колебаний привело нас к ясной и удовлетворительной картине обширного класса оптических, радиофизических и акустических явлений. Мы здесь имеем в виду явления, рассмотренные в гл. VIII и IX. Для них характерно, что в одних местах действие нескольких источников волн сильнее, в других — слабее действия каждого источника в отдельности и что, в частности, действие одного источника может полностью погасить действие другого.

Вместе с тем при изучении оптических явлений мы сразу наталкиваемся на некоторые фундаментальные факты, для истолкования которых представление о свете как о синусоидальных волнах является несостоятельным.

1. Придвинем вплотную к источнику света непрозрачный экран, прорезанный двумя одинаковыми параллельными узкими щелями (рис. 404), и будем наблюдать распределение освещенности на другом, удаленном экране. Если бы световые волны, излучаемые из обеих щелей, были синусоидальны (как это принималось при рассмотрении *одной* щели в гл. V), на этом экране возникла бы система интерференционных полос, подобная показанной на рис. 178, т. е. получился бы такой же результат, как если бы мы проделали, пользуясь в качестве источника *одной* щелью, опыт Френеля с зеркалами. В действительности второй экран окажется равномерно освещенным; освещенность будет вдвое больше, чем в случае, когда закрыта одна из щелей; так будет и в том случае, если между источником и щелью поместить светофильтр. Эти факты находятся в согласии с тем, чему учит повседневный опыт: когда мы зажигаем две лампы, всюду в комнате становится светлее, чем если горит только одна из них.

2. Синусоидальная электромагнитная волна обязательно является *поляризованной* волной. Естественный свет обладает, как мы видели, осевой симметрией (гл. V). Поляризованная волна обладает осевой симметрией только в том случае, если она поляризована по кругу. Заменим в установке, показанной на рис. 179, первый поляризатор пластинкой  $\lambda/4$

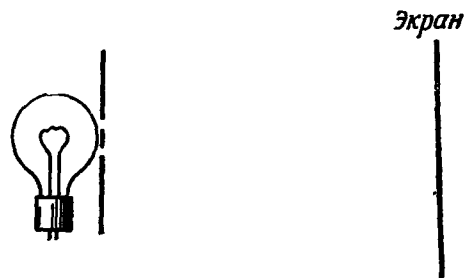


Рис. 404. Параллельные щели в левом экране освещаются различными частями источника света (в данном случае матовой лампы). На правом экране — равномерная освещенность.

(рис. 405). Если бы естественный свет был светом, поляризованным по кругу, из пластинки  $\lambda/4$  выходил бы линейно-поляризованный свет и поворотом второго поляроида можно было бы погасить светлое пятно на экране (ср. гл. VII). Опыт, однако, показывает, что освещенность экрана, как и в отсутствие пластинки  $\lambda/4$ , совершенно не меняется при повороте поляроида.

Итак, один и тот же свет при толковании одних опытов *можно* рассматривать как синусоидальную волну, но при толковании других опытов этого делать *нельзя*.

Это связано, очевидно, с тем, что реальные световые волны не являются синусоидальными и что, когда мы их рассматривали как синусоидальные, мы вводили определенную идеализацию; как и всякая идеализация, применяемая в физике, она имеет ограниченную область применимости.

В этой главе будет выяснено, что ни одно реальное колебание не является строго синусоидальным. Будут разобраны характер и механизм неизбежных отклонений от синусоидальности, имеющих место в свете, радиоволнах, звуке, и будет показано, почему в одних случаях — и в каких

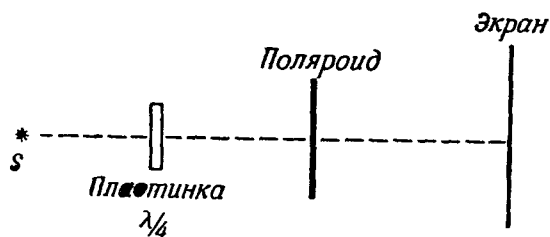


Рис. 405. При повороте поляроида вокруг луча освещенность экрана не изменяется.

именно — эти отклонения существенны, а в других — нет. Как мы увидим, колебания, которые мы рассматривали до сих пор как синусоидальные, являются в действительности *модулированными* колебаниями, их амплитуды и фазы медленно меняются со временем (т. е. меняются заметно лишь за время, большое по сравнению с периодом несущего колебания). Однако в отличие от модуляции при радиопередаче (гл. IV, § 8) эта модуляция не создается искусственно, а возникает *естественно*; носит не регулярный, а *хаотический* характер; является не динамическим, а *статистическим* процессом.

Последнее утверждение нуждается в разъяснении.

**2. Динамические и статистические процессы.** Мы называем *динамическим* такой процесс изменения физической величины со временем, ход которого однозначно предрешен заданием определенной совокупности условий. Таковы \*) все процессы, рассмотренные в гл. III и IV. Если, например, подобрав определенные значения  $C, L, R$  (гл. III, § 3), мы будем многократно снимать осциллограммы тока и заряда в контуре, повторяя одни и те же начальные условия  $q = q_0, \dot{q} = \dot{q}_0$ , мы будем получать одинаковые осциллограммы. Теория динамических процессов (как мы видели на ряде примеров в гл. III и IV) строится с помощью *динамических схем*. Мы понимаем под динамической схемой уравнение (или систему уравнений), диаграмму и т. д., однозначно определяющие ход процесса, если даны необходимые условия. Примеры динамических схем: дифференциальное уравнение (3.22), однозначно определяющее функции  $q(t), \dot{q}(t)$ , если даны  $C, L, R, q_0, \dot{q}_0$ ; диаграмма рис. 115а, однозначно определяющая последовательные значения  $p = p_1, p_2$ , если дано начальное значение  $p = p_0$ .

Наряду с динамическими процессами в природе существуют процессы другого рода, значение которых было полностью оценено лишь сравнительно недавно. В этих процессах физические величины (смещение частицы,

\*) Точнее, таковы с удовлетворявшей нас до сих пор степенью приближения (ср. § 3).



заряд конденсатора, амплитуда колебания и т. д.) изменяются со временем так, как если бы последовательность принимаемых ими значений определялась результатами последовательных тиражей некоторой лотереи (или, если угодно, последовательных партий некоторой азартной игры \*)). Такие процессы называются *статистическими* или *случайными* (или еще *стохастическими*).

Случайными процессами являются, например, радиоактивный распад, броуновское движение.

Было бы грубой ошибкой думать, что случайные процессы не подчиняются никаким законам. Для этих процессов существуют, как мы увидим, вполне объективные *статистические законы*, которые нисколько не уступают по своей определенности и четкости динамическим законам. Установление статистических законов является не менее ценным видом познания и не менее мощным средством управления явлениями природы, чем установление динамических законов.

Условия той лотереи (или правила той азартной игры), которая может служить моделью данного случайного процесса, мы будем называть *статистической схемой* этого процесса. Существует отрасль математики — теория вероятностей, — которая позволяет выводить из статистической схемы определенные высказывания о характере случайного процесса (подобно тому как теория дифференциальных уравнений позволяет делать на основании динамической схемы высказывания о ходе динамического процесса).

Мы знаем, что различным динамическим процессам (например, автоколебаниям и затухающим колебаниям) соответствуют различные динамические схемы и что часто одна и та же динамическая схема соответствует весьма разнообразным динамическим процессам (например, колебаниям часов и лампового генератора); именно на этом основан в значительной мере единый язык теории колебаний (гл. I, § 2, гл. II, § 7 и гл. VIII, § 12). Аналогично обстоит дело со статистическими процессами. Существуют различные статистические схемы физических процессов, и, например, чтобы построить правильную картину естественной модуляции света, нужно положить в основу вполне определенный тип статистической схемы. Вместе с тем часто одна и та же статистическая схема позволяет объяснить множество, казалось бы, весьма далеких статистических явлений, например естественную модуляцию света и броуновское движение \*\*).

## § 2. Суперпозиция колебаний со случайными фазами

1. Постановка задачи. Многие вопросы теории колебаний и волн приводят к рассмотрению суммы

$$s = s_1 + s_2 + \dots + s_N$$

некоторого числа  $N$  колебаний вида

$$\begin{aligned} s_1 &= a \cos(\omega t - \alpha_1), \\ s_2 &= a \cos(\omega t - \alpha_2), \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ s_N &= a \cos(\omega t - \alpha_N), \end{aligned} \tag{10.1}$$

\*) Во избежание недоразумений необходимо подчеркнуть, что научное понятие «азартная игра» носит вполне объективный характер и нисколько не связано с переживаниями, к которым в обыденной речи относится слово «азарт».

\*\*) Разнообразные физические явления, подчиняющиеся вероятностным закономерностям, составляют предмет статистической физики (см. сноску на стр. 19). Она изучает эти явления с единой точки зрения, пользуясь при этом (как и всякая другая физическая теория) теми или иными идеализированными математическими схемами.

где амплитуда  $a$  и частота  $\omega$  постоянны, а фазы  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$  — переменные величины, подчиняющиеся некоторой заданной статистической схеме. Требуется вывести математическим путем из этой статистической схемы статистические законы, которым подчиняется колебание  $s$ .

Пусть, например, имеется решетка из  $N$  одинаковых вибраторов, параллельных и расположенных в одной плоскости (рис. 406). Все вибраторы питаются от общего передатчика частоты  $\omega$ , каждая через отдельный кабель, подключенный к передатчику через фазовращатель. Напряженности поля  $E_1, E_2, \dots, E_N$ , создаваемые вибраторами в достаточно удаленной точке  $P$ , лежащей на перпендикуляре к плоскости, в которой они

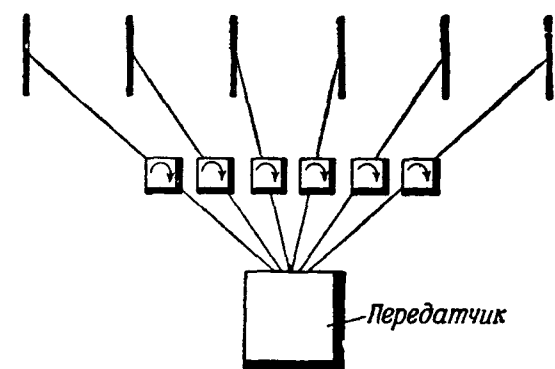


Рис. 406. Схематическое изображение параллельных вибраторов ( $N=6$ ), питаемых одним передатчиком через фазовращатель.

расположены, описываются формулами вида (10.1) (амплитуды токов во всех вибраторах предполагаются одинаковыми), причем величины  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$  определяются фазами токов в вибраторах. Фаза тока в каждом вибраторе определяется в свою очередь положением ручки соответствующего фазовращателя.

Предположим теперь, что положения ручек всех фазовращателей «случайны», т. е. изменяются время от времени в соответствии с некоторой статистической схемой. Как часто в течение очень большого времени амплитуда результирующего поля будет при-

нимать то или иное значение? Каково будет среднее значение за очень большое время интенсивности электрического поля в точке  $P$ ?

Мы привели наглядный (хотя несколько искусственный) пример интересующего нас здесь явления. С другими (уже не искусственными, но зато более сложными) примерами встретимся в дальнейшем.

**2. Пример простейшей статической схемы.** Пусть фазы  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$  подчиняются статистической схеме, наглядной моделью которой является игра в орлянку.

Представим себе, что  $N$  монет, перенумерованных от 1 до  $N$ , одновременно подбрасываются вверх и затем падают на стол. Одни монеты ложатся так, что сверху оказывается герб, другие — так, что сверху оказывается обозначение достоинства монеты («решетка»). Пусть фаза  $\alpha_i$   $i$ -го колебания ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) принимает значение 0, если  $i$ -я монета «дала герб», и значение  $\pi$ , если  $i$ -я монета «дала решетку».

Через некоторое время  $\tau$ , охватывающее очень большое число «периодов»  $T$  наших колебаний ( $T = 2\pi/\omega$ ), снова происходит подбрасывание  $N$  монет. Пусть снова фаза каждого колебания принимает значение 0 или  $\pi$  в соответствии с тем же правилом. Такое испытание повторяется *очень большое число раз* через равные промежутки времени  $\tau$ .

В применении к примеру с антеннами (п. 1) эта статистическая схема означает следующее: ручка каждого фазовращателя может принимать только два положения, которым соответствуют два значения фазы соответствующей слагающей поля, а именно 0 и  $\pi$ .

Что можно заключить на основании заданной статистической схемы о процессе изменения величины  $s$ ?

Ясно, прежде всего, что в результате последовательных испытаний будут получаться, вообще говоря, различные совокупности значений фаз  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ . Каждое испытание может дать, если, например,  $N = 2$ , любой из четырех результатов, записанных в таблице 1, если  $N = 4$  —

Таблица 1

$a_1$	$a_2$	$2n-N$	$(2n-N)^2$
+	+	2	4
+	-	0	0
-	+	0	0
-	-	-2	4

Таблица 2

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$2n-N$	$(2n-N)^2$
+	+	+	+	4	6
+	+	+	-	2	4
+	+	-	+	2	4
+	-	-	-	0	0
+	-	+	+	2	4
+	-	+	-	0	0
+	-	-	+	0	0
+	-	-	-	-2	4
-	+	+	+	2	4
-	+	+	-	0	0
-	+	-	+	0	0
-	+	-	-	-2	4
-	-	+	+	0	0
-	-	+	-	-2	4
-	-	-	+	-2	4
-	-	-	-	-4	16

любой из 16 результатов, записанных в таблице 2; (здесь знак  $+$  соответствует  $a_i = 0$ , знак  $-$  соответствует  $a_i = \pi$ ). Различным совокупностям значений  $a_1, a_2, \dots, a_N$  соответствуют, вообще говоря, различные значения амплитуды и фазы результирующего колебания  $s$ .

Амплитуда и фаза колебания  $s$  остаются постоянными в интервалах между испытаниями, но изменяются, вообще говоря, в результате каждого испытания, т. е. через промежутки времени  $\tau$ . Среди многочисленных испытаний будут попадаться, в частности, такие, в результате которых все фазы будут одинаковы, и в этом случае результирующая амплитуда будет равна  $Na$ . Фаза результирующего колебания может принимать только два значения: 0 или  $\pi$ .

Таким образом, осциллограмма  $s$  будет иметь, например, вид, показанный на рис. 407. Мы можем написать \*)

$$s = A(t) \cos \omega t,$$

$$A(t) = na - (N - n)a = (2n - N)a,$$

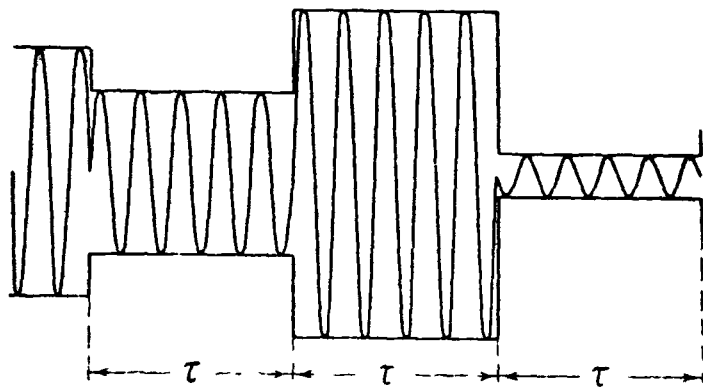


Рис. 407. Хаотически модулированное колебание, получающееся при сложении колебаний со случайными фазами, меняющимися в моменты  $\tau, 2\tau, 3\tau, \dots$

\*) Здесь удобно писать  $s$  без фазы, допуская оба знака для амплитуды.

где  $n$  — число слагаемых колебаний, имеющих фазу 0,  $(N-n)$  — фазу  $\pi$ . Функция  $A(t)$  постоянна на протяжении конечных интервалов времени  $\tau$  и претерпевает *случайные* изменения при переходе от одного интервала к другому. Мы можем сказать, что  $s$  является *модулированным* колебанием. Однако в отличие от модуляции, описанной в гл. IV, здесь модуляция носит беспорядочный, *хаотический* характер. Время  $\tau$  мы будем называть *временем модуляции*.

Мы дали *качественное* описание изучаемого случайного процесса. Поставим теперь такой *количественный вопрос*: как часто будут попадаться в осциллограмме функции  $s(t)$  куски синусоиды с тем или иным значением  $A(t)$ ? На этот вопрос можно дать приближенный, но достаточно определенный ответ для случая, когда мы наблюдаем колебание на протяжении промежутка времени, охватывающего очень большое число испытаний. Чем больше число испытаний, тем чаще и ближе результат опыта будет совпадать с результатом проводимого далее расчета.

Пусть  $N = 2$ . Результаты, изображаемые различными строками таблицы 1, будут попадаться среди большого числа испытаний приблизительно одинаковое число раз. Действительно, среди большого числа испытаний, как показывает опыт, каждая монета дает оба значения приблизительно одинаковое число раз. Кроме того, результаты бросания обеих монет совершенно независимы: среди тех испытаний, в которых первая монета дает герб (строки 1, 2), будет примерно половина таких, где вторая монета дает также герб (строка 1), и половина таких, где вторая монета «дает решку» (строка 2). То же будет среди приблизительно такого же числа испытаний, в которых первая монета «дает решетку» (строки 3, 4). Но это вовсе не значит, что различные возможные значения результирующей амплитуды будут встречаться среди большого числа испытаний приблизительно одинаковое число раз. Значение  $A = 2a$  получится только при *одном* определенном результате испытания (строка 1), значение  $A = 0$  — при *двух* различных результатах испытания (строки 2, 3), значение  $A = -2a$  — только при *одном* определенном результате испытания (строка 4).

Пусть  $N = 4$ . Разбор, аналогичный приведенному для  $N = 2$ , показывает, что среди большого числа испытаний будут попадаться приблизительно одинаковое число раз результаты, изображаемые различными строками таблицы 2. При этом значение амплитуды  $A = 4a$  получается только при *одном* определенном результате испытания (строка 1), значение  $A = 2a$  — при *четырёх* различных результатах испытаний (строки 2, 3, 5, 9), значение  $A = 0$  — при *шести* различных результатах (строки 4, 6, 7, 10, 11, 13) и т. д. Таким образом,  $A = 0$  будет появляться приблизительно в *шесть* раз чаще (среди большого числа испытаний), чем  $A = 4a$ .

Рассмотрим теперь вопрос в общем виде. Пусть  $N$  — произвольное целое число. Испытания, при которых *определенные*  $n$  монет выпадут гербом и *определенные* (остальные)  $N - n$  выпадут решеткой, будут попадаться среди большого числа испытаний приблизительно одинаковое число раз, не зависящее от  $n$ . Амплитуда

$$A = (2n - N) a$$

появляется в результате всех испытаний, при которых из  $N$  монет *какие угодно*  $n$  дают герб и *какие угодно*  $(N - n)$  — решетку. Число различных результатов испытаний, в каждом из которых *какие угодно*  $n$  монет из  $N$  дают герб и *какие угодно*  $(N - n)$  — решетку, равно, очевидно, числу сочетаний из  $N$  по  $n$ :

$$C_N^n = \frac{N!}{n!(N-n)!}.$$

Каждый из этих  $C_N^n$  результатов появляется среди большого числа испытаний одинаковое (приблизительно) число раз. Следовательно,

$$C_N^0, C_N^1, C_N^2, \dots, C_N^n, \dots, C_N^{N-2}, C_N^{N-1}, C_N^N$$

$$(C_N^n = C_N^{N-n})$$

и представляет собой числа появлений среди большого числа испытаний амплитуд

$$-Na, (2-N)a, (4-N)a, \dots, (2n-N)a, \dots, (N-4)a, (N-2)a, Na.$$

На рис. 408 дано графическое изображение полученного результата для различных  $N$ . Значение амплитуды  $Na$  при значительном  $N$  появляется очень редко. Наиболее часто встречающееся по сравнению с каждым из других значений значение амплитуды (при  $N$ , взятом всюду четным для простоты) есть  $A=0$ . Но и это значение амплитуды при большом  $N$  встречается все же весьма редко. Другими словами, нулевое значение амплитуды встречается среди большого числа кусков синусоиды чаще, чем любое другое определенное ее значение, но вместе с тем (за исключением случая  $N=2$ ) амплитуда равна нулю реже (а при большом  $N$  — гораздо реже), чем не равна нулю.

Как показывает таблица 1, при  $N=2$  приблизительно в половине из большого числа испытаний будет  $A^2=4a^2$  и в половине  $A^2=0$ . Следовательно, среднее значение результирующей интенсивности (т. е. квадрата результирующей амплитуды) за большое число испытаний будет равно при  $N=2$

$$\frac{4a^2 + 0}{2} = 2a^2.$$

Аналогичный подсчет с помощью таблицы 2 показывает, что при  $N=4$  среднее значение  $A^2$  за большое число испытаний равно

$$\frac{2 \cdot 16a^2 + 8 \cdot 4a^2 + 6 \cdot 0}{16} = 4a^2.$$

Рассмотрим теперь в общем виде вопрос о среднем значении  $A^2$  за большое число испытаний, т. е. за время, большое по сравнению со временем модуляции  $\tau$ . Это среднее мы будем обозначать  $\overline{A^2}$ . Такое обозначение является естественным обобщением обозначения усреднения за большое число периодов модуляции, введенного в гл. IV, § 9.

Среди очень большого числа испытаний будет приблизительно

$$mC_N^0 \text{ раз } A = (-N)a, \quad \text{откуда } A^2 = (-N)^2 a^2,$$

$$mC_N^1 \text{ » } A = (2-N)a, \quad \text{» } A^2 = (2-N)^2 a^2,$$

.....

$$mC_N^n \text{ » } A = (2n-N)a, \quad \text{» } A^2 = (2n-N)^2 a^2,$$

.....

$$mC_N^N \text{ » } A = Na, \quad \text{» } A^2 = N^2 a^2,$$

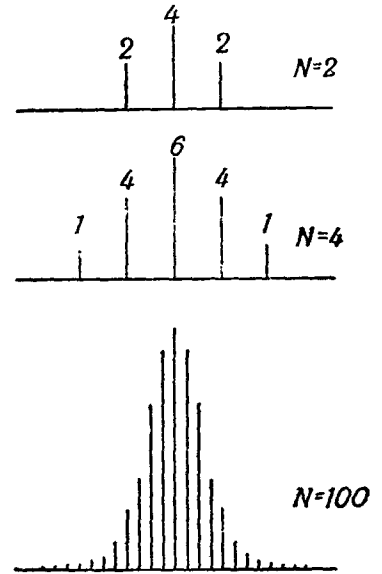


Рис. 408. Относительные числа появлений различных значений амплитуды при большом числе испытаний.

где  $m$  — некоторое положительное число, причем общее число испытаний равно

$$mC_N^0 + mC_N^1 + \dots + mC_N^n + \dots + mC_N^{N-1} + mC_N^N.$$

Следовательно,

$$\overline{A^2} = \frac{mC_N^0 N^2 a^2 + mC_N^1 (2-N)^2 a^2 + \dots + mC_N^n (2n-N)^2 a^2 + \dots + mC_N^N N^2 a^2}{mC_N^0 + mC_N^1 + \dots + mC_N^n + \dots + mC_N^{N-1} + mC_N^N}$$

или по сокращении на  $m$  и в более сжатой записи

$$\overline{A^2} = a^2 \frac{\sum_{n=0}^N C_N^n (2n-N)^2}{\sum_{n=0}^N C_N^n}. \quad (10.2)$$

Представив ряд, стоящий в числителе, в виде

$$N^2 \sum_{n=0}^N C_N^n - 4N \sum_{n=0}^N n C_N^n + 4 \sum_{n=0}^N n^2 C_N^n$$

и воспользовавшись тождествами

$$\sum_{n=0}^N C_N^n = 2^N, \quad (a)$$

$$\sum_{n=0}^N n C_N^n = N 2^{N-1}, \quad (b)$$

$$\sum n^2 C_N^n = N(N-1) 2^{N-2} + N 2^{N-1}, \quad (c)^*$$

получаем вместо (10.2)

$$\overline{A^2} = a^2 \frac{N^2 2^N - 4N \cdot N \cdot 2^{N-1} + 4N(N-1) 2^{N-2} + 4N \cdot 2^{N-1}}{2^N} = N a^2. \quad (10.3)$$

Итак, средняя интенсивность суммы колебаний со случайными фазами и одинаковыми амплитудами за время, охватывающее большое число изме-

\*) *Доказательство.* Рассмотрим тождество

$$(1+q)^N = \sum_{n=0}^N C_N^n q^n \quad (a')$$

(бином Ньютона) и тождества, получающиеся из него однократным и двукратным дифференцированием обеих его частей по  $q$ :

$$N(1+q)^{N-1} = \sum_{n=0}^N n C_N^n q^{n-1}, \quad (b')$$

$$N(N-1)(1+q)^{N-2} = \sum_{n=0}^N n(n-1) C_N^n q^{n-2} \quad (c')$$

Положим в (a'), (b'), (c')

$$q=1.$$

Это дает тождества (a), (b) и

$$\sum_{n=0}^N n(n-1) C_N^n = N(N-1) 2^{N-2}. \quad (d')$$

Комбинируя (c') с (d'), получаем тождество (c).

нений фаз, равна *интенсивности одного колебания*, умноженной на число колебаний.

В нашем примере с вибраторами среднее значение интенсивности поля в точке наблюдения за время, охватывающее большое число случайных переключений фазовращателей, равно числу вибраторов, умноженному на интенсивность поля, создаваемого отдельным вибратором.

*Относительное* число появлений определенного результата среди очень большого числа испытаний рассмотренного здесь типа называют *вероятностью* этого результата. Вероятность результатов, выражаемых каждой из строк таблицы 2, равна  $1/16$ . Вероятность значения  $A^2 = 0$  равна при этом  $6/16 = 3/8$ .

Вероятность значения результирующей амплитуды  $A = (2n - N)a$  равна

$$\frac{mC_N^n}{\sum_{k=0}^N mC_N^k} = \frac{C_N^n}{2^N}.$$

**3. Более сложная статистическая схема.** Возьмем теперь другую статистическую схему изменения фаз  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ . Как и статистическую схему п. 2, мы ее представим с помощью наглядной модели.

Пусть даны  $N$  мешков для игры в лото, пронумерованных от 1 до  $N$ ; каждый из них содержит очень большое число  $m$  последовательных номеров. Пусть испытание состоит теперь в том, что из всех мешков вынимаются наугад номера, и фазе  $i$ -го колебания дается значение, равное числу  $2\pi/m$ , умноженному на номер, вытянутый из  $i$ -го мешка, после чего вытянутый номер кладется обратно в мешок.

В нашем примере с вибраторами это означает, что ручка фазовращателя может принимать те положения, которым соответствуют фазы, отличающиеся друг от друга на  $2\pi/m$ , причем через равные промежутки времени  $\tau$  положения всех  $N$  фазовращателей «разыгрываются» в только что описанное лото.

Теперь фаза каждого колебания при большом числе испытаний будет приблизительно одинаковое число раз принимать любое из значений  $2\pi/m, 2 \cdot 2\pi/m, \dots, (m-1)2\pi/m, 2\pi$  (рис. 409). Вектор, изображающий суммарное колебание, будет при каждом испытании геометрической суммой  $N$  векторов одинаковой длины, каждый из которых имеет какое-нибудь из направлений, указанных на рис. 409. Результаты различных испытаний будут, вообще говоря, различны. Очень редко векторы, изображающие отдельные колебания, будут расположены настолько симметрично, что суммарная амплитуда будет равна нулю. Еще реже все векторы будут иметь одинаковое направление и суммарная амплитуда будет равна  $Na$ . Чаще всего будет некоторая результирующая амплитуда, отличная от нуля и гораздо меньшая, чем  $Na$  \*). В итоге и здесь получится хаотическая модуляция амплитуды примерно того же типа, что и на рис. 406, и хаотическая модуляция фазы такая, что фаза результирующего колебания будет за большой интервал времени приблизительно одинаковое число раз

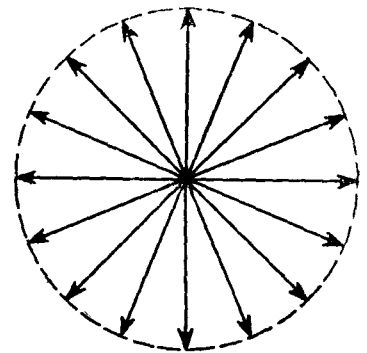


Рис. 409. Различные возможные фазы при  $m=16$ .

\*) Здесь амплитуду  $A$  мы считаем существенно положительной (в отличие от п. 1).

принимать не два значения 0 и  $\pi$ , а гораздо большее число значений, равномерно распределенных в интервале от 0 до  $2\pi$ . Здесь также время  $\tau$  мы будем называть временем модуляции.

Сделаем еще дальнейшее обобщение. Пусть фаза каждого из  $N$  колебаний может принимать *любое* значение в интервале от 0 до  $2\pi$ , причем все значения за большое число испытаний встречаются приблизительно одинаково часто («равновероятны»).

Покажем, что и здесь средний квадрат амплитуды за большое число испытаний будет близок к  $Na^2$ .

Имеем:

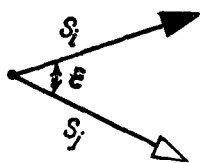
$$s = \sum_{i=1}^N a \cos(\omega t - \alpha_i) = A(t) \cos[\omega t - \varphi(t)],$$

где  $a$ ,  $\omega$  — постоянные,  $A(t)$ ,  $\varphi(t)$  беспорядочно меняются от испытания к испытанию.

На основании гл. II, § 2, п. 6 интенсивность (квадрат амплитуды) результирующего колебания

$$A^2 = Na^2 + 2a^2 \sum_{i \neq j} \cos(\alpha_i - \alpha_j). \quad (10.4)$$

Величина  $Na^2$  не меняется от испытания к испытанию, поэтому среднее значение  $A^2$  за время, большое по сравнению со временем модуляции  $\tau$ , равно



$$\overline{A^2} = Na^2 + 2a^2 \sum_{i \neq j} \overline{\cos(\alpha_i - \alpha_j)}$$

или, так как среднее значение суммы равно сумме средних значений ее слагаемых,

$$\overline{A^2} = Na^2 + 2a^2 \sum_{i \neq j} \overline{\cos(\alpha_i - \alpha_j)}.$$



Рис. 410. Оба показанных соотношения фаз колебаний  $s_i$ ,  $s_j$  равновероятны (здесь  $\varepsilon < 0$ ).

За большое число испытаний для каждой пары колебаний  $s_i$ ,  $s_j$  приблизительно одинаковое число раз встретятся комбинации, показанные на рис. 410, т. е. значения  $\alpha_i - \alpha_j = \varepsilon$  и  $\alpha_i - \alpha_j = \varepsilon + \pi$  и, следовательно, значения  $\cos(\alpha_i - \alpha_j) = \cos \varepsilon$  и  $\cos(\alpha_i - \alpha_j) = -\cos \varepsilon$ . Поэтому с тем меньшей ошибкой, чем больше число испытаний, охватываемое временем усреднения, имеем для всех  $i, j$

$$\overline{\overline{\cos(\alpha_i - \alpha_j)}} = 0$$

и, следовательно,

$$\overline{A^2} = Na^2.$$

Как подчеркивал Рэлей\*), здесь нужно остерегаться «одной ошибки, которой не избежали некоторые высокоавторитетные ученые».

Иногда думают, что когда  $N$  велико, интенсивность при каждом *отдельном* испытании близка к  $Na^2$ . Мы доказали не это, а совсем другое утверждение: то, что среднее от интенсивностей, получающихся при *боль-*

\*) Р э л е й, Волновая теория света, Гостехиздат, 1940, стр. 11, а также Р э л е й, Теория звука, Гостехиздат, 1940, т. I, стр. 31.



шом числе испытаний, близко к  $Na^2$  (независимо от того, велико или мало  $N$ ).

Как и в п. 1, здесь можно подсчитать вероятности различных значений интенсивности\*) (т. е. то, как часто они попадают среди большого числа испытаний). Оказывается, что, как бы ни было велико  $N$ , значительные отклонения интенсивности от ее среднего значения  $Na^2$  вовсе не редки. Так, например, при большом  $N$  из 100 испытаний будет приблизительно 33 таких, где  $A^2 < 0,4 Na^2$ , и 22 таких, где  $A^2 > 1,5 Na^2$ .

4. Излучение системы антенн, колеблющихся со случайными фазами. Рассмотрим излучение антенны, о которой шла речь в пп. 1—3, под произвольным углом  $\theta$  (ср. гл. VIII, § 4). Имеем:

$$\begin{aligned} E_1 &= a \cos(\omega t - \alpha_1), \\ E_2 &= a \cos(\omega t - \alpha_2 - \beta), \\ E_3 &= a \cos(\omega t - \alpha_3 - 2\beta), \\ &\dots \dots \dots \\ E_N &= a \cos[\omega t - \alpha_N - (N-1)\beta], \end{aligned}$$

причем, если  $d$  — расстояние между вибраторами,

$$\beta = kd \sin \theta,$$

откуда для интенсивности  $A_\theta^2$  поля, излучаемого под углом  $\theta$ , получаем:

$$A_\theta^2 = Na^2 + 2a^2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N' \cos[\alpha_i - \alpha_j + (i-j)\beta] \quad (10.5)$$

(штрих означает, что при суммировании пропускается  $j=i$ ). В выражение зависимости  $A_\theta^2$  от  $\theta$  входят фазы  $\alpha_i, \alpha_j$  колебаний вибраторов, следовательно, вид зависимости меняется от испытания к испытанию (через промежутки времени  $\tau$ ). Примем снова для фаз  $\alpha_i$  статистическую схему п. 3 и вычислим среднее значение  $\overline{A_\theta^2}$  интенсивности в направлении  $\theta$  за время, большое по сравнению с  $\tau$ :

$$\overline{A_\theta^2} = Na^2 + 2a^2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N' \overline{\cos[\alpha_i - \alpha_j + (i-j)\beta]}.$$

Рассуждая так же, как в п. 3, и обратив внимание на то, что независимо от значения  $(i-j)\beta$

$$\cos[\varepsilon + (i-j)\beta] = -\cos[\varepsilon + \pi + (i-j)\beta],$$

мы получаем:

$$\overline{\overline{\cos[\alpha_i - \alpha_j + (i-j)\beta]}} = 0,$$

откуда

$$A_\theta^2 = Na^2. \quad (10.6)$$

Мы получили для средней интенсивности значение, не зависящее от  $\theta$ .

Формулы (10.5), (10.6) означают следующее. Если мы будем снимать диаграмму направленности, расположив по разным направлениям  $\theta$  радиоприемники, у которых временная постоянная демодулятора мала по сравнению с  $\tau$  (малоинерционное исследование интенсивности излучения, ср. гл. IV, § 8), мы получим «трепещущую» лепестковую диаграмму

\*) Вычисление значительно сложнее, чем в п. 1. Оно приведено в «Теории звука» Рэлея, стр. 54—56.

направленности, вид которой меняется случайно через каждые  $\tau$  сек. Если мы будем снимать диаграмму направленности с помощью радиоприемников, у которых временная постоянная демодулятора велика по сравнению с  $\tau$  (инерционное измерение), мы получим неподвижную диаграмму направленности, имеющую вид окружности.

Подчеркнем также другую сторону дела.  $A_{\theta}^2$  не равно, вообще говоря, сумме интенсивностей, создаваемых двумя половинами системы антенн, а именно: величин

$$A_{1\theta}^2 = \frac{N}{2} a^2 + 2a^2 \sum_{i=1}^{N/2} \sum_{j=1}^{N/2} \cos [\alpha_i - \alpha_j + (i-j)\beta],$$

$$A_{2\theta}^2 = \frac{N}{2} a^2 + 2a^2 \sum_{i=N/2+1}^N \sum_{j=N/2+1}^N \cos [\alpha_i - \alpha_j + (i-j)\beta]$$

( $N$  предполагается четным). В зависимости от соотношения фаз  $\alpha_i$  величина  $A_{\theta}^2$  будет меняться от  $(A_{1\theta} - A_{2\theta})^2$  до  $(A_{1\theta} + A_{2\theta})^2$ , причем все три величины  $A_{1\theta}^2$ ,  $A_{2\theta}^2$ ,  $A_{\theta}^2$  меняются от испытания к испытанию. Напротив, величина  $\overline{A_{\theta}^2}$  равна сумме средних интенсивностей

$$\overline{A_1^2} = \frac{N}{2} a^2, \quad \overline{A_2^2} = \frac{N}{2} a^2,$$

создаваемых половинами системы антенн. Перенеся этот результат в оптику, мы получим объяснение того, почему мы не наблюдаем интерференции

от независимых источников света (например, от двух частей одного и того же пламени) (ср. § 5).

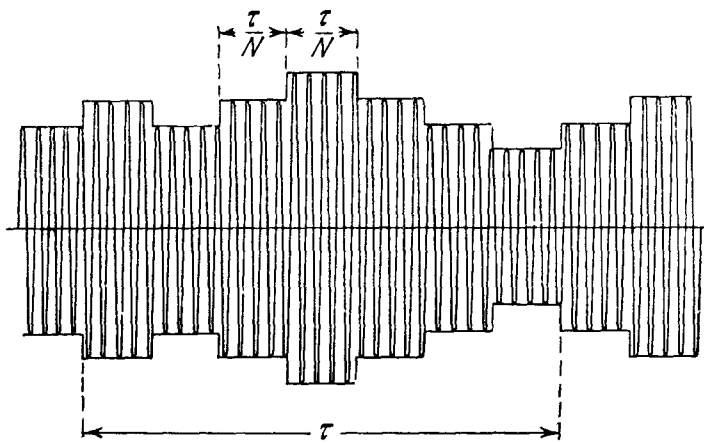


Рис. 411. Хаотически модулированное колебание, получающееся при сложении  $N$  колебаний со случайными фазами, меняющимися в различные моменты времени.

бания  $s_1$  происходит в моменты  $t = \tau/N$ ,  $(\tau/N) + \tau$ ,  $(\tau/N) + 2\tau$ , ..., «выбрасывание монеты», определяющее фазу  $\alpha_2$  колебания  $s_2$ , происходит в моменты  $t = 2\tau/N$ ,  $(2\tau/N) + \tau$ ,  $(2\tau/N) + 2\tau$ , ... и т. д., и, наконец, «выбрасывание монеты», определяющее фазу  $\alpha_N$  колебания  $s_N$ , происходит в моменты  $t = \tau$ ,  $2\tau$ ,  $3\tau$ , ... (Для этой модели не существенно, имеется ли  $N$  монет — по числу слагаемых колебаний — или через каждые  $\tau/N$  сек. выбрасывается одна монета, определяя последовательно значения фаз  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ . Мы будем дальше для простоты представлять себе вторую картину.)

В результате случайных изменений фаз его слагаемых колебание  $s(t)$  представляет собой, как и в п. 3, колебание несущей частоты  $\omega$ , хаотиче-

ски модулированное по амплитуде и по фазе:

$$s(t) = A(t) \cos [\omega t - \varphi(t)].$$

Однако вследствие неодновременного изменения фаз слагаемых характер модуляции отличается от показанного на рис. 407: здесь амплитуда  $A(t)$  меняется ступеньками величины  $\pm 2a$  (в моменты тех «выбрасываний монеты», в результате которых происходит изменение фазы соответствующего колебания, рис. 411).

Выясним, насколько быстро происходит здесь хаотическая модуляция, т. е. какое время (в среднем) должно пройти, пока произойдет значительное изменение амплитуды  $A(t)$  и изменение на  $\pm \pi$  фазы  $\varphi(t)$  результирующего колебания  $s(t)$ . На первый взгляд может показаться, что модуляция при данном  $\tau$  тем быстрее, чем больше  $N$ , т. е. чем чаще происходит изменение фазовых соотношений слагаемых  $s_1, s_2, \dots, s_N$ . Но можно убедиться, что это не верно и что быстрота модуляции определяется исключительно величиной  $\tau$ .

Действительно, за время  $\Delta t = n\tau/N$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) может произойти случайное изменение фаз не более чем  $n$  слагаемых из общего числа  $N$ . Пока  $\Delta t \ll \tau$ , число  $n$  мало по сравнению с  $N$ , и изменение фаз даже всех этих слагаемых не может значительно изменить амплитуды результирующего колебания и лишь в редких случаях изменит его фазу. Лишь за время  $\Delta t = \tau$  успеет произойти «розыгрыш» фаз всех слагаемых, и следовательно, отличие между амплитудой и фазой в моменты  $t$  и  $t + \Delta t$  сможет стать таким же, как если бы «розыгрыш» фаз всех слагаемых произошел одновременно. Таким образом, *среднее время хаотической модуляции* (время, за которое в среднем успевают произойти значительное изменение амплитуды и смена фазы результирующего колебания) равно  $\tau$  независимо от того, происходит ли «розыгрыш» фаз отдельных слагаемых одновременно или последовательно во времени \*).

Каково в рассматриваемой модели среднее значение  $\overline{A^2}$  интенсивности за время, большое по сравнению со средним временем хаотической модуляции  $\tau$ ?

Выделим значения  $A^2$ , относящиеся к моментам  $t_1, t_1 + \tau, t_1 + 2\tau, \dots, t_1 + m\tau$ , где  $m$  — очень большое число. Ввиду того, что за время  $\tau$  успевают произойти «розыгрыш» всех фаз, ясно, что для значений  $A^2$ , относящихся к моментам  $t_1, t_1 + \tau, t_1 + 2\tau, \dots$ , справедливо все сказанное в п. 3 о значениях  $A^2$ , относящихся к различным испытаниям. В частности, среднее из рассматриваемых значений  $A^2$  равно  $Na^2$ . То же самое относится к среднему от значений  $A^2$  в моменты  $t_2, t_2 + \tau, t_2 + 2\tau, \dots, t_2 + m\tau$ , к среднему от значений  $A^2$  в моменты  $t_3, t_3 + \tau, t_3 + 2\tau, \dots, t_3 + m\tau$  и т. д. Искомое  $\overline{A^2}$  равно среднему из всех таких средних, а так как они все равны  $Na^2$ , имеем:

$$\overline{A^2} = Na^2.$$

Мы получили тот же результат, что и для модели, рассмотренной в п. 3.

Сделаем несколько дополнительных замечаний, важных для дальнейшего.

\*) Приведем такую иллюстрацию. Состав учащихся учебного заведения практически полностью обновляется за время  $\tau$ , равное продолжительности курса обучения. Он обновлялся бы меньшими порциями, но не быстрее, если бы прием и выпуск производились не один, а несколько раз в год.



Здесь  $F_i$  — импульс, сообщаемый при толчке,  $m$  — масса,  $\omega$  — собственная частота,  $\delta$  — коэффициент затухания осциллятора. Мы знаем, далее (гл. III, § 4, 5), что если на осциллятор действуют последовательные мгновенные толчки, наступающие в моменты  $t = t_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ), в нем возникает колебание

$$s(t) = \sum a_i e^{-\delta(t-t_i)} \sin \omega(t-t_i), \quad (10.8)$$

где суммирование производится по номерам всех толчков, подействовавших до мгновения  $t$  (т. е. таких, что  $t_i < t$ ).

Пусть толчки одинаковы по величине, но могут иметь *различный знак*:

$$F_i = \pm F, \quad a_i = \pm a. \quad (10.9)$$

Пусть, далее, толчки следуют друг за другом *очень часто* — так, что промежутки времени  $t_{i+1} - t_i$  между последовательными толчками очень малы по сравнению с собственным периодом осциллятора. Пусть, наконец, знаки толчков подчиняются *статистической схеме*, которую можно наглядно описать следующим образом: происходит последовательное бросание монеты:  $a_i = +a$  или  $(-a)$ , смотря по тому, какая сторона монеты выпадает при бросании. Эта схема годится, например, при рассмотрении колебаний маятника, по которому мы очень часто ударяем рукой, каждый раз с «одинаковой силой», но направление удара (влево или вправо) выбирается «как попало».

Требуется исследовать характер движения осциллятора.

При этом удобно представить (10.7) в виде

$$s(t) = \sum a e^{-\delta(t-t_i)} \cos(\omega t - \alpha_i - \beta_i), \quad (10.10)$$

где

$$\beta_i = \frac{\pi}{2} + \omega t_i, \quad (10.11)$$

а  $\alpha_i$  принимает значение 0, если  $\alpha_i = +a$ , и значение  $\pi$ , если  $\alpha_i = -a$ . Эта формула изображает суперпозицию затухающих колебаний, имеющих одинаковые начальную амплитуду и случайную фазу.

**2. Общая картина явления.** Обратим внимание на следующее обстоятельство. В суперпозиции  $s(t)$  заметную роль играют только «не очень старые» колебания, еще не успевшие сильно затухнуть, — те, для которых,  $\delta(t-t_i)$  не очень велико по сравнению с единицей. Колебания, родившиеся «очень давно», т. е. под действием толчков, для которых

$$\delta(t-t_i) = \frac{t-t_i}{\tau} \gg 1 \quad \left( \tau = \frac{1}{\delta} \right),$$

практически к рассматриваемому моменту  $t$  уже «отмерли», и ими можно пренебречь. Это наводит на мысль схематизировать каждое затухающее колебание  $s_i$  так, как показано на рис. 412, т. е. заменить его колебанием, которое продолжается с некоторой постоянной амплитудой (того же порядка, что  $a$ ) в течение времени  $\tau$ , после чего внезапно обрывается.

Пользуясь указанным упрощением, мы напишем вместо (10.10)

$$s(t) = \sum a' \cos(\omega t - \alpha_i - \beta_i), \quad (10.12)$$

где суммирование распространяется на все толчки, удовлетворяющие условию

$$t > t_i > t - \tau. \quad (10.13)$$

Действительно, колебание  $s_i$  прекращается согласно принятому упрощению в момент  $t_i + \tau$ . В момент  $t$  имеются налицо лишь те колебания  $s_i$ , для которых момент прекращения  $t_i + \tau$  является более поздним, чем  $t$ .

Если в среднем за 1 сек. имеет место  $\nu$  толчков, то число толчков, удовлетворяющих условию (10.13), а следовательно, число членов суммы (10.12) можно считать равным

$$N = \nu\tau. \quad (10.14)$$

Мы представили, таким образом,  $s(t)$  как суперпозицию  $N$  колебаний с равными амплитудами и случайными фазами.

За время  $\Delta t$  (достаточно большое по сравнению со средним значением промежутка времени  $t_i - t_{i-1}$  между последовательными толчками) происходит приблизительно  $\nu\Delta t$  толчков, т. е. «родится» приблизительно  $\nu\Delta t$  новых слагаемых суммы (10.12). Вместе с тем за время  $\Delta t$  «умирает» также приблизительно  $\nu\Delta t$  слагаемых этой суммы (колебания, рожденные толчками, происшедшими между мгновениями  $t - \tau$  и  $t - \tau + \Delta t$ ). Эта замена одних слагаемых другими может рассматриваться как случайное изменение фазы  $\nu\Delta t$  слагаемых из общего числа  $N$  слагаемых суммы (10.12).

Мы пришли к задаче, о которой уже говорилось в § 2 (замечание в конце п. 5). Она аналогична задаче об излучении  $N$  вибраторов со случайными фазами  $\pm \pi/2$ .

Мы можем поэтому утверждать следующее. Уравнение (10.12) изображает хаотически модулированное колебание. Среднее время модуляции совпадает с временной постоянной осциллятора: быстрота модуляции не зависит от числа толчков  $\nu$  в единицу времени и тем меньше, чем меньше затухание осциллятора. Средняя интенсивность колебания за время, большое по сравнению со средним временем модуляции,

$$\overline{A^2} = Na'^2 = \nu\tau a'^2 = \frac{\nu a'^2}{\delta}. \quad (10.15)$$

Она тем больше, чем чаще и чем сильнее толчки, и — что наиболее замечательно — неограниченно растет с уменьшением затухания осциллятора.

**3. Точная формула для средней интенсивности.** Формула (10.15) указывает порядок величины средней интенсивности (вспомним, что  $a'$  — величина порядка  $a$ ). Точное значение  $\overline{A^2}$  легко получить, применяя закон сохранения энергии.

Дифференцируя (10.7) и подставляя  $t = t_i$ , имеем:

$$\dot{s}_i(t_i) = \omega a_i. \quad (10.16)$$

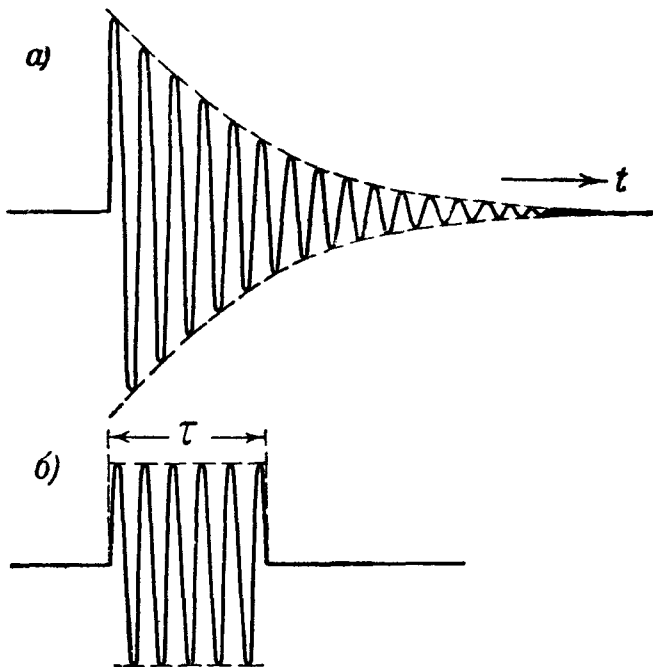


Рис. 412. а—затухающее колебание, создаваемое одним случайным толчком; б—его схематизация.

Таково приращение скорости осциллятора в результате  $i$ -го толчка. Соответствующее приращение кинетической энергии

$$\varepsilon_i = \frac{m}{2} [(u_i + \omega a_i)^2 - u_i^2] = m\omega u_i a_i + \frac{m}{2} \omega^2 a_i^2, \quad (10.17)$$

где  $u_i$  — значение скорости осциллятора  $\dot{s}(t)$  непосредственно до, а  $u_i + \omega a_i$  — непосредственно после  $i$ -го толчка. Энергия, получаемая осциллятором в результате толчков в единицу времени, равна в среднем

$$\overline{\varepsilon_i} = \nu m \overline{u_i a_i} + \nu \frac{m\omega^2}{2} \overline{a_i^2}, \quad (10.18)$$

где  $\overline{\varepsilon_i}$  — среднее значение  $\varepsilon_i$  за очень большое число толчков. Среди значений  $u_i a_i$  за большое время вследствие случайности знака  $a_i$  будут приблизительно одинаково часто встречаться значения, имеющие одинаковую абсолютную величину и различный знак. Следовательно,

$$\overline{u_i a_i} = 0.$$

Принимая во внимание, что

$$\overline{a_i^2} = a^2,$$

получаем:

$$\overline{\varepsilon_i} = \frac{m\omega^2}{2} a^2 \nu.$$

Энергия, рассеиваемая осциллятором за единицу времени, в среднем равна (ср. гл. III, § 3)

$$h\dot{s}^2 = \frac{h\omega^2 \overline{A^2}}{2}$$

( $h$  — коэффициент трения,  $\omega A$  — амплитуда скорости).

Средние значения энергии, получаемой осциллятором в результате толчков, и энергии, рассеиваемой осциллятором в единицу времени, очевидно, равны друг другу:

$$\nu \frac{m\omega^2}{2} a^2 = \frac{h\omega^2}{2} \overline{A^2},$$

откуда, так как  $2\delta = h/m$ , получаем:

$$\overline{A^2} = \frac{\nu a^2}{2\delta}. \quad (10.19)$$

Формулы (10.15) и (10.19) совпадают при  $a' = a/\sqrt{2}$ . Формула (10.19) непосредственно обобщается на случай толчков, случайных не только по знаку, но и по абсолютной величине. При этом

$$\overline{A^2} = \frac{\overline{\nu a^2}}{2\delta}. \quad (10.19a)$$

Итак, среднее значение интенсивности за время, большое по сравнению со временем хаотической модуляции  $\tau$ , пропорционально среднему числу толчков в единицу времени и среднему квадрату начальной амплитуды, сообщаемой отдельными толчками. Оно обратно пропорционально коэффициенту затухания гармонического осциллятора.

При данной величине толчков величина  $\overline{A^2}$  будет сколь угодно велика при достаточно малом затухании осциллятора. Это несколько напоминает случай резонанса. Заметим, однако, что при резонансе интенсивность обратно пропорциональна квадрату  $\delta$  (амплитуда обратно

пропорциональна первой степени  $\delta$ ). Здесь же средняя интенсивность обратно пропорциональна *первой степени*  $\delta$ .

Рассмотрение, произведенное в пп. 1—3, применимо как при искусственно создаваемых толчках (пример с маятником в п. 1), так и в случае, когда они возникают *естественно*. Что мы под этим понимаем, выяснится из пп. 4—6. Случаи второго рода представляют для физики большой принципиальный интерес. За последнее время они приобрели во многих вопросах радиотехники решающее практическое значение.

4. Тепловое движение гальванометра. На опыте было замечено, что подвесная система очень чувствительных гальванометров никогда не остается неподвижной; она совершает никогда не прекращающиеся очень

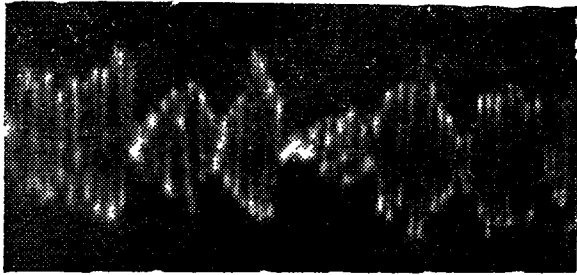


Рис. 413. [Осциллограмма хаотически модулированного колебания, возникающего в колебательном контуре под действием флуктуаций.]

малые колебания около положения равновесия, что сильно затрудняет измерения очень малых токов. Впоследствии было установлено, что подобно броуновскому движению (видимому в микроскоп блужданию очень мелких коллоидных частиц, взвешенных в жидкости) это неустранимое качание подвижной системы гальванометра есть не что иное, как одно из проявлений теплового движения вещества. Мы будем называть его поэтому тепловым движением гальванометра. (Часто употребляют также

термины «тепловые флуктуации гальванометра» и «броуновское движение гальванометра».)

«Тепловое движение гальванометра» можно себе представить как результат чрезвычайно часто следующих друг за другом очень слабых случайных толчков, испытываемых подвижной системой со стороны находящихся в тепловом движении молекул воздуха, а также возникающих вследствие хаотического движения электронов в катушке гальванометра, подвешенной между полюсами магнита. Мы будем считать, что коэффициент затухания подвижной системы гальванометра  $\delta$  и ее собственная частота  $\omega$  таковы, что  $\delta < \omega$ . В этом случае каждый отдельный толчок вызывает затухающее колебание подвижной системы. Мы можем в этом случае применить теорию, изложенную в пп. 1—3.

Согласно этой теории тепловое движение гальванометра должно носить характер хаотически модулированного колебания, несущая частота которого совпадает с собственной частотой подвижной системы, а модуляция тем более медленна, чем меньше затухание; среднее время модуляции должно совпадать с временной постоянной гальванометра

$$\tau = \frac{1}{\delta}.$$

Опыт полностью подтверждает это заключение (рис. 413).

Статистическая физика учит, что во всех интересующих нас здесь случаях при тепловом движении гармонического осциллятора среднее значение его полной энергии за время, большое по сравнению с  $\tau$ , совершенно не зависит от индивидуальных параметров данного осциллятора и равно

$$\overline{W} = kT, \quad (10.20)$$

где  $k = 1,38 \cdot 10^{-16}$  эрг/град (больцмановская постоянная),  $T$  — абсолютная температура.



В случае гальванометра

$$\overline{W} = D\overline{\theta^2},$$

где  $\theta$  — угол поворота,  $D$  — жесткость подвеса, т. е. коэффициент пропорциональности в соотношении

$$M = -D\theta.$$

между моментом  $M$ , действующим со стороны нити на подвесную систему, и углом  $\theta$ , меняющимся согласно сказанному выше по закону \*)

$$\theta = A(t) \cos [\omega t - \varphi(t)].$$

На основании (10.20) получаем для среднего значения за большое время от квадрата амплитуды углового смещения соотношение

$$\overline{A^2} = \frac{2kT}{D}, \quad (10.21)$$

которое хорошо подтверждается на опыте. Средний квадрат смещения тем больше, чем выше температура и чем меньше жесткость подвеса \*\*).

Сравнивая (10.19а) и (10.21), мы получаем:

$$\frac{\overline{\sqrt{a^2}}}{2\delta} = \frac{2kT}{D}. \quad (10.22)$$

Эту формулу нужно понимать как соотношение, определяющее некоторую *эффективную* величину  $\overline{\sqrt{a^2}}$ , характеризующую в среднем толчки, действующие на подвижную систему гальванометра в результате теплового движения вещества. Эта величина зависит только от температуры и коэффициента трения. Так как здесь

$$a_1 = \frac{F_1}{\omega J}, \quad \omega^2 = \frac{D}{J}, \quad 2\delta = \frac{h}{J},$$

получаем:

$$\overline{\sqrt{F^2}} = \omega^2 J h \frac{2kT}{D} = 2hkT. \quad (10.23)$$

**5. Электромагнитные колебания, возникающие в результате теплового движения электронов.** Электроны в телах, образующих колебательный

\*) Дифференциальное уравнение свободных колебаний подвесной системы имеет вид

$$J\ddot{\theta} + h\dot{\theta} + D\theta = 0$$

( $J$  — момент инерции,  $h$  — коэффициент трения). Энергия

$$W = \frac{J\dot{\theta}^2}{2} + \frac{D\theta^2}{2}.$$

Так как средние значения кинетической и потенциальной энергий равны, то

$$\overline{W} = D\overline{\theta^2}.$$

Это и есть используемая нами формула для средней энергии.

\*\*) Формула (10.20) применима и в том случае, когда  $\delta > \omega_0$ ; в этом случае нужно понимать под  $\overline{W}$  среднее значение энергии за время, большое по сравнению с  $1/\alpha_1$ ,  $1/\alpha_2$  (см. гл. III, § 3). Вследствие этого, как легко показать, применима также формула (10.21). Однако при  $\delta > \omega_0$  каждый толчок создает не колебательный, а аperiodический процесс и движение, создаваемое случайными толчками, уже не носит характера модулированного колебания.

контур, участвуют в тепловом движении вещества. Отсюда можно заключить, что на обкладках конденсатора всегда должен существовать меняющийся со временем (по абсолютной величине и по знаку) электрический заряд, а в катушке — также меняющийся со временем (по абсолютной величине и по знаку) электрический ток. Механизм явления можно представить так (по аналогии с п. 4): беспорядочное тепловое движение электронов в веществе контура эквивалентно действию очень малых и очень частых электрических толчков (т. е. кратковременных э. д. с.), беспорядочно чередующихся по знаку и по величине. Из этой картины следует на основании пп. 1 — 3, что заряд  $q(t)$  и ток  $i = \dot{q}(t)$ , возникающие в результате теплового движения (или, как часто говорят, тепловые флуктуации заряда и тока), должны носить характер хаотически модулированных колебаний, несущая частота которых совпадает с собственной частотой контура, а время модуляции — с его временной постоянной.

Статистическая физика учит, что формула (10.20) применима независимо от того, является ли гармонический осциллятор механическим (например, подвижная система гальванометра) или электрическим (колебательный контур).

Будем говорить о напряжении  $u = q/C$  на конденсаторе колебательного контура ( $C$  — емкость конденсатора). Эта величина легче всего поддается непосредственному исследованию на опыте. Согласно сказанному выше между обкладками конденсатора любого колебательного контура должно существовать при отсутствии внешних воздействий хаотически модулированное напряжение (рис. 413)

$$u = U(t) \cos [\omega t - \varphi(t)],$$

причем среднее время модуляции амплитуды  $U_C(t)$  и фазы  $\varphi(t)$  равно

$$\tau = \frac{2L}{R}$$

( $L$  — индуктивность,  $R$  — сопротивление контура), а среднее значение энергии за время, большое по сравнению с периодом колебаний,

$$\overline{\overline{W}} = \frac{\overline{Cu^2}}{2} + \frac{\overline{L\dot{q}^2}}{2} = C\overline{u^2} = \frac{C\overline{U^2}}{2} = kT,$$

откуда

$$\overline{U^2} = \frac{2kT}{C}. \quad (10.24)$$

Например, при комнатной температуре ( $T$  около  $300^\circ\text{C}$ ) и  $C = 15$  микрофарад (обычная величина емкости при собственной частоте контура порядка 50 мегагерц) для среднеквадратичной амплитуды получим:

$$\sqrt{\overline{U^2}} = 2,4 \cdot 10^{-5} \text{ в.}$$

Опыт подтверждает сделанные заключения. Напряжение, возникающее на колебательном контуре вследствие теплового движения электронов, удастся обнаружить, присоединяя исследуемый контур ко входу, а измерительный прибор — к выходу подходящего усилительного устройства.

Здесь для величины  $\sqrt{\overline{F^2}}$ , характеризующей в среднем толчки, имеем:

$$\sqrt{\overline{F^2}} = 2RkT.$$

Эта величина зависит только от сопротивления и температуры.

Отметим, что все сказанное выше относится лишь к случаю, когда металл, из которого выполнен колебательный контур, находится в состоянии теплового равновесия.

**6. Дробовой эффект.** Опыт показывает, что в колебательном контуре, включенном в анодную цепь электронной лампы (рис. 414), могут существовать хаотически модулированные колебания, гораздо более интенсивные, чем следовало бы ожидать на основании формулы (10.24). Это объясняется

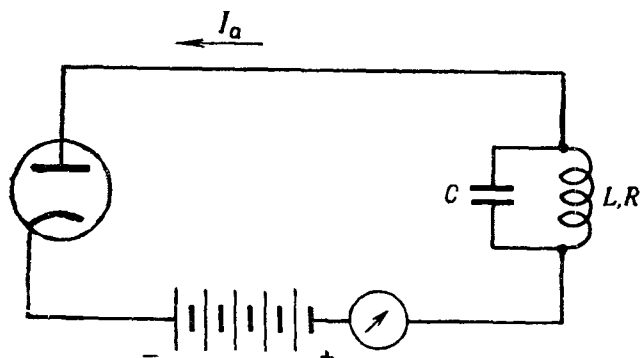


Рис. 414. К теории дробового эффекта.

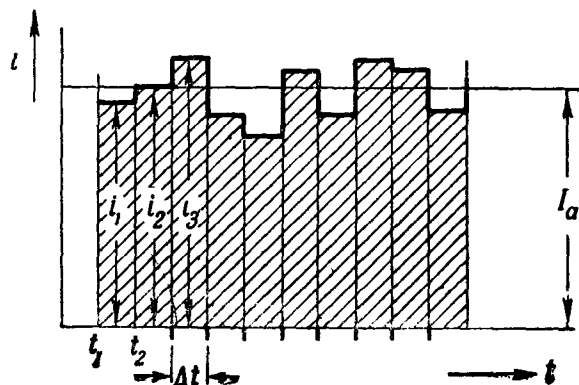


Рис. 415. Анодный ток  $i$ , его среднее значение  $I_a$  и флуктуации  $i_m = i_m - I_a$ .

*дробовым эффектом* — беспорядочными колебаниями (флуктуациями) анодного тока около того среднего значения  $I_a$ , которое показывает миллиамперметр постоянного тока (термин «дробовой эффект» связан с тем, что электронный ток в лампе немного напоминает поток дробинок).

Картину явлений, о которых идет здесь речь, можно представить следующим образом.

Разделим ось  $t$  на интервалы  $t_m$ ,  $t_{m+1} = t_m + \Delta t$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ), где  $\Delta t$  мало по сравнению с собственным периодом контура. Пусть  $n_m$  — число электронов, перелетевших с катода на анод за время  $t_m$ ,  $t_m + \Delta t$ . Тогда

$$i_m = \frac{n_m e}{\Delta t},$$

где  $e$  — заряд электрона ( $4,80 \cdot 10^{-10}$  CGSE), есть среднее значение анодного тока за время от  $t_m$  до  $t_m + \Delta t$ . Примем, что отдельные электроны перелетают с катода на анод независимо друг от друга в случайные моменты времени. Тогда числа  $n_m$ , вообще говоря, неодинаковы; они беспорядочно колеблются около некоторого среднего значения  $n$ . В соответствии с этим величины  $i_m$  также колеблются около некоторого среднего значения

$$I_a = \bar{i}_m = \frac{ne}{\Delta t}, \quad (10.25)$$

и мы можем написать:

$$i_m = I_a + j_m,$$

где  $j_m$  беспорядочно меняется от одного интервала  $t_m$ ,  $t_m + \Delta t$  к другому, одинаково часто принимая положительные и отрицательные значения (рис. 415).  $I_a$  есть та величина, которую измеряет миллиамперметр постоянного тока, включенный в анодную цепь.

Ток  $i_L$ , текущий через катушку, имеет, очевидно, постоянную слагаемую, равную  $I_a$ , и переменную слагаемую  $j_L$ , обусловленную флуктуациями  $j_m$  анодного тока. Их можно рассматривать как беспорядочное чередование знакопеременных толчков тока. Аналогия с задачей, рассмотренной в п. 1, указывает, что переменная слагаемая  $j_L$  должна иметь характер

хаотически модулированного колебания

$$j_L = I_L \cos [\omega_0 t - \varphi(t)],$$

причем среднее время модуляции порядка  $\tau$ . Величину  $\overline{I_L^2}$  легко вычислить с помощью закона сохранения энергии (ср. п. 3).

Среднее (за большое время) значение энергии, рассеиваемой в контуре в единицу времени,

$$\overline{Ri_L^2} = R \overline{(I_a + j_L)^2} = RI_a^2 + 2RI_a \overline{j_L} + R \overline{j_L^2}$$

равно

$$RI_a^2 + \frac{R \overline{I_L^2}}{2},$$

так как

$$\overline{j_L} = 0, \quad \overline{j_L^2} = \frac{\overline{I_L^2}}{2}.$$

Подсчитаем теперь среднее (за большое время) значение энергии, поступающей в контур в единицу времени.

Пусть  $q^*$ ,  $q^* + e$  — значения заряда конденсатора контура (частью «обкладок» которого являются катод и анод лампы) непосредственно до и после перелета одного электрона с катода на анод. В результате этого перелета энергия, запасенная в колебательном контуре, получает приращение

$$\frac{(q^* + e)^2}{2C} - \frac{q^{*2}}{2C} = \frac{q^* e}{C} + \frac{e^2}{2C}.$$

В среднем за большое время энергия, поступающая в контур при перелете отдельного электрона, равна

$$\overline{\varepsilon} = \frac{\overline{q^*}}{C} e + \frac{e^2}{2C}.$$

В единицу времени перелетает  $n/\Delta t$  электронов, и вносимая ими в контур энергия равна в среднем

$$\overline{\varepsilon} \frac{n}{\Delta t} = \frac{\overline{q^*}}{C} \frac{en}{\Delta t} + \frac{e}{2C} \frac{en}{\Delta t}.$$

Воспользовавшись (10.25) и отождествляя  $\overline{q^*}/C$  с постоянной слагаемой напряжения на конденсаторе, равной  $RI_a$ , получаем:

$$\overline{\varepsilon} \frac{n}{\Delta t} = RI_a^2 + \frac{eI_a}{2C}.$$

Средние значения энергии, поступающей в контур и рассеиваемой в нем в единицу времени, равны

$$RI_a^2 + \frac{eI_a}{2C} = RI_a^2 + \frac{R \overline{I_L^2}}{2},$$

откуда

$$\overline{I_L^2} = \frac{eI_a}{RC}. \quad (10.26)$$

На опыте легче всего измерить средний квадрат амплитуды  $U$  переменной слагаемой напряжения на конденсаторе; так как, очевидно,

$$I_L^2 = (\omega C U_c)^2 = \frac{C U^2}{L},$$

имеем:

$$\overline{U^2} = \frac{LI_a}{RC^2} e$$

или

$$\overline{U^2} = \frac{QI_a}{\omega C^2} e, \quad (10.27)$$

где  $Q$  — добротность контура.

Для контура, рассмотренного в п. 5 ( $\omega/2\pi = 50$  мегагерц,  $C = 15$  микрофарад), имеем приближенно при  $Q = 20$ ,  $I_a = 10$  ма

$$\sqrt{\overline{U^2}} = 6 \cdot 10^{-4} e,$$

что в 20 с лишним раз превышает значение, обусловленное тепловым движением при комнатной температуре.

Формула (10.27) хорошо подтверждается на опыте, если лампа работает в режиме насыщения ( $I_a = I_s$ ). При  $I_a < I_s$ , т. е. при наличии объемного заряда,  $\overline{U^2}$  меньше значения указываемого формулой (10.27): имеет место, как принято говорить, депрессия дробового эффекта.

Как согласовать явление депрессии с данным здесь выводом формулы (10.27)?

Постоянная слагаемая напряжения на конденсаторе  $RI_a$  равна  $q/C$ . Здесь  $q$  — среднее за большое время от *всех* значений  $q$ , а не от значений  $q^*$ , непосредственно перед перелетом электронов. При выводе формулы (10.27) молчаливо принималось, что  $q = q^*$ . Это верно, если моменты перелетов электронов совершенно не зависят от разности потенциалов анод — катод  $u_a = \mathcal{E}_a - q/C$  ( $\mathcal{E}_a$  — э. д. с. анодной батареи). Но предположим, что разность потенциалов анод — катод в некоторой мере регулирует моменты вылета электронов и притом так, что большинство электронов перелетает в те промежутки времени, когда

$$u_a > \overline{u}_a, \text{ т. е. } q < \overline{q}.$$

В этом случае, очевидно,  $\overline{q^*} < \overline{q}$  и средняя энергия, поступающая в контур, меньше значения, принятого нами выше. Справедливость формулы (10.27) при  $I_a = I_s$  и наличие депрессии при  $I_a < I_s$  получают естественное объяснение, если считать, что моменты перелетов электронов с катода на анод не зависят от  $u_a$  только в отсутствие объемного заряда.

## § 4. Статистические явления в радиоаппаратуре

1. Флуктуационный шум в приемнике. Возьмем радиоприемник с большим усилением. Не присоединяя к нему антенны, поместим его в металлический ящик, экранирующий его от всех внешних воздействий. Тем не менее громкоговоритель, включенный на выходе приемника, издает интенсивный шум, слышимый во всей аудитории \*). Происхождение этого шума нетрудно понять. Он вызван теми флуктуационными явлениями, о которых шла речь в § 3, пп. 3, 4.

\*) Этот шум — очень равномерный и «мягкий». Его сразу можно отличить от тех дополнительных шумов и потрескиваний, которые появляются при приключении антенны и которые вызываются грозowymi разрядами, работающими по соседству электрическими установками, проходящими по близости автомобилями (вследствие работы системы зажигания), трамваями и троллейбусами (искровые разряды при нарушении контакта с воздушной сетью).

В контуре, включенном между катодом и сеткой первой лампы приемника, происходят хаотически модулированные колебания теплового происхождения. Первая лампа их усиливает и прибавляет к ним (в контуре, включенном в ее анодную цепь) хаотически модулированные колебания, обусловленные дробовым эффектом. Таким образом, на вход смесителя (см. гл. IV, § 10) попадает *хаотически модулированное колебание* вида

$$A(t) \cos [\omega t - \varphi(t)],$$

где  $\omega$  — частота, на которую настроена входная часть приемника. Дальше можно рассуждать так же, как в гл. IV, § 10. Смеситель преобразует поданное колебание в колебание вида

$$A(t) \cos [\omega' t - \varphi(t)],$$

где  $\omega'$  — промежуточная (разностная) частота. Хаотическую модуляцию колебания промежуточной частоты можно увидеть на экране электронного осциллографа, подключенного к выходу усилителя промежуточной частоты \*).

После этого усилителя колебание подводится к демодулятору, который его преобразует в напряжение, пропорциональное  $A(t)$  или  $A^2(t)$  (линейная или квадратичная демодуляция, ср. гл. IV, § 9). Примем, что демодуляция — линейная. Это напряжение является уже не хаотически модулированным колебанием, а величиной, беспорядочно меняющейся за промежутки времени порядка  $\tau$  около некоторого отличного от нуля среднего значения. Переменная (беспорядочно меняющаяся) слагаемая этого напряжения усиливается усилителем низкой частоты приемника и подводится к громкоговорителю. Беспорядочные изменения напряжения, попадающего на громкоговоритель, хорошо видны на экране электронного осциллографа



Рис. 416. Наблюдение шума радиоприемника с помощью электронного осциллографа.

(рис. 416), подключенного параллельно громкоговорителю. Колеблясь под действием подведенного к нему беспорядочно меняющегося напряжения, громкоговоритель излучает звуковую волну, характеризуемую тем, что в каждой точке пространства происходят быстрые беспорядочные колебания давления. Их наше ухо и воспринимает как шум. (Примерно такого же рода быстрые хаотические изменения давления характеризуют звук водопада или звук «ш»). Можно сказать, что мы видим на экране осциллографа флуктуационный шум приемника.

**2. Превращение флуктуационного шума в хаотически модулированные колебания.** Включим между выходом усилителя низкой частоты приемника и громкоговорителем простейший «фильтр низкой частоты», а именно, колебательный контур, настроенный на некоторую частоту слышимого диапазона — скажем 1000 герц (рис. 417). Ухо сразу чувствует изменение

\*) В дальнейшем изложении предполагается, что усилитель промежуточной частоты не искажает форму хаотической модуляции. В действительности обычно дело обстоит иначе: контуры усилителя имеют временные постоянные, большие, чем среднее время хаотической модуляции колебания, поступающего со смесителя; вследствие этого хаотически модулированное колебание на выходе усилителя промежуточной частоты имеет *большее* среднее время модуляции, чем колебание на его входе. Для тех явлений, о которых здесь идет речь, это обстоятельство несущественно.

характера звука, издаваемого громкоговорителем: это теперь — нечто среднее между шумом, который мы слышали раньше, и музыкальным тоном, соответствующим синусоидальному колебанию частоты 1000 герц. Осциллоскоп показывает, что вместо беспорядочного колебания, показанного на рис. 416, на вход громкоговорителя подается теперь почти синусоидальное колебание частоты 1000 герц, беспорядочно модулированное по амплитуде и фазе. Легко понять, в чем тут дело; э.д.с., индуцируемую в колебательном контуре (фильтре) вследствие беспорядочного изменения тока на выходе усилителя низкой частоты, можно рассматривать как беспорядочное чередование знакопеременных толчков; эти толчки возбуждают в колебательном контуре модулированное колебание

$$B(t) \cos [\Omega t - \varphi(t)],$$

где  $\Omega$  равно собственной частоте фильтра, а среднее время модуляции — его временной постоянной  $\tau = 2L/R$ .

Уменьшая временную постоянную фильтра, мы сможем сделать хаотическую модуляцию более медленной. При этом звук, издаваемый громкоговорителем, станет еще менее похож на шум, о котором шла речь вначале, и еще более похож на тон частоты 1000 герц.

В только что описанном опыте временная постоянная фильтра порядка  $10^{-2}$  сек. Если постоянная фильтра  $\tau$  будет порядка секунды (этого можно достигнуть, заменив колебательный контур и громкоговоритель механическим осциллятором, например камертоном), мы будем слышать чистый тон частоты 1000 герц, беспорядочно меняющий свою громкость за время порядка  $2\pi/\Omega$  — явление, которое можно охарактеризовать как беспорядочные биения (ср. гл. II, § 5) со «средним периодом»  $2\pi/\Omega$ .

Очень медленную хаотическую модуляцию удобно осуществить и продемонстрировать с помощью  $RC$ -фильтра, эквивалентного, как мы уже знаем, колебательному контуру (гл. IV, § 6). Легко, например, построить  $RC$ -фильтр с «собственной частотой» 25 герц и  $\tau$ , варьирующим при изменении обратной связи от 0,5 до 10 сек. ( $LC$ -контур с таким  $\tau$  был бы очень громоздким). Подведем на вход  $RC$ -фильтра флуктуационный шум приемника, а к выходу  $RC$ -фильтра подключим электронный осциллоскоп. Отрегулировав развертку на частоту порядка 5—10 герц, мы увидим на экране кусок «синусоиды», охватывающий несколько периодов, медленно и беспорядочно пульсирующий по амплитуде и смещающийся по фазе. Например, на протяжении 1 сек. амплитуда спадает от некоторого большого значения почти до нуля, в течение следующей секунды возрастает до величины еще большей, чем первоначальная, и т. д. Когда мы увеличиваем временную постоянную  $RC$ -фильтра, изменения амплитуды и фазы становятся в среднем медленнее.

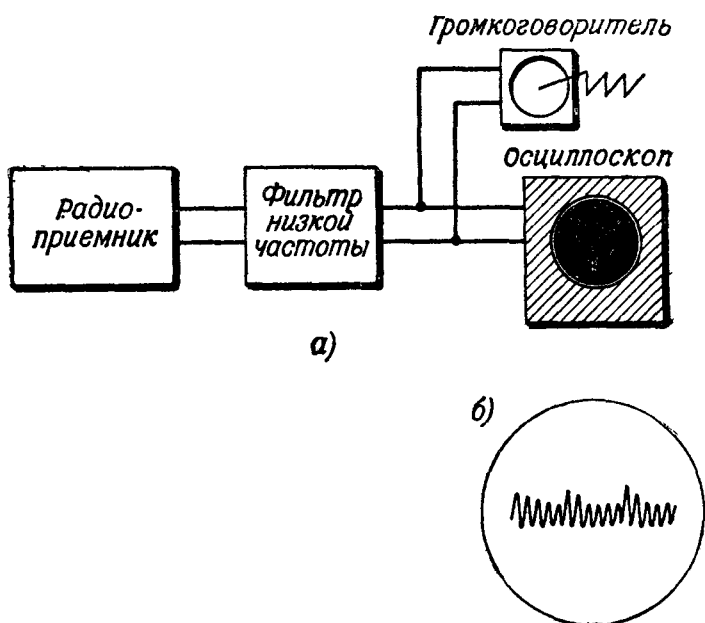


Рис. 417. Преобразование шума радиоприемника в хаотически модулированное колебание. а—схема; б—хаотически модулированное колебание на экране осциллоскопа.

Пользуясь терминологией, введенной в гл. IV, § 9, мы можем сказать, что в описанном опыте осуществляется *безынерционное* наблюдение хаотически модулированного колебания.

Для того чтобы продемонстрировать *малоинерционное* наблюдение, включим между выходом  $RC$ -фильтра и осциллоскопом ламповый демодулятор (рис. 418), временная постоянная которого  $\tau'$  велика по сравнению с собственным периодом  $RC$ -фильтра, но мала по сравнению с  $\tau$ . Мы будем видеть теперь на осциллоскопе горизонтальную черту, высота которой над горизонтальным диаметром экрана будет медленно и беспорядочно пульсировать.

Будем теперь увеличивать  $\tau'$  или уменьшать  $\tau$ . Пульсация горизонтальной черты около ее среднего смещенного положения постепенно уменьшается и при большом  $\tau'$  становится почти незаметной. Это — инерционный способ наблюдения. Почти неподвижное положение горизонталь-

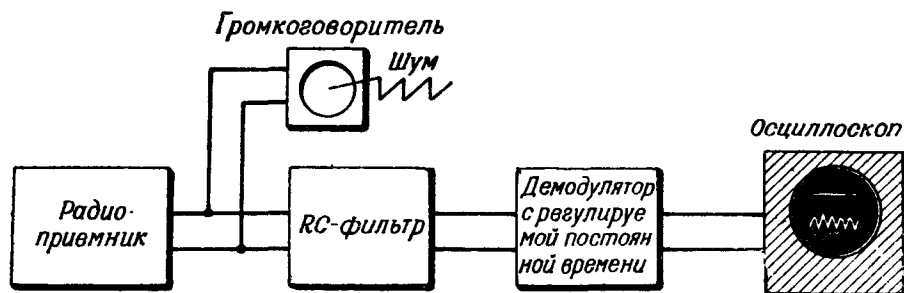


Рис. 418. Малоинерционное и инерционное наблюдение хаотически модулированного колебания на выходе  $RC$ -фильтра, имеющего большую временную постоянную.

ной черты устанавливается за время порядка  $\tau'$ , и если  $\tau' = 10$  сек., то можно легко проследить глазом за процессом установления.

**3. Флуктуационный шум и чувствительность приемника.** Приключим антенну к приемнику, о котором говорилось в п. 1, и настроим его на волну какого-нибудь дальнего радиовещательного передатчика. Если напряженность поля, создаваемого этим передатчиком, достаточно велика, мы можем уменьшить усиление приемника настолько, чтобы флуктуационный шум перестал нами ощущаться, и слышать при этом сигнал (передаваемую музыку или речь) без шумового «фона». Если же напряженность поля, создаваемого передатчиком, очень мала, мы можем услышать передачу, отрегулировав приемник лишь на очень большое усиление, но тогда вместе с сигналом мы услышим и мощный флуктуационный шум. При дальнейшем уменьшении сигнала мы будем слышать только флуктуационный шум, и тут не поможет дальнейшее увеличение усиления приемника. Чувствительность приемника характеризуется минимальной интенсивностью сигнала, который может быть отчетливо принят. Ясно, что чувствительность тем больше, чем меньше флуктуационный шум приемника. Флуктуационный шум приемника может быть значительно снижен уменьшением дробового эффекта ламп, что достигается целесообразной их конструкцией и целесообразным выбором режима их работы. Та часть флуктуационного шума, которая обусловлена тепловым движением, определяется в конечном счете флуктуационными явлениями в антенне (т. е. они и ограничивают в конечном счете чувствительность приемника).

Флуктуационный предел чувствительности радиоприемника особенно нагляден в радиолокации. Картина, показанная на рис. 245, з, видна на экране локатора тогда, когда приемник работает на малом усилении. Когда же цель удаляется от нас, сигнал ослабевает, и для того, чтобы следить за целью, мы вынуждены увеличивать усиление приемника.



Но тогда становится заметным флуктуационный шум, и при дальнейшем удалении цели сигнал тонет в флуктуационном шуме (рис. 419). Дальнейшее увеличение усиления не поможет нам снова «поймать цель».

Проведем упрощенное количественное обсуждение. Средний квадрат  $\overline{U}_\Phi^2$  флуктуационного напряжения на входном контуре приемника определяется формулой (10.27), средний квадрат амплитуды напряжения, создаваемого сигналом,

$$U_c^2 = Q^2 \mathcal{E}^2,$$

где  $Q$  — добротность контура,  $\mathcal{E}$  — амплитуда э. д. с., наводимой в контуре

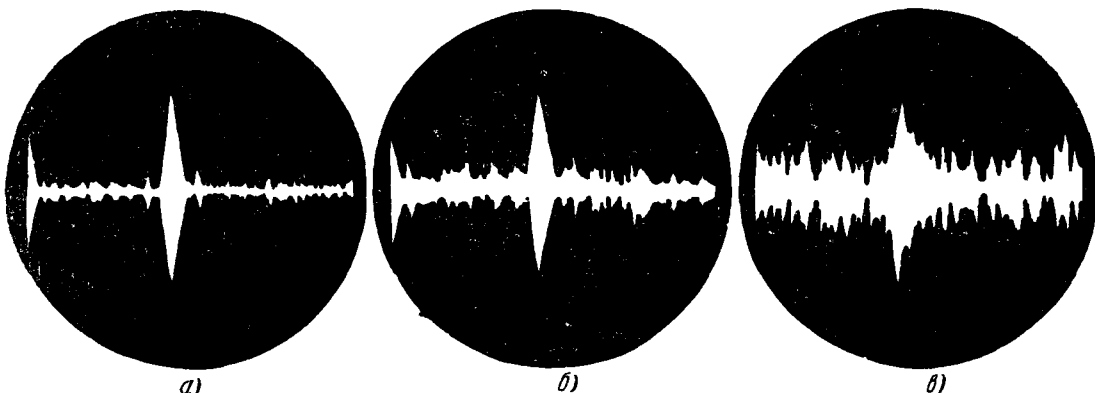


Рис. 419. Ослабевающий сигнал тонет в флуктуационном шуме. Осциллоскоп приключен к выходу усилителя промежуточной частоты; а — сильный сигнал, малое усиление; б — средний сигнал, среднее усиление; в — малый сигнал, большое усиление.

сигналами. Минимально обнаруживаемым сигналом можно считать такой, при котором  $U_c^2 = \overline{U}_\Phi^2$ , т. е. на основании (10.24)

$$Q^2 \mathcal{E}^2 = \frac{2kT}{C},$$

откуда (мы отвлекаемся от резонансных свойств остальных контуров приемника)

$$\mathcal{E}_{\min}^2 = 2kT \frac{R^2}{L},$$

или

$$\frac{\mathcal{E}_{\min}^2}{R} = \frac{4kT}{r}, \quad (10.28)$$

где  $\tau = 2L/R$  — временная постоянная контура.

Сделав временную постоянную достаточно большой, можно как угодно увеличить чувствительность приемника. Но очень далеко идти по этому пути нельзя по следующим соображениям. Формула (10.28) применима только в том случае, если длительность сигнала велика по сравнению с временной постоянной контура настолько, что успевает установиться стационарное вынужденное колебание (ср. гл. III, § 7). Повышение чувствительности достигается путем увеличения  $\tau$  лишь при одновременном увеличении длительности импульса. Но, увеличивая длительность импульса, мы уменьшаем точность измерения расстояния и разрешающую силу по расстоянию — способность воспринимать раздельно цели, находящиеся почти на одинаковом расстоянии от локатора. Таким образом, существует противоречие между требованием высокой чувствительности (а следовательно, большой «дальнобойности» (радиолокатора), с одной стороны, и требованием большой точности измерения расстояния и большой разрешающей силы, с другой стороны. При проек-

тировании радиолокационной установки приходится выбирать целесообразные компромиссы между этими противоречивыми требованиями. В зависимости от назначения локатора приносятся в жертву точность и разрешающая сила в пользу дальности или увеличиваются точность и разрешающая сила в ущерб дальности.

Из сказанного следует, что для того, чтобы радиолокатор почувствовал цель, достаточно, чтобы под действием рассеиваемой целью волны в его первом контуре накоплась за время  $\tau$  энергия порядка  $kT$ , где  $T$  — температура первого контура. Заметим, что средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы воздуха при температуре  $T$  равна  $3kT/2$ .

4. Флуктуации в ламповом генераторе. В гл. IV, § 4, рассматривая движение изображающей точки лампового генератора на фазовой плоскости, мы пришли к выводу, что устанавливается строго периодическое

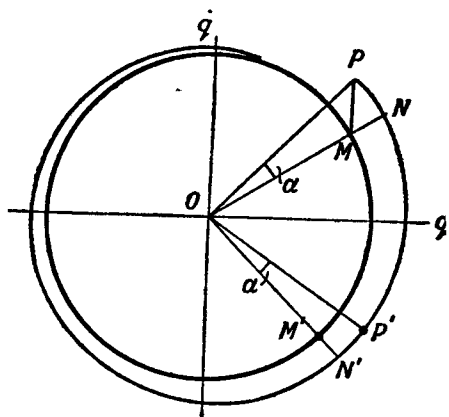


Рис. 420. Окружность  $MM'$  — предельный цикл, спираль  $PP'$  — траектория изображающей точки, смещенной толчком  $MP$  с предельного цикла.  $MN$ ,  $NP$  — радиальная и тангенциальная составляющие смещения,  $P'$  — фактическое положение изображающей точки в некоторый момент,  $M'$  — положение, которое она занимала бы в этот же момент, если бы не было толчка. Величина  $N'M'$  затухает, угол  $\alpha = P'OM'$  остается постоянным.

движение ее по определенной замкнутой траектории — предельному циклу. При этом флуктуации не учитывались. В действительности, конечно, они существуют и здесь: происходят тепловые флуктуации в проводниках, в анодном токе лампы проявляется дробовой эффект. Оказывают ли они влияние на характер автоколебаний?

Мы можем себе представить действие флуктуаций как чередование беспорядочных толчков, действующих на контур. Каждый толчок смещает изображающую точку с предельного цикла (рис. 420). Мы можем разложить каждое такое смещение изображающей точки на радиальную и тангенциальную составляющие. Радиальная составляющая есть изменение амплитуды колебания, тангенциальная — пропорциональна изменению ее фазы. Итак, флуктуации вызывают беспорядочные изменения амплитуды и фазы автоколебаний.

Изменения амплитуды, вызываемые каждым толчком, постепенно сглаживаются, так как траектории на фазовой плоскости наматываются на предельный цикл. Поэтому очень маловероятно накопление значительных относительных отклонений амплитуды от значения, определяемого радиусом предельного цикла. Иначе обстоит дело с фазой. Изменение фазы, вызванное толчком, не сглаживается: если сдвинуть изображающую точку по предельному циклу на угол  $\alpha$ , она будет в любой момент опережать на  $\alpha$  положение, в котором она находилась бы, не случись этот толчок. Поэтому накопление больших изменений фазы гораздо более вероятно, чем накопление больших изменений амплитуды. Но все же из-за малости флуктуаций должно пройти очень много «периодов» автоколебаний, пока успеет накопиться заметное изменение фазы.

Таким образом, можно предвидеть, что флуктуации почти не будут изменять амплитуды автоколебаний, но вызовут значительную, хотя и очень медленную, хаотическую модуляцию их фазы.

Нетрудно оценить порядок величины среднего времени хаотической модуляции фазы, обусловленной дробовым эффектом в ламповом генераторе.

Заряд конденсатора колебательного контура  $q$  меняется скачками  $\pm e$  ( $e$ —заряд электрона). Поэтому в действительности изображающая точка движется по «лестнице», ступеньки которой показаны (в очень преувеличенном виде) на рис. 421. Будем считать, что ступеньки, уводящие вправо и влево от предельного цикла (окружности рис. 421) чередуются по статистической схеме, иллюстрируемой примером с бросанием монет. Отдельной ступени номера  $i$  соответствует изменение фазы на величину

$$\alpha_i = \pm \frac{e}{A} \cos \psi,$$

где  $A$ —амплитуда заряда на конденсаторе (радиус предельного цикла),  $\psi$ —угол между радиусом-вектором и осью  $q$ . Изменение фазы за время  $t$

$$\Delta\varphi = \sum_{i=1}^N \alpha_i,$$

где  $N$ —число электронов, перелетевших с катода на анод лампы за время  $t$ .

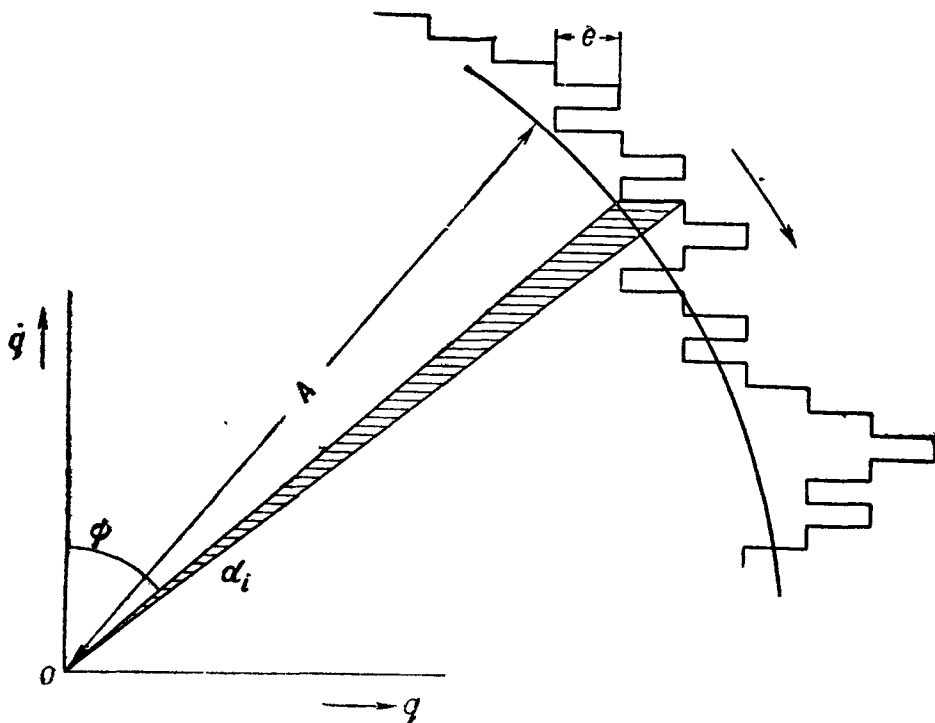


Рис. 421. Предельный цикл (дуга окружности) и траектория на фазовой плоскости, построенная с учетом дробового эффекта.

Вычислим средний квадрат изменения фазы за большое число неперекрывающихся промежутков времени продолжительности  $t$ , т. е. среднее от величин

$$(\Delta\varphi)^2 = \left( \sum_{i=1}^N \alpha_i \right)^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i \alpha_j = \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N{}' \alpha_i \alpha_j.$$

Имеем:

$$\overline{(\Delta\varphi)^2} = \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 = N \frac{e^2}{A^2} \overline{\cos^2 \psi} = \frac{Ne^2}{2A^2},$$

так как, очевидно,  $\alpha_i \alpha_j$  ( $i \neq j$ ) будет одинаково часто принимать значения

$$\pm \frac{e^2 \cos^2 \psi}{A^2},$$

вследствие чего все средние значения  $\overline{\alpha_i \alpha_j}$  ( $i \neq j$ ) равны нулю.

Принимая во внимание, что

$$Ne = I_a t,$$

где  $I_a$  — среднее значение анодного тока, имеем:

$$\overline{(\Delta\varphi)^2} = \frac{I_a e}{2A^2} t.$$

Для оценки среднего времени хаотической модуляции  $\tau$  его можно, очевидно, отождествить с таким  $t$ , за которое средний квадрат изменения фазы равняется  $\pi^2$ , откуда

$$\tau = \frac{2A^2}{I_a e} \pi^2 = \frac{2\pi^2 C^2 U^2}{I_a e},$$

где  $C$  — емкость конденсатора колебательного контура,  $U_c$  — амплитуда напряжения на нем. (Вполне естественно, что при данной амплитуде заряда  $\tau$  не зависит от собственной частоты контура.)

При

$$I_a = 10 \text{ ма}, U = 100 \text{ в}, C = 50 \text{ микромикрофарад}$$

имеем  $\tau$  порядка 100 часов.

Можно аналогичным способом дать оценку среднего времени хаотической модуляции, вызванной тепловыми флуктуациями. Оно оказывается гораздо больше, чем для случая дробового эффекта\*).

В реальных ламповых генераторах всегда происходят небольшие беспорядочные изменения различных параметров: эмиссия катода, э.д.с. анодной батареи и т. д. Они также вызывают беспорядочные изменения (модуляции) амплитуды и фазы. Как показывает опыт\*\*, среднее время  $\tau'$  хаотической модуляции фазы, вызванной этими «грубыми» причинами, гораздо меньше полученной выше величины  $\tau$  (например, порядка секунды).

Флуктуации амплитуды и фазы лампового генератора были исследованы (теоретически и экспериментально) И. Л. Берштейном. Ему удалось, в частности, показать на опыте существование (помимо беспорядочных изменений фазы, вызванных «грубыми» причинами) гораздо более медленной хаотической модуляции фазы, обусловленной дробовым эффектом; вычисленное на основании опытных данных среднее время этой модуляции хорошо согласуется с приводимой оценкой для  $\tau$ .

**5. Когерентность некогерентность.** а) Представим себе, что мы располагаем двумя независимыми источниками хаотически модулированных колебаний одного из типов, рассмотренных в § 2, 3, настроенными на одну и ту же частоту  $\omega$  (рис. 422). Мы получим на выходе этих устройств хаотически модулированные напряжения

$$u_1 = A_1(t) \cos [\omega t - \varphi_1(t)], \quad u_2 = A_2(t) \cos [\omega t - \varphi_2(t)], \quad (10.29)$$

имеющие одинаковую несущую частоту, причем, конечно, хаотические изменения функций  $A_1, \varphi_1; A_2, \varphi_2$  будут совершенно независимы. Разность фаз  $\varphi_1 - \varphi_2$  будет в среднем за большое время одинаково часто принимать всевозможные значения в интервале от 0 до  $2\pi$ ; в частности, она одинаково часто будет принимать значения 0 и  $\pi$ . Такие два хаотически модулированных колебания называются *некогерентными*.

\*) [То есть нарастание  $\overline{(\Delta\varphi)^2}$ , обусловленное тепловыми флуктуациями, происходит медленнее. Это относится к генератору с колебательным контуром в цепи анода. Если контур включен в цепь сетки, то при малых амплитудах автоколебаний (малом сеточном токе) основной вклад в  $\overline{(\Delta\varphi)^2}$  вносят именно тепловые флуктуации в контуре. При увеличении сеточного тока вновь начинают преобладать дробовые флуктуации сеточного и анодного токов. См. Л. И. Гудзенко, О флуктуациях в ламповом генераторе при наличии сеточного тока, Радиотехника, т. I, вып. 9, 1956, стр. 1240]

\*\*\*) Наблюдение биений двух генераторов, имеющих очень близкие частоты

Для некогерентных колебаний, очевидно,

$$\overline{\overline{A_1 A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}} = 0. \quad (10.30)$$

Некогерентность хаотически модулированных напряжений  $u_1$ ,  $u_2$ , возникающих в двух независимых устройствах типа, показанного на рис. 417, легко продемонстрировать на опыте. Для этого нужно подвести  $u_1$ ,  $u_2$  к парам вертикально отклоняющих пластин двухлучевого осциллоскопа. Схема опыта показана на рис. 422. Мы увидим, например, такую смену картин: сначала, скажем,  $A_1$  велико, а  $A_2$  мало, затем  $A_1$  и  $A_2$  становятся почти одинаковыми, затем  $A_2$  велико,  $A_1$  мало и т. д. и, кроме того, оба колебания, например, сначала — в фазе, затем — в противофазе и т. д.

б) Пусть напряжение  $u_1$  снимается непосредственно с выхода источника хаотически модулированных колебаний одного из типов, рассмотренных в § 2, 3, а напряжение  $u_2$  — с того же выхода через фазовращатель. Тогда

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= A(t) \cos[\omega t - \varphi(t)], \\ u_2 &= A(t) \cos[\omega t - \varphi(t) - \varepsilon], \end{aligned} \right\} \quad (10.29a)$$

где  $\varepsilon$  — сдвиг фаз, вносимый фазовращателем и принимающий в зависимости от положения его ручки любое значение в интервале  $0, \pi$ . Каждое

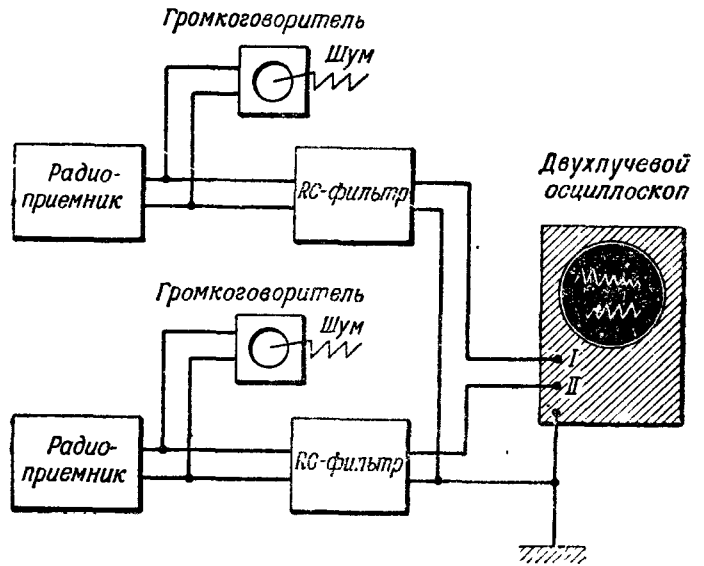


Рис. 422. Получение и наблюдение некогерентных хаотически модулированных колебаний.

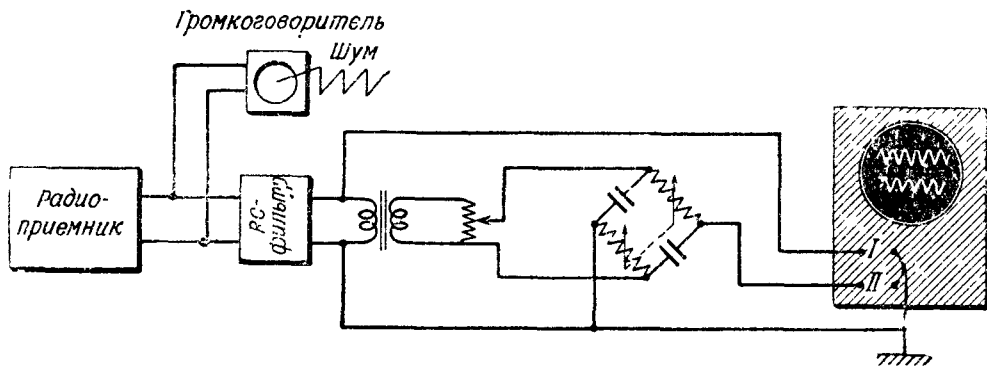


Рис. 423. Получение и наблюдение когерентных хаотически модулированных колебаний.

из напряжений  $u_1$ ,  $u_2$  является хаотически модулированным. Но хаотические изменения амплитуд и фаз у них не независимы: амплитуды их в каждый момент равны друг другу, а между фазами сохраняется постоянная разность  $\varepsilon$ . Такие колебания называются когерентными.

Предположим, далее, что напряжение подается на фазовращатель не непосредственно с выхода источника, через потенциометр, понижающий напряжение в отношении  $1 : \alpha$  (рис. 423). В этом случае

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= A(t) \cos[\omega t - \varphi(t)], \\ u_2 &= \alpha A(t) \cos[\omega t - \varphi(t) - \varepsilon]. \end{aligned} \right\}$$

Здесь амплитуды не равны, а только пропорциональны друг другу. Относительно фаз остается в силе сказанное для случая, когда не было потенциометра. Такие колебания также называются *когерентными*.

Когерентность колебаний также легко проиллюстрировать на опыте, подведя их к парам вертикально отклоняющих пластин двухлучевого осциллоскопа (рис. 423). Можно непосредственно видеть, что амплитуды обоих колебаний одновременно растут и убывают и что сохраняется постоянный сдвиг фаз.

## § 5. Статистические явления в источниках света

1. Простейшая статистическая модель. Всякий источник света, с которым мы имеем дело на опыте, содержит громадное число атомов. Речь будет идти о светящемся газе (пламя, разрядная трубка). Свет излучается в этом случае электронами, входящими в состав атомов. Мы будем стоять на точке зрения классической электронной теории и считать,

что излучение света (электромагнитных волн) электронами происходит вследствие того, что электроны совершают колебательные движения в соответствии с тем, что было сказано в гл. VII, § 7.

Будем считать для простоты, что каждый из атомов источника содержит по одному излучающему свет («оптическому») электрону и что все оптические электроны колеблются с одинаковой частотой  $\omega$ . Примем сначала (мы откажемся от этого упрощения в § 8), что все электроны колеблются параллельно одному и тому же направлению, вдоль которого мы расположим

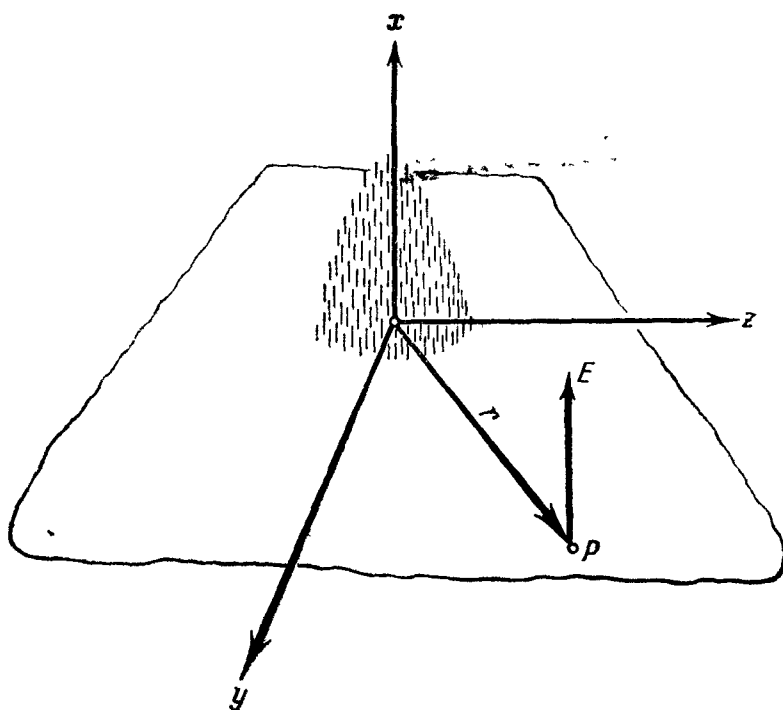


Рис. 424. Пояснение простейшей модели источника света.

ось  $x$ . Будем интересоваться полем, создаваемым колеблющимися электронами в некоторой удаленной точке  $P$  плоскости  $yz$  (рис. 424). Тогда, если размер источника по оси  $x$  не слишком велик, электрические поля, создаваемые в  $P$  всеми атомами, можно считать параллельными между собой и параллельными оси  $x$ . Поле, создаваемое источником в целом,

$$E = \sum_{i=1}^N E_i, \quad \text{где} \quad E_i = a \cos(\omega t - \alpha_i), \quad (10.31)$$

$E_i$  — поле, создаваемое  $i$ -м атомом,  $N$  — число атомов источника,  $a$  — амплитуда,  $\alpha_i$  — фаза поля, создаваемого в точке наблюдения  $i$ -м атомом. (Амплитуды полей, создаваемых всеми атомами, мы считаем одинаковыми.)

Допустим, что колебание каждого электрона состоит из отдельных «вспышек», изображаемых кусками синусоиды одинаковой амплитуды, причем фаза меняется от вспышки к вспышке *случайно*. Говоря точнее,

мы делаем *статистическое предположение*, что фазы  $\alpha_i$  меняются от вспышки к вспышке, подчиняясь статистической схеме § 2, п. 2

Рассмотрим сначала случай, когда *нет пауз* между вспышками, т. е. колебание электрона имеет постоянную амплитуду, но скачкообразно меняющуюся фазу (рис. 425), причем скачки каждой из фаз  $\alpha_i$  происходят через одинаковые промежутки времени  $\tau$ . (Скачки различных фаз  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$  происходят, вообще говоря, не одновременно, а в случайные моменты времени.)

Здесь можно непосредственно воспользоваться результатами § 2, п. 2. Электрическое поле в точке  $P$  представляет собой хаотически модулированное колебание вида

$$E = A(t) \cos [\omega t - \varphi(t)]. \quad (10.32)$$

Среднее время модуляции равно  $\tau$ . Среднее значение интенсивности за время, большое по сравнению с  $\tau$ ,

$$\bar{A}^2 = Na^2.$$

Оно равно интенсивности, создаваемой в точке наблюдения одним атомом, умноженной а число атомов.

Пусть источник состоит из двух частей, содержащих соответственно  $N_1, N_2$  атомов. Он создает хаотически модулированное колебание, средняя интенсивность которого

$$\bar{A}^2 = (N_1 + N_2) a^2$$

равна сумме средних интенсивностей

$$\bar{A}_1^2 = N_1 a^2, \quad \bar{A}_2^2 = N_2 a^2,$$

создаваемых частями источника. Результат опыта, изображенного на рис. 404,

становится понятным, если отождествить наблюдаемую глазом освещенность со средним значением интенсивности за время, большое по сравнению с  $\tau$ . (Числовые оценки, подтверждающие такую интерпретацию, см. ниже.)

Соотношение

$$\bar{A}^2 = \bar{A}_1^2 + \bar{A}_2^2$$

остается справедливым и при том небольшом усложнении модели, которое мы теперь введем. Пусть вспышки колебаний каждого оптического электрона разделены паузами. Пусть продолжительность всех вспышек одинакова и равна  $\tau$ , промежутки времени между началом двух последовательных вспышек колебаний каждого электрона также одинаковы и равны  $\tau'$  (рис. 426). Моменты начала вспышек колебаний различных электронов случайны и различны, вообще говоря, для различных атомов.

При сделанных предположениях в течение 1 сек. происходит  $1/\tau'$  вспышек колебаний каждого атома, т. е. всего  $N/\tau'$  вспышек. В каждое мгновение в сумме (10.31) присутствует столько слагаемых, сколько вспышек началось за промежутки времени продолжительности  $\tau$ , предшествующие моменту наблюдения  $t$ , т. е.

$$N \frac{\tau}{\tau'}$$

колебаний

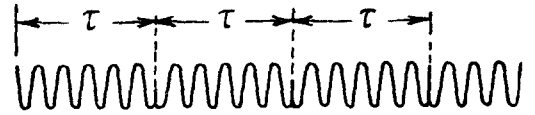


Рис. 425. Колебание постоянной амплитуды, фаза которого меняется скачкообразно через промежутки времени  $\tau$ .

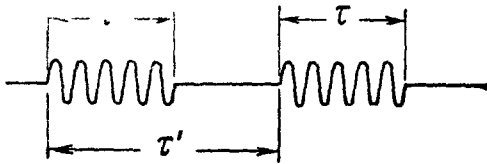


Рис. 426. Вспышки, разделенные паузами.

За время  $\tau$  произойдет полная смена одних вспышек другими или, что сводится к тому же, случайное изменение фаз всех  $N\tau/\tau'$  слагаемых колебаний; моменты  $t, t + \tau$  соответствуют двум совершенно независимым комбинациям случайных фаз.

Следовательно, здесь  $E$  также представляет собой колебание, хаотически модулированное по амплитуде и по фазе, со средним временем модуляции  $\tau$ .

Но здесь средний квадрат амплитуды

$$\overline{A^2} = a^2 N \frac{\tau}{\tau'}. \quad (10.33)$$

Сделаем, наконец, еще более общее предположение, что продолжительность отдельных вспышек и промежутки времени между началом вспышек колебаний от каждого атома не одинаковы, а имеют некоторый случайный разброс около *среднего* значения — соответственно  $\tau$  и  $\tau'$ . При этом остаются справедливыми выводы, сделанные для предыдущего случая, так как среднее время смены какой-нибудь комбинации фаз другой, независимой от нее равно  $\tau$ .

Следует подчеркнуть, что среднее время модуляции совершенно не зависит от числа атомов  $N$  и от пропорционального ему общего числа скачков фазы *всех* электронов в единицу времени. Среднее время модуляции определяется исключительно тем, как долго сохраняет постоянное значение фаза *отдельного колебания*, входящего в сумму (10.31). Здесь — полная аналогия с тем, что среднее, время хаотической модуляции колебаний маятника (§ 3, п. 2) зависит не от того, как часто он испытывает случайные толчки, а от продолжительности колебаний, вызываемых отдельными толчками.

**2. Конкретизация модели; физический смысл  $\tau$ .** Колебания электронов должны затухать из-за потери энергии на излучение (подобно, например, колебаниям камертона, укрепленного на резонаторе).

Частота световых колебаний порядка  $10^{15}$  герц.

Согласно оптическим данным коэффициент затухания, обусловленный излучением, имеет при этом порядок  $10^8 \text{ сек}^{-1}$ , т. е. значительное «высвечивание» энергии колеблющегося электрона происходит за некоторое время  $\tau_1$  порядка  $10^{-8}$  сек. Можно сказать точнее: амплитуда колебаний электрона убывает в  $e$  раз вследствие излучения за время порядка  $10^7$  «периодов» этих колебаний.

Возникает, прежде всего, вопрос: каким образом, несмотря на то, что колебания каждого электрона затухают в результате излучения, возможно длительное свечение? Это объясняется очень просто, если принять во внимание, что в результате теплового движения между атомами газа происходят соударения, и предположить, что в результате хотя бы некоторых соударений возбуждаются колебания электронов (подобно тому как при ударе возбуждаются колебания камертона).

Мы будем считать\*), что, помимо таких «возбуждающих» ударов, атомы испытывают также «гасящие» удары, в результате которых резко обрывается существовавшее ранее колебание (подобно тому как от прикосновения руки перестает звучать камертон). Мы будем считать, далее, что уже возбужденный атом не может испытывать возбуждающих ударов, увеличивающих амплитуду его колебаний, и что в результате возбуждаю-

\*) Основание для дальнейших утверждений дает при соблюдении известных условий теория атомных столкновений.



щих ударов всегда возникает колебание с одной и той же начальной амплитудой.

Число ударов, испытываемых в среднем за 1 сек. каждым атомом, пропорционально, очевидно, среднему числу атомов в  $1 \text{ см}^3$ , т. е. плотности газа. Следовательно, среднее время  $\tau_y$  между двумя последовательными ударами, испытываемыми данным атомом, обратно пропорционально плотности газа. Кроме того, оно, очевидно, убывает с ростом температуры, т. е. чем она выше, тем быстрее движутся атомы и тем чаще сталкиваются между собой. Среднее время  $\tau_b$  между последовательными возбуждающими ударами, испытываемыми данным атомом, очевидно, больше  $\tau_y$  и при данной температуре пропорционально  $\tau_y$ . То же можно сказать о среднем времени  $\tau_2$  между возбуждающим и следующим за ним гасящим ударом, испытываемым данным атомом.

Рассмотрим два характерных случая.

а) Газ очень разрежен, настолько, что  $\tau_y$ , а следовательно, и  $\tau_b$ ,  $\tau_2$ , велики по сравнению со временем высвечивания  $\tau_1$ , т. е., скажем, порядка  $10^{-7}$  сек. Тогда колебания каждого оптического электрона имеют вид, показанный на рис. 412, а, что можно схематизировать так, как показано на рис. 412, б.

Отождествим теперь  $\tau_1$ ,  $\tau_b$  с введенными в п. 1 временами  $\tau$ ,  $\tau'$ . Мы приходим к такой картине.

Световое колебание является хаотически модулированным колебанием, среднее время модуляции которого порядка времени высвечивания оптического электрона, а средняя интенсивность

$$\bar{A}^2 = a^2 N \frac{\tau_1}{\tau_b}. \quad (10.33a)$$

Время  $\tau_b$  пропорционально объему газа и обратно пропорционально  $N$ , время  $\tau_1$  не зависит от объема и числа атомов. Поэтому средняя интенсивность при данном числе атомов обратно пропорциональна объему источника. При данном объеме источника  $\bar{A}^2$  пропорциональна квадрату числа атомов.

б) Плотность газа велика настолько, что  $\tau_2$  мало по сравнению с  $\tau_1$ . подавляющее большинство всплесков колебаний гасится столкновениями. Колебание оптических электронов имеет вид, показанный на рис. 426.  $\tau_2$  и  $\tau_b$  здесь следует отождествить со введенными в п. 1  $\tau$  и  $\tau'$ , и мы приходим к такой картине.

Световое колебание является хаотически модулированным колебанием, среднее время модуляции которого порядка среднего промежутка времени между последовательными возбуждающим и гасящим ударами, испытываемыми отдельным атомом; модуляция тем более быстрая, чем больше плотность. Газ светится со средней интенсивностью

$$\bar{A}^2 = a^2 N \frac{\tau_2}{\tau_b}. \quad (10.33b)$$

Так как  $\tau_2$  и  $\tau_b$  оба обратно пропорциональны объему,  $\bar{A}^2$  не зависит от объема источника и пропорционально числу атомов.

**3. Эффект Доплера.** Помимо только что рассмотренного обрыва колебаний (из-за высвечивания и ударов), есть еще один, не менее существенный фактор, благодаря которому свет, испускаемый реальным источником, является хаотически модулированным колебанием. Это — эффект Доплера (см. гл. V, § 10).

Атомы светящегося газа движутся с различными (по направлению и величине) скоростями  $v_1$ . Вследствие этого они посылают в точку наблю-

дения синусоидальные колебания различной частоты (мы здесь отвлекаемся от соударений и высвечивания). Атомы, приближающиеся к точке наблюдения, посылают в нее колебания более высокой частоты, чем атомы, удаляющиеся от нее. Разброс частот тем больше, чем больше разброс скоростей отдельных атомов, т. е., как учит молекулярно-кинетическая теория, чем выше температура источника и чем меньше масса отдельного атома.

Следовательно,

$$E = \sum_{i=1}^N a \cos(\omega_i t - \alpha_i),$$

причем частоты  $\omega_i$ , излучаемые отдельными атомами, теперь *различны* (даже если все оптические электроны колеблются с одной и той же частотой  $\omega_0$ , что мы продолжаем предполагать).

Вследствие эффекта Допплера

$$\omega_i = \omega_0 \left( 1 + \frac{v_i \cos \theta}{c} \right),$$

причем  $v_i/c$  очень малы (см. ниже). Поле  $E$  представляет собой нечто вроде сложных «биений» между громадным числом колебаний с близкими частотами.

Обозначив

$$\alpha_i - \frac{\omega_0 v_i \cos \theta}{c} t = \beta_i(t),$$

мы можем написать:

$$E = \sum a \cos[\omega_0 t - \beta_i(t)],$$

т. е. рассматривать  $E$  как суперпозицию громадного числа колебаний с постепенно меняющимися фазами, причем быстрота изменения фазы у различных слагаемых различна. За время  $\tau_3$  порядка  $(c/\bar{v})T$ , где  $T$  — «период» света, а  $\bar{v}$  — средняя скорость теплового движения, фазы почти всех колебаний успевают существенно измениться. Следовательно, существенно изменятся за то же время амплитуда и фаза результирующего колебания  $E$ .

Согласно кинетической теории \*)

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{2kT}{m}},$$

где  $m$  — масса атома,  $T$  — абсолютная температура,  $k$  — больцмановская постоянная (ср. § 3). Для самых легких (водородных) атомов при  $T = 1000^\circ\text{K}$  отношение  $\bar{v}/c$  порядка  $10^{-5}$ ,  $\tau_3$  — порядка  $10^{-10}$  сек.

Примем теперь во внимание наряду с эффектом Допплера обрыв колебаний отдельных атомов (вследствие высвечивания или соударений). Если среднее время  $\tau$  между возбуждением и обрывом мало по сравнению с  $\tau_3$ , изменение фаз вследствие эффекта Допплера не играет заметной роли и остается в силе сказанное в пп. 1, 2. Пусть, наоборот,  $\tau_3$  мало по сравнению с  $\tau$ . Тогда за время, в течение которого еще не успеет заметно сказаться обрыв колебаний, произойдут заметные изменения их фазовых соотношений вследствие эффекта Допплера. Следовательно, здесь на протяжении интервала  $\tau$  успеет произойти ряд «биений», средняя продолжительность которых порядка  $\tau_3$  и которые, конечно, не повторяются в точ-

\*) См., например, Курс физики под редакцией Н. Д. Папалекси, т. I, стр. 458.

ности от одного интервала  $\tau$  к другому. Таким образом, и в этом случае происходит хаотическая модуляция, причем среднее время ее определяется эффектом Доплера и величина его порядка  $\tau_3$ .

4. **Порядки величин.** Итак, световое колебание, создаваемое реальным источником, представляет собой (в простейшем случае) хаотически модулированное по амплитуде и по фазе колебание

$$E = A(t) \cos [\omega t - \varphi(t)].$$

Среднее время модуляции  $\tau$  определяется тремя факторами: высвечиванием отдельных атомов, соударениями и эффектом Доплера. Факторы эти характеризуются соответствующими временами  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  и  $\tau_3$ .  $\tau_1$  не зависит ни от плотности, ни от температуры;  $\tau_2$  обратно пропорционально плотности и зависит довольно сложным образом от температуры;  $\tau_3$  не зависит от плотности и обратно пропорционально квадратному корню из температуры.

Поэтому при достаточной большой плотности среднее время модуляции  $\tau$  определяется целиком соударениями и равно  $\tau_2$ . При малой плот-

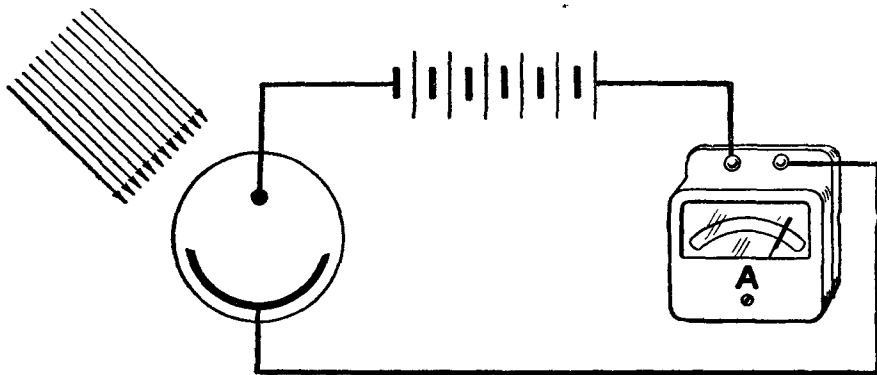


Рис. 427. Обычная схема для измерения интенсивности света.

ности соударения не играют роли и  $\tau$  определяется величинами  $\tau_1$  и  $\tau_3$ . При обычных температурах источника света  $\tau_3$  всегда гораздо меньше, чем  $\tau_1$ ; поэтому  $\tau$  определяется эффектом Доплера и равно  $\tau_3$ . При понижении температуры сильно уменьшается число возбуждающих ударов, следовательно, и интенсивность излучения, и поэтому с источниками обычных типов практически не удается экспериментировать при условии, когда  $\tau$  порядка  $\tau_1$ . Это можно сделать лишь искусственно, с помощью атомных пучков. (Атомы пучка летят почти параллельно друг другу; при наблюдении перпендикулярно к пучку эффект Доплера очень мал.)

Экспериментальное подтверждение наличия хаотической модуляции описанного здесь типа и количественное измерение, подтверждающее приведенные здесь оценки, дают косвенные методы — интерференционные (§ 7) и спектральные (гл. XI). Непосредственное наблюдение хаотических пульсаций интенсивности, вызванных эффектом Доплера, соударениями или высвечиванием, до сих пор не было осуществлено. Это связано с тем, что все существующие методы измерения интенсивности света дают не  $\bar{E}^2 = A^2/2$ , а  $\bar{E}^2 = \bar{A}^2/2$ , они являются *инерционными* методами (ср. гл. IV, § 9). Например, даваемое глазом зрительное ощущение образуется за время порядка 0,1 сек. Устройство, состоящее из фотоэлемента и микроамперметра (рис. 427), срабатывает за время по крайней мере того же порядка. Заметное почернение фотопластинки может быть достигнуто даже при весьма интенсивном свете лишь за время, гораздо большее, чем  $\tau$ . Созданные до настоящего времени устройства, состоящие из фото-

элемента, усилителя и осциллоскопа (рис. 428), способны регистрировать пульсации интенсивности света, происходящие не быстрее, чем за время порядка  $10^{-8}$  сек. Все эти времена усреднения велики по сравнению со средними временами самопроизвольной хаотической модуляции света. Этим же

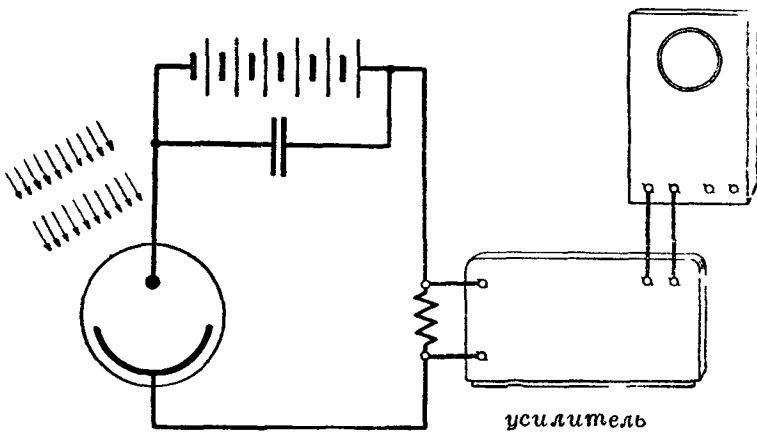


Рис. 428. Устройство для наблюдения быстрых изменений интенсивности света

объясняется и невозможность наблюдения интерференционной картины от независимых источников (см. п. 1).

Однако и в оптике существует, по-видимому, принципиальная возможность малоинерционного измерения интенсивности (измерения  $\overline{E^2}$ ), основанная на сочетании фотоэлемента и сверхвысокочастотной радиопаратуры\*). Осуществление такой аппаратуры позволи-

ло бы непосредственно наблюдать те самопроизвольные беспорядочные «мигания» света, о которых говорится в этом параграфе.

**5. Вопросы когерентности. Длина цуга.** Колебания, создаваемые в данной точке  $P$  различными атомами источника, очевидно, *некогерентны* (см. § 4, п. 5). То же самое можно сказать о колебаниях

$$A_1(t) \cos [\omega t - \varphi_1(t)], \quad A_2(t) \cos [\omega t - \varphi_2(t)],$$

создаваемых в точке  $P$  двумя источниками или двумя частями одного и того же источника. Нас будет здесь интересовать вопрос, когерентны ли колебания, создаваемые *одним* источником в *различных* точках пространства? Мы ограничимся сначала случаем *точечного* источника, что означает в данном случае источник, линейные размеры которого малы по сравнению с длиной волны. (При этом число атомов источника может быть велико в кубике с ребром  $5 \cdot 10^{-6}$  см, что соответствует 0,1 длины волны зеленого света, содержится при нормальных условиях около 3000 молекул газа.) Случай источника произвольных размеров («протяженного источника») будет рассмотрен в § 10 — 12.

Пусть электрический момент  $i$ -го атома меняется по закону

$$p_i = b_i \cos [\omega t - \alpha_i'(t)]. \quad (10.34)$$

Вследствие малости разностей хода  $r_i - r_j$ , по сравнению с длиной волны ( $r_i, r_j$  — расстояния от  $i$ -го и  $j$ -го атома источника до точки наблюдения) напряженность поля в каждой точке пространства практически такая же, как если бы излучал *один атом*, находящийся в середине источника и обладающий электрическим моментом

$$p = \sum b_i(t) \cos [\omega t - \alpha_i(t)] = M(t) \cos [\omega t - \varphi(t)].$$

Если фазы  $\alpha_i$  случайны (подчиняются одной из статистических схем § 2),  $p$  представляет собой хаотически модулированное колебание.

Ограничимся исследованием электрического поля  $E$  в плоскости, перпендикулярной к направлению колебаний электронов. Если бы  $p$

\*) См. Г. С. Горелик, Успехи физических наук 34 (1948), 321, [а также С. И. Боровицкий и Г. С. Горелик, Успехи физических наук 59 (1956), 543].

менялся синусоидально,  $E$  описывалось бы выражением вида

$$E = \frac{B}{r} \cos(\omega t - kr - \varphi),$$

где  $B$ ,  $\varphi$  — постоянные (см. гл. VII, § 7). Вследствие хаотичности модуляции  $p$  колебание  $E$  также будет хаотически модулированным, причем в выражении для  $E$  в мгновение  $t$  должны войти значения, которые имели амплитуда и фаза  $p$  в *предшествующее* мгновение  $t - r/c$ , так как всякое изменение амплитуды или фазы  $p(t)$  доходит до интересующей нас точки пространства за время  $r/c$ . Итак, в нашем случае, когда  $p$  представляет собой хаотически модулированное колебание,

$$E(t) = \frac{B\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} \cos \left[ \omega t - kr - \varphi \left( t - \frac{r}{c} \right) \right]. \quad (10.35)$$

Примем сначала для простоты, что скачки всех фаз  $\alpha_i$  происходят одновременно в мгновения  $0, \tau, 2\tau, 3\tau, \dots$ . Тогда колебание  $p(t)$  имеет вид, который показан на рис. 407, а амплитуда и фаза  $E(t)$  на расстоянии  $r$  от источника претерпевают случайные скачки в мгновения  $t = r/c, r/c + \tau, r/c + 2\tau, \dots$  (Моделью здесь может служить излучение антенны или камертона, в которых через равные промежутки времени  $\tau$  происходят случайные изменения амплитуды и фазы колебания.)

Представим себе последовательность расширяющихся окружностей (в пространстве — шаров) с общим центром  $O$ , радиусы которых растут со временем по закону

$$r = ct, \quad r = c(t - \tau), \quad r = c(t - 2\tau), \dots$$

(рис. 429). В расширяющемся кольце, ограниченном окружностями

$$r = ct, \quad r = c(t - \tau),$$

величины  $B(t - r/c)$ ,  $\varphi(t - r/c)$  имеют постоянное значение, определяемое значениями, которые имели амплитуда и фаза  $p(t)$  в течение промежутка времени  $0 < t < \tau$ ; в смежном с ним кольце, ограниченном поверхностями

$$r = c(t - \tau), \quad r = c(t - 2\tau),$$

величины  $B(t - r/c)$ ,  $\varphi(t - r/c)$  имеют (вообще говоря, другие) постоянные значения, определяемые значением амплитуды и фазы  $p(t)$  в течение последующего промежутка времени  $\tau < t < 2\tau$  и т. д. Поэтому волна имеет в каждом из колец постоянную фазу и постоянный множитель  $B(t - r/c)$  в выражении амплитуды. В различных же кольцах эти величины различны и, более того, совершенно независимы между собой. Часть волны, заполняющую каждое из выделенных нами расширяющихся колец (в пространстве соответствующих шаровых слоев), называют *волновым цугом* (или просто цугом), а длину  $c\tau$  — *длиной цуга*.

Перейдем к вопросу, поставленному в начале п. 5.

Представим себе сначала на рис. 429 две точки  $P_1, P_2$ , находящиеся на *одинаковом расстоянии* от источника. Они в любой момент времени принадлежат к *одному и тому же цугу*. Амплитуда и фаза в них претерпевают скачки одновременно и принимают при этом одинаковые значения. Поля в точках  $P_1$  и  $P_2$  представляют собой, таким образом, *когерентные* колебания, имеющие к тому же равные фазы и амплитуды.

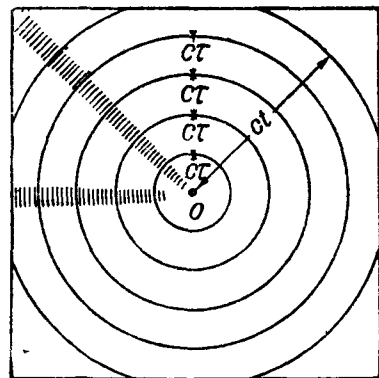


Рис. 429. Кольца постоянных  $\varphi$ .

Рассмотрим теперь две точки  $P_1, P_2$  такие, что

$$r_2 - r_1 > c\tau.$$

Эти точки в любой момент времени принадлежат к *различным* цугам. Отношение амплитуд и разность фаз между колебаниями в  $P_1, P_2$  меняются беспорядочно, причем разность фаз принимает одинаково часто за время, большое по сравнению с  $\tau$ , всевозможные значения; эти колебания *некогерентны*.

Рассмотрим, наконец, две точки  $P_1, P_2$  такие, что

$$0 < r_1 - r_2 < c\tau.$$

Здесь чередуются промежутки времени, когда обе точки принадлежат к одному цугу, и промежутки времени, когда они принадлежат к *различным* цугам. Промежутки второго типа делятся, как нетрудно сообразить, время  $(r_2 - r_1)/c$ , промежутки первого типа — время

$$\frac{c\tau - (r_2 - r_1)}{c} = \tau - \frac{r_2 - r_1}{c}.$$

В течение промежутков первого типа разность фаз колебаний в  $P_1$  и  $P_2$  постоянна и равна  $k(r_2 - r_1)$  (например, равна  $\pi$ , если  $r_2 - r_1$  равно нечетному числу полуволн), а их амплитуды относятся, как  $r_2/r_1$ . В течение промежутков второго типа колебания совершенно независимы, разность фаз одинаково часто принимает любое значение, отношение амплитуд меняется беспорядочно. В итоге за время, охватывающее большое число промежутков  $\tau$ , разность фаз чаще принимает значение  $k(r_2 - r_1)$ , чем любое другое; то же самое можно сказать о значении  $r_2/r_1$  отношения амплитуд. Такие колебания называются *частично когерентными*.

При уменьшении  $r_2 - r_1$  колебания становятся все более близкими к когерентным (промежутки времени, когда разность фаз имеет значение, отличное от  $k(r_2 - r_1)$ , а отношение амплитуд — значение, отличное от  $r_2/r_1$ , становятся короче). При увеличении  $r_2 - r_1$  колебания становятся все более близкими к некогерентным и превращаются в некогерентные колебания при  $r_2 - r_1 = c\tau$ .

Предположение, что фазы всех электронов меняются одновременно через равные промежутки времени, здесь не существенно. Если мы примем, что колебания отдельных атомов возникают и обрываются в *различные* мгновения (см. п. 1), мы тоже придем к выводу, что колебания когерентны при  $|r_2 - r_1| \ll c\tau$  и некогерентны при  $|r_2 - r_1| > c\tau$ , где  $\tau$  — среднее время между возникновением и обрывом колебания отдельного электрона. Однако закон перехода от когерентности к некогерентности сложнее, чем только что описанный.

Так как хаотическая модуляция неизбежна (вследствие флуктуаций) во всяком источнике «синусоидальных» колебаний, разбиение волны на некогерентные цуги имеет место, разумеется, не только в оптике. Так же обстоит дело с радиоволнами и акустическими волнами. Длина цуга является наряду с длиной волны важнейшей пространственной характеристикой волны, подобно тому как среднее время хаотической модуляции является наряду с периодом важнейшей ее временной характеристикой.

Наибольшее достижимое в обычных оптических источниках значение  $\tau$  порядка  $10^{-10} - 10^{-9}$  сек. При этом длина цуга  $c\tau$  порядка 3 — 30 см.

В радиофизике мы имеем дело с совершенно иными масштабами. Длина цуга, обусловленная флуктуациями в ламповом генераторе

(по устранении всех «грубых» причин непостоянства фазы и частоты), имеет согласно данным, приведенным в § 4, п. 4, порядок величины  $\sigma\tau = 3 \cdot 10^{10} \cdot 10^6 \text{ см} = 3 \cdot 10^{11} \text{ км}$  (величина порядка размера солнечной системы).

### § 6. Общее исследование суперпозиции хаотически модулированных колебаний

1. Суперпозиция скалярных колебаний. Сумма  $s$  хаотически модулированных колебаний

$$s_1 = A_1(t) \cos [\omega t - \varphi_1(t)], \quad s_2 = A_2(t) \cos [\omega t - \varphi_2(t)] \quad (10.36)$$

может быть представлена (ср. гл. II, § 2) в виде

$$s = A(t) \cos [\omega t - \varphi(t)], \quad (10.37)$$

где

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2), \quad \text{tg } \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}. \quad (10.38)$$

Колебание  $s$  представляет собой, так же как  $s_1, s_2$ , колебание несущей частоты  $\omega$ , хаотически модулированное по амплитуде и фазе.

Предположим, что некоторый прибор («малоинерционный») показывает средний квадрат  $\overline{s^2}$  за время, малое по сравнению с  $\tau$  (средним временем модуляции колебания  $s$ ), или, что сводится к тому же, мгновенное значение интенсивности  $A^2$  (имеем, очевидно,  $A^2 = \overline{s^2}/2$ ). Показание прибора беспорядочно колеблется и, вообще говоря, не равно сумме показаний приборов, измеряющих  $A_1^2$  и  $A_2^2$  (т. е.  $\overline{s_1^2}/2, \overline{s_2^2}/2$ ).

Предположим, далее, что другой прибор («инерционный») показывает средний квадрат величины  $s$  за время, *большое* по сравнению с  $\tau$ , или, что сводится к тому же,  $\overline{A^2}$  (очевидно,  $\overline{A^2} = \overline{s^2}/2$ ). Имеем:

$$\overline{A^2(t)} = \overline{A_1^2(t)} + \overline{A_2^2(t)} + 2\overline{A_1(t)A_2(t) \cos [\varphi_1(t) - \varphi_2(t)]}. \quad (10.39)$$

Показание прибора практически постоянно. Измеряемая им средняя интенсивность отлична от суммы средних интенсивностей колебаний  $s_1, s_2$ , если  $\overline{A_1A_2 \cos (\varphi_1 - \varphi_2)} \neq 0$ , и равна ей, если этот член равен нулю.

Рассмотрим два крайних случая (ср. § 4).

а) Колебания  $s_1, s_2$  некогерентны.

Разность фаз  $\varphi_1(t) - \varphi_2(t)$  беспорядочно меняется. Интенсивность  $A^2$ , показываемая *малоинерционной* аппаратурой, то больше, то меньше суммы  $A_1^2 + A_2^2$  интенсивностей  $s_1, s_2$  — больше в те промежутки времени, когда  $\cos (\varphi_1 - \varphi_2) > 0$ , меньше в те, когда  $\cos (\varphi_1 - \varphi_2) < 0$ . Средняя же интенсивность, показываемая *инерционной* аппаратурой, равна на основании (10.39), (10.30) сумме средних интенсивностей слагаемых:

$$\overline{A^2} = \overline{A_1^2} + \overline{A_2^2}. \quad (10.40)$$

б) Колебания  $s_1, s_2$  когерентны.

Разность фаз  $\varphi_1(t) - \varphi_2(t)$  постоянна. Обозначим ее  $\varepsilon$ . Пусть, далее,

$$A_1(t) = a_1 A_0(t), \quad A_2(t) = a_2 A_0(t),$$

где  $a_1, a_2$  — постоянные (амплитуды  $A_1, A_2$  пропорциональны друг другу). Имеем:

$$A^2(t) = A_0^2(t) [a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos \varepsilon],$$

откуда

$$A^2(t) = \overline{\overline{A_0^2(t)}} [a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos \varepsilon].$$

Последняя формула может быть еще представлена в таком виде:

$$\overline{\overline{A^2}} = \overline{\overline{A_1^2}} + \overline{\overline{A_2^2}} + 2\sqrt{\overline{\overline{A_1^2}} \cdot \overline{\overline{A_2^2}}} \cos \varepsilon, \quad (10.41)$$

т. е. средняя интенсивность — и в этом фундаментальное отличие от случая некогерентных колебаний, — вообще говоря, *отлична от суммы средних* интенсивностей слагаемых. Заметим, что здесь средняя интенсивность такая же, как если складываются два *синусоидальных* колебания с амплитудами  $\sqrt{\overline{\overline{A_1^2}}}$ ,  $\sqrt{\overline{\overline{A_2^2}}}$  и с разностью фаз  $\varepsilon$ . В отличие от случая суперпозиции некогерентных колебаний мы здесь получим правильный результат, пользуясь синусоидальной идеализацией (заменяя реальные хаотически модулированные колебания синусоидальными колебаниями с только что указанными амплитудами и разностью фаз).

**2. Суперпозиция взаимно перпендикулярных векторных колебаний.** Рассмотрим сумму

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$$

взаимно перпендикулярных векторов

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{A}(t) \cos [\omega t - \varphi_1(t)], \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{B}(t) \cos [\omega t - \varphi_2(t)],$$

представляющих собой хаотически модулированные векторные колебания.

Поступая так же, как в гл. II, § 3, легко получить следующее соотношение между декартовыми координатами конца вектора  $\mathbf{v}$  и временем:

$$\frac{x^2}{A^2(t)} + \frac{y^2}{B^2(t)} - 2 \frac{xy}{A(t)B(t)} \cos [\varphi_1 - \varphi_2] = \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (10.42)$$

На протяжении времени, малого по сравнению с наименьшим из средних времен модуляции  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  наших колебаний,  $A$ ,  $B$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$  не успевают заметно измениться. Можно поэтому утверждать, что на протяжении такого времени конец вектора  $\mathbf{v}$  движется по эллипсу, вписанному в прямоугольник со сторонами  $2A(t)$ ,  $2B(t)$ ; форма и ориентация эллипса определяются величиной  $\varphi_1(t) - \varphi_2(t)$ . Эллипсы, соответствующие значениям  $t$ , разделенным интервалами порядка хотя бы наименьшей из величин  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ , имеют, вообще говоря, различный вид.

Предположим, что мы располагаем аппаратурой, дающей изображение траектории конца вектора  $\mathbf{v}$  и срабатывающей за время, малое по сравнению с наименьшей из величин  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ . Такое исследование траектории мы можем назвать *малоинерционным*. Каждое изображение, даваемое малоинерционной аппаратурой, будет иметь вид эллипса. Изображения, относящиеся к достаточно разделенным моментам времени, будут эллипсами различного вида. Наряду с этим возможна аппаратура, также дающая изображение траектории конца вектора  $\mathbf{v}$ , но срабатывающая лишь за время, большое по сравнению с обеими величинами  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ . Исследование с помощью такой аппаратуры мы можем назвать *инерционным*. Ясно, что при инерционном наблюдении траектория конца вектора  $\mathbf{v}$ , вообще говоря, уже окажется отличной от эллипса.

Рассмотрим и здесь два крайних случая.

а) К о л е б а н и я  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  н е к о г е р е н т н ы.

Начнем с более частного случая, когда амплитуда постоянна и хаотически меняются только фазы  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ . Малоинерционные наблюдения дадут



последовательность эллипсов всевозможной формы и ориентации, вписанных в неизменный прямоугольник со сторонами  $2A$ ,  $2B$  (рис. 430).

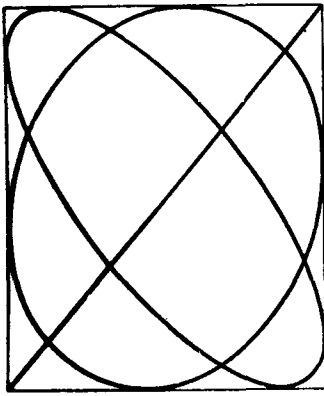


Рис. 430. Эллипсы, возможные при постоянных амплитудах и хаотически меняющейся разности фаз.

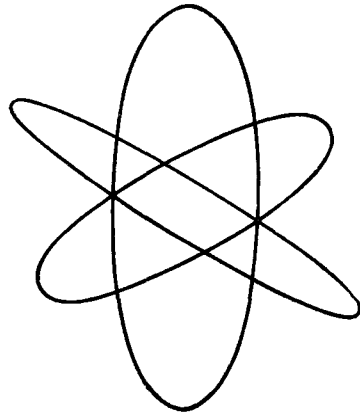


Рис. 431. Эллипсы, возможные при хаотически меняющихся отношениях амплитуд и разности фаз.

Инерционное наблюдение покажет траекторию, сплошь заполняющую этот прямоугольник, т. е. прямоугольное пятно.

Пусть теперь хаотически и независимо меняются также  $A$  и  $B$ . Описанные около эллипсов прямоугольники со сторонами, параллельными осям  $x$ ,  $y$ , будут принимать различную форму; последовательность эллипсов, получаемых при малоинерционном наблюдении, может, например, иметь вид, показанный на рис. 431. Инерционное наблюдение даст пятно непрямоугольной формы. Если амплитуды  $A$ ,  $B$  одинаково часто и независимо друг от друга принимают каждое заданное значение (например, мгновения, когда  $A = 1$ ,  $B = 0$ , и мгновения, когда  $A = 0$ ,  $B = 1$ , встречаются одинаково часто), пятно будет обладать круговой симметрией.

б) Колебания  $v_1$ ,  $v_2$  когерентны.

Начнем и здесь с более частного случая, когда амплитуды  $A$ ,  $B$  постоянны. Тогда конец вектора  $v$  движется (с беспорядочно меняющейся угловой скоростью) по неподвижному эллипсу. Этот эллипс нам покажет как малоинерционная, так и инерционная аппаратура.

Пусть теперь  $A$  и  $B$  изменяются пропорционально друг другу:

$$A(t) = a C(t),$$

$$B(t) = b C(t),$$

где  $a$ ,  $b$  — постоянные. Тогда малоинерционное наблюдение даст последовательность подобных и одинаково ориентированных эллипсов (рис. 432), инерционное наблюдение — пятно, не обладающее центральной симметрией, но обладающее двумя осями симметрии; этими осями являются главные оси эллипсов, изображенные пунктиром на рис. 432.

3. Демонстрация суперпозиции скалярных некогерентных колебаний. Воспользуемся независимыми источниками хаотически модулированных колебаний типа, описанного в § 4, п. 4. Соединив их выходы, как

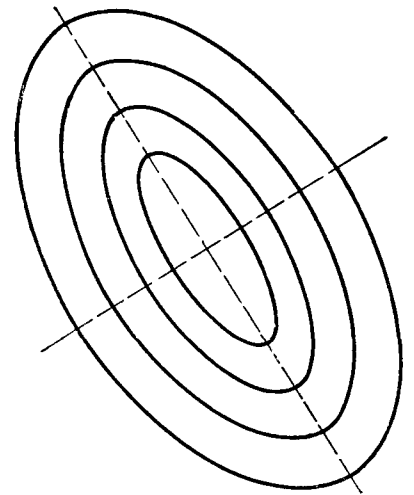


Рис. 432. Различные эллипсы, возникающие при суперпозиции когерентных колебаний.

показано на рис. 433, мы получим напряжение

$$u = u_1 - u_2,$$

являющееся суперпозицией двух некогерентных колебаний  $u_1, u_2$ .

а) **Безынерционное наблюдение.** Подведя  $u$  к отклоняющим пластинам осциллоскопа (рис. 433), мы увидим хаотически

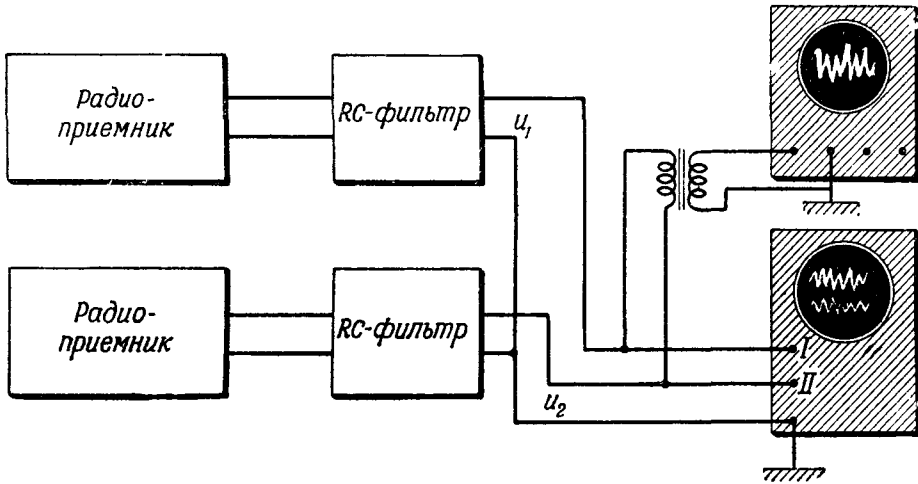


Рис. 433. Безынерционное наблюдение суперпозиции скалярных некогерентных колебаний.

модулированное колебание. Если мы будем одновременно наблюдать с помощью двух других осциллоскопов (или одного двухлучевого) колебания  $u_1, u_2$ , мы заметим, что амплитуда  $A(t)$  колебания  $u = u_1 - u_2$  близка иногда к разности амплитуд  $A_1(t), A_2(t)$  колебаний  $u_1, u_2$  (это наблю-

дается в такие промежутки времени, когда их фазы  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$  близки), иногда к их сумме (тогда, когда  $\varphi_1(t) - \varphi_2(t)$  близко к  $\pi$ ). Это — крайние случаи. Гораздо чаще наблюдаются промежуточные случаи.

б) **Малоинерционное наблюдение.** Подведем (рис. 434) каждое из напряжений  $u_1, u_2$  к квадратичному демодулятору

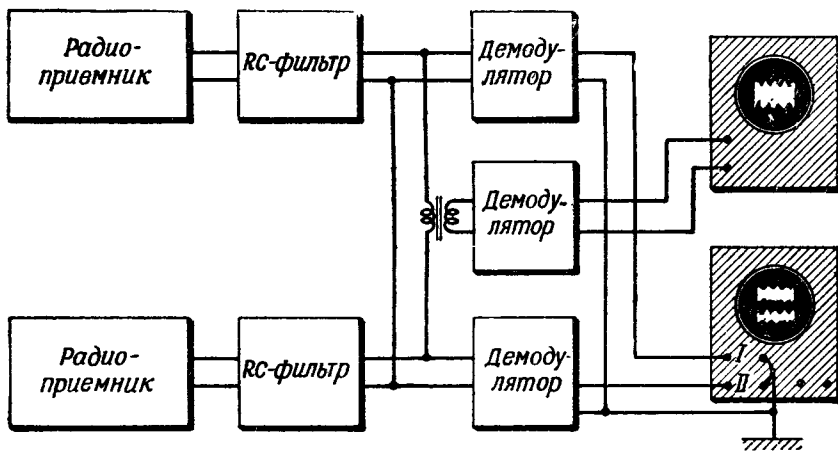


Рис. 434. Малоинерционное наблюдение суперпозиции скалярных некогерентных колебаний.

ру (гл. IV, § 9). Отрегулируем временные постоянные демодуляторов так, чтобы они были малы по сравнению со средними временами модуляции наших колебаний. Подведем напряжения с выходов демодуляторов к трем парам вертикально отклоняющих пластин электронных осциллоскопов. Мы увидим на экранах [осциллограммы беспорядочно пульсирующих функций

$$\overline{u_1^2(t)} = \frac{1}{2} A_1^2(t), \quad \overline{u_2^2(t)} = \frac{1}{2} A_2^2(t), \quad \overline{u^2(t)} = \frac{1}{2} A^2(t).$$

Здесь, вообще говоря,

$$\overline{u^2} \neq \overline{u_1^2} + \overline{u_2^2}.$$

В частности, бывают моменты, когда  $\overline{u^2}$  очень мало при значительных  $\overline{u_1^2}$  и  $\overline{u_2^2}$

в) Инерционное наблюдение. Превратим одно из демодуляционных устройств (рис. 434) в устройство для инерционного наблюдения среднего квадрата напряжения, увеличив емкость  $C$  его выходного контура (ср. гл. IV, § 9). Включим в этот контур микроамперметр постоянного тока. Будем подводить ко входу этого устройства поочередно напряжения  $u_1, u_2, u$ . Каждый раз стрелка микроамперметра будет по истечении некоторого времени устанавливаться в определенном отклоненном положении. Отклонения пропорциональны соответственно  $\overline{u_1^2}, \overline{u_2^2}, \overline{u^2}$ . Отклонение, вызываемое напряжением  $u$ , равно сумме отклонений, вызываемых напряжениями  $u_1, u_2$ .

4. Демонстрация суперпозиции взаимно перпендикулярных некогерентных колебаний. Подведем теперь  $u_1, u_2$  к двум парам взаимно перпендикулярных пластин однолучевого электронного осциллоскопа и перейдем с развертки на наблюдение «фигур Лиссажу» (рис. 435).

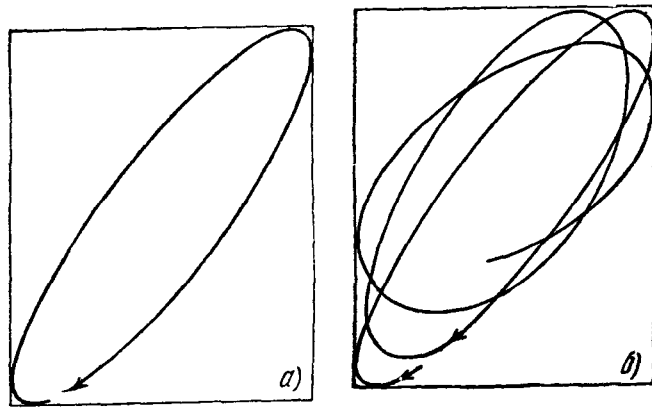


Рис. 436. а—кратковременное, б—более длительное наблюдение суперпозиции двух взаимно перпендикулярных некогерентных колебаний.

Перейдем теперь к *инерционному* наблюдению: сделаем фотоснимок с экрана осциллоскопа с экспозицией в несколько десятков секунд — время, охватывающее большое число интервалов  $\tau$ . На фотоснимке будут видны не эллипсы, а сплошное светлое пятно, обладающее центральной симметрией; освещенность постепенно падает по мере удаления от центра. Постепенное превращение эллипса в такую «мазню» при увеличении экспозиции поясняет рис. 436.

Нетрудно осуществить инерционное наблюдение непосредственно глазом. Для этого нужно сделать  $\tau$  малым по сравнению с 0,1 сек., например порядка 0,005 сек. Для того чтобы при этом можно было

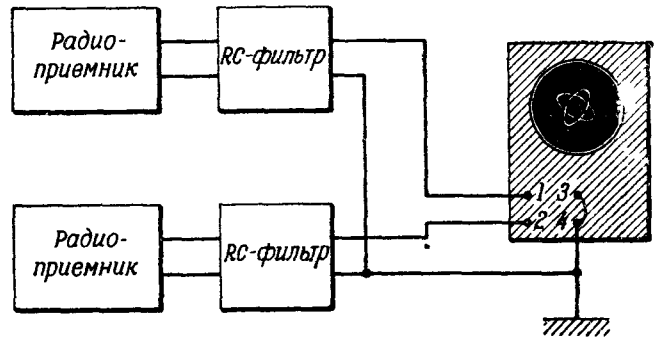


Рис. 435. Наблюдение суперпозиции взаимно перпендикулярных некогерентных колебаний.

Пусть  $\tau$  — порядка 1 сек. Будем через каждую секунду замыкать на 0,1 сек. ключ, подающий на осциллоскоп исследуемые напряжения. Мы увидим (в согласии с п. 2) чередование четких эллипсов случайного вида. Тот же результат мы получим, если будем делать через каждую секунду фотоснимки с экспозицией 0,1 сек. В этом состоит в данном случае *малоинерционное* наблюдение. (Безынерционное наблюдение состояло бы в том, чтобы кинематографировать картину, возникающую на экране осциллоскопа, настолько быстро, чтобы на каждом кадре было видно мгновенное положение светящейся точки.) Если мы непрерывно следим глазом за тем, что происходит на экране, мы тоже осуществляем при  $\tau$  порядка 1 сек. малоинерционное наблюдение, так как зрительное ощущение образуется за время порядка 0,1 сек.: мы видим не отдельные положения светящейся точки, а непрерывно и беспорядочно деформирующийся светящийся эллипс.

Перейдем теперь к *инерционному* наблюдению: сделаем фотоснимок с экрана осциллоскопа с экспозицией в несколько десятков секунд — время, охватывающее большое число интервалов  $\tau$ . На фотоснимке будут видны не эллипсы, а сплошное светлое пятно, обладающее центральной симметрией; освещенность постепенно падает по мере удаления от центра. Постепенное превращение эллипса в такую «мазню» при увеличении экспозиции поясняет рис. 436.

рассматривать колебания  $u_1$ ,  $u_2$  как хаотически модулированные, нужно, чтобы их «период»  $T$  был мал по сравнению с  $\tau$ , — скажем, порядка  $10^{-4}$  сек. Такие  $T$  и  $\tau$  нетрудно осуществить с помощью того же  $RC$ -фильтра, который служил для предыдущих опытов, уменьшив  $C$  и подрегулировав  $r$  (рис. 136). Теперь глаз будет видеть на экране неподвижную «мазю». Но, если мы будем делать фотоснимки с экспозицией 0,001 сек., мы снова будем получать довольно четкие эллипсы разнообразного размера, формы и ориентации (малоинерционное наблюдение).

5. Демонстрация суперпозиции скалярных когерентных колебаний. С помощью схемы с фазовращателем (рис. 423) создадим когерентные колебания вида

$$u_1 = A_1(t) \cos [\omega t - \varphi(t)], \quad u_2 = A_1(t) \cos [\omega t - \varphi(t) - \varepsilon],$$

где  $\varepsilon$  — сдвиг фаз, вносимый фазовращателем и принимающий в зависимости от положения движков любое фиксированное значение в интервале от 0 до  $\pi$ .

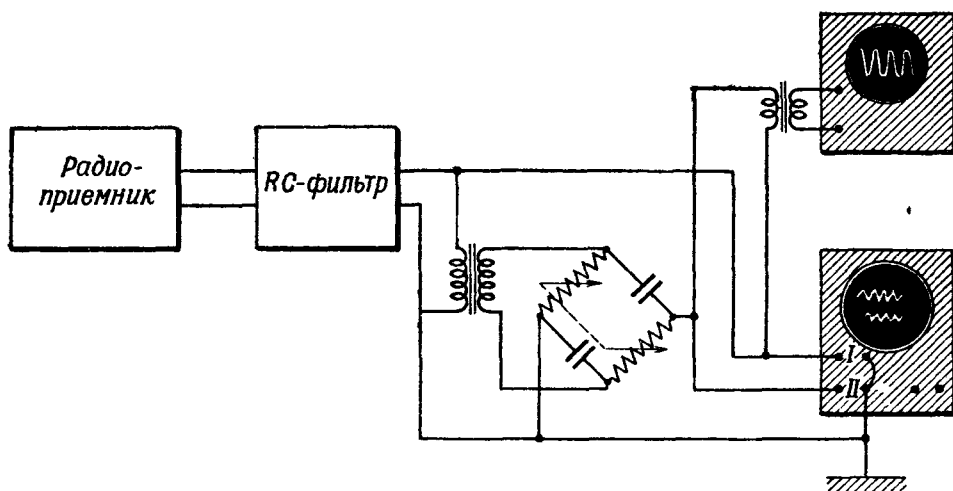


Рис. 437. Безынерционное наблюдение суперпозиции когерентных скалярных колебаний.

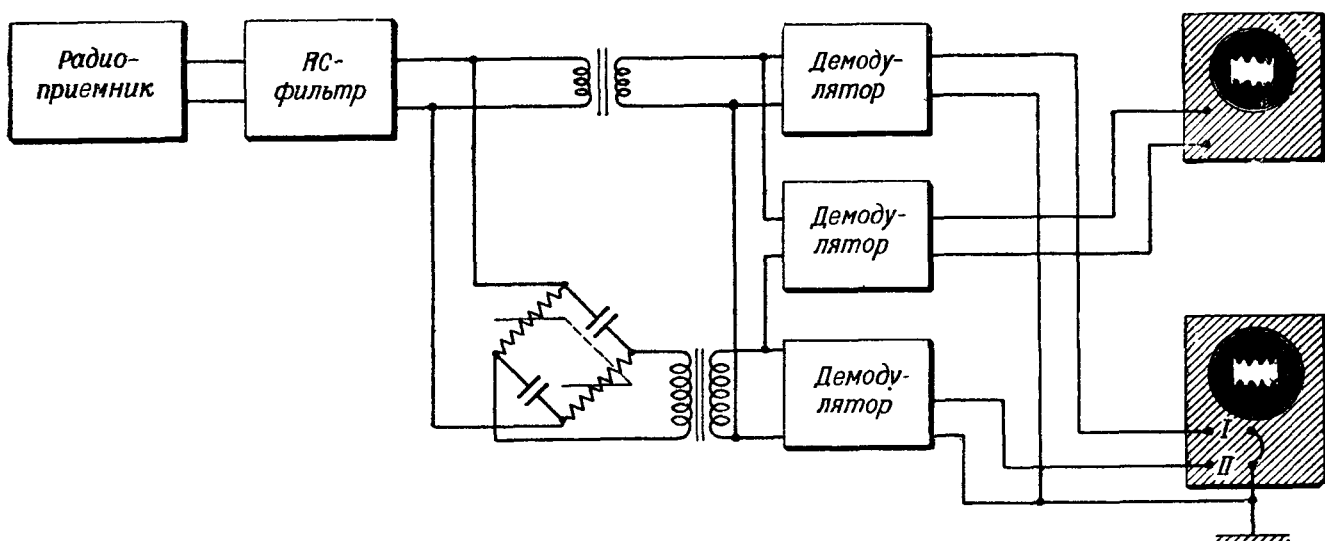


Рис. 438. Малоинерционное наблюдение суперпозиции когерентных скалярных колебаний.

Подведем напряжения  $u_1$ ,  $u_2$  и  $u = u_1 - u_2$  к трем парам вертикально отклоняющих пластин (рис. 437). Мы теперь увидим три колебания, амплитуды которых пульсируют хаотически, но так, что амплитуды первых двух всегда пропорциональны друг другу. Мы увидим, далее, что резуль-

тирующая амплитуда  $A(t)$  равна  $2A_1(t)$  при  $\varepsilon = \pi$  и обращается в нуль при  $\varepsilon = 0$ .

Малоинерционное наблюдение (рис. 438) также позволяет наблюдать согласованные пульсации величин  $\overline{u_1^2}$ ,  $\overline{u_2^2}$ ,  $\overline{u^2}$ . Здесь главный интерес представляет результат инерционного наблюдения, совершенно отличный от того, который получался при некогерентных колебаниях.

Подводя поочередно  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u$  к инерционному измерительному устройству, о котором уже шла речь выше, мы убедимся, что интенсивность суммарного колебания теперь, вообще говоря, не равна сумме средних интенсивностей составляющих колебаний и, в частности, равна нулю, если  $\varepsilon = 0$ . Перемещая движки фазовращателя, мы можем проследить по выходному измерительному прибору за тем, как суммарное колебание  $u = u_1 - u_2$  растет от нуля до  $4\overline{A^2}$ .

6. Демонстрация суперпозиции взаимно перпендикулярных когерентных колебаний. Подведем наши когерентные колебания к двум парам взаимно перпендикулярных отклоняющих пластин и перейдем на наблю-

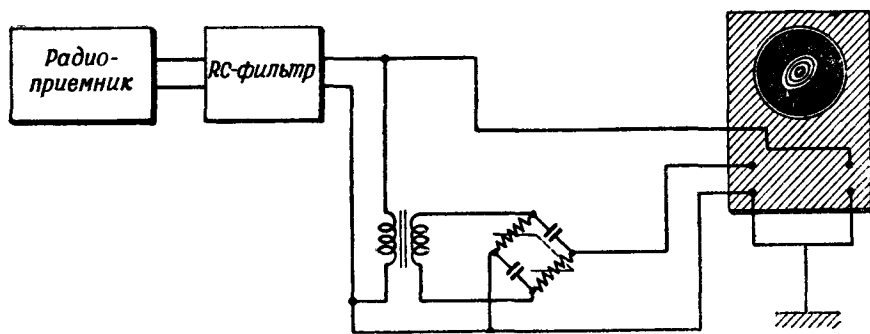


Рис. 439. Наблюдение суперпозиции когерентных взаимно перпендикулярных колебаний.

дение «фигур Лиссажу» (рис. 439). Мы снова увидим при повторных малоинерционных наблюдениях (см. п. 2) чередование эллипсов различных размеров соответственно различным значениям, принимаемым амплитудой  $A_1(t)$ . Но все эллипсы теперь подобны и одинаково ориентированы (ср. рис. 432). В частности, при  $\varepsilon = 0$  и  $\varepsilon = \pi$  все эллипсы вырождаются в отрезки прямых, при  $\varepsilon = \pm \pi/2$  — в концентрические окружности.

Здесь также особенно интересен результат инерционного наблюдения.

Если при  $\tau = 1$  сек. мы сделаем снимок с экспозицией в несколько десятков секунд, мы снова получим не эллипс, а мазню, но — и в этом существенное отличие от случая некогерентных колебаний — не обладающую центральной симметрией. Лишь при  $\varepsilon = \pm \pi/2$  картина обладает центральной симметрией. Линии равной освещенности совпадают с теми эллипсами, которые получаются при малоинерционном наблюдении.

Как и в п. 2, можно осуществить инерционное наблюдение также непосредственно глазом, если наблюдать колебания с более быстрой хаотической модуляцией.

## § 7. Суперпозиция линейно-поляризованных волн

1. Суперпозиция волн, излучаемых независимыми источниками. Вернемся к модели источника света, рассмотренной в § 5. Предположим, что имеется два таких источника (рис. 440), притом точечных, а точка наблюдения  $P$  лежит в плоскости, перпендикулярной к направлению

колебания электронов. В этой плоскости волны, излучаемые источниками, описываются согласно § 5, п. 5 формулами вида

$$E_1 = \frac{B_1 \left( t - \frac{r_1}{c} \right)}{r_1} \cos \left[ \omega t - kr_1 - \varphi_1 \left( t - \frac{r_1}{c} \right) \right],$$

$$E_2 = \frac{B_2 \left( t - \frac{r_2}{c} \right)}{r_2} \cos \left[ \omega t - kr_2 - \varphi_2 \left( t - \frac{r_2}{c} \right) \right],$$

причем  $E_1, E_2$  некогерентны, так как  $B_1, \varphi_1$  изменяются совершенно независимо от  $B_2, \varphi_2$ . Результирующее поле

$$E = E_1 + E_2$$

имеет интенсивность

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(k\Delta + \varphi_1 - \varphi_2), \quad (10.43)$$

где

$$A_1 = \frac{B_1}{r_1}, \quad A_2 = \frac{B_2}{r_2}, \quad \Delta = r_1 - r_2.$$

Освещенность пропорциональна среднему значению  $A^2$  за время, большое по сравнению со средним временем хаотической модуляции, т. е. величине

$$\overline{A^2} = \overline{A_1^2} + \overline{A_2^2}$$

(так как вследствие некогерентности  $E_1, E_2$  среднее значение последнего

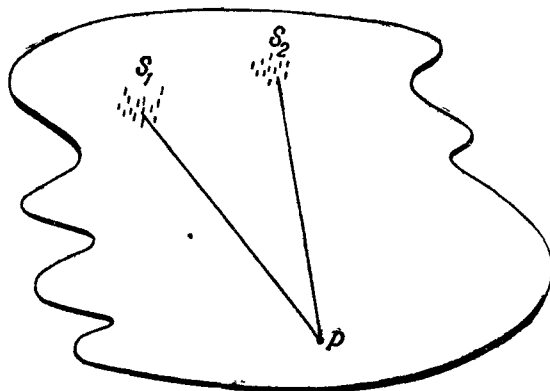


Рис. 440. Схема независимых источников света. Плоскость  $S_1S_2P$  перпендикулярна к направлению колебаний электронов.

члена в выражении для  $A^2$  равно нулю). Словами: освещенность равна всегда сумме освещенностей, создаваемых отдельными источниками. Этот результат уже был получен другим способом (§ 5, п. 1). Его легко обобщить на все пространство.

**2. Интерференция.** Пользуясь моделью источника света, рассмотренной в § 5, построим заново теорию интерференционного опыта Френеля (в гл. V, § 7 мы толковали интерференционную картину как результат суперпозиции синусоидальных волн). Предположим, что источник света — точечный, что электроны в нем колеблются параллельно оси  $x$  и что оба зеркала и экран тоже параллельны оси  $x$  (она нормальна к плоскости рис. 178, а). Нас будет интересовать освещенность в точках экрана, расположенных вблизи плоскости  $x = 0$ , проходящей через источник. При этих условиях электрические поля  $E_1, E_2$  световых волн, отраженных от обоих зеркал, параллельны друг другу и для результирующего поля имеем:

$$E = E_1 + E_2.$$

Волны, отраженные от зеркал, являются с точностью до постоянного множителя в амплитудах (ср. гл. VII, § 8) «зеркальным изображением» в соответствующем зеркале тех волн, которые распространялись бы в его отсутствие. (Зеркала дают одинаковый скачок фазы при отражении.)

Предположим сначала, что в интересующей нас части экрана разность хода  $\Delta$ , т. е. разность оптических путей  $SMP$  и  $SNP$ , всюду мала по сравнению с  $c\tau$ , т. е. длиной цуга (§ 5). Тогда, как мы знаем, колебания  $E_1$ ,  $E_2$  почти когерентны, и мы можем считать приближенно, что

$$E_1 = A_1(t) \cos [\omega t - \varphi(t)],$$

$$E_2 = A_2(t) \cos [\omega t - \varphi(t) - k\Delta],$$

причем  $A_1(t)$ ,  $A_2(t)$  пропорциональны друг другу.

Согласно § 6 среднее значение интенсивности за большое время теперь уже не равно сумме средних интенсивностей, даваемых каждым источником в отдельности, а выражается формулой

$$\overline{A^2} = \overline{A_1^2} + \overline{A_2^2} + 2 \sqrt{\overline{A_1^2}} \sqrt{\overline{A_2^2}} \cos k\Delta.$$

Получается *интерференционная картина* \*)—чередующиеся светлые полосы (там, где  $\Delta = n\lambda$ ,  $n$ —целое) и темные полосы (там, где  $\Delta = (2n - 1)\lambda/2$ ). Полученный результат совпадает с тем, который дает синусоидальная идеализация, если принять для амплитуды синусоидальных волн значения  $\sqrt{\overline{A_1^2}}$ ,  $\sqrt{\overline{A_2^2}}$ .

Увеличим теперь поворотом или смещением одного из зеркал разность хода  $\Delta$  настолько, чтобы она превышала длину цуга  $c\tau$ . Теперь колебания  $E_1$ ,  $E_2$  некогерентны (§ 5), и следовательно, как и в случае независимых источников, во всех точках экрана

$$\overline{A^2} = \overline{A_1^2} + \overline{A_2^2},$$

интерференционных полос не будет, экран будет равномерно освещен. (Разумеется, переход от случая а) к случаю б) будет происходить постепенно.)

Суперпозиция волн, распространяющихся по разным путям от общего источника, типична для всех оптических интерференционных устройств (интерферометров). Для всех интерферометров (например, рис. 441) может быть проведено рассмотрение аналогично только что изложенному. Так же обстоит дело с дифракционными опытами, так как принцип Гюйгенса—Френеля сводит их теорию к теории суперпозиции волн, имеющих общий первичный источник. Выводы, к которым нас привел разбор опыта с зеркалами Френеля, должны быть перенесены, если учитывать хаотическую модуляцию света, на все интерференционные и дифракционные явления: синусоидальная идеализация, которой мы пользовались в предыдущих главах, законна, если разности хода складывающихся волн малы по сравнению с длиной цуга; она перестает быть применимой, когда разность хода сравнима с длиной цуга; всюду, где разность хода превышает длину цуга, происходит—в резком противоречии с синусоидальной идеализацией—простое сложение средних интенсивностей.

Постепенное исчезновение интерференционной картины при увеличении разности хода в интерферометре действительно наблюдается

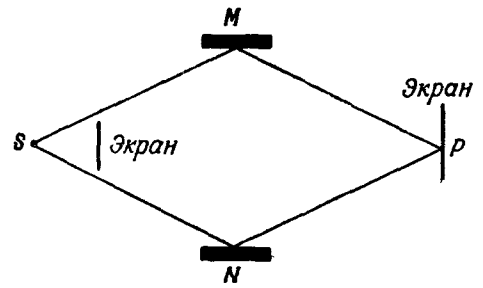


Рис. 441. Простейшая схема интерферометра (экран слева не пропускает в P света, идущего непосредственно от источника).

\*) Общее определение термина «интерференция» будет дано в § 9.

на опыте. На этом основан один из методов измерения длины цуга в оптике. Картина, даваемая дифракционной решеткой, совпадает с вычисленной в гл. IX, § 3 лишь в том случае, если разность хода  $D \sin \theta$  между колебаниями, приходящими в точку наблюдения от краев решетки, мала по сравнению с длиной цуга.

Данная здесь теория интерференции света еще не является полной: она не учитывает, что свет может не быть линейно-поляризованным, а размеры источника обычно больше длины волны. После того как мы выясним природу естественного света, мы сможем дать теорию интерференции, свободную от первого ограничения. Затем мы снимем и второе ограничение.

**3. Принципиальный предел дальности в радиоинтерферометрии.** Разумеется, сказанное в п. 2 может быть перенесено на радиоинтерферометрию (гл. VII, § 6). Здесь длина цуга определяется средним временем хаотической модуляции в передатчике. Если измеряемое расстояние достигнет величин порядка длины цуга, фигура Лиссажу на экране будет беспорядочно менять свою форму вследствие отсутствия когерентности между колебаниями, приходящими из обоих пунктов, и измерение

расстояния станет невозможным. Согласно данным, приведенным в § 4, длина цуга, обусловленная флуктуациями, измеряется световыми часами, т. е. порядка размеров солнечной системы. Поэтому указанный здесь предел дальности не имеет пока практического значения.

**4. Акустическая иллюстрация.** Все сказанное в пп. 1, 2 непосредственно переносится на суперпозицию скалярных волн, испускаемых точечными источниками. Пусть, например, мы наблюдаем суперпозицию звуковой волны, излучаемой камертоном, и ее эха—волны, отраженной от стены (рис. 442). Пусть камертон возбуждается ударами молоточка, следующими друг за другом через время  $\tau$ . Фаза его колебания беспорядочно меняется от удара к удару. Пока разность хода  $(SM + MP) - SP$  между звуками, приходящими по обоим путям, будет мала по

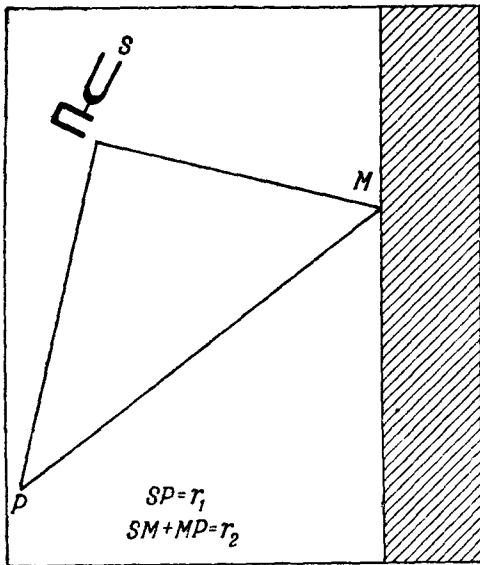


Рис. 442. Суперпозиция звука, приходящего непосредственно от источника  $S$ , и эха, распространяющегося по пути  $SMP$ .

сравнению с  $u\tau$  ( $u$ —скорость звука), обе волны будут когерентны, и суммарная средняя интенсивность может отличаться от суммы средних интенсивностей «прямого звука» и «эха». Если  $(SM + MP) - SP < u\tau$ , эхо будет некогерентно с «прямым звуком» и будет происходить сложение средних интенсивностей.

## § 8. Естественный и поляризованный свет

**1. Естественный свет.** Усовершенствовав немного модель § 5, мы легко сможем понять природу естественного света.

Вместо того, чтобы считать, что все оптические электроны колеблются в источнике света параллельно определенному направлению, примем, что одна треть колеблется параллельно оси  $x$ , одна треть—параллельно оси  $y$ , одна треть—параллельно оси  $z$ . Для каждого из этих классов электронов ( $x$ -электроны,  $y$ -электроны,  $z$ -электроны) мы сделаем те же предположе-



ния, что и в § 5. Тогда свет, излучаемый источником в направлении оси  $z$ , представится в виде суперпозиции  $x$ -волны, испускаемой совокупностью всех  $x$ -электронов, электрическое поле которой  $E_x$  параллельно оси  $x$ , и  $y$ -волны, испускаемой совокупностью всех  $y$ -электронов, электрическое поле которой  $E_y$  параллельно оси  $y$  \*); каждая из этих волн является хаотически модулированной волной того типа, который был описан в § 5.

Примем, что средние интенсивности  $\overline{E_x^2}$ ,  $\overline{E_y^2}$  равны между собой. Вследствие независимости изменения фаз  $x$ -электронов и  $y$ -электронов эти волны *некогерентны* (так же как рассматривавшиеся ранее  $x$ -волны, испускаемые двумя различными источниками).

(Правильнее было бы, конечно, считать, что электроны колеблются по всевозможным направлениям, причем не только амплитуды и фазы, но и *направления* их колебаний меняются со временем. Введение  $x$ -,  $y$ - и  $z$ -электронов было лишь упрощенным описанием реального положения вещей, приводящего к тому, что колебания  $E_x$ ,  $E_y$  некогерентны между собой и имеют одинаковую среднюю интенсивность.)

Нетрудно себе представить на основании § 6, п. 2, как меняется со временем полная напряженность поля  $E$ , излучаемого источником. В каждой точке оси  $z$  конец вектора

$$E = E_x + E_y$$

совершает в плоскости, перпендикулярной к оси  $z$ , движение, аналогичное тому, которое совершает светлая точка на экране осциллоскопа, когда мы подаем на обе пары отклоняющих пластин хаотически модулированные напряжения  $u_1$ ,  $u_2$  от независимых источников. На протяжении интервала времени, малого по сравнению со средним временем модуляции  $\tau$ , траектория конца вектора  $E$  мало отличается от эллипса. Форма, ориентация и размер эллипса беспорядочно меняются со временем. При наблюдении за время, охватывающее много промежутков  $\tau$  (таковы, как уже подчеркивалось, времена наблюдения во всех существующих в настоящее время реальных оптических опытах), *свет обладает вследствие смены громадного числа эллипсов всевозможных форм и ориентаций осевой симметрией*. В этом и состоит разгадка природы естественного света \*\*).

На основании (7.30) общий поток энергии равен в каждый момент сумме потоков энергии, соответствующих отдельно взятым  $x$ -волне и  $y$ -волне; он пропорционален

$$E^2 = E_x^2 + E_y^2,$$

причем

$$\overline{E^2} = \overline{E_x^2} + \overline{E_y^2}, \quad (10.44)$$

$$\overline{\overline{E^2}} = \overline{\overline{E_x^2}} + \overline{\overline{E_y^2}};$$

кроме того, здесь вследствие равенства  $\overline{\overline{E_x^2}}$  и  $\overline{\overline{E_y^2}}$

$$\overline{\overline{E^2}} = 2\overline{\overline{E_x^2}} = 2\overline{\overline{E_y^2}},$$

т. е. поток энергии в естественном свете равен удвоенному потоку энергии в отдельно взятой его  $x$ -волне или  $y$ -волне.

\*) Электроны, колеблющиеся параллельно оси  $z$ , ничего не излучают в направлении этой оси, согласно сказанному в гл. VII, § 7.

\*\*\*) Речь идет о монохроматическом (почти синусоидальном) естественном свете (белый естественный свет еще сложнее).

**2. Поляризованный свет.** Естественный свет мы описали как суперпозицию некогерентных  $x$ -волны и  $y$ -волны. Представим себе теперь суперпозицию когерентных  $x$ -волны и  $y$ -волны: в каждой точке оси  $z$  вектор  $\mathbf{E}$  имеет компоненты

$$\begin{aligned} E_x &= A(t) \cos [\omega t - \varphi(t)], \\ E_y &= B(t) \cos [\omega t - \psi(t)], \end{aligned} \quad (10.45)$$

причем

$$\varphi(t) - \psi(t) = \varepsilon, \quad (10.45a)$$

где  $\varepsilon$  — постоянная; и, кроме того,

$$\begin{aligned} A(t) &= a C(t), \\ B(t) &= b C(t), \end{aligned} \quad (10.45b)$$

где  $a, b$  — постоянные, т. е. амплитуды  $x$ - и  $y$ -компоненты поля находятся в постоянном отношении.

На основании § 6, п. 2 мы можем сразу сказать, какую траекторию описывает конец вектора  $\mathbf{E}$ . Эта траектория — эллиптическая спираль, которую можно рассматривать как последовательность подобных и одинаково ориентированных эллипсов, у которых меняется (и притом беспорядочно) лишь абсолютный размер, характеризуемый переменной величиной  $C(t)$ : фаза движения по эллипсам также беспорядочно меняется. Траектория конца вектора  $\mathbf{E}$  напоминает здесь траекторию светящейся точки на экране осциллографа в опыте, к которому относится рис. 432.

В гл. VII, § 9, говоря о поляризованном (эллиптически, линейно, циркулярно) свете, мы исходили из синусоидальной идеализации, т. е. считали  $C(t), \varphi(t), \psi(t)$  постоянными. В действительности же эти величины — хаотически меняющиеся функции времени, и реальному поляризованному свету соответствует та картина, которая была только что нарисована: *поляризованный свет может быть описан как суперпозиция когерентных  $x$ - и  $y$ -волны.* В частности, когда сдвиг фаз между ними равен 0 или  $\pi$  и сменяющиеся эллипсы, по которым движется конец вектора  $\mathbf{E}$ , вырождаются в прямые отрезки постоянного направления, но переменной длины, мы имеем дело с линейно-поляризованным светом, а когда  $\varepsilon = \pi/2$  или  $3\pi/2$  и сменяющиеся эллипсы превращаются в окружности, — с циркулярно-поляризованным светом.

Равенства (10.44) остаются в силе и для поляризованного света. Но здесь, вообще говоря,

$$\overline{E_x^2} \neq \overline{E_y^2}.$$

На основании (10.45), (10.45b)

$$\overline{E_y^2} : \overline{E_x^2} = b^2 : a^2.$$

В частности, для линейно-поляризованного света отношение  $b/a$  равно  $\operatorname{tg} \gamma$ , где  $\gamma$  — угол между направлением колебаний вектора  $\mathbf{E}$  и осью  $x$ , откуда

$$\frac{\overline{E_y^2}}{\overline{E_x^2}} = \operatorname{tg}^2 \gamma.$$

Для света, поляризованного по кругу ( $a = \pm b$ ), имеем:

$$\overline{E_x^2} = \overline{E_y^2}.$$

Мы будем называть поляризованным всякое векторное колебание, в котором амплитуды и фазы составляющих удовлетворяют условиям (10.45а), (10.45б).

При том содержании, которое мы вкладываем теперь в понятие «поляризованное колебание», синусоидальность изменения компонент вектора является достаточным, но не необходимым условием того, чтобы колебание было поляризованным. Как мы подчеркивали, строго синусоидальных колебаний не бывает. Благодаря расширению (по сравнению с гл. II, § 2) содержания понятия «поляризованные колебания» мы имеем право говорить о *реальных* (в смысле отказа от синусоидальной идеализации) поляризованных электромагнитных волнах.

**3. Получение поляризованного света.** Мы познакомимся в дальнейшем со случаями, когда источник света излучает суперпозицию поляризованных колебаний различной (несущей) частоты. В таких случаях поляризованный свет может быть выделен из излучения источника с помощью спектрального прибора (гл. XI, § 4).

Здесь речь будет идти об опытах, где происходит превращение естественного света в линейно-поляризованный с помощью поляризатора и линейно-поляризованного в эллиптически-поляризованный с помощью кристаллической пластинки. Такого рода эксперименты могут быть истолкованы непосредственно на основе сказанного в гл. VII, § 9, если принять, что коэффициенты отражения, прохождения и поглощения  $x$ - и  $y$ -волны практически такие же, как если бы эти волны были синусоидальными.

а) **Получение линейно-поляризованного света.** Вернемся к нашему первому опыту с поляроидом (гл. V, § 7). В гл. VII, § 9 говорилось, что поляроид пропускает *синусоидальную* волну, о которой вектор  $E$  параллелен некоторому направлению  $x$ , жестко связанному с поляроидом, и не пропускает *синусоидальную* волну, в которой вектор  $E$  перпендикулярен к этому направлению. Согласно только что сказанному это остается справедливым, если заменить слово «синусоидальную» словами *хаотически модулированную*. Но естественный свет является суперпозицией двух таких хаотически модулированных волн (направления осей  $x$  и  $y$  могут быть выбраны произвольно в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения. Следовательно, из поляроида выходит только первая из этих хаотически модулированных волн—линейно-поляризованная  $x$ -волна.

При повороте поляроида в своей плоскости вместе с ним поворачивается и направление вектора  $E_x$  выходящего из него света. Интенсивность выходящего света при этом не меняется. Она равна, если отвлечься от потерь на отражение и считать поляроид абсолютно прозрачным для пропускаемой им компоненты  $E_x$ , половине интенсивности падающего на него естественного света.

Таким же образом может быть объяснено выделение линейно-поляризованного света из естественного с помощью зеркала, освещаемого под углом Брюстера, с помощью николя (см. курс оптики) и т. д.

б) **Получение эллиптически-поляризованного света.** Вернемся к опыту, к которому относится рис. 319. Представим входящий в пластинку линейно-поляризованный свет как суперпозицию  $x$ -волны и  $y$ -волны, причем ось  $x$  параллельна оптической оси пластинки.

У входа в пластинку имеем:

$$E_x = aC(t) \cos [\omega t - \varphi(t)], \quad E_y = bC(t) \cos [\omega t - \varphi(t)],$$

причем

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \gamma.$$

Обозначим  $E'_x(t)$ ,  $E'_y(t)$  значения  $E_x$ ,  $E_y$  у выхода из пластинки в момент  $t$ .

Учитывая для  $x$ - и  $y$ -волны отличие их групповых скоростей от фазовых (т. е. наличие дисперсии), имеем:

$$E'_x = aC \left( t - \frac{h}{U_x} \right) \cos \left[ \omega \left( t - \frac{h}{u_x} \right) - \varphi \left( t - \frac{h}{U_x} \right) \right],$$

$$E'_y = bC \left( t - \frac{h}{U_y} \right) \cos \left[ \omega \left( t - \frac{h}{u_y} \right) - \varphi \left( t - \frac{h}{U_y} \right) \right],$$

где  $h$  — толщина пластинки, или

$$E'_x = aC \left( t - \frac{h}{U_x} \right) \cos \left[ \omega t - k_x h - \varphi \left( t - \frac{h}{U_x} \right) \right],$$

$$E'_y = bC \left( t - \frac{h}{U_y} \right) \cos \left[ \omega t - k_y h - \varphi \left( t - \frac{h}{U_y} \right) \right].$$

Амплитуды  $x$ - и  $y$ -волн у выхода из пластинки совпадают со значениями, которые имели соответствующие амплитуды у входа в *различные* моменты  $t - h/U_x$ ,  $t - h/U_y$ . То же самое относится к фазам.

Пусть сначала толщина пластинки настолько мала («тонкая пластинка»), что разность

$$\frac{h}{U_x} - \frac{h}{U_y}$$

запаздываний, испытываемых группами  $x$ - и  $y$ -волн, в пластинке мала (по абсолютной величине) по сравнению с  $\tau$ . Тогда величины  $C(t - h/U_x)$ ,  $C(t - h/U_y)$ , с одной стороны,  $\varphi(t - h/U_x)$ ,  $\varphi(t - h/U_y)$ , — с другой, мало отличаются между собой, и мы можем написать приближенно:

$$E'_x = aC'(t) \cos [\omega t - k_x h - \varphi'(t)],$$

$$E'_y = bC'(t) \cos [\omega t - k_y h - \varphi'(t)],$$

где  $C'(t)$ ,  $\varphi'(t)$  — приближенные общие значения величин  $C(t - h/U_x)$ ,  $C(t - h/U_y)$  и  $\varphi(t - h/U_x)$ ,  $\varphi(t - h/U_y)$ . Эти колебания являются *когерентными*. Между ними существует сдвиг фаз  $\varepsilon = (k_x - k_y)h$ , вообще говоря, отличный от целого кратного  $\pi$ . Следовательно, свет, выходящий из пластинки, является *эллиптически-поляризованным*. Случай линейно-поляризованного света соответствует  $\varepsilon = n\pi$  ( $n$  — целое), света, поляризованного по кругу,  $\varepsilon = (2n - 1)\pi/2$  ( $n$  — целое, пластинка в четверть волны) и  $\text{tg } \gamma = \pm 1$ . Здесь нет ничего нового по сравнению с тем, что дает синусоидальная идеализация.

Пусть теперь толщина  $h$  настолько велика («толстая пластинка»), что разность запаздываний групп превышает  $\tau$ . Величины  $C(t - h/U_x)$ ,  $\varphi(t - h/U_x)$ , с одной стороны, и  $C(t - h/U_y)$ ,  $\varphi(t - h/U_y)$ , — с другой, соответствуют *различным цугам* (группам) падающей на пластинку волны. Фазы  $\varphi(t - h/U_x)$ ,  $\varphi(t - h/U_y)$  теперь статистически независимы, колебания по выходе из пластинки *некогерентны*. Следовательно, пластинка превращает линейно-поляризованный свет в *естественный*, если  $a = b$  (так как при этом  $\overline{E_x^2} = \overline{E_y^2}$ ), а если  $|a - b| = c$ , — в суперпозицию естественного света с линейно-поляризованным, имеющим среднюю интенсивность  $c^2 C^2(t)$  и направление колебаний  $x$  при  $a > b$  и  $y$  при  $b > a$ . Мы получили результат, в корне отличный от того, к которому приводит синусоидальная идеализация (ср. гл. VII).

Нетрудно убедиться аналогичным образом, что толстая пластинка превращает свет, поляризованный по кругу, в *естественный*, а эллиптически-поляризованный (вообще говоря) в суперпозицию естественного и линейно-поляризованного.

## § 9. Общее рассмотрение суперпозиции электромагнитных волн

1. **Определение и общее условие интерференции.** Пусть в некоторой части пространства имеет место суперпозиция двух электромагнитных волн произвольного вида (не обязательно близких к синусоидальным), характеризуемых полями  $\mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{E}_2$ . Результирующее поле

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2.$$

Нас будет интересовать его средний квадрат за достаточно *большое* время (время усреднения применяемой аппаратуры)

$$\overline{E^2} = \overline{(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)^2} = \overline{E_1^2} + \overline{E_2^2} + 2\overline{\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2}. \quad (10.46)$$

Мы будем говорить, что в рассматриваемой части пространства:

а) *интерференции нет*, если всюду

$$\overline{E^2} = \overline{E_1^2} + \overline{E_2^2}, \quad (10.47)$$

т. е. средний квадрат результирующего поля равен сумме средних квадратов полей  $\mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{E}_2$ , или, иначе говоря, если имеет место суперпозиция средних интенсивностей (освещенностей в случае видимого света);

б) *имеет место интерференция*, если существуют места, где

$$\overline{E^2} \neq \overline{E_1^2} + \overline{E_2^2}, \quad (10.48)$$

т. е. не имеет места суперпозиция средних интенсивностей (освещенностей).

Отсюда видно, что интерференция в рассматриваемой части пространства имеет место тогда и только тогда, когда в ней существуют места, где

$$\overline{\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2} \neq 0. \quad (10.49)$$

Таково *необходимое и достаточное условие интерференции*. Ясно, что интерференции не может быть, если во всей рассматриваемой части пространства векторы  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{E}_2$  в каждый момент времени перпендикулярны друг к другу, так как в этом случае скалярное произведение

$$\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 = 0.$$

(Это будет, например, в случае, если  $\mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{E}_2$  — волны, линейно-поляризованные во взаимно перпендикулярных направлениях.)

Выделим в рассматриваемой части пространства область настолько малую, что обе волны в ней можно считать плоскими. Введем две декартовы системы координат  $x_1, y_1, z_1$  и  $x_2, y_2, z_2$  с общим началом, с совпадающими осями  $y_1, y_2$  и с осями  $z_1, z_2$ , параллельными направлениям распространения соответственно волны  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{E}_2$  (рис. 443). Имеем:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{x_1} + \mathbf{E}_{y_1}, \quad \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{x_2} + \mathbf{E}_{y_2}, \quad (10.50)$$

где вектор  $\mathbf{E}_{x_1}$  параллелен оси  $x_1$  и т. д. Подставляя (10.50) в (10.49) и принимая во внимание, что

$$\mathbf{E}_{x_1} \mathbf{E}_{y_2} = \mathbf{E}_{y_1} \mathbf{E}_{x_2} = 0,$$

получаем необходимое и достаточное условие интерференции в виде

$$\overline{(\mathbf{E}_{x_1} \mathbf{E}_{x_2})} = \overline{(\mathbf{E}_{y_1} \mathbf{E}_{y_2})} \neq 0 \quad (10.51)$$

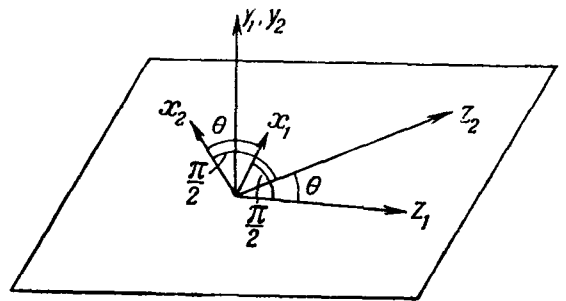


Рис. 443. К выводу условия интерференции.

или, введя угол  $\theta$  между направлениями распространения наших волн,

$$\overline{E_{x1}E_{x2}} \cos \theta + \overline{E_{y1}E_{y2}} \neq 0. \quad (10.51a)$$

Это неравенство показывает, что интерференции не может быть, если всюду

$$\overline{E_{x1}E_{x2}} = 0, \quad \overline{E_{y1}E_{y2}} = 0. \quad (10.52)$$

Итак, достаточными условиями отсутствия интерференции являются: а) перпендикулярность полей  $E_1$ ,  $E_2$ ; б) выполнение обоих равенств (10.52). Отсюда следующее необходимое условие интерференции: для того чтобы имела место интерференция, поля  $E_1$  и  $E_2$  не должны быть всюду перпендикулярны друг к другу и не должно всюду иметь место хотя бы одно из равенств (10.52).

Анализ явлений становится особенно наглядным, если представить  $E$  в виде

$$E = E_x + E_y,$$

где

$$E_x = E_{x1} + E_{x2}, \quad E_y = E_{y1} + E_{y2}.$$

Ввиду перпендикулярности  $E_x$ ,  $E_y$  имеем:

$$E^2 = E_x^2 + E_y^2,$$

откуда

$$\overline{E^2} = \overline{E_x^2} + \overline{E_y^2}, \quad (10.53)$$

причем

$$\overline{E_x^2} = \overline{E_{x1}^2} + \overline{E_{x2}^2} + 2\overline{E_{x1}E_{x2}} \cos \theta,$$

$$\overline{E_y^2} = \overline{E_{y1}^2} + \overline{E_{y2}^2} + 2\overline{E_{y1}E_{y2}}.$$

Формула (10.53) показывает, что интерференционная картина, т. е. распределение освещенности  $\overline{E^2}$  (мы имеем в виду оптику), может рассматриваться как суперпозиция  $x$ -картины (освещенность  $\overline{E_x^2}$ ) и  $y$ -картины (освещенность  $\overline{E_y^2}$ );  $x$ -картина является результатом суперпозиции  $x$ -волн  $E_{x1}$ ,  $E_{x2}$ ;  $y$ -картина является результатом суперпозиции  $y$ -волн  $E_{y1}$ ,  $E_{y2}$ . При этом условие интерференции получает следующее толкование.

Для того чтобы имела место интерференция волн  $E_1$ ,  $E_2$ , должна иметь место интерференция обеих составляющих  $x$ -волн:

$$\overline{E_{x1}E_{x2}} \cos \theta \neq 0 \quad (10.54)$$

и (или) интерференция обеих составляющих  $y$ -волн:

$$\overline{E_{y1}E_{y2}} \neq 0 \quad (10.55)$$

и, кроме того, при наложении интерференционных картин от  $x$ -волн и  $y$ -волн не должна происходить компенсация максимумов интенсивности одной картины минимумами интенсивности другой картины. Последнее будет если выполняются условия (10.54) и (10.55), но не выполняется условие (10.51a).

2. Случай волн, близких к синусоидальным (хаотически модулированных). Пусть

$$\begin{aligned} E_{x1} &= A_1 \cos(\omega t - kz_1 - \varphi_1), & E_{x2} &= A_2 \cos(\omega t - kz_2 - \varphi_2), \\ E_{y1} &= B_1 \cos(\omega t - kz_1 - \psi_1), & E_{y2} &= B_2 \cos(\omega t - kz_2 - \psi_2), \end{aligned} \quad (10.56)$$

где  $A_1, B_1, A_2, B_2, \varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2$  медленно (по сравнению с  $2\pi/\omega$ ) и беспорядочно меняются со временем и меняются соответствующим образом от точки к точке в пространстве.

Мы будем называть волны  $E_1, E_2$  когерентными, если  $E_{x1}$  когерентно с  $E_{x2}$  и  $E_{y1}$  когерентно с  $E_{y2}$ ; некогерентными, если  $E_{x1}$  некогерентно с  $E_{x2}$  и  $E_{y1}$  некогерентно с  $E_{y2}$ ; частично когерентными в остальных случаях.

Из (10.51a) видно, что интерференции не может быть, если волны  $E_1, E_2$  некогерентны, так как в этом случае аналогично (10.30) имеем:

$$\overline{E_{x1}E_{x2}} = \overline{2A_1A_2 \cos[k(z_1 - z_2) + \varphi_1 - \varphi_2]} = 0$$

и точно так же  $\overline{E_{y1}E_{y2}} = 0$ .

Отсюда следует необходимое условие интерференции: для того чтобы имела место интерференция,  $E_1, E_2$  должны быть перпендикулярны (см. выше) и не некогерентны (т. е. когерентны или частично когерентны).

Пусть волны  $E_1, E_2$  когерентны, т. е.

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) - \varphi_2(t) &= \varepsilon, & \psi_1(t) - \psi_2(t) &= \delta, \\ A_1(t) &= a_1 A_0(t), & B_1(t) &= b_1 B_0(t), \\ A_2(t) &= a_2 A_0(t), & B_2(t) &= b_2 B_0(t), \end{aligned} \quad (10.57)$$

где  $\varepsilon, \delta, a_1, a_2, b_1, b_2$  — постоянные, и пусть (как это чаще всего имеет место в оптических интерференционных опытах) угол  $\theta$  настолько мал, что можно считать  $\cos \theta = 1$ .

В этом случае имеем для  $x$ -картины и  $y$ -картины соответственно

$$\left. \begin{aligned} 2\overline{E_x^2} &= \overline{A_0^2} [a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(k\Delta + \varepsilon)], \\ 2\overline{E_y^2} &= \overline{B_0^2} [b_1^2 + b_2^2 + 2b_1b_2 \cos(k\Delta + \delta)], \end{aligned} \right\} \quad (10.58)$$

где

$$\Delta = z_1 - z_2; \quad (10.59)$$

$x$ -картина представляет собой интерференционную картину (если  $a_1a_2 \neq 0$ ), то же самое можно сказать про  $y$ -картину (если  $b_1b_2 \neq 0$ ). Суперпозиция этих двух интерференционных картин также дает интерференционную картину, за исключением особого случая, когда всюду

$$\overline{A_0^2} a_1 a_2 \cos(k\Delta + \varepsilon) + \overline{B_0^2} b_1 b_2 \cos(k\Delta + \delta) = 0 \quad (10.60)$$

(когерентность и перпендикулярность  $E_1, E_2$  являются необходимым, но не достаточным условием интерференции).

Пусть, в частности, когерентные волны  $E_1, E_2$  представляют собой естественный свет одинаковой интенсивности:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_2 = 1, & b_1 &= b_2 = 1, \\ \overline{A_0^2} &= \overline{B_0^2}, \end{aligned} \quad (10.61)$$

и пусть, кроме того, всюду

$$\varepsilon = \delta, \quad (10.61a)$$

т. е. разность фаз между обеими  $x$ -волнами равна разности фаз между обеими  $y$ -волнами. В этом случае

$$\begin{aligned}\bar{E}_1^2 + \bar{E}_2^2 &= 2\bar{A}_0^2, \\ \bar{E}_x^2 &= \bar{E}_y^2 = \bar{A}_0^2 [1 + \cos(k\Delta + \varepsilon)], \\ \bar{E}^2 &= \bar{E}_x^2 + \bar{E}_y^2 = 2\bar{A}_0^2 [1 + \cos(k\Delta + \varepsilon)] \neq \bar{E}_1^2 + \bar{E}_2^2;\end{aligned}$$

получается интерференционная картина.

Пусть по-прежнему свет — естественный и имеют место равенства (10.61), но

$$\varepsilon = \delta + \pi, \quad (10.616)$$

разность фаз между обеими  $x$ -волнами всюду отличается на  $\pi$  от разности фаз между обеими  $y$ -волнами. В этом случае

$$\begin{aligned}\bar{E}_1^2 + \bar{E}_2^2 &= 2\bar{A}_0^2, \\ \bar{E}_x^2 &= \bar{A}_0^2 [1 + \cos(k\Delta + \varepsilon)], \quad \bar{E}_y^2 = \bar{A}_0^2 [1 - \cos(k\Delta + \varepsilon)],\end{aligned}$$

а следовательно,

$$\bar{E}^2 = \bar{E}_x^2 + \bar{E}_y^2 = 2\bar{A}_0^2 = \bar{E}_1^2 + \bar{E}_2^2.$$

Здесь, несмотря на когерентность и неперпендикулярность  $E_1$ ,  $E_2$ , нет интерференции: интерференционные  $x$ -картина и  $y$ -картина так сдвинуты в пространстве, что максимумы (минимумы) одной в точности компенсируют минимумы (максимумы) другой. При этом, разумеется, выполняется равенство (10.60). Если выполнено условие (10.616), но  $\bar{A}_0^2 a_1 a_2 \neq \bar{B}_0^2 b_1 b_2$ , максимумы и минимумы смещенных друг относительно друга интерференционных  $x$ -картины и  $y$ -картины частично компенсируют друг друга. Интерференционная картина существует, но она менее контрастна, чем та, которую давали бы  $x$ -волны или  $y$ -волны в отдельности.

**3. Обычные интерференционные опыты с естественным светом.** Вернемся к типичной схеме интерференционного опыта (рис. 441), но будем теперь считать, что источник (по-прежнему точечный) дает естественный свет.

Пусть по-прежнему источник и точка наблюдения находятся в плоскости чертежа и зеркала к ней перпендикулярны; нас интересует в этом случае только свет, распространяющийся в плоскости чертежа.

Разложим мысленно естественный свет, испускаемый источником, на две линейно-поляризованные волны:  $x$ -волну, в которой  $E$  лежит в плоскости чертежа (общей плоскости падения на оба зеркала), и  $y$ -волну, в которой вектор  $E$  к ней перпендикулярен. Эти волны между собой некогерентны, но это не имеет здесь никакого значения. Каждая из них порождает отражением от обоих зеркал пару когерентных волн, распространяющихся под малым углом одна к другой. В одной паре векторы  $E$  лежат в плоскости чертежа, в другой — к ней перпендикулярны. Интенсивность всех четырех волн, вообще говоря, различна (ср. гл. VII).

Мы можем применить здесь сказанное в п. 2, понимая под  $E_{x1}$ ,  $E_{x2}$  поля волн, получающихся отражением  $x$ -волны от зеркал 1, 2, и под  $E_{y1}$ ,  $E_{y2}$  — поля волн, получающихся отражением  $y$ -волны от зеркал 1, 2.

*При суперпозиции волн*

$$E_1 = E_{x1} + E_{x2}, \quad E_2 = E_{y1} + E_{y2},$$



отраженных от обоих зеркал, получается (вообще говоря) интерференция. Если отражение всех четырех компонент  $E_{x1}$ ,  $E_{x2}$ ,  $E_{y1}$ ,  $E_{y2}$  происходит с одинаковым скачком фазы (с потерей полуволны, ср. гл. VII, § 8) и с уменьшением амплитуды в приблизительно одинаковом отношении, можно считать, что имеет место случай, к которому относятся формулы (10.61), причем здесь  $\varepsilon = \delta = 0$ :

$$\bar{E}^2 = 2\bar{A}_0^2(1 + \cos k\Delta), \quad (10.62)$$

распределение освещенности — такое же, как если бы происходила суперпозиция двух строго синусоидальных волн, линейно-поляризованных в одинаковом направлении имеющих амплитуды  $\sqrt{2\bar{A}_0^2}$ . Теперь идеализация, которой мы пользовались в гл. V, § 7 оправдана для точечного источника *естественного* света.

Если — что возможно при надлежащем выборе углов падения — отражение одной из четырех компонент  $E_{x1}$ ,  $E_{y1}$ ,  $E_{x2}$ ,  $E_{y2}$  происходит без скачка фазы  $\pi$ , а остальных — со скачком фазы  $\pi$ , имеем:

$$\varepsilon = \delta \pm \pi,$$

вследствие чего контраст между максимумами и минимумами будет слабо выражен. Но мы восстановим резкий контраст, если поместим на пути света поляризатор, ориентированный так, чтобы пропускать только  $x$ -волны или только  $y$ -волны. Мы увидим в первом случае  $x$ -картину, во втором — сдвинутую относительно нее на половину интерференционной полосы  $y$ -картину.

Поучительно разобрать, что получится, если на пути света между источником и одним из зеркал поставить кварцевую пластинку (рис. 444), толщина которой подобрана так, что она поворачивает направление колебаний линейно-поляризованного света на  $90^\circ$ . На первый взгляд может показаться, что пластинка не уничтожит интерференционной картины, так как если в нее входит естественный свет, то выходит из нее «такой же» естественный свет. Это не верно. Пластинка превращает  $x$ -волну в  $y$ -волну и  $y$ -волну в  $x$ -волну. Теперь на экране складываются некогерентные между собой  $x$ -волны и некогерентные между собой  $y$ -волны и *интерференционной картины нет*. То, что каждая  $x$ -волна теперь когерентна с одной из  $y$ -волн, не имеет при этом никакого значения.

4. Интерференционно-поляризационные опыты. В курсах оптики подробно описываются под названием «хроматическая поляризация» красивые интерференционные опыты, общая схема которых дана на рис. 445, г. Двоякопреломляющая пластинка расщепляет пучок света на два пучка, линейно-поляризованных во взаимно перпендикулярных направлениях (ср. гл. VII, § 9). Суперпозиция обоих пучков (на рис. 445 показан случай, когда она осуществляется с помощью линзы) не сопровождается суперпозицией освещенностей — имеет место интерференция, — если по обе стороны двоякопреломляющей пластинки на пути света помещены поляризаторы или эквивалентные им другие поляризационные устройства. (Источник излучает естественный свет.)

Для того чтобы понять, как здесь получается интерференция, начнем со схемы, показанной на рис. 445, а, и будем постепенно ее преобразовывать в схему рис. 445, г. Будем обозначать  $E_1$ ,  $E_2$  электрические поля в пучках, попадающих на экран.

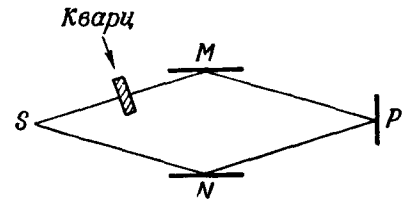


Рис. 444. Схема опыта с кварцевой пластинкой.

Ясно, что в схеме рис. 445, а будет происходить не интерференция, а суперпозиция освещенностей, соответствующих обоим пучкам. Действительно, здесь  $E_1$ ,  $E_2$  взаимно перпендикулярны и некогерентны. (Каждое из этих обстоятельств в отдельности является достаточным условием отсутствия интерференции.)

Поставим между двоякопреломляющей пластинкой и экраном поляроид (рис. 445, в), ось которого образует угол, отличный от прямого, с направлением электрического поля в каждом из пучков, выходящих из пластинки. Из поляроида выходят два пучка, в каждом из которых вектор  $E$  колеблется параллельно оси поляроида:  $E_1$  и  $E_2$  параллельны. Но интерференции не будет и теперь. Действительно, свет, падающий на пластинку — естественный. Взаимно перпендикулярные компоненты его электрического поля, порождающие в пластинке две волны, идущие по разным направлениям, некогерентны и, следовательно, также некогерентны компоненты последних, выделяемые поляроидом, т. е.  $E_1$ ,  $E_2$ .

Но интерференция *будет*, если свет, входящий в пластинку, — поляризованный. Мы этого достигаем, помещая между источником света и пластинкой еще один поляроид (рис. 445, г); теперь линейно-поляризованные волны, выходящие из пластинки, когерентны между собой, а их компоненты, выделяемые первым поляроидом, т. е.  $E_1$ ,  $E_2$ , когерентны и параллельны.

Если убрать поляроид, находившийся между кристаллической пластинкой и экраном (рис. 445, б), мы получим на экране суперпозицию взаимно перпендикулярных когерентных колебаний. При этом на экране произойдет суперпозиция освещенностей (снова нет интерференции).

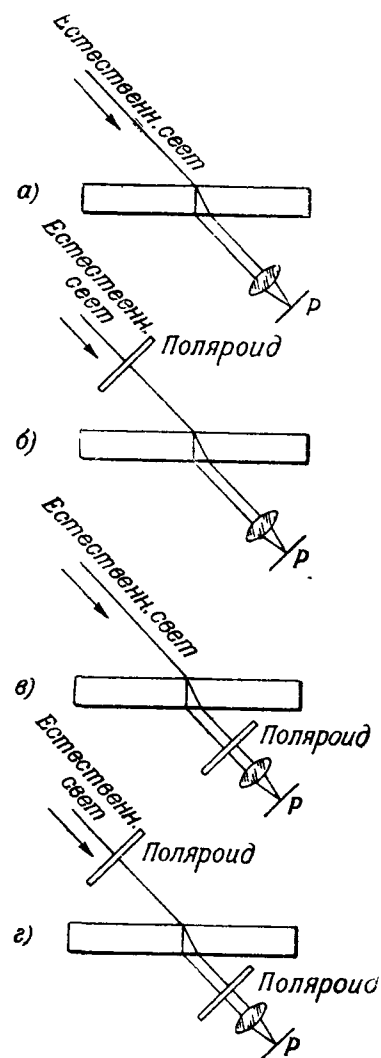
Явления хроматической поляризации получают в опыте рис. 445, г, если источник посылает

белый естественный свет. Получается суперпозиция картины соответствующих различным составляющим его спектра (ср. гл. XI).

Содержание п. 4 может быть представлено следующей таблицей:

Опыт рис. 445	Имеет ли место интерференция?	Потому что $E_1$ и $E_2$		Свет на экране является
		перпендикулярны	некогерентны	
а	нет	перпендикулярны	некогерентны	естественным
б	нет	перпендикулярны		поляризованным (вообще говоря, эллиптически)
в	нет	некогерентны		линейно-поляризованным
г	да	когерентны и параллельны		линейно-поляризованным

Рис. 445. Пучки, сводимые в Р, интерферируют только в случае г.



## § 10. Интерференционные и дифракционные явления в случае протяженных источников

**1. Предварительные замечания.** Рассматривая в предыдущем параграфе этой главы интерференционные и дифракционные явления, мы отказались от синусоидальной идеализации волн, посылаемых *точечным* источником, и построили теорию, свободную от этой идеализации. (Эта теория, в частности, указывает пределы применимости синусоидальной идеализации.) Но для полного понимания интерференционных и дифракционных явлений этого мало. Мы почти никогда не имеем дела с точечным источником в смысле определения, данного в § 5 (т. е. с источником, линейные размеры которого малы по сравнению с длиной волны). Необходимо построить теорию интерференционных и дифракционных опытов для *протяженных* источников (размеры которых не малы по сравнению с длиной волны). Одна из задач этой теории — показать, в каких случаях можно идеализировать реальный (протяженный) источник как точечный.

Будем рассматривать протяженный источник света как совокупность большого числа независимых точечных источников. Колебания, посылаемые каждым точечным источником по различным направлениям, *когерентны* между собой (пока разность хода мала по сравнению с длиной цуга, что мы

будем всюду предполагать в этом параграфе), и, сводя их вместе с помощью того или иного оптического устройства, мы получаем интерференционную картину. Зато колебания, посылаемые различными выделенными нами точечными источниками, *некогерентны*. Поэтому при суперпозиции интерференционных картин, даваемых отдельными точечными источниками, происходит простое сложение освещенностей.

При этом в зависимости от геометрических условий задачи возможны различные случаи. В одних случаях возникает интерференционная картина, отличающаяся только большей освещенностью от картины, которую давал бы один из точечных источников. В других случаях происходит полное «замазывание» интерференционной картины. Возможны, наконец, промежуточные случаи.

Все это легко будет понять, рассматривая простейшую схему интерферометра (рис. 446).

**2. Интерферометр с протяженным источником.** Мы будем считать, что источником является «светящаяся щель», перпендикулярная к плоскости чертежа, или совокупность двух таких «светящихся щелей». Под светящейся щелью мы понимаем щель с параллельными краями, прорезанную в непрозрачном экране, расположенную около протяженного источника света (как на рис. 404), или щель, на которую фокусируется, например, с помощью линзы свет, испускаемый протяженным источником. В первом случае щель пропускает свет от определенной части некогерентных точеч-

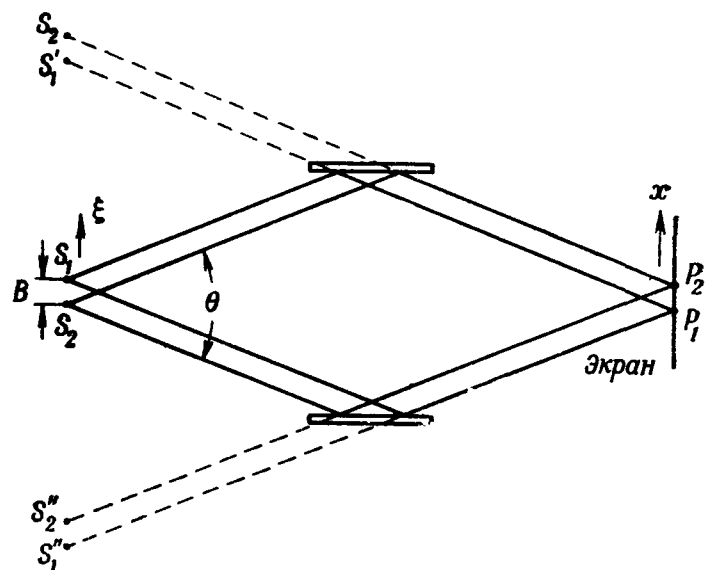


Рис. 446. Схематизированный интерферометр  $P_1, P_2$ —точки нулевой разности хода для света, излучаемого источниками  $S_1, S_2$ .

ных источников, из которых состоит протяженный источник. Во втором случае заполняющие щель изображения отдельных точек источника можно рассматривать как некогерентные вторичные источники. В обоих случаях на экране справа происходит суперпозиция освещенностей интерференционных картин, создаваемых отдельными точками щели.

а) Источник: одна узкая светящаяся щель. Пусть ширина щели мала по сравнению с  $\lambda$ . Такую щель можно рассматривать как совокупность точечных источников, равномерно покрывающих отрезок прямой, перпендикулярный к плоскости чертежа. Каждый точечный источник дает распределение освещенности, описываемое рис. 178 б, в. Геометрически очевидно, что в пределах небольшого экрана, перпендикулярного к плоскости чертежа,

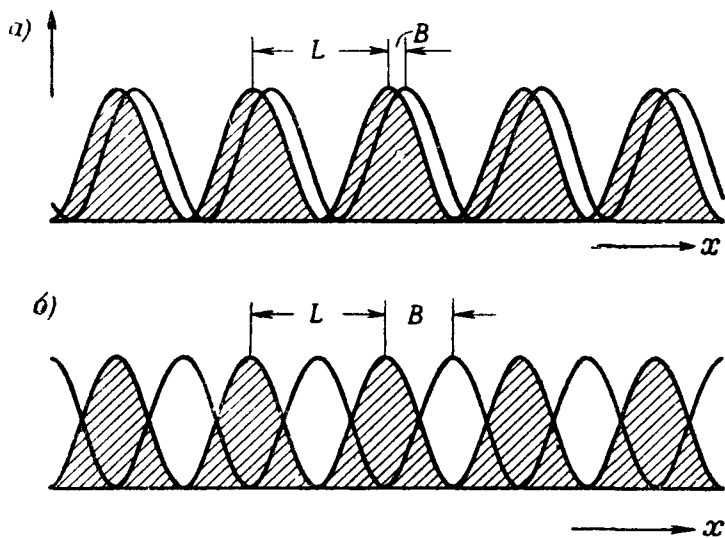


Рис. 447. Распределение освещенности от двух узких щелей: а)  $B \ll L$ , б)  $B = L/2$  ( $B$ —расстояние между щелями,  $L$ —расстояние между соседними максимумами от одной щели).

б) Источник: две узкие параллельные светящиеся щели. Пусть теперь источник состоит из двух одинаковых параллельных узких щелей (ширины  $\ll \lambda$ ), перпендикулярных к плоскости чертежа (рис. 446; следы этих щелей обозначены  $S_1, S_2$ ). Из расположения изображения щелей ( $S'_1, S'_2; S''_1, S''_2$ ) геометрически ясно, что системы интерференционных полос, создаваемые обеими щелями, сдвинуты одна относительно другой на расстояние, равное расстоянию  $B$  между щелями. Если это расстояние мало по сравнению с расстоянием  $L$  между серединами соседних интерференционных полос от одной щели (рис. 447, а), мы получим почти такое же относительное распределение освещенности на экране, как от *одной* щели, причем абсолютная освещенность будет всюду вдвое больше. Если  $B$  равно  $L/2$ , минимумы от одной щели лягут на максимумы от другой и экран будет равномерно освещен, интерференционной картины не будет (рис. 447, б). Если  $B$  равно  $L$ , будет такая же картина, как при  $B = 0$ , и т. д.

Перейдем от графического рассмотрения к аналитическому. Общая освещенность  $I$  в точке экрана, имеющей координату  $x$  (ось  $x$ —пересечение плоскости экрана с плоскостью рис. 446), выражается формулой

$$I = I_1 \left[ 1 + \cos \frac{2\pi x}{L} \right] + I_2 \left[ 1 + \cos \frac{2\pi (x-B)}{L} \right], \quad (10.63)$$

где первый член есть освещенность, создаваемая щелью  $S_1$ , второй — освещенность, создаваемая щелью  $S_2$ , или, если освещенности, создаваемые

лярного к плоскости чертежа, следы гиперboloидов равных разностей хода, соответствующих различным точкам щели, почти в точности накладываются друг на друга. Таким образом, различные точки щели дадут на экране практически одинаковое распределение освещенности. Следовательно, общее распределение освещенности будет отличаться от того, которое давала бы отдельная точка щели, только на постоянный множитель, пропорциональный длине щели. Чем длиннее щель, тем ярче интерференционная картина.

обеими щелями в отдельности, одинаковы, т. е.  $I_1 = I_2$ ,

$$I = 2I_1 \left[ 1 + \cos \frac{\pi B}{L} \cos \frac{2\pi (x - B/2)}{L} \right].$$

Освещенность в различных точках экрана изменяется при данном  $B/L$  от

$$I_{\max} = 2I_1 \left[ 1 + \left| \cos \frac{\pi B}{L} \right| \right] \quad (10.63a)$$

до

$$I_{\min} = 2I_1 \left[ 1 - \left| \cos \frac{\pi B}{L} \right| \right]. \quad (10.63b)$$

Отношение

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad (10.64)$$

называется *видимостью* интерференционной картины. Оно показывает, насколько силен контраст между максимумами и минимумами освещенности.

В данном случае, подставив (10.63a), (10.63b) в (10.64), имеем:

$$V = \left| \cos \frac{\pi B}{L} \right|. \quad (10.65)$$

Видимость является здесь периодической функцией отношения  $B/L$  (рис. 448); она обращается в нуль при  $B = L/2, 3L/2, \dots$

в) Источник: широкая светящаяся щель. Пусть, наконец, источник света — одна светящаяся щель произвольной ширины  $B$ . Мы будем считать ее состоящей из очень большого числа расположенных рядом «светящихся полосок» ширины  $d\xi \ll \lambda$ . Здесь из расположения изображений светящихся полосок ясно, что системы интерференционных полос, создаваемые отдельными светящимися полосками, сдвинуты одна относительно другой на расстояние, равное расстоянию между светящимися полосками.

Освещенность, создаваемая в точке наблюдения  $P$  полоской ширины  $d\xi$ , находящейся на расстоянии  $\xi$  от середины щели, описывается выражением

$$\frac{1}{2} I_0 d\xi \left[ 1 + \cos \frac{2\pi (x - \xi)}{L} \right],$$

где

$$\frac{1}{2} I_0 d\xi$$

— средняя интенсивность каждого из колебаний, посылаемых этой полоской в точку наблюдения,  $x = P_0P$ ,  $P_0$  — основание перпендикуляра, опущенного на экран из середины щели. Общая освещенность в точке  $P$

$$I = I_0 \int_{-\frac{B}{2}}^{+\frac{B}{2}} \left[ 1 + \cos \frac{2\pi (x - \xi)}{L} \right] d\xi.$$

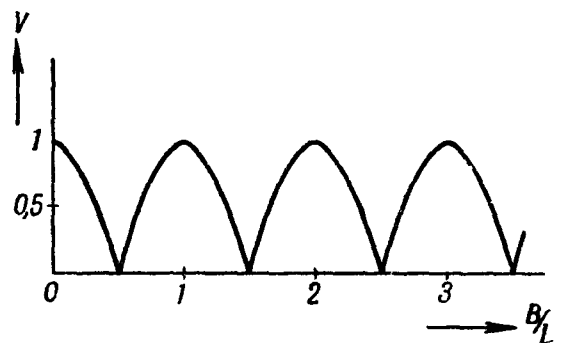


Рис. 448. Зависимость видимости интерференционной картины от  $B/L$  (источник света: две узкие щели.  $B$  — расстояние между щелями).

Стоящий в правой части интеграл равен

$$B + \frac{L}{2\pi} \left[ \sin \frac{2\pi}{L} \left( x - \frac{B}{L} \right) - \sin \frac{2\pi}{L} \left( x + \frac{B}{L} \right) \right] = B + \frac{L}{\pi} \sin \frac{\pi B}{L} \cos \frac{2\pi x}{L},$$

что дает для общей освещенности выражение

$$I = I_0 B \left[ 1 + \frac{L}{\pi B} \sin \frac{\pi B}{L} \cos \frac{2\pi x}{L} \right]. \quad (10.66)$$

Освещенность изменяется в зависимости от  $x$  в пределах от

$$I_{\max} = I_0 B \left[ 1 + \frac{L}{\pi B} \left| \sin \frac{\pi B}{L} \right| \right] \quad (10.66a)$$

до

$$I_{\min} = I_0 B \left[ 1 - \frac{L}{\pi B} \left| \sin \frac{\pi B}{L} \right| \right]. \quad (10.66b)$$

Подставляя (10.66a), (10.66b) в (10.64), получаем для видимости интерференционной картины формулу

$$V = \frac{L}{\pi B} \left| \sin \frac{\pi B}{L} \right|. \quad (10.67)$$

Зависимость видимости от отношения  $B/L$  показана на рис. 449.

Пока  $B \ll L$ , видимость практически равна единице, как если бы источник был точечный, при  $B = L$  видимость исчезает; с дальнейшим ростом  $B$  она возрастает до значения, равного приблизительно  $1/\pi$ , затем спадает, при  $B = 2L$  снова исчезает и т. д. При  $B \gg L$  видимость практически равна нулю.

Аналогичные расчеты могут быть сделаны для протяженного источника произвольной формы. В случае светящегося диска (Солнце, круглое отверстие в экране, на которое фокусируется свет от электрической дуги, и т. п.) расчет показывает, что кривая видимости имеет такой же качественный

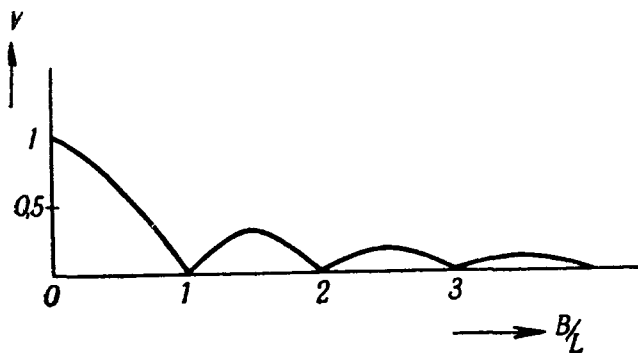


Рис. 449. Зависимость видимости интерференционной картины от  $B/L$  (источник света: щель ширины  $B$ ).

характер, что и на рис. 449, причем при увеличении диаметра диска  $B$  видимость обращается в первый раз в нуль при

$$B = 1,22 L.$$

Здесь также при  $B \gg L$  видимость практически равна нулю.

**3. Замечание об опыте Френеля с зеркалами.** Предоставляем читателю перенести рассмотрение п. 2 на опыт Френеля с зеркалами, где источником света служит щель, параллельная ребру между зеркалами (ср. § 12, п. 2). Отметим лишь, что теперь получает оправдание кажущаяся непоследовательность рассуждения в гл. V, § 7 (суперпозиция с учетом разности фаз колебаний, идущих по двум путям от каждого элемента щели; сложение освещенностей от отдельных элементов щели).

**4. Оптическое изображение протяженного источника. Разрешающая сила объектива.** В гл. IX рассматривалось оптическое изображение *точечного* источника. Если источник — протяженный (например, Солнце, звезда), изображение является суперпозицией освещенностей, создаваемых отдельными (некогерентными) точечными источниками, из которых со-

стоит протяженный источник. Если расстояние между центрами дифракционных пятен, соответствующих точкам различных частей источника, велико по сравнению с размерами этих пятен (как, например, в случае рис. 450, а), форма изображения будет определяться формой источника и будет приблизительно подобна проекции источника на плоскость изображения. В этом случае говорят, что объектив *разрешает* отдельные части источника. Если же расстояние между центрами дифракционных пятен, соответствующих крайним точкам источника, мало по сравнению с размерами этих пятен (как, например, в случае рис. 450, б), форма изображения практически не зависит от формы источника и целиком определяется самим объективом. Изображение отличается только большей освещенностью от того, которое давала бы отдельная точка источника. В этом случае говорят: объектив *не разрешает* отдельные части источника.

Рассмотрим совокупность двух независимых точечных источников. Пусть расстояние между ними таково, что первое темное кольцо дифракционной картины от одного точечного источника проходит через центр дифракционной картины от другого точечного источника (рис. 451, б). В этом случае говорят: точечные источники находятся *на границе разрешения*; если точечные источники ближе (рис. 451, а), считают, что они не разрешены, если они дальше (рис. 451, в), — что они разрешены. Если точечные источники находятся на конечном расстоянии от объектива (изображение — за фокальной плоскостью, например, в микроскопе), разрешающую силу характеризуют расстоянием между ними  $l_0$ , при котором имеет место граница разрешения: разрешающая сила тем больше, чем меньше это расстояние.

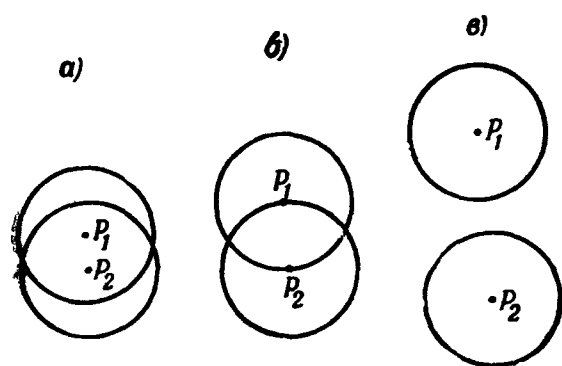


Рис. 451.  $P_1, P_2$  — центры дифракционных картин, создаваемых двумя точечными источниками, окруженности — первые темные кольца. а — источники не разрешены; б — граница разрешения; в — источники разрешены.

ская трактовка разрешающей силы, основанная на условном рэлеевском критерии. Как указано на стр. 522, «то, что считается в оптике границей разрешения, соответствует приблизительно возможностям непосредственного визуального наблюдения» и, следовательно, «... здесь отнюдь не утверждается принципиальная невозможность распознать» два точечных источника в случаях, подобных показанному на рис. 451, а.

В вопросе о разрешающей силе речь идет о контрастности (видимости) некоторой дифракционной или интерференционной картины, которая при сколь угодно близких, но не совпадающих источниках все же отличается от той, какую дал бы один точечный источник. Дело сводится, таким образом, к чувствительно-

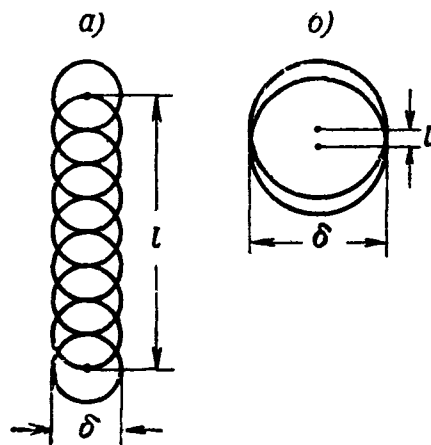


Рис. 450. Дифракционные пятна, соответствующие различным точкам источника, имеющего вид узкой светящейся щели. Расстояние  $l$  между центрами дифракционных пятен от концов щели: а — велико, б — мало по сравнению с диаметром  $\delta$  — дифракционного пятна.

разрешающую силу характеризуют расстоянием между ними  $l_0$ , при котором имеет место граница разрешения: разрешающая сила тем больше, чем меньше это расстояние. Если точечные источники можно считать находящимися в бесконечности (изображение — в фокальной плоскости, например в телескопе), разрешающую силу характеризуют углом  $\phi$ , под которым виден отрезок  $S_1S_2$  из центра объектива, когда имеет место граница разрешения: разрешающая сила тем больше, чем меньше этот угол.

[Здесь, как и ниже (§ 12, пп. 5 и 6; гл. XI, § 5) дается обычная классическая

сти тех устройств, которые анализируют распределение интенсивности в наблюдаемой картине. Если при грубом (визуальном, фотографическом) наблюдении картина, изображенная на рис. 451, а, неотличима от одного кружка, то это не значит, что при более тонком ее фотометрировании имеющееся отличие не сможет быть обнаружено. В настоящее время существуют гораздо более совершенные методы наблюдения оптических изображений, основанные на модуляции световых потоков, превращении колебаний интенсивности света в электрические колебания с помощью фотозлемента или фотоумножителя и на применении радиоаппаратуры для последующего анализа этих электрических колебаний. Идея аналогичных методов, но связанных с модуляцией фазы, была выдвинута Г. С. Гореликом, см. Доклады АН СССР 83, стр. 549 и 553 (1952) и журнал Измерительная техника, № 3, стр. 10 (1955). Предел разрешения при применении таких методов ставится не каким-либо практически удобным, но произвольным соглашением, а чувствительностью устройств, т. е. в конечном счете флуктуациями в аппаратуре (§ 3 и 4).]

Нетрудно на основании гл. IX, § 6, выразить разрешающую силу объектива через характеризующие его геометрические параметры.

а) Источники на конечном расстоянии. Согласно гл. IX, § 6 радиус первого темного кольца дифракционной картины, являющейся изображением точки, лежащей на оптической оси, равен приблизительно  $\lambda/(2 \sin \alpha)$ .

Следовательно, граница разрешения соответствует приблизительно

$$l = \frac{\lambda}{2 \sin \alpha}, \quad (10.68)$$

где  $l$  — расстояние между центрами  $P_1, P_2$  дифракционных картин, являющихся изображением точек  $S_1$  и  $S_2$ . Но  $P_2$  есть точка, куда приходят в одинаковой фазе все вторичные волны, порожденные первичной волной, излучаемой точечным источником  $S_2$ . Поэтому

$$S_2M + MP_2 = S_2N + NP_2.$$

Подставим сюда соотношения

$$MP_2 = MP_1 - l \sin \alpha, \quad NP_2 = NP_1 + l \sin \alpha,$$

равносильные (9.30), и аналогичные соотношения (рис. 452)

$$MS_2 = MS_1 + l_0 \sin \alpha_0, \quad NS_2 = NS_1 - l_0 \sin \alpha_0,$$

где  $l_0$  — расстояние  $S_1S_2$ ,  $\alpha_0$  — угол, под которым виден радиус объектива из  $S_1$ . (Угол  $2\alpha_0$  называется *отверстным* углом или *апертурой* объектива.) Эти соотношения легко получить для  $l_0 \ll MS_1 = NS_1$ , рассматривая рис. 452. Из последних пяти уравнений, учитывая, что  $MP_1 = NP_1$ , получаем:

$$l_0 \sin \alpha_0 = l \sin \alpha \quad (10.69)$$

(так называемое «условие синусов», которому удовлетворяет «идеальный объектив»). Подставляя (10.69) в (10.68), получаем для границы разрешения приближенное равенство

$$l_0 = \frac{\lambda}{2 \sin \alpha_0}. \quad (10.70)$$

Точный расчет (ср. гл. IX) дает для границы разрешения

$$l_0 = 0,61 \frac{\lambda}{\sin \alpha_0}. \quad (10.70a)$$

Таково наименьшее расстояние, которое может «разрешить» наш объектив. Так как  $\sin \alpha_0 \leq 1$ , имеем

$$l_0 \geq 0,61 \lambda. \quad (10.71)$$



Итак, разрешающая сила тем больше (граница разрешения соответствует тем меньшему расстоянию  $l_0$ ), чем меньше длина волны и чем больше апертурный угол объектива. При  $\alpha_0$ , близком к  $90^\circ$ , граница разрешения соответствует расстоянию порядка длины волны (точнее,  $0,61 \lambda$ ).

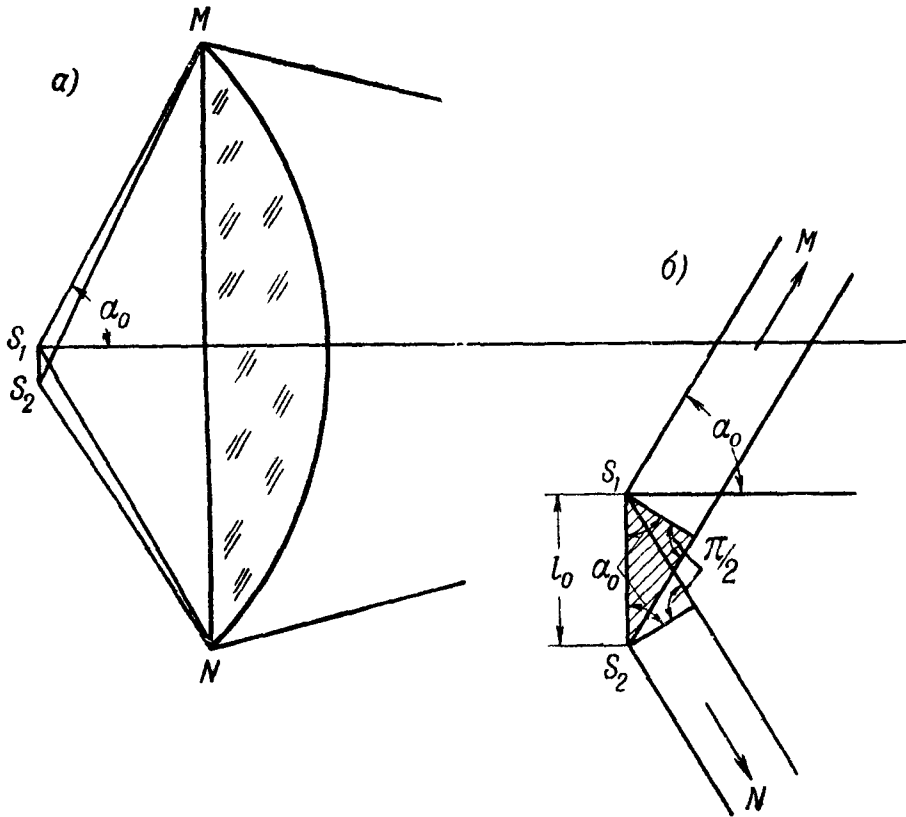


Рис. 452. К вычислению разрешающей силы объектива. Источники—на конечном расстоянии.

К вопросу о разрешающей силе микроскопа мы еще вернемся в § 12. б) Источники в бесконечности. Из рис. 453 видно, если вспомнить сказанное в гл. IX (§ 9, п. 5 и § 11), что граница разре-

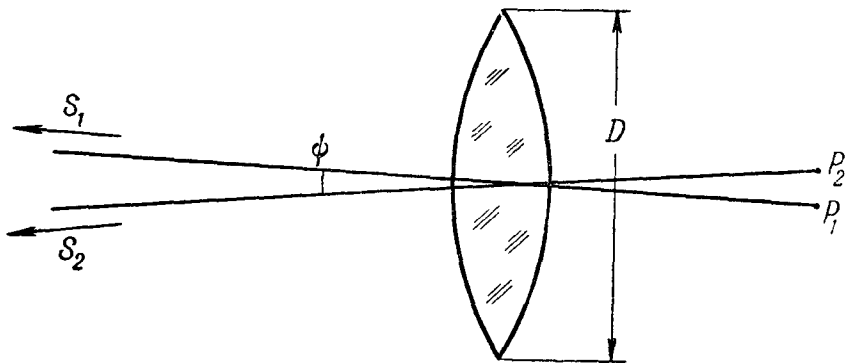


Рис. 453. К вычислению разрешающей силы объектива. Источники—в бесконечности.

шения соответствует углу  $\phi$  между направлениями источников  $s_1, s_2$  такими, что

$$\sin \phi = 1,22 \frac{\lambda}{D} \tag{10.72}$$

( $D$  — диаметр объектива).

Разрешающая сила тем больше, чем больше отношение диаметра объектива к длине волны. Сравнивая (10.72) с (9.47), мы видим, что разре-

шающая сила тем больше, чем острее направленность (на расстоянии  $r \gg D^2/\lambda$ ) пучка, который излучал бы объектив, если бы в его фокусе был помещен точечный источник.

Заметим, что для всего сказанного выше существенна некогерентность точечных источников  $S_1, S_2$ . Если  $S_1, S_2$  — малые (по сравнению с длиной волны) отверстия в непрозрачном экране, освещаемом *точечным* источником  $S$  (рис. 454), выходящие из них волны когерентны. Вместо сложения освещенностей, которые существовали бы при наличии только отверстия  $S_1$  или только отверстия  $S_2$ , возникает сложная интерференционная картина. Например, через точку  $Q$ , где разность фаз колебаний, приходящих из  $S_1, S_2$ , равна  $\pi$ , при наличии обоих отверстий будет проходить темная интерференционная полоса.

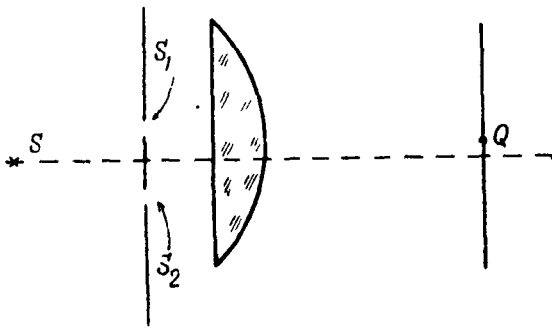


Рис. 454.  $S_1, S_2$  — когерентные вторичные источники.

**5. Дифракция от края экрана в случае протяженного источника. Тень и полутень.** Вернемся к дифракции от края экрана, рассмотренной в гл. IX, § 7. Пусть источник — светящийся диск, лежащий в плоскости, параллельной дифрагирующему экрану; пусть центр диска  $S$  находится на перпендикуляре к плоскости экрана  $E_1$ , проходящем через точку  $O$  его края; пусть расстояние от центра диска до экрана настолько велико, что излучаемая им волна может рассматриваться в плоскости экрана как плоская (рис. 455). Пусть диаметр диска виден из точки  $O$  под углом  $\psi$ . Дифракционные картины, создаваемые на экране  $E_2$  отдельными точечными источниками, расположенными на диаметре светящегося диска, перпендикулярном к краю экрана, смещены одна относительно другой в направлении, перпендикулярном к дифракционным полосам. Крайние картины смещены одна относительно другой на расстояние  $AB = 2z \operatorname{tg}(\psi/2)$ . Если расстояние  $z$  от  $O$  до экрана  $E_2$  мало по сравнению с расстоянием  $\sqrt{z\lambda}$  между соседними дифракционными полосами (т. е. шириной первой полосы Френеля), т. е. если

$$2 \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} \ll \sqrt{\frac{\lambda}{z}}, \quad (10.73)$$

то будет наблюдаться практически такая же дифракционная картина (но большей освещенности), как если бы излучал только точечный источник, находящийся в  $S$ . Если имеет место обратное неравенство

$$2 \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} \gg \sqrt{\frac{\lambda}{z}}, \quad (10.74)$$

происходит полное замазывание дифракционной картины. Наблюдается равномерная освещенность в области правее  $A$ , практически полная темнота (*тень*) в области левее  $B$  и монотонное спадание освещенности между ними (*полутень*).

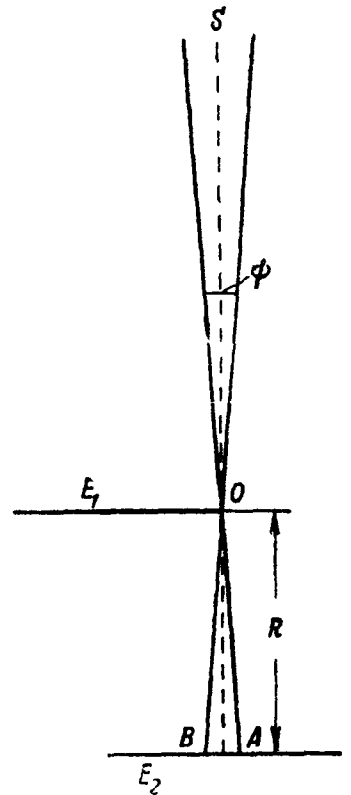


Рис. 455. К исследованию дифракции от края экрана в случае протяженного источника.

Если источником является Солнце, имеем приближенно:

$$\psi = 30' = 0,01, \quad 2 \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} = \psi;$$

для наблюдения отчетливых оптических ( $\lambda$  порядка  $5 \cdot 10^{-5}$  см) дифракционных полос  $z$  должно быть не больше, чем порядка 1 мм. При этом расстояние между полосами порядка 0,01 мм. Таким образом, Солнце не годится в качестве источника для визуального наблюдения дифракции от края экрана.

Дифракционные полосы, создаваемые различными точками источника, расположенными на одной и той же прямой, параллельной краю экрана, в точности совпадают. Поэтому размер источника в направлении, параллельном краю экрана, не влияет на четкость дифракционной картины. Оценки (10.73), (10.74) применимы и для светящейся щели, параллельной краю экрана, поперечный размер которой виден из  $O$  под углом  $\psi$ .

## § 11. Вопросы когерентности в случае протяженных источников

1. Два точечных источника. Мы называем протяженным всякий источник волн, отличный от точечного (в смысле определения, данного в § 5). Совокупность двух точечных источников — простейший случай протяженного источника.

Пусть одинаковые независимые точечные источники  $S_1, S_2$  и точки наблюдения  $P_1, P_2$  расположены в плоскости чертежа (рис. 456). Пусть источники испускают линейно-поляризованный свет, в котором вектор  $E$  перпендикулярен к плоскости чертежа (модель § 7). Все дальнейшее легко обобщается на случай источников естественного света \*).

Пусть  $E_{11}, E_{12}$  — напряженности поля, создаваемые источником  $S_1$  соответственно в точках  $P_1, P_2$ ; пусть  $E_{21}, E_{22}$  — напряженности поля, создаваемые в тех же точках источником  $S_2$ . Результирующие напряженности поля  $E_1, E_2$  в точках  $P_1, P_2$  равны соответственно

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= E_{11} + E_{21}, \\ E_2 &= E_{12} + E_{22}. \end{aligned} \right\} \quad (10.75)$$

Пусть разности хода

$$\Delta_1 = r_{12} - r_{11}, \quad \Delta_2 = r_{22} - r_{21} \quad (10.76)$$

малы (по абсолютной величине) по сравнению с длиной пути источников. В этом случае можно считать, что колебания  $E_{11}, E_{12}$  когерентны, причем их разность фаз равна  $k\Delta_1$ , и что колебания  $E_{21}, E_{22}$  также когерентны, причем их разность фаз равна  $k\Delta_2$ . (Само собой разумеется, колебания  $E_{11}, E_{21}$  некогерентны, колебания  $E_{12}, E_{22}$  также некогерентны.) Спрашивается: когерентны ли колебания  $E_1, E_2$ ?

Для простоты будем считать, что разность хода  $\Delta_1, \Delta_2$  мала (по абсолютной величине) также по сравнению с расстояниями  $r_{11}, r_{12}, r_{21}, r_{22}$ .

\*) Нужно рассматривать свет, испускаемый каждым источником, как суперпозицию некогерентных волн, в одной из которых вектор  $E$  перпендикулярен к плоскости чертежа, в другой — лежит в плоскости чертежа. Выводимые ниже условия когерентности и некогерентности при этом остаются в силе.

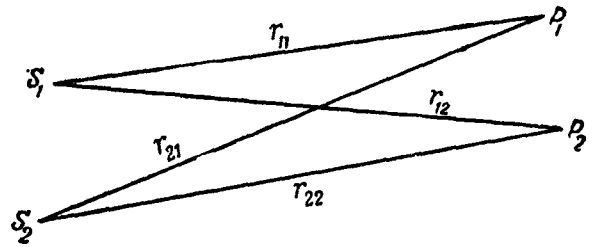


Рис. 456. Точечные источники  $S_1, S_2$  и точки наблюдения  $P_1, P_2$ .

В этом случае можно считать приближенно, что амплитуды колебаний  $E_{11}$ ,  $E_{12}$  не только пропорциональны, но равны друг другу; то же самое относится к колебаниям  $E_{21}$ ,  $E_{22}$ . Итак,

$$\begin{aligned} E_{11} &= A_1(t) \cos [\omega t - \varphi_1(t)], \\ E_{12} &= A_1(t) \cos [\omega t - \varphi_1(t) - k\Delta_1], \\ E_{21} &= A_2(t) \cos [\omega t - \varphi_2(t)], \\ E_{22} &= A_2(t) \cos [\omega t - \varphi_2(t) - k\Delta_2] \end{aligned}$$

Рассмотрим два частных случая:

а) Разность разностей хода  $\Delta_1 - \Delta_2$  — целое кратное длины волны:

$$\Delta_1 - \Delta_2 = \pm n\lambda \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (10.77)$$

откуда

$$k(\Delta_1 - \Delta_2) = \pm 2n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (10.77a)$$

Этот случай, в частности, имеет место (причем  $n = 0$ ), если расстояние  $S_1 S_2$  мало по сравнению с длиной волны (точечный источник).

Векторная диаграмма колебаний  $E_1, E_2$  имеет, например, вид, показанный на рис. 457. (Речь идет о векторной диаграмме, описывающей колебания  $E_1, E_2$  на протяжении времени, малого по сравнению со средним временем хаотической модуляции  $\tau$ .) Из векторной диаграммы сразу видно, что  $E_1, E_2$  всегда имеют равные амплитуды и постоянный сдвиг фаз, равный  $k\Delta_1$  (или, что в данном случае тоже,  $k\Delta_2$ ); колебания в точках  $P_1, P_2$  когерентны. В частности, если  $S_1 S_2 \ll \lambda$ , а также если  $\Delta_1$  есть целое кратное  $\lambda$ , колебания  $E_1, E_2$  синфазны.

б) Разность разностей хода  $\Delta_1 - \Delta_2$  — нечетное кратное половины длины волны:

$$\Delta_1 - \Delta_2 = (\pm 2n + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (10.78)$$

откуда

$$k(\Delta_1 - \Delta_2) = (\pm 2n + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (10.78a)$$

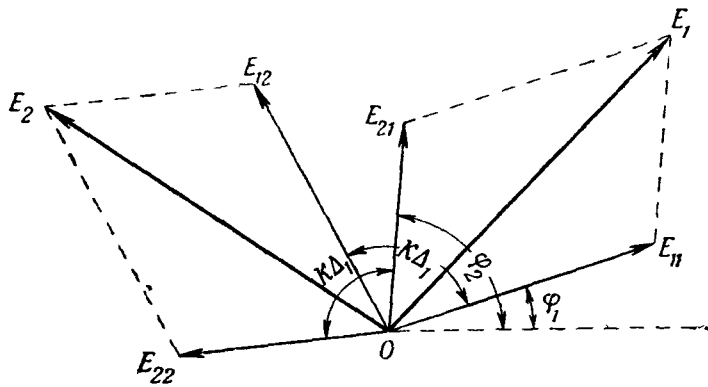


Рис. 457. Векторная диаграмма колебаний  $E_1, E_2$  в случае, когда  $k\Delta_1$  отличается от  $k\Delta_2$  на целое кратное  $2\pi$ .

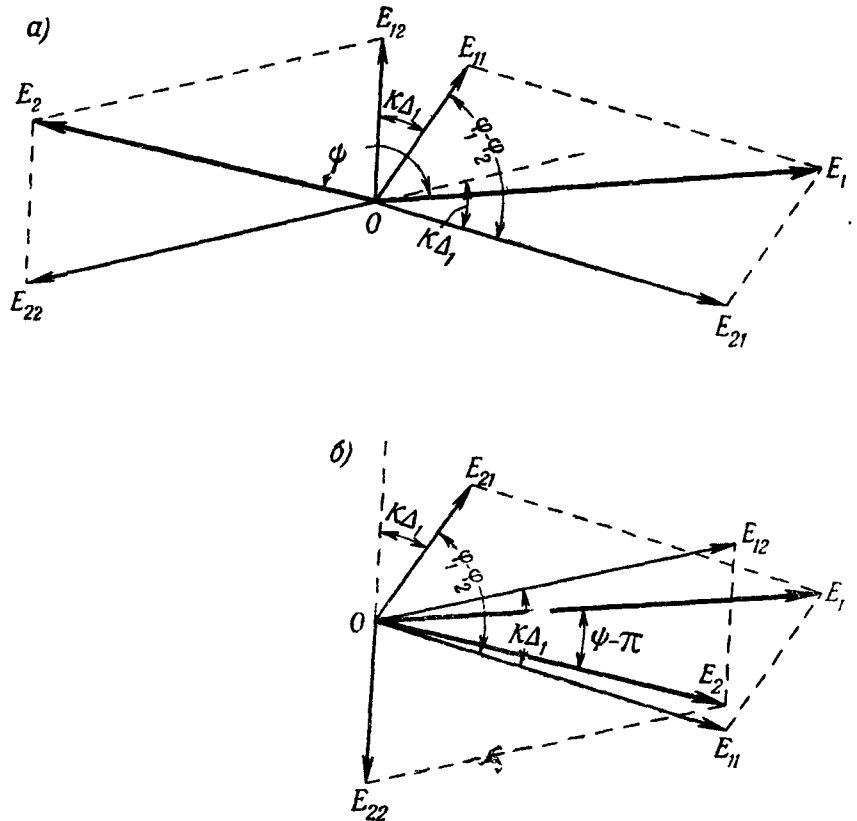


Рис. 458. Векторная диаграмма колебаний  $E_1, E_2$  в случае, когда  $k\Delta_1$  отличается от  $k\Delta_2$  на нечетное кратное  $\pi$ . Случай а и б имеют одинаковую вероятность.

Здесь векторная диаграмма колебаний  $E_1, E_2$  имеет, например, вид, показанный на рис. 458, *a*. При этом разность фаз колебаний  $E_1, E_2$  имеет некоторое значение  $\psi$ , а отношение амплитуд колебаний — некоторое значение  $h$ , причем  $\psi$  и  $h$  зависят от  $\varphi_1 - \varphi_2$  и  $A_1/A_2$ .

Но векторная диаграмма может также иметь вид, показанный на рис. 458, *б* (амплитуды  $A_1, A_2$  — такие же, как  $A_2, A_1$  на рис. 458, *a*, разность фаз  $\varphi_1 - \varphi_2$  — такая же по абсолютной величине, как на рис. 458, *a*, но имеет противоположный знак). Из сравнения рис. 458, *a* и *б* легко увидеть, что отношение амплитуд колебаний  $E_1, E_2$  в случае рис. 458, *б* снова равно  $h$ , а их разность фаз равна  $\psi - \pi$ .

На протяжении времени, большого по сравнению с  $\tau$ , случаи, показанные на рис. 458, *a* и *б*, будут вследствие некогерентности  $E_{11}, E_{21}$  встречаться одинаково часто. Разность фаз между  $E_1, E_2$  будет принимать одинаково часто значения  $\psi$  и  $\psi - \pi$ . Мы приходим к выводу, что колебания в точках  $P_1, P_2$  некогерентны.

Очевидно, если не выполнены ни условие (10.77), ни условие (10.78), колебания  $E_1, E_2$  частично когерентны.

**2. Цепочка из точечных источников.** Рассмотрим теперь  $N$  одинаковых независимых точечных источников  $S_1, S_2, \dots, S_N$ , расположенных вдоль прямолинейного отрезка (рис. 459). Поля в точках наблюдения  $P_1, P_2$  равны соответственно

$$\begin{aligned} E_1 &= E_{11} + E_{21} + \dots + E_{N1}, \\ E_2 &= E_{12} + E_{22} + \dots + E_{N2}, \end{aligned} \quad (10.79)$$

где  $E_{i1}, E_{i2}$  — поля, создаваемые в точках  $P_1, P_2$  точечным источником номера  $i$ . (Мы по-прежнему считаем, что поля, создаваемые источниками, перпендикулярны к плоскости чертежа.)

Введем обозначение

$$\Delta_i = r_{i2} - r_{i1} \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (10.80)$$

где  $r_{i1}, r_{i2}$  — расстояния до точек  $P_1, P_2$  от точечного источника номера  $i$ .

Пусть все  $|\Delta_i|$  малы по сравнению с  $r_{i1}, r_{i2}$ , а также по сравнению с длиной цуга наших источников. Мы можем написать в этом случае

$$\begin{aligned} E_{i1} &= A_i(t) \cos[\omega t - \varphi_i(t)], \\ E_{i2} &= A_i(t) \cos[\omega t - \varphi_i(t) - k\Delta_i] \end{aligned} \quad (10.81)$$

Предположим для простоты, что источники  $S_1, S_2, \dots, S_N$  расположены так, что разность хода  $\Delta_i$  образует арифметическую прогрессию

$$\Delta_i = \Delta_1 + (i - 1)h,$$

где  $h$  — постоянная. Разность разностей хода для крайних источников будет:

$$\delta = \Delta_N - \Delta_1 = (N - 1)h.$$

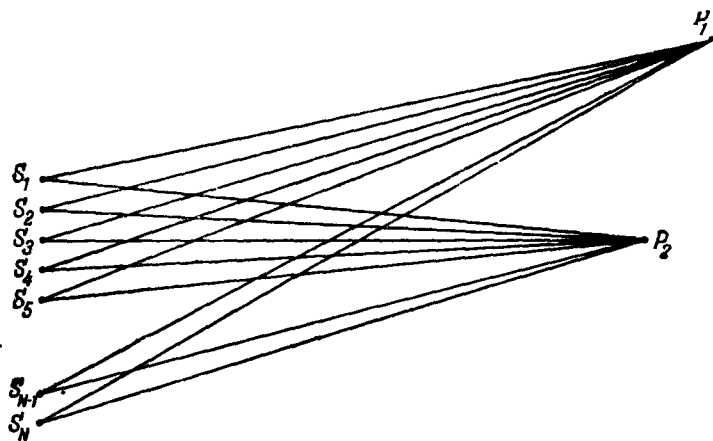


Рис. 459. Цепочка из точечных источников.

Рассмотрим несколько характерных случаев.

а)  $|\delta|$  мало по сравнению с длиной волны. При этом все разности разностей хода  $\Delta_i - \Delta_1$  малы по абсолютной величине по сравнению с длиной волны, и мы можем без заметной погрешности положить в (10.81)

$$\Delta_i = \Delta_1 \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

$$E_{i2} = A_i(t) \cos[\omega t - \varphi_i(t) - k\Delta_1].$$

Таким образом, все составляющие колебания  $E_2$  отличаются от соответствующих составляющих колебания  $E_1$  только одинаковым сдвигом фазы  $k\Delta_1$ . Следовательно, результирующее колебание  $E_2$  имеет ту же амплитуду, что и  $E_1$ , и имеет по отношению к  $E_1$  постоянный сдвиг фазы  $k\Delta_1$ . Колебания  $E_1, E_2$  когерентны. В частности, если  $\Delta_1$  мало по сравнению с длиной волны, они приблизительно синфазны.

б)  $|\delta|$  равно длине волны. Считая для простоты  $N$  четным, перепишем формулы (10.79) в таком виде:

$$E_1 = \left( E_{11} + E_{\frac{N}{2}+1, 1} \right) + \left( E_{21} + E_{\frac{N}{2}+2, 1} \right) + \dots + \left( E_{\frac{N}{2}, 1} + E_{N, 1} \right), \quad (10.82)$$

$$E_2 = \left( E_{12} + E_{\frac{N}{2}+1, 2} \right) + \left( E_{22} + E_{\frac{N}{2}+2, 2} \right) + \dots + \left( E_{\frac{N}{2}, 2} + E_{N, 2} \right). \quad (10.83)$$

Иначе говоря, мы представляем колебания  $E_1, E_2$  как суперпозицию колебаний от пар источников  $\left( S_1, S_{\frac{N}{2}+1} \right), \left( S_2, S_{\frac{N}{2}+2} \right), \dots, \left( S_{\frac{N}{2}}, S_N \right)$ .

Рассмотрим колебания, создаваемые в точках  $P_1, P_2$  одной из этих пар, скажем  $S_i, S_{\frac{N}{2}+i}$ :

$$E_{i1} + E_{\frac{N}{2}+i, 1} = A_i \cos(\omega t - \varphi_i) + A_{\frac{N}{2}+i} \cos\left(\omega t - \varphi_{\frac{N}{2}+i}\right),$$

$$E_{i2} + E_{\frac{N}{2}+i, 2} = A_i \cos(\omega t - \varphi_i - k\Delta_i) + A_{\frac{N}{2}+i} \cos\left(\omega t - \varphi_{\frac{N}{2}+i} - k\Delta_{\frac{N}{2}+i}\right).$$

При этом

$$\Delta_{\frac{N}{2}+i} - \Delta_i = \frac{\delta}{2}$$

или, так как по предположению  $|\delta|$  равно длине волны,

$$\left| \Delta_{\frac{N}{2}+i} - \Delta_i \right| = \frac{\lambda}{2}$$

Следовательно, на основании п. 1 рассматриваемые колебания некогерентны. Колебания, приходящие в точки  $P_1, P_2$  от различных пар источников, разумеется, также некогерентны (вследствие независимости источников). Таким образом, каждое слагаемое суммы (10.82) некогерентно каждому слагаемому суммы (10.83). Отсюда следует, что и суммарные колебания некогерентны.

в)  $|\delta|$  немного больше длины волны. Выделим среди наших  $N$  источников  $N_0$  источников, для которых справедливо сказанное выше:

$$|\delta_0| = |\Delta_{N_0} - \Delta_1| = \lambda.$$

Разность разностей хода от  $(N_0 + 1)$ -го и  $N$ -го источника, т. е.  $\delta - \delta_0$ , мала по условию (по абсолютной величине) по сравнению с длиной волны. Следовательно, совокупность источников номера  $N_0 + 1, N_0 + 2, \dots, N$  посылает в точки  $P_1, P_2$  практически когерентные колебания.

Итак, суммарные колебания  $E_1, E_2$  состоят из некогерентных между собой колебаний, посылаемых совокупностью источников номера

1, 2, ...,  $N_0$ , и когерентных колебаний, посылаемых совокупностью источников номера  $N_0 + 1, N_0 + 2, \dots, N$ . Колебания в  $E_1, E_2$ , таким образом, *частично когерентны*.

г) Д а л ь н е й ш е е у в е л и ч е н и е  $|\delta|$ . Пусть при фиксированных  $N_0$  и  $h$  растет  $N$ . Колебания, посылаемые в  $P_1, P_2$  совокупностью источников номера  $N_0 + 1, N_0 + 2, \dots, N$ , будут становиться все менее когерентными и при  $N = 2N_0$  ( $|\delta| = 2\lambda$ ) станут полностью некогерентными (на том же основании, что и колебания, создаваемые совокупностью источников номера 1, 2, ...,  $N_0$ ). При дальнейшем увеличении  $N$  и  $|\delta|$  появится новый когерентный добавок (на том же основании, что и при  $|\delta|$ , немного больше, чем  $\lambda$ ) и т. д.

Общая картина такова.

При  $|\delta| \ll \lambda$  колебания  $E_1, E_2$  практически когерентны. С ростом  $|\delta|$  когерентность портится, и при  $|\delta| = \lambda$  колебания  $E_1, E_2$  становятся полностью некогерентными. Они полностью некогерентны также при  $|\delta| = 2\lambda, 3\lambda, \dots$  и частично когерентны при  $n\lambda < |\delta| < (n + 1)\lambda$  ( $n$  — целое). Однако при больших  $n$  когерентный добавок к некогерентному колебанию, создаваемому частью цепочки, для которой разность крайних разностей хода равна  $n\lambda$ , относительно незначителен и колебания  $E_1, E_2$  практически *некогерентны*.

Таким образом, можно считать, что при

$$|\delta| \ll \lambda \tag{10.84a}$$

имеет место когерентность при

$$|\delta| = n\lambda \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \tag{10.84б}$$

и при

$$|\delta| \gg \lambda \tag{10.84в}$$

— полная некогерентность колебаний  $E_1, E_2$ .

Подчеркнем, что рассматриваемая здесь некогерентность вследствие протяженности источника не имеет ничего общего с некогерентностью вследствие большой разности хода (§ 5). Здесь в критерий когерентности входит разность разностей хода и длина волны, там — разность хода и длина цуга.

**3. Некоторые геометрические соотношения.** Пусть рассмотренные в п. 2 цепочка источников и точки наблюдения  $P_1, P_2$  расположены симметрично по отношению к прямой  $OP_0$  (рис. 460).

Пусть  $P_1P_2 = D, S_1S_N = B, \theta$  — угол, под которым виден отрезок  $P_1P_2$  из  $O, \psi$  — угол, под которым виден отрезок  $S_1S_N$  из  $P_0, R$  — расстояние  $OP_0, \rho$  — расстояние  $S_1P_0 = S_2P_0$ . Имеем:

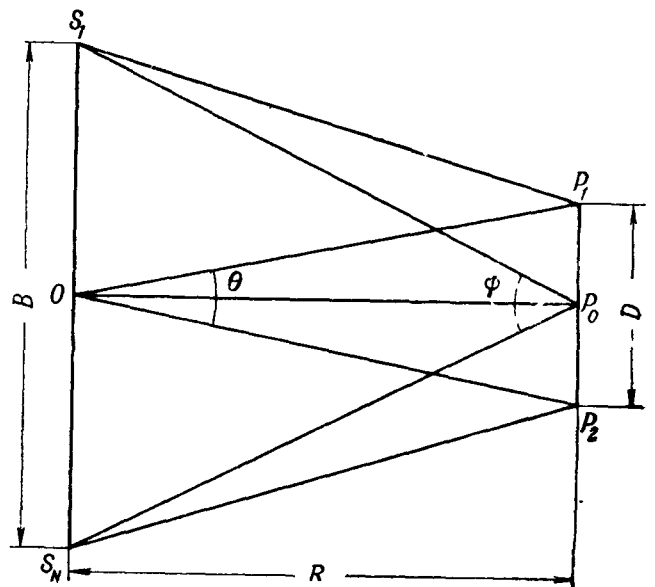


Рис. 460. Симметричное расположение источников и точек наблюдения.

$$\Delta_1 = -\Delta_N = S_1P_2 - S_1P_1 = \sqrt{\rho^2 + \frac{D^2}{4} + \rho D \sin \frac{\psi}{2}} - \sqrt{\rho^2 + \frac{D^2}{4} - \rho D \sin \frac{\psi}{2}},$$

откуда

$$\delta = \Delta_1 - \Delta_N = 2 \left\{ \sqrt{\rho^2 + \frac{D^2}{4} + \rho D \sin \frac{\psi}{2}} - \sqrt{\rho^2 + \frac{D^2}{4} - \rho D \sin \frac{\psi}{2}} \right\}. \tag{10.85}$$

При этом

$$D = 2R \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, \quad B = 2R \operatorname{tg} \frac{\psi}{2},$$

$$\rho = \frac{R}{\cos \frac{\psi}{2}}. \quad (10.86)$$

Пользуясь соотношениями (10.85), мы можем выразить условия когерентности и некогерентности колебаний в точках  $P_1, P_2$  через те или иные комбинации геометрических параметров  $R, D, B, \theta, \psi$ .

Особенно важны случаи, когда один из углов  $\theta, \psi$  мал или когда  $\psi, \theta$  оба малы. Мы их рассмотрим более подробно.

а) Угол  $\theta$  мал ( $\theta \ll 1$ ). В этом случае имеем приближенно, так как  $D \ll \rho$ , разлагая в (10.85) радикалы в ряды по степеням  $D/\rho$  и отбрасывая величины порядка  $(D/\rho)^2$ ,

$$\delta = 2\rho \left\{ \left( 1 + \frac{D}{2\rho} \sin \frac{\psi}{2} \right) - \left( 1 - \frac{D}{2\rho} \sin \frac{\psi}{2} \right) \right\} = 2D \sin \frac{\psi}{2}. \quad (10.87)$$

Положив (с тем же приближением)

$$D = R\theta, \quad (10.88)$$

имеем также:

$$\delta = 2R\theta \sin \frac{\psi}{2} \quad (10.89)$$

и, наконец, воспользовавшись (10.86), получим:

$$\delta = D\theta \cos \frac{\psi}{2}. \quad (10.90)$$

На основании (10.87)–(10.90) условиям (10.84) можно придать вид

$$2D \sin \frac{\psi}{2} = D\theta \cos \frac{\psi}{2} = 2R\theta \sin \frac{\psi}{2} \begin{cases} \ll \lambda & \text{(когерентность),} \\ = n\lambda & \\ \gg \lambda & \text{(некогерентность).} \end{cases} \quad (10.91)$$

б) Угол  $\psi$  мал ( $\psi \ll 1$ ). В этом случае можно положить в (10.85)

$$\rho = R, \quad \sin \frac{\psi}{2} = \frac{\psi}{2}, \quad \rho^2 + \frac{D^2}{4} = R^2 + \frac{D^2}{4} = \frac{R^2}{\cos^2 \frac{\theta}{2}},$$

откуда

$$\sqrt{\rho^2 + \frac{D^2}{4} \pm \rho D \sin \frac{\psi}{2}} = \sqrt{\frac{R^2}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \pm RD \frac{\psi}{2}} =$$

$$= \frac{R}{\cos \frac{\theta}{2}} \left( 1 \pm \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \cdot \frac{D}{R} \cdot \frac{\psi}{2} + \dots \right).$$

Воспользовавшись (10.85) и отбрасывая члены второго порядка относительно  $\psi$ , получаем:

$$\delta = 2R\psi \sin \frac{\theta}{2}. \quad (10.92)$$

Здесь на основании (10.86) имеем приближенно:

$$R\psi = B, \quad (10.93)$$



откуда

$$\delta = 2B \sin \frac{\theta}{2}. \quad (10.94)$$

Здесь условия (10.84) принимают вид

$$D\psi \cos \frac{\theta}{2} = 2B \sin \frac{\theta}{2} = 2R\psi \sin \frac{\theta}{2} \left\{ \begin{array}{l} \ll \lambda \\ = n\lambda, \\ \gg \lambda \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(когерентность),} \\ \text{(некогерентность).} \end{array} \quad (10.95)$$

в) Оба угла  $\theta$ ,  $\psi$  малы ( $\theta \ll 1$ ,  $\psi \ll 1$ ). В этом случае получаем приближенно:

$$\delta = R\theta\psi = D\psi = B\theta = \frac{BD}{R}, \quad (10.96)$$

и следовательно, условия (10.84) принимают вид

$$R\theta\psi = D\psi = B\theta = \frac{BD}{R} \left\{ \begin{array}{l} \ll \lambda \\ = n\lambda, \\ \gg \lambda \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(когерентность),} \\ \text{(некогерентность).} \end{array} \quad (10.97)$$

Заметим, что на основании сказанного в п. 1, если вместо светящегося отрезка, показанного на рис. 460, мы имеем два точечных источника, расположенных в  $S_1$ ,  $S_N$ , условия когерентности и некогерентности колебаний, приходящих в  $P_1$ ,  $P_2$  при малых  $\psi$  и  $\theta$ , таковы:

$$R\theta\psi = D\psi = B\theta = \frac{BD}{R} \left\{ \begin{array}{l} = n\lambda \\ = (2n+1)\frac{\lambda}{2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(когерентность),} \\ \text{(некогерентность).} \end{array} \quad (10.98)$$

**4. Протяженный источник произвольной формы.** Пусть источник света имеет вид длинной прямой полоски ширины  $B$  (светящаяся щель) или диска диаметра  $B$  (светящееся круглое отверстие), перпендикулярных к плоскости чертежа.

Здесь можно снова воспользоваться рис. 460, рассматривая отрезок  $S_1S_N$  как поперечное сечение щели или диаметр диска.

Разбивая щель на бесконечно узкие «светящиеся нити», параллельные ее длине, и применяя к ним такие же рассуждения, как в п. 2, мы приходим к выводу, что колебания в точках  $P_1$ ,  $P_2$  практически когерентны, если величина

$$|\delta| = |\Delta_1 - \Delta_N| = |(S_1P_2 - S_1P_1) - (S_NP_2 - S_NP_1)|$$

мала по сравнению с длиной волны, и практически некогерентны, если эта величина велика по сравнению с длиной волны. Пусть светящаяся щель (диск, отверстие) и точки наблюдения расположены так, как показано на рис. 460. В этом случае можно снова воспользоваться геометрическим соотношением (10.85) и более простыми соотношениями, получающимися из него при малых  $\theta$  и (или)  $\psi$ .

Для светящейся щели справедливы соотношения, полученные в п. 2. Для круглого источника при малых  $\psi$ ,  $\theta$  первое пропадание когерентности наступает, как показывает вычисление, при

$$|\delta| = 1,22\lambda. \quad (10.99)$$

## § 12. Интерференционные и дифракционные опыты с протяженными источниками (продолжение)

1. **Предварительные замечания.** Мы разобрали в § 10 с учетом протяженности источников ряд интерференционных и дифракционных явлений. Результаты § 11 позволяют подойти с другой стороны к рассмотрению влияния протяженности источника на характер интерференционных и дифракционных явлений. Поясним это на примере.

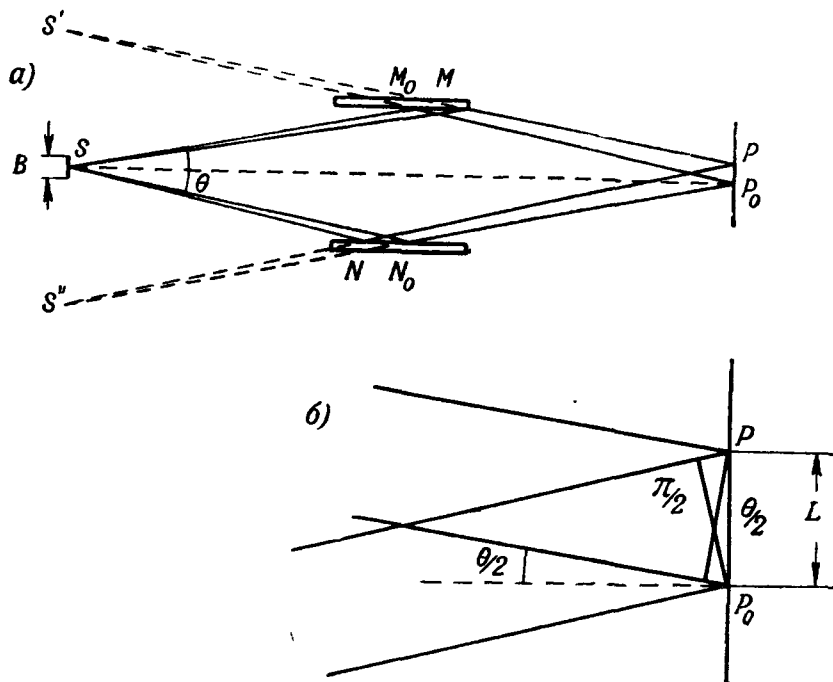


Рис. 461. К доказательству соотношения  $L\theta = \lambda$ .

Вернемся к схеме рис. 446. Пусть угол  $\theta$ , под которым излучаются сводимые зеркалами колебания, мал и источник не очень широкий. На основании (10.97) мы можем утверждать, что если

$$B\theta \ll \lambda,$$

колебания, сводимые на экране с помощью зеркал, *когерентны* и, следовательно, на экране должны получиться отчетливые интерференционные полосы; если же

$$B\theta = n\lambda \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

или если

$$B\theta \gg \lambda,$$

колебания, сводимые на экране, *некогерентны* и интерференции не может быть.

Нетрудно видеть, что результат, к которому мы только что пришли путем рассмотрения вопроса о когерентности колебаний, излучаемых протяженным источником по различным направлениям, совпадает с тем, который был получен в § 10 путем рассмотрения суперпозиции интерференционных картин от различных точек источника.

Действительно, обратим внимание на то, что если  $P_0P = L$  (рис. 461, а. обозначения — те же, что в § 10),

$$SNP - SMP = S''NP - S'MP = \lambda,$$

$$S''N_0P_0 = S'M_0P_0$$

( $S'$ ,  $S''$  — изображения середины  $S$  источника в зеркалах интерферометра), откуда

$$(S''NP - S''N_0P_0) - (S'MP - S'M_0P_0) = \lambda.$$

При малых углах  $\theta$  скобки равны  $L\theta/2$  (рис. 461, б) и, следовательно,  
 $L\theta = \lambda.$

Следовательно, условия (10.97) здесь эквивалентны следующим:

$$\left. \begin{aligned} B \ll L & \quad (\text{когерентность}), \\ B = nL, \\ B \gg L & \end{aligned} \right\} \quad (\text{некогерентность}).$$

Отсюда непосредственно следует сказанное в конце § 10 относительно видимости интерференционной картины (видимость равна единице при полной когерентности сводимых колебаний и нулю при полной их некогерентности).

Метод рассмотрения интерференционных и дифракционных опытов с протяженными источниками, которым мы пользовались в § 10, и метод, основанный на результатах § 11, эквивалентны. Иногда целесообразнее пользоваться одним, иногда — другим методом. В дальнейших пунктах этого параграфа мы применим *второй* метод к ряду конкретных задач.

**2. Опыт Френеля с зеркалами.** Будем удалять от зеркал экран, на котором мы наблюдаем интерференционные полосы. Как видно из рис. 462, при удалении точки наблюдения от зеркал (например, по прямой  $PP'$ ) угол, под которым выходят их источника сводимые в ней зеркалами «лучи» увеличивается (построение лучей показано для точек  $P$  и  $P'$ ). Следовательно, по мере удаления точки наблюдения от зеркал сводимые

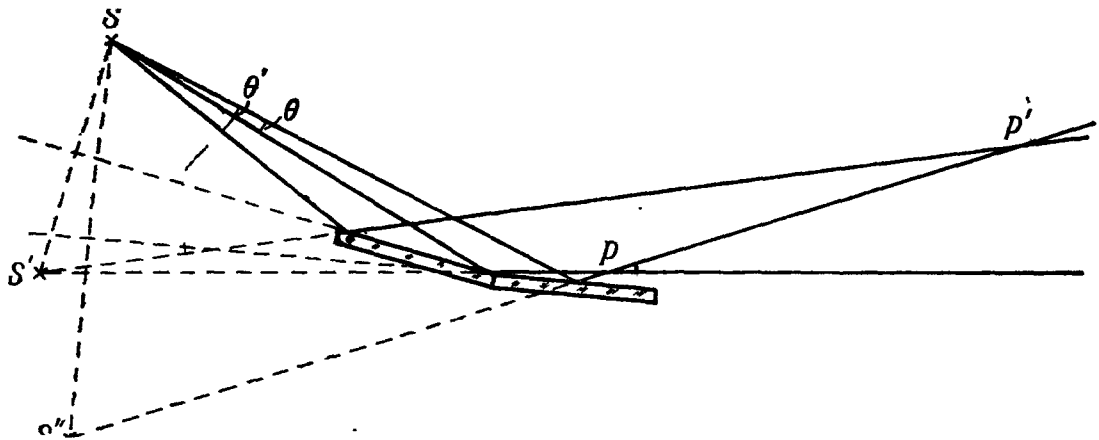


Рис. 462. По мере удаления от зеркал угол между сводимыми лучами увеличивается.

ими в этой точке колебания становятся все менее когерентными; при этом видимость интерференционных полос постепенно ухудшается.

Чем ближе к зеркалам находится экран, тем при большей ширине щели еще отчетливо видны интерференционные полосы.

Этот пример показывает, что в различных частях той области пространства, где происходит суперпозиция двух систем волн, видимость интерференционных полос, вообще говоря, различна. Как мы сейчас увидим, существуют интерференционные установки, которые дают хорошую видимость интерференционных полос лишь в небольшой части пространства. В таких случаях говорят: интерференционные полосы *локализованы* в этой части пространства.

**3. Линии равной толщины.** Характерный и важный пример локализованных интерференционных полос — линии равной толщины, которые видны на прозрачных клиньях, пластинках или жидких пленках, освещенных протяженным источником (см. рис. 13).

Схема опыта показана на рис. 463. В точках наблюдения происходит суперпозиция волн, отраженных от верхней и нижней граней клина, пластинки или пленки. Будем для определенности говорить о клине.

Пусть точка наблюдения скользит по верхней поверхности клина от основания его к ребру. Угол  $\theta$  при этом постепенно уменьшается: как

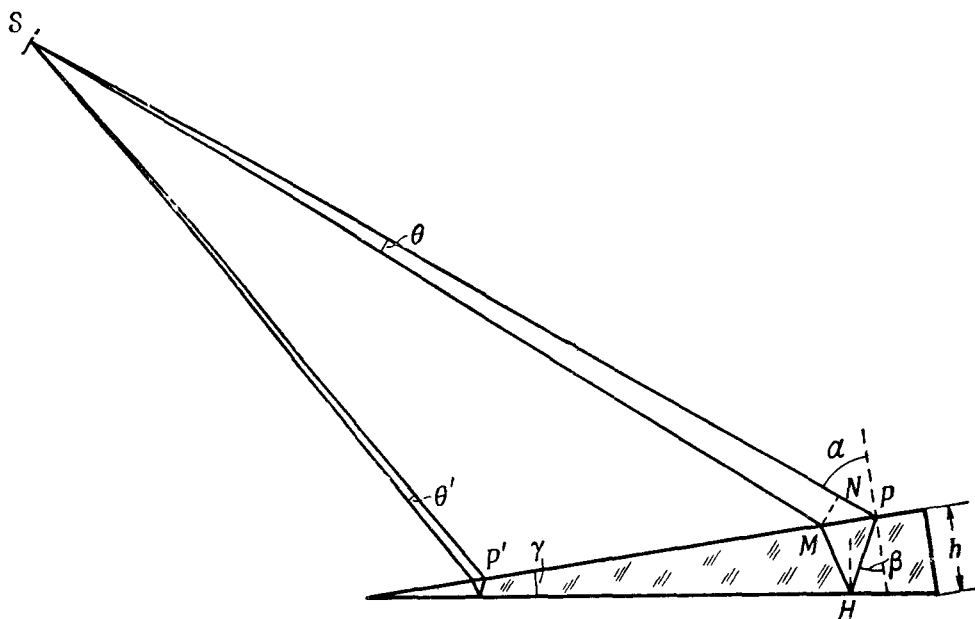


Рис. 463. По мере приближения к лезвию клина угол между сводимыми «лучами» уменьшается.

видно из рис. 463, он тем меньше, чем меньше толщина клина  $h$  под точкой  $P$ . Пока  $h$  настолько велико, что  $\theta$  заметно превышает  $\lambda/B$ , сводимые клином в точке  $P$  колебания практически некогерентны и видимость интерференционных полос около нее практически равна нулю. Но на тонкой части клина, — там, где  $\theta$  мало по сравнению с  $\lambda/B$ , — существуют отчетливо видимые интерференционные полосы. В тех местах, где разность фаз колебаний, приходящих по путям  $SMHP$ ,  $SNP$ , — четное (нечетное) кратное  $\pi$ , наблюдаются максимумы (минимумы). (При вычислении разности фаз нужно, разумеется, учитывать скачок фазы на  $\pi$  при отражении от оптически более плотной среды, см. гл. VII, § 8.)

Пусть теперь точка наблюдения  $P$  удаляется от клина, например по прямой  $PP''$  (рис. 464). Угол  $\theta$  при этом быстро возрастает, сводимые колебания становятся некогерентными, интерференционные полосы исчезают.

Таким образом, при наблюдении интерференции от клина полосы локализованы на поверхности тонкой части клина, где  $h$  настолько мало, что  $\theta \ll \lambda/B$ .

Для подсчета значений  $h$ , при которых удовлетворяется на поверхности клина условие хорошей видимости, условие  $B\theta \ll \lambda$  удобно заменить эквивалентным ему согласно (10.97) условием

$$\psi \ll \frac{\lambda}{D},$$

где  $\psi$  — угол, под которым виден источник из  $P$ ,  $D$  — длина перпендикуляра,

опущенного из  $M$  на  $SP$  (рис. 463). Имеем приближенно (если угол  $\gamma$  мал):

$$D = MN = MP \cos \alpha = 2h \operatorname{tg} \beta \cos \alpha,$$

где  $\alpha, \beta$  — угол падения и угол преломления света вблизи рассматриваемой

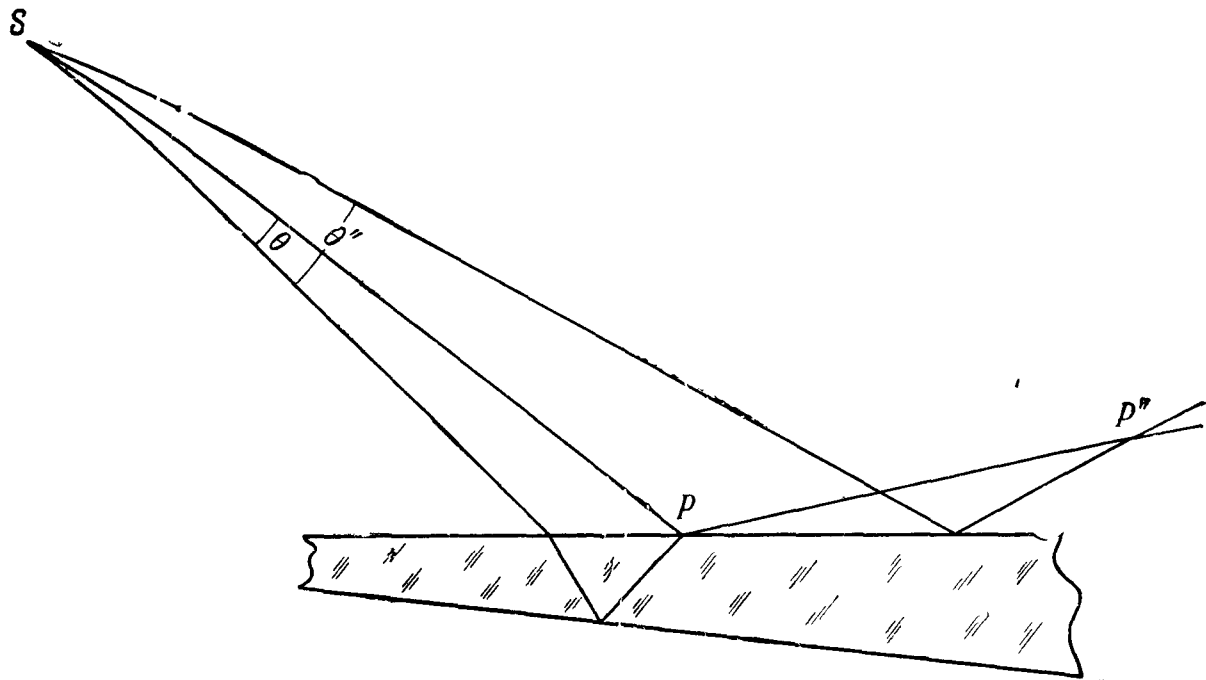


Рис. 464. По мере удаления от клина угол между сводимыми «лучами» увеличивается

точки  $P$ . В частности, при не очень косом падении света на клин имеем приближенно:

$$\operatorname{tg} \beta = \beta, \quad \cos \alpha = 1, \quad D = 2h\beta,$$

и первое условие (10.97) может быть записано в виде

$$2h\beta\psi \ll \lambda$$

или, так как  $\alpha$  и  $\beta$  одного порядка,

$$2h\alpha\psi \ll \lambda. \quad (10.100)$$

Так, например, если свет Солнца (грубо:  $\psi = 0,5^\circ = 0,01$ ) падает на клин через зеленый светофильтр ( $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$  см) под углом падения  $6^\circ$  (грубо:  $\alpha = 0,1$ ), то условие (10.100) дает  $h \ll 2,5 \cdot 10^{-2}$  см.

Рассмотренные здесь полосы, локализованные на клине, называются *линиями равной толщины*, так как одинаковая освещенность соответствует одинаковым значениям  $h$ .

**4. Наблюдение линий равной толщины глазом.** Как мы видим линии равной толщины, когда мы смотрим на клин (или мыльный пузырь, или тонкую нефтяную пленку, плавающую на воде)? Ведь глаз не находится при этом на поверхности клина.

Дело в том, что когда мы видим линии равной толщины, глаз аккомодирован на поверхность клина (пленки и т. д.). При этом в каждой точке  $P'$  на сетчатке глаза происходит суперпозиция («тех же самых» колебаний, что и в той точке клина  $P$ , изображением которой является  $P'$  (ср. гл. IX, § 6), как это видно из рис. 465. Таким образом, для точки  $P'$  угол  $\theta$  — такой же, как для  $P$ , и видимость интерференционных полос около  $P$  и  $P'$  одинакова. Мы можем сказать так: в интерференционной установке, состоящей из источника света, клина и глаза, интерференционные полосы

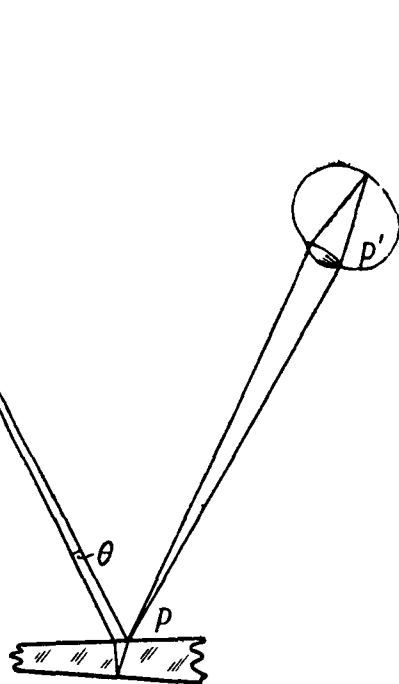
локализованы около тонкой части клина и оптически сопряженной ему части сетчатки.

Разность фаз между сводимыми колебаниями в сопряженных точках  $P$  и  $P'$  одинакова (это непосредственно следует из сказанного в гл. IX, § 6). Поэтому освещенности в  $P$  и  $P'$  пропорциональны друг другу, каждая светлая (темная) полоса на сетчатке является изображением, светлой (темной) полосы на клине. Линии равной толщины кажутся нам нарисованными краской на клине.

Все сказанное для глаза непосредственно переносится на проекционную установку, употребляемую для лекционной демонстрации линий равной толщины (см. рис. 13). Они тем лучше видны на экране при данной ширине источника, чем тоньше клин и чем лучше он сфокусирован объективом на экран.

5. Измерение угловых расстояний двойных звезд и угловых диаметров звезд. Речь идет об интерференционном методе Майкельсона для измерения малых угловых расстояний между источниками света, а также

Рис 465. [Наблюдение линий равной толщины глазом.



угловых размеров источников. Этот метод позволяет измерять угловые расстояния между близкими звездами, составляющими двойные звезды.

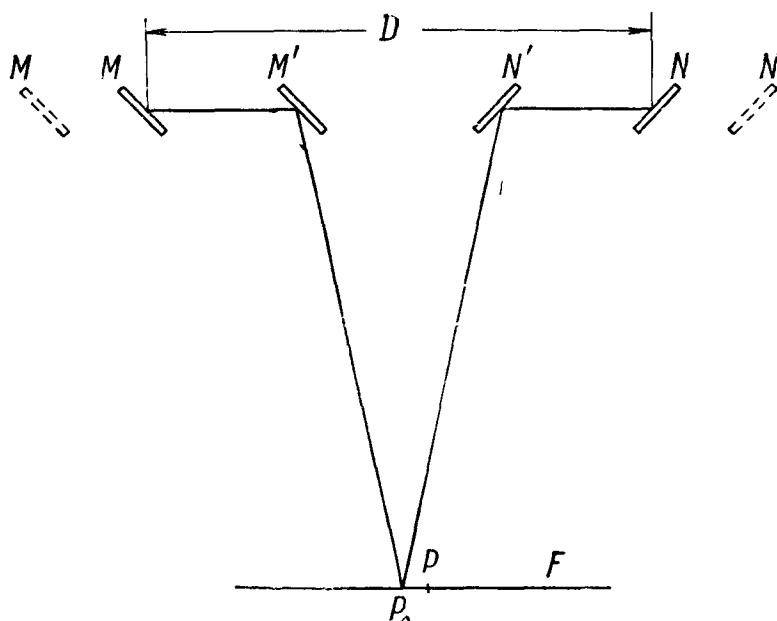


Рис. 466. Схема интерференционного метода измерения угловых расстояний и угловых размеров источников. Пунктиром показаны измененные положения зеркал  $M, N$ .

Он позволил также измерить угловые диаметры нескольких десятков звезд. Других способов измерения угловых диаметров звезд в настоящее время не существует.

Принципиальная схема показана на рис. 466.  $M, M', N, N'$  — плоские зеркала, образующие интерферометр. С помощью механического при-

способления можно изменить расстояние  $D$  между зеркалами  $M$ ,  $N$ , перемещая их параллельно самим себе.

Предположим сначала, что источник света  $S$  — точечный. В плоскости  $F$  возникают интерференционные полосы из-за суперпозиции колебаний, распространяющихся по путям  $SMM'P$ ,  $SNN'P$ , где  $P$  — точка плоскости  $F$ . В точке  $P_0$  (на оси системы) возникает максимум, в точке  $P$ , определяемой тем, что  $SMM'P - SNN'P = \lambda/2$ , — минимум и т. д.

Пусть теперь источник можно рассматривать как совокупность двух точечных источников, разделенных угловыми расстояниями  $\psi$ . Будем постепенно увеличивать  $D$ . Согласно (10.98), пока  $\psi D \ll \lambda$ , существует четкая интерференционная картина. С увеличением  $D$  ее видимость ухудшается и при  $\psi D = \lambda/2$  обращается в нуль. При дальнейшем возрастании  $D$  видимость снова возрастает и т. д. (см. рис. 448). Измерив в монохроматическом свете значение  $D$ , при котором видимость обращается в первый раз в нуль, можно вычислить  $\psi$ .

Здесь предполагалось, что каждая звезда ведет себя, как точечный источник. Это справедливо лишь, пока угловые диаметры самых звезд удовлетворяют соотношению  $\psi D \ll \lambda$ .

Пусть теперь в установку входит свет от одной звезды углового диаметра  $\psi$ . Будем снова увеличивать  $D$ . Видимость теперь будет меняться по кривой того же типа, что на рис. 449. Измерив значение  $D$ , при котором интерференционные полосы пропадают в первый раз, мы сможем на основании (10.99) по формуле  $\psi D = 1,22\lambda$  вычислить  $\psi$ . Так, когда установка направлена на гигантскую звезду Бетельгейзе (в созвездии Ориона), интерференционные полосы исчезают, если  $\lambda = 5,75 \cdot 10^{-5}$  см при  $D = 306,5$  м что дает для углового диаметра этой звезды значение  $0,047''$ .

Для того чтобы обнаружить отличие звезды от точечного источника с помощью телескопа («разрешить» звезду телескопом), последний должен согласно (10.72) иметь диаметр того же порядка, что расстояние между зеркалами  $M$ ,  $N$  (рис. 466), при котором видимость в первый раз обращается в нуль. Наибольший существующий в настоящее время телескоп имеет объектив диаметром 5 м. Максимальное расстояние между зеркалами  $M$ ,  $N$  в наибольшем существующем в настоящее время астрономическом интерферометре равно 18 м. Большинство звезд имеет столь малый угловой диаметр, что даже в этой огромной установке видимость получаемой от них интерференционной картины не отличается заметно от единицы.

Трудность дальнейшего увеличения  $D$  заключается в следующем: каждое значение, задаваемое величине  $D$  во время измерения, должно поддерживаться постоянным с точностью до малых долей световой волны. Случайное дрожание зеркал с амплитудой порядка  $\lambda/2$ , т. е.  $2 \cdot 10^{-5}$  см (что составляет при  $D$  порядка 10 м всего лишь  $2 \cdot 10^{-8}$  длины фермы, на которой укреплены зеркала), уже совершенно смазывает интерференционную картину\*).

**6. Наблюдение в микроскоп несамосветящихся предметов.** В § 8 мы рассматривали изображение *самосветящегося* протяженного источника (в частности, совокупности двух самосветящихся точечных источников). В случае микроскопа дело обычно обстоит иначе: наблюдается несамосве-

\*) [Применение модуляционного интерферометрического метода, о котором говорилось в дополнении редактора на стр. 471, 472, позволяет и здесь существенно продвинуться в сторону уменьшения измеримых значений  $\psi$  без увеличения базы  $D$ . Идея метода была предложена Г. С. Гореликом (совместно с И. Л. Берштейном), см. ДАН 86 (1952), 47. Действующий макет модуляционного интерферометра был рассчитан и с положительным результатом осуществлен в 1956 г. С. М. Кбзелом.]

тящийся предмет (например, броуновская частица, биологический препарат), освещаемый посторонним источником света. Дифракционную картину в фокальной плоскости объектива образует свет, *рассеиваемый* наблюдаемым предметом.

Представим себе, что мы наблюдаем две броуновские частицы, находящиеся на расстоянии  $D$  одна от другой. Пусть  $\psi$  — угол, под которым виден источник из середины расстояния между частицами. Если источник света настолько широкий, что  $\psi \gg \lambda/D$  (именно так обычно обстоит дело), световые колебания, создаваемые источником в местах расположения наблюдаемых частиц, *некогерентны*. Следовательно, некогерентны и световые волны, рассеиваемые частицами. Изображение частиц, даваемое объективом, такое же, как если бы они были самосветящимися, т. е. независимыми (некогерентными) источниками света. Относительно предела разрешения можно повторить все сказанное в § 10, п. 4.

Если источник имеет очень малый угловой размер ( $\psi \ll \lambda/D$ ), колебания, создаваемые им в местах расположения броуновских частиц, *когерентны*, следовательно, когерентны и волны, рассеиваемые частицами. Картина в фокальной плоскости является результатом интерференции этих волн. Вид этой интерференционной картины легко рассчитать, учтя фазовые соотношения между колебаниями, приходящими в различные точки фокальной плоскости от обоих когерентных вторичных источников (наблюдаемых частиц). Не приводя расчета, ограничимся замечанием, что разрешающая сила при таком «когерентном» освещении не превосходит разрешающей силы при освещении широким источником \*).

В курсах оптики излагаются методы, позволяющие несколько повысить разрешающую силу по сравнению с той, которая была вычислена в § 10, п. 4. Однако порядок величины остается тем же: он определяется длиной световой волны. Радикальное увеличение разрешающей силы возможно лишь за счет соответствующего укорочения волны — замены световых волн ( $\lambda$  порядка  $10^{-5}$  см) теми волнами, которые сопряжены, как учит в согласии с опытом волновая (или квантовая) механика, с потоком электронов. Здесь может быть, например,  $\lambda = 10^{-8}$  см. Эта идея лежит в основе создания *электронного микроскопа*. Рассмотрение электронного микроскопа выходит за рамки этой книги. Подчеркнем, однако, что «борьба за короткую волну» в микроскопии, приведшая к созданию электронного микроскопа, глубоко родственна «борьбе за короткую волну» в радиолокации и гидролокации (гл. VIII, § 5, 6; гл. IX, § 10): чем короче волна, тем при данных размерах излучающей системы острее направленность и, следовательно, тем меньшее угловое расстояние может «разрешить» локационная установка \*\*).

### § 13. Молекулярное рассеяние света

**1. Механизм молекулярного рассеяния.** При рассмотрении механизма отражения, преломления и дисперсии света (гл. VIII, § 9) мы считали, что вещество является *оптически однородным*, т. е. что в равных объемах  $v$ , линейные размеры которых велики по сравнению со средним рас

\*) Подробнее об изображении самосветящихся и несамосветящихся предметов в микроскопе см. Л. И. М а н д е л ь ш т а м, К теории микроскопического изображения Аббе, Полное собрание трудов, т. 1, стр. 211 (1948).

\*\*\*) [Укорочение волны — это единственный путь существенного повышения разрешающей силы микроскопа в ее классическом понимании. Усовершенствованные радиофизические методы наблюдения распределения освещенности в изображении, о которых сказано в дополнении редактора на стр. 471, 472, открывают новые возможности и здесь.]



стоянием между частицами (атомами, молекулами) и малы по сравнению с длиной световой волны, содержится одинаковое число частиц. (Напомним, что для видимого света  $\lambda \sim 5 \cdot 10^5$  см, а в твердом теле среднее расстояние между атомами  $\sim 10^{-8}$  см). Однако в действительности из-за теплового движения вещества в нем имеют место *флуктуации плотности*: число частиц, содержащееся в каждом из объемчиков  $v$ , беспорядочно колеблется около среднего значения  $Nv$  ( $N$  — среднее число частиц в  $1$  см<sup>3</sup>).

Посмотрим, как нужно исправить с учетом флуктуаций плотности результаты гл. VIII, § 9.

Разобьем общий объем пластинки  $V$  на равные объемчики  $v$ , удовлетворяющие сформулированному выше условию. Пусть число частиц в  $i$ -м объемчике ( $i = 1, 2, \dots, V/v$ ) равно

$$Nv + \nu_i(t),$$

где  $\nu_i(t)$  беспорядочно меняется со временем и в среднем за большое время равно нулю. Напряженность поля  $E_i$ , создаваемая в некоторой точке наблюдения  $P$  волнами, излучаемыми вторичным источником, находящимся в  $i$ -м объемчике, имеет вид (с точностью до постоянного множителя)

$$(Nv + \nu_i) \beta A \cos(\omega t - kr_i) = Nv \beta A \cos(\omega t - kr_i) + \nu_i \beta A \cos(\omega t - kr_i),$$

где  $A$  — амплитуда первичной волны,  $r_i$  — расстояние от  $i$ -го объемчика до точки наблюдения,  $\beta$  — поляризуемость отдельного электрона.

Слагаемые  $Nv \beta A \cos(\omega t - kr_i)$  от отдельных объемчиков *когерентны* (предполагается, что разности хода  $|r_i - r_j|$  малы по сравнению с длиной пуга и первичный источник имеет достаточно малые размеры, ср. § 5, 11). Суммирование этих когерентных слагаемых по всем объемчикам (эта задача решалась для тонкой пластинки в гл. VIII, § 9) дает отраженную и преломленную волну.

Слагаемые  $\nu_i \beta A \cos(\omega t - kr_i)$  *некогерентны*: в самом деле, различные  $\nu_i(t)$  меняют знак несогласованно, а изменение знака  $\nu_i(t)$  равносильно изменению фазы соответствующего колебания на  $\pi$ . Поэтому в любом направлении (т. е. где бы ни находилась точка наблюдения  $P$ ) в среднем за большое время (большое по сравнению со средним временем  $\tau$  между последовательными изменениями знака величины  $\nu_i$ ) происходит *суперпозиция интенсивностей* колебаний  $\nu_i \beta A \cos(\omega t - kr_i)$  от отдельных объемчиков. Сложение этих колебаний дает, таким образом, ненаправленное (рассеянное) излучение, идущее из толщи рассматриваемого тела.

Опыт показывает, что такое явление действительно существует. Оно называется *молекулярным рассеянием света*. Молекулярное рассеяние удается наблюдать в твердых телах, жидкостях и газах. Обычно вследствие малости флуктуаций интенсивность рассеянного света очень мала. Исключение представляет молекулярное рассеяние света газом, находящимся вблизи критического состояния\*), когда имеют место очень сильные флуктуации плотности. Этот случай молекулярного рассеяния называется *критической опалесценцией*\*\*).

\*) См., например, «Курс физики», под редакцией Н. Д. Папалекси, т. 1, стр. 537

\*\*) [Очень сильное рассеяние света наблюдается также в кварце вблизи температуры его перехода из одной кристаллической модификации в другую (фазовый переход второго рода при 573°C). Рассеяние обусловлено в этом случае сильными флуктуациями кристаллической структуры, и его интенсивность примерно в  $10^4$  раз больше, чем при комнатной температуре или при 600°, когда кварц уже перешел в высокотемпературную модификацию. См. статью И. А. Яковлева и Т. С. Величкиной, Успехи физических наук, т. 63, вып. 2, 1957, стр. 411 ]

Молекулярное рассеяние не следует смешивать с макроскопическим рассеянием, вызванным различного рода вкраплениями или загрязнениями (твердые частицы, взвешенные в жидкости, дым или капли тумана в атмосфере и т. д.). В большинстве случаев приходится принимать специальные меры для того, чтобы это грубое явление не маскировало молекулярное рассеяние.

**2. Синий цвет неба.** Важнейший пример молекулярного рассеяния — «синий цвет неба», т. е. синий свет, рассеиваемый чистой атмосферой при прохождении через нее солнечного света. Здесь интенсивность рассеянного света очень велика — несмотря на малость флуктуаций — вследствие огромной толщи рассеивающей среды. То обстоятельство, что при молекулярном рассеянии в атмосфере белый свет, идущий от Солнца, превращается в синий, объясняется следующим. Солнечный свет представляет собой суперпозицию волн различной частоты. Величину  $\beta$  для молекул, составляющих атмосферу, можно считать не зависящей от частоты (здесь нет резонансных явлений). Согласно (7.36) интенсивность света, рассеиваемого каждой частицей, пропорциональна  $\omega^4$ . Поэтому волны наиболее высокой частоты (фиолетовые, синие) рассеиваются сильнее, чем остальные, в особенности чем красные и желтые, и преобладают в рассеянном свете. Наоборот, в свете, прошедшем через большую толщу воздуха, преобладают волны более низкой частоты. Этим объясняется красный цвет солнца при восходе и при закате.

При рассмотрении молекулярного рассеяния в атмосфере воздух можно рассматривать как идеальный газ. В случае идеального газа, как показывается в статистической физике\*),

$$\overline{v^2} = Nv.$$

(Двойная черта означает усреднение за время, большое по сравнению с  $\tau$ .) При этом средняя интенсивность суммы колебаний вида  $v_i \beta A \cos(\omega t - kr_i)$ , создаваемых объемом  $V$  за время, большое по сравнению с  $\tau$ , равна числу этих колебаний  $V/v$ , умноженному на среднюю интенсивность каждого из них, т. е. равна

$$\frac{V}{v} \overline{v^2} \beta^2 A^2 = NV \beta^2 A^2.$$

Обратим внимание на то, что интенсивность рассеянного света пропорциональна первой степени общего числа молекул рассеивающего тела, тогда как интенсивность отраженной волны пропорциональна, согласно (8.82), (8.90), квадрату числа молекул в единице объема.

**3. Исторические замечания.** Синий цвет неба пытались сначала объяснить присутствием в атмосфере посторонних частиц. Рэлей в конце XIX века высказал мнение, что синий цвет неба есть результат сложения вторичных волн, излучаемых молекулами самого воздуха, и дал формулу для интенсивности рассеянного света, совпадающую с той, которая написана выше для идеального газа. В своем выводе этой формулы Рэлей считал, что атмосфера оптически однородна, но вследствие эффекта Доплера и беспорядочности теплового движения молекул колебания, излучаемые отдельными молекулами в направлениях, отличных от направления первичной волны, полностью некогерентны. Нетрудно видеть, что это предположение также приводит для интенсивности к значению  $NV \beta^2 A^2$ .  $NV$  есть число складывающихся колебаний, каждое из них имеет интенсивность  $\beta^2 A^2$  (такое совпадение с теорией флуктуаций получается только для идеальных газов).

\*) См., например, М. А. Л е о н т о в и ч, Статистическая физика, стр. 101.

Л. И. Мандельштам указал, что сам по себе эффект Допплера не может вызвать порчи когерентности колебаний, приходящих от отдельных объемчиков, если число частиц в них одинаково, и что для объяснения рассеяния света атмосферой необходимо принять, что она *оптически неоднородна*. При этом Л. И. Мандельштам обратил внимание на следующее: если вторичные волны, идущие от отдельных молекул газа, полностью некогерентны, то на границе между газом и вакуумом не должно быть правильного отражения света; должно происходить излучение назад из всей толщи газа. Это утверждение нельзя непосредственно проверить на опыте, так как нельзя осуществить резкую границу вакуум — газ. Поэтому Л. И. Мандельштам провел опыт на модели. Была подобрана жидкость (смесь бензина с сероуглеродом), имевшая при определенной длине волны показатель преломления, равный показателю преломления касавшейся ее стеклянной пластинки. Граница стекло — жидкость не давала заметного отражения света. Но при растворении в жидкости небольшого количества нафталина появлялось заметное отражение от границы стекло — жидкость. Если бы вторичные волны, испускаемые молекулами нафталина, были полностью некогерентны, такое отражение отсутствовало бы.

Тогда ничего еще не было известно о флуктуациях плотности. На существование этого явления и на то, что именно *флуктуации* являются причиной оптической неоднородности, вызывающей молекулярное рассеяние света, указали (независимо друг от друга) Эйнштейн и Смолуховский в 1912 г.

В гл. VI. § 9 было сказано, что тепловое движение твердого тела можно рассматривать как суперпозицию упругих волн. Существование этих упругих волн и наличие в твердом теле флуктуаций плотности не представляет собой двух различных явлений, а лишь две различные картины *одного* явления — теплового движения. Эта мысль, высказанная независимо Л. Бриллюэном и Л. И. Мандельштамом, позволила им предсказать расщепление спектральных линий при молекулярном рассеянии света (ср. гл. XI, § 4).

---

## ГЛАВА XI

### СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ

#### § 1. Спектр — реально существующая картина и спектр — математическое понятие

«Я поместил в очень темной комнате у круглого отверстия, около трети дюйма шириной, в ставне окна стеклянную призму, благодаря чему пучок солнечного света, входившего в это отверстие, мог преломляться вверх к противоположной стене комнаты и образовать там цветное изо-

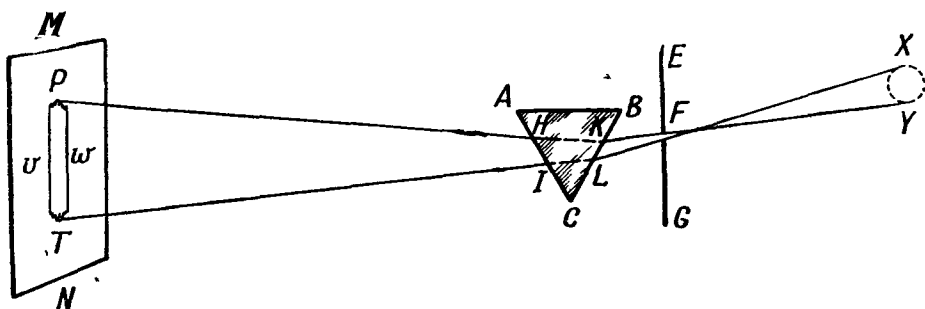


Рис. 467. Чертеж из «Оптики» Ньютона.

бражение солнца». Так начинается в «Оптике» Ньютона \*) доказательство его знаменитого утверждения (или, как называет его Ньютон, теоремы): «Солнечный свет состоит из лучей различной преломляемости». Один из чертежей «Оптики» Ньютона (его воспроизводит наш рис. 467) отчетливо показывает форму этого цветного изображения — оно имеет вид полоски  $TP$  с закругленными концами. Конец  $T$  полоски окрашен в красный цвет, конец  $P$  — в фиолетовый. Между красным и фиолетовым концами полоски располагаются, незаметно переходя один в другой, оранжевый, желтый, зеленый, синий цвета.

Наряду с выражением «цветное изображение» Ньютон пользовался для обозначения полоски  $TP$  словом «спектр». Оно было первоначально (латинское *spectrum*) синонимом слова «изображение». Но впоследствии спектром стали называть в оптике только цветную картину, о которой идет здесь речь, и аналогичные картины, возникающие в результате прохождения света от любого источника через призму, а также через дифракционную решетку (см. § 4). При этом обычно — как уже делал Ньютон в другом своем опыте — свет пропускается не через круглое отверстие, а через узкую прямую щель (параллельную ребру призмы или штрихам решетки, см. § 4).

\*) «Оптика или трактат об отражениях, преломлениях, изгибаниях и цветах света», перевод С. И. Вавилова, М.—Л., стр. 31.

Значительно позднее, в процессе развития учения о колебаниях и волнах, слово «спектр» приобрело в науке еще и другой смысл.

Рассмотрим функцию вида

$$f(t) = C_1 \cos(\omega_1 t - \alpha_1) + C_2 \cos(\omega_2 t - \alpha_2) + \dots + C_N \cos(\omega_N t - \alpha_N)$$

или в более короткой записи

$$f(t) = \sum_{n=1}^N C_n \cos(\omega_n t - \alpha_n), \quad (11.1)$$

где  $C_n$ ,  $\omega_n$ ,  $\alpha_n$  — постоянные, причем  $\omega_n$ , соответствующие различным значениям индекса  $n$ , не равны между собой. Совокупность пар чисел  $(\omega_1, C_1^2)$ ,  $(\omega_2, C_2^2)$ , ...,  $(\omega_N, C_N^2)$  называется *спектром* функции  $f(t)$ .  $N$  может быть конечным или бесконечным. В первом случае функция (11.1) обычно называется тригонометрической суммой, во втором — тригонометрическим рядом. Мы будем, однако, для краткости называть всякую функцию вида (11.1) тригонометрическим рядом, рассматривая тригонометрическую сумму как частный случай последнего.

Построим графическое изображение спектра функции  $f(t)$ . Отметим на оси абсцисс точки, соответствующие в некотором масштабе частотам  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ , ...,  $\omega_N$ . В каждой такой точке восставим перпендикуляр к оси абсцисс и отложим на нем отрезок, длина которого пропорциональна интенсивности  $C_1^2$ ,  $C_2^2$ , ...,  $C_N^2$  соответствующей синусоидальной слагаемой. Получающаяся в результате такого построения диаграмма (рис. 468) мы будем называть *спектрограммой* функции  $f(t)$ .

«Спектр функции» есть *математическое понятие*. Как покажет дальнейшее изложение, между этим математическим понятием и *физическим* понятием спектра существует тесная связь: характер спектра как реально существующей цветной картины (спектра в физическом смысле) определяется характером спектра (в математическом смысле) — функции, описывающей световую волну, падающую на призму или решетку. Установление этой связи составляет содержание одного из важнейших утверждений учения о колебаниях и волнах. или, говоря языком XVII в., одной из фундаментальных *теорем* этого учения, раскрывающей смысл открытия Ньютона.

Мы не будем ограничиваться рамками оптики. Из того, как был определен спектр функции (спектр в математическом смысле), ясно, что этот термин принадлежит единому языку теории колебаний и волн (см. гл. 1, § 1): функция типа (11.1) может изображать не только изменение напряженности электрического поля в световой волне, но и изменение напряженности поля в «невидимой» электромагнитной волне, давление в звуковой волне, силу тока и т. д. В связи с этим целесообразно под спектром в физическом смысле понимать не только ту картину, которая возникает в *оптических* опытах с призмой или решеткой, но и всякую реально существующую картину (например, на экране электронного осциллоскопа), являющуюся механическим, акустическим, радиофизическим аналогом оптического спектра. С такими картинами нам предстоит скоро познакомиться. При этом слово «спектр» как обозначение реально существующей

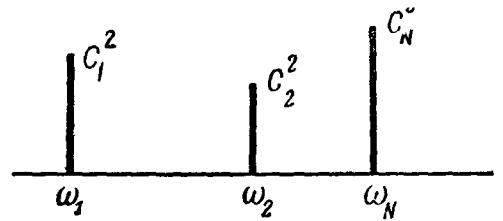


Рис. 468. Спектр функции (пример).

картины также становится одним из слов единого языка теории колебаний и волн \*).

Заметим, что задание спектра функции  $f(t)$  не эквивалентно заданию самой функции: две функции, имеющие одинаковый спектр, могут различаться фазами своих синусоидальных компонент. Так, например, функции

$$\cos \omega t + \cos 2\omega t$$

и

$$\cos \omega t + \sin 2\omega t$$

имеют одинаковые спектрограммы, но весьма различные осциллограммы. Однако для тех явлений, изучение которых составляет основное содержание этой главы, важен, как мы увидим, только спектр той или иной функции, а не фазы ее синусоидальных компонент.

## § 2. Спектральное разложение как математическая операция

1. Как появляются при построении теории физических явлений тригонометрические ряды и их спектры? Всякая попытка построить теорию некоторого физического явления (или группы физических явлений) состоит, говоря грубо схематически, из следующих этапов: 1) на основании некоторых физических утверждений, а также результатов предварительных экспериментов формулируется математическая задача (например, составляется дифференциальное уравнение); 2) эта задача решается с помощью подходящих для этой цели математических методов; 3) выясняется физический смысл полученного решения, т. е. формулируются вытекающие из него физические утверждения; 4) эти физические утверждения проверяются на опыте и, смотря по результатам этой проверки, исходные утверждения признаются правильными, т. е. отражающими (в том или ином приближении) объективную реальность или нет.

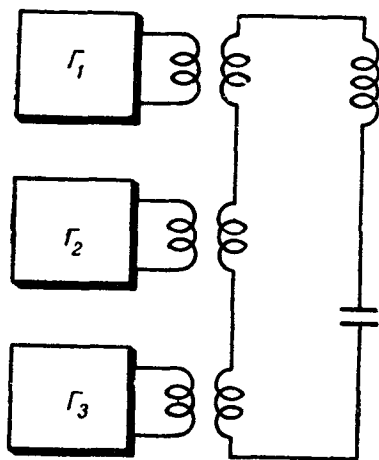


Рис. 469. Колебательный контур, индуктивно связанный с тремя ламповыми генераторами синусоидальных (немодулированных) колебаний.

Иногда при построении теории физического явления тригонометрический ряд и его спектр (спектр в математическом смысле) появляются «естественным образом» — уже на первом этапе построения теории. Это бывает тогда, когда те или иные физические соображения нам непосредственно указывают, что в интересующем нас явлении складываются синусоидальные воздействия, создаваемые независимыми источниками.

Пусть, например, мы хотим построить теорию вынужденных колебаний в контуре, индуктивно связанном с несколькими ламповыми генера-

\*) Придание термину «спектр» указанного здесь математического и широкого (выходящего за пределы оптики) физического смысла было важным этапом возникновения языка теории колебаний. Заметим, что иногда спектром (в математическом смысле) называют совокупность одних только чисел  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$ . Именно в этом смысле говорят, например, что спектр собственных колебаний однородной струны состоит из частот, определяемых формулами (6.76). Вместе с тем в физике заметна тенденция ко все большему расширению смысла, вкладываемого в слово «спектр». Так, например, картину, показывающую распределение некоторой совокупности атомов по массам, называют массовым спектром.



ставленные в виде тригонометрических рядов. Так было, например, в гл. VI при решении задач о собственных колебаниях стержня, струны или столба воздуха. Здесь также можно говорить о *спектральном разложении в математическом смысле*. Еще один подобный случай мы рассмотрим в п. 5.

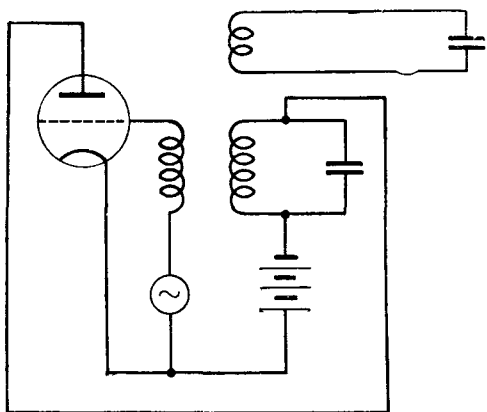


Рис. 470. Колебательный контур, индуктивно связанный с одним ламповым генератором модулированных колебаний.

2. Спектральное разложение простейшего модулированного колебания. Пусть нас интересуют вынужденные колебания гармонического осциллятора, создаваемые в нем *одним* источником колебаний (в отличие от примера п. 1), но колебаний не синусоидальных, а *амплитудно-модулированных*. Речь может идти, например, о контуре, совершающем вынужденные колебания под действием амплитудно-модулированного лампового генератора (рис. 470). Речь может идти также, например, о таком опыте. На камертон действует звуковая волна, излучаемая резонаторным ящи-

ком другого камертона, перед отверстием которого колеблется, периодически его закрывая и открывая, рука или механическая заслонка.

Здесь физически дано следующее: э. д. с. индукции в контуре или звуковое давление, раскачивающее камертон, имеет периодически меняющуюся амплитуду  $A(t)$ . Примем для простоты, что она меняется синусоидально около некоторого среднего значения  $a$ :

$$A(t) = a + 2b \cos \Omega t$$

( $\Omega$  — частота модуляции). Тогда э. д. с. в контуре или сила, действующая на камертон, имеет вид

$$f(t) = A(t) \cos \omega t = (a + 2b \cos \Omega t) \cos \omega t.$$

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний имеет вид (будем говорить для определенности о контуре)

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = (a + 2b \cos \Omega t) \cos \omega t. \quad (11.3)$$

Таково дифференциальное уравнение, написанное *непосредственно* «с натуры».

Подвергнем его теперь математической обработке. Преобразуя правую часть уравнения (11.3), мы можем его представить в виде

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = b \cos(\omega - \Omega)t + a \cos \omega t + b \cos(\omega + \Omega)t. \quad (11.3a)$$

Теперь правая часть представлена в виде *тригонометрического ряда* суммы трех синусоидальных колебаний с различными частотами  $\omega - \Omega$ ,  $\omega$ ,  $\omega + \Omega$ . Ее спектрограмма показана на рис. 471.

Электродвижущая сила в контуре создается *одним* источником *несинусоидальных* (модулированных) колебаний. Но, как показывает сравнение с (11.2), она ничем не отличается от той силы, которую создавали бы *три* источника *синусоидальных* э. д. с. частоты  $\omega - \Omega$ ,  $\omega$ ,  $\omega + \Omega$  и амплитуды  $b$ ,  $a$ ,  $b$ .

Ясно, что колебательный контур (рис. 470) или камертон одинаково колеблется под действием силы вида (11.2), независимо от того, создается

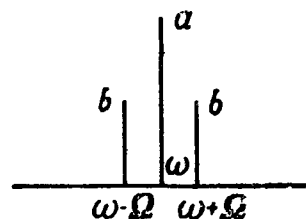


Рис. 471. Спектрограмма правой части уравнения (11.3).



ли она одним модулированным источником или тремя независимыми источниками синусоидальных колебаний.

3. **Спектральное разложение несинусоидального периодического воздействия.** Пусть на резонатор действует несинусоидальная, но периодическая внешняя сила  $f(t)$ . Теорема Фурье, доказываемая в курсе математики, утверждает, что функция  $f(t)$  может быть представлена во всем интервале  $-\infty \leq t \leq +\infty$  в виде суперпозиции бесконечного множества синусоид, имеющих частоты, кратные  $\omega = 2\pi/T$ , где  $T$  — период функции  $f(t)$ :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(n\omega t - \alpha_n)$$

или

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t),$$

где

$$A_n = C_n \cos \alpha_n, \quad B_n = C_n \sin \alpha_n, \quad C_n^2 = A_n^2 + B_n^2, \quad \alpha_n = \operatorname{arctg} \frac{B_n}{A_n},$$

причем коэффициенты  $A_n, B_n$  («коэффициенты Фурье» периодической функции) даются формулами ( $t_0$  произвольно)

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt, \quad B_0 = 0,$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos n\omega t dt,$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin n\omega t dt$$

( $n = 1, 2, 3, \dots$ ).

Формулы для коэффициентов Фурье периодической функции легко вывести с помощью приема, аналогичного примененному в гл. VI, § 9 для нахождения коэффициентов Фурье функции, описывающей конфигурацию струны (умножение ряда на  $\cos n\omega t$  или  $\sin n\omega t$  и интегрирование в пределах от  $t_0$  до  $t_0 + T$ ).

**Первый пример:** периодические прямоугольные толчки (рис. 472, а). Здесь, обозначив  $\tau$  продолжительность толчка,  $F$  — величину силы во время толчка и взяв  $t = 0$  в середине толчка, имеем:

$$f(t) = E \text{ при } -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2}$$

и  $f(t) = 0$  в остальной части интервала  $-T/2 \leq t \leq T/2$ . Взяв  $t_0 = -T/2$ , имеем:

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} E dt = \frac{F\tau}{T}$$

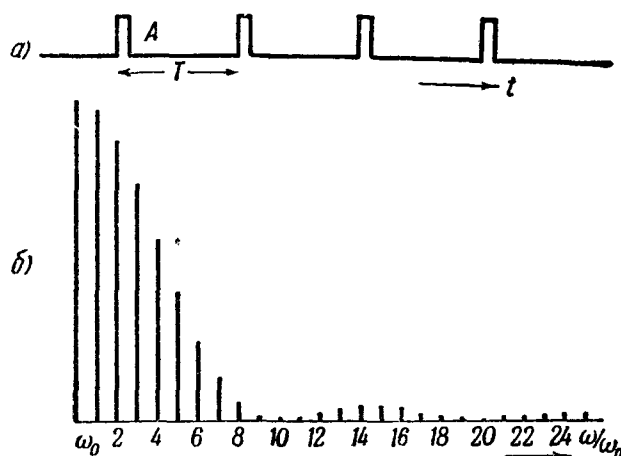


Рис. 472. Периодически повторяющиеся прямоугольные импульсы: а — осциллограмма и б — спектрограмма.

и аналогичным образом для  $n = 0$ .

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} F \cos n\omega t dt = \frac{2F}{n\pi} \sin \frac{n\pi\tau}{T}, \quad B_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} F \sin n\omega t dt = 0$$

Спектрограмма показана для частного случая на рис. 472, б. Интересен случай, когда  $\tau \ll T$  (длительность толчка мала по сравнению с интервалом между толчками). При этом для гармонических составляющих, периоды которых  $T/n$  еще велики по сравнению с  $\tau$ , можно считать приближенно

$$\sin \frac{n\pi\tau}{T} = \frac{n\pi\tau}{T}, \quad \text{откуда } A_n = \frac{2F\tau}{T} = \frac{2G}{T},$$

где  $G$  — импульс, сообщаемый отдельным толчком. Здесь в низкочастотной части спектра все линии имеют одинаковую интенсивность.

Второй пример: короткие одинаковые толчки произвольной формы (рис. 473, а). Здесь также

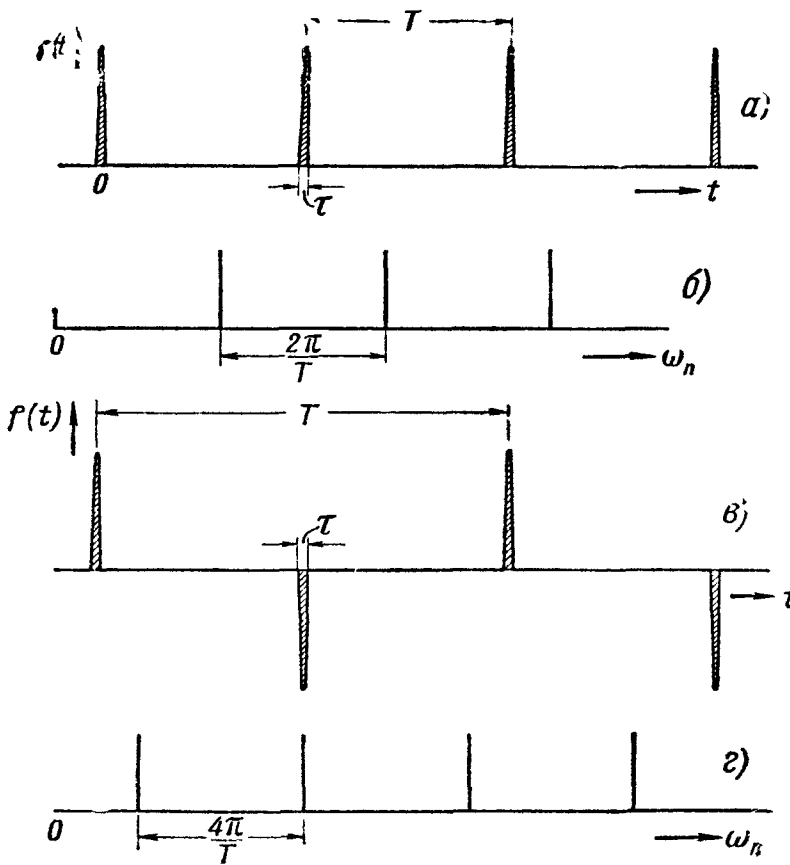


Рис. 473. Периодические последовательности коротких толчков и их спектры: а, б, —толчки одного знака; в, г —толчки чередующиеся по знаку.

щие  $f(t)$ , для которых  $\tau \ll T/n$ . Здесь можно считать приближенно, что  $\cos n\omega t$ ,  $\sin n\omega t$  сохраняют постоянные значения, равные соответственно 1 и 0, на всем протяжении интервала  $-\tau/2 < t < \tau/2$ , откуда

$$A_0 = \frac{P}{T}, \quad B_n = 0, \quad A_n = C_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} f(t) dt = \frac{2G}{T} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

где  $G$  опять — импульс, сообщаемый отдельным толчком. В низкочастотной части спектра все линии имеют одинаковую интенсивность, не зависящую от формы толчка и пропорциональную импульсу  $P$  (рис. 473, б).

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} f(t) dt,$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} f(t) \cos n\omega t dt,$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} f(t) \sin n\omega t dt$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots).$$

Рассмотрим низкочастотную часть спектра — те гармонические составляющие

Третий пример: *короткие толчки, чередующиеся по знаку*. Будем считать, что последовательные толчки отличаются только знаком, форма же их одинакова (рис. 473, в). Предоставляем читателю показать, что здесь  $C_n = 0$  для всех четных  $n$  (в частности  $n = 0$ ), т. е. спектр состоит только из составляющих с частотами  $\omega, 3\omega, 5\omega$ . Предоставляем читателю показать, далее, что если  $\tau \ll t$  в низкочастотной части спектра ( $\tau \ll T/n$ ), амплитуды всех составляющих одинаковы (рис. 473, г) и даются формулой

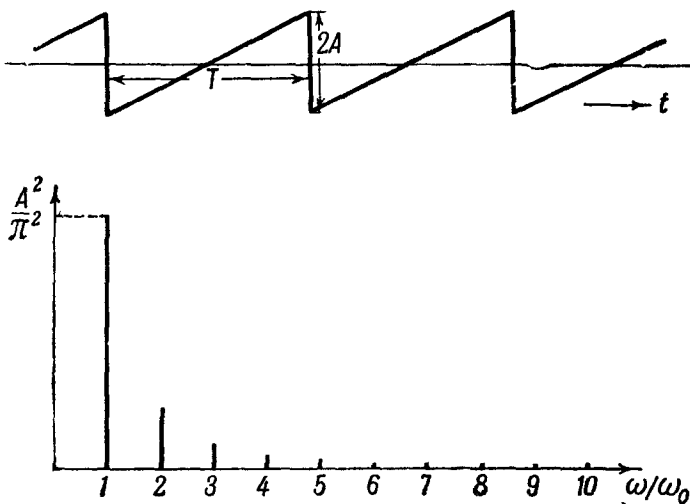


Рис. 474. пилообразное колебание: осциллограмма и спектрограмма.

$$C_n = \frac{4G}{T} \quad (n - \text{нечетное}).$$

Четвертый пример: *пилообразное колебание*. Осциллограмма и спектрограмма показаны для частного случая на рис. 474.

Конечно, для колебательного контура, камертона или маятника «без-

различно», создаются ли спектры, показанные на рис. 472, 473, 474, одним источником несинусоидальных колебаний или некоторым набором источников синусоидальных колебаний.

4. Спектральное разложение произвольного периодически модулированного по амплитуде колебания. Пусть

$$f(t) = F(t) \cos \omega t, \quad (11.4)$$

где  $F(t)$  — произвольная периодическая функция периода

$$\tau = \frac{2\pi}{\Omega}.$$

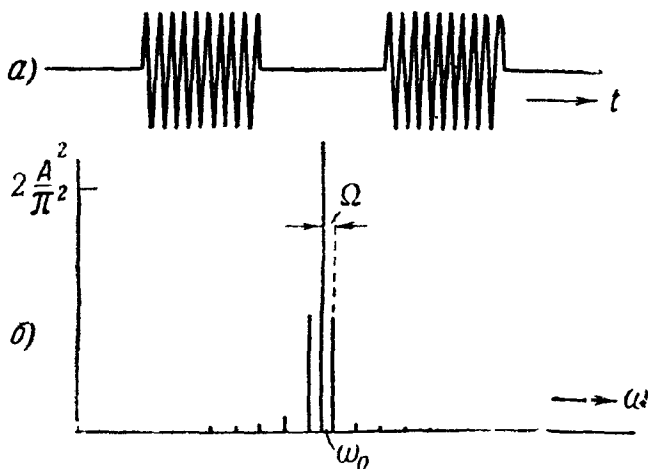


Рис. 475. Колебание, разрывно модулированное по амплитуде: осциллограмма и спектрограмма.

Согласно теореме Фурье

$$F(t) = \sum C_n \cos(n\Omega t - \alpha_n), \quad (11.5)$$

где

$$C_n \cos \alpha_n = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} F(t) \cos n\Omega t dt, \quad C_n \sin \alpha_n = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} F(t) \sin n\Omega t dt. \quad (11.6)$$

Подставляя (11.5) в (11.4), получаем после элементарного преобразования

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum C_n \{ \cos [(\omega + n\Omega)t - \alpha_n] + \cos [(\omega - n\Omega)t - \alpha_n] \}.$$

Спектр  $f(t)$  состоит из колебания частоты  $\omega$  (несущая частота) и колебаний с частотами  $\omega \pm n\Omega$  (боковые частоты). Если, например, осцил-

лограмма колебания имеет вид рис. 475, а, т. е. амплитуда меняется по закону

$$A(t) = \begin{cases} A_0, & 0 \leq t \leq \frac{\tau}{2}, \\ 0, & \frac{\tau}{2} \leq t \leq \tau, \end{cases}$$

то, произведя вычисление по формулам (11.6), мы получаем спектрограмму вида, показанного на рис. 475, б.

Функция вида

$$f(t) = \sum C_n \cos(\omega_n t - \alpha_n),$$

где  $\omega_n$  не являются целыми кратными некоторой величины  $\omega$ , называется *почти-периодической функцией*. Это название связано со следующим свойством таких функций (приводим его без доказательства): как бы ни было мало положительное число  $\varepsilon$ , можно найти такое  $T$  («почти-период», соответствующий выбранному  $\varepsilon$ ), что при любом  $t$

$$|f(t+T) - f(t)| < \varepsilon.$$

Модулированное колебание — важнейший для физики случай почти-периодической функции. В частном случае, когда несущая частота  $\omega$  — целое кратное частоты модуляции  $\Omega$ , модулированное колебание становится периодической функцией с периодом, равным периоду модуляции.

5. Спектр излучения электронов, движущихся в магнитном поле. Вернемся к модели источника света, которая была рассмотрена в гл. X, § 5, но будем считать, что газ, излу-

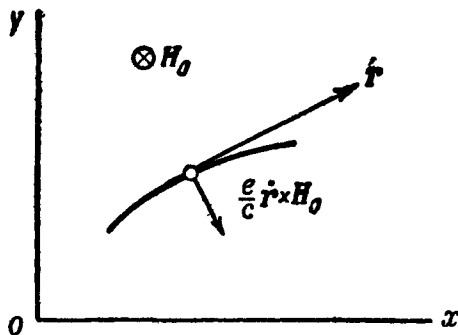


Рис. 476. Сила, действующая на электрон, движущийся в магнитном поле.

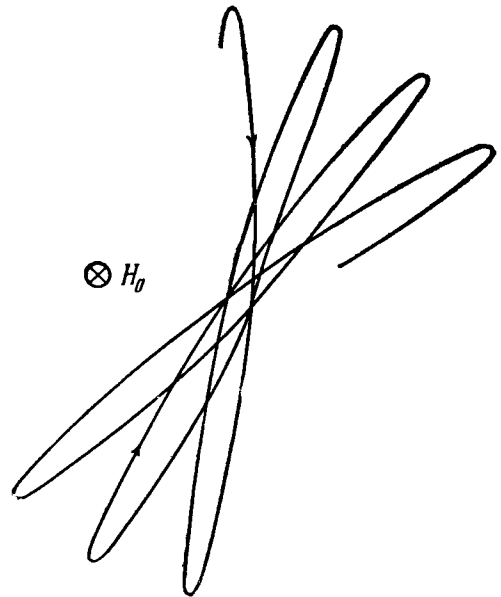


Рис. 477. Траектория электрона в виде розетки.

чающий свет, находится в однородном, не изменяющемся со временем магнитном поле  $H_0$ , направленном по оси  $z$ . Теперь движение электрона описывается уравнением

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -k\mathbf{r} - \frac{e}{c} \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{H}_0, \quad (11.7)$$

где последний член — лорентцова сила, перпендикулярная к скорости электрона  $\dot{\mathbf{r}}$  и к полю  $H_0$ . Требуется определить спектр света, испускаемого электроном. Эта задача принадлежит к типу, упомянутому в конце п. 1.

Если электрон движется в плоскости, перпендикулярной к оси  $z$ , лорентцова сила искривляет его путь так, как показано на рис. 476, в результате чего траектория электронов из прямолинейной при  $H_0 = 0$  превращается, когда  $H_0 \neq 0$ , в «розетку», показанную на рис. 477. Если же электрон движется параллельно оси  $z$ , магнитное поле не оказывает никакого влияния на его колебания, и они остаются синусоидальными. Мы

можем себе представить, что одна треть электронов колеблется вдоль оси  $\mathbf{H}_0$  (а следовательно, синусоидально с некоторой частотой  $\omega_0$ ), а остальные описывают розетки в плоскости, перпендикулярной к  $\mathbf{H}_0$ . Свет, излучаемый в направлениях, перпендикулярных к  $\mathbf{H}_0$ , состоит, очевидно, из синусоидальной линейно-поляризованной волны частоты  $\omega_0$ , в которой вектор  $\mathbf{E}$  параллелен  $\mathbf{H}_0$  (она излучается электронами, колеблющимися параллельно  $\mathbf{H}_0$ ), и суперпозиции амплитудно-модулированных линейно-поляризованных волн, в которых вектор  $\mathbf{E}$  перпендикулярен к  $\mathbf{H}_0$  и направлению наблюдения (они излучаются электронами, описывающими розетки; здесь амплитуда меняется пропорционально проекции «длины лепестка» розетки на направление, перпендикулярное к  $\mathbf{H}_0$  и направлению (наблюдения). Свет, испускаемый по направлению оси  $z$ , имеет другой характер. Для более полного исследования спектра удобно преобразовать уравнение (11.7) к системе координат  $s'$ , равномерно вращающейся с угловой скоростью  $\Omega$  вокруг оси  $z$ , в направлении стрелки (рис. 478). Радиус-вектор  $\mathbf{r}'$  в новой системе координат удовлетворяет уравнению

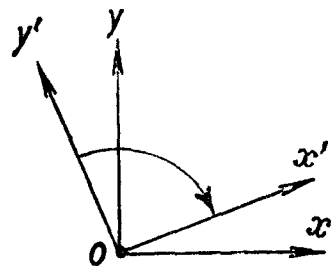


Рис. 478. Старая и новая системы координат.

равномерно вращающейся с угловой скоростью  $\Omega$  вокруг оси  $z$ , в направлении стрелки (рис. 478). Радиус-вектор  $\mathbf{r}'$  в новой системе координат удовлетворяет уравнению

$$m\ddot{\mathbf{r}}' = -k\mathbf{r}' - \frac{e}{c}\dot{\mathbf{r}}' \times \mathbf{H}_0 + m\Omega^2\mathbf{r}' + 2m\dot{\mathbf{r}}' \times \boldsymbol{\Omega}$$

(вектор  $\boldsymbol{\Omega}$  направлен по оси вращения, образуя правый винт с направлением вращения).

Здесь последние два члена представляют собой силы инерции (центробежную и кориолисову). Положив

$$\Omega = \frac{eH_0}{2mc},$$

имеем приближенно при не очень сильном поле  $\mathbf{H}_0$  (пренебрегая членом с  $\Omega^2$ )

$$m\ddot{\mathbf{r}}' = -k\mathbf{r}'.$$

Следовательно, движение электрона по отношению к  $s'$  приблизительно совпадает с суперпозицией линейно-поляризованных гармонических колебаний частоты  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ . В исходной системе  $s$  каждое такое движение по отношению к системе  $s'$  выглядит как суперпозиция двух равномерных круговых движений с различными угловыми скоростями, из которых одно происходит по часовой стрелке с частотой  $\omega_1 = \omega_0 + \Omega$ , а другое — против часовой стрелки с частотой  $\omega_2 = \omega_0 - \Omega$ . Следовательно, волна, излучаемая в направлениях, лежащих в плоскости  $xy$ , электронами, движущимися параллельно этой плоскости, может быть представлена как суперпозиция двух линейно-поляризованных синусоидальных волн частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , в которых вектор  $\mathbf{E}$  перпендикулярен оси  $z$ . Кроме того, как уже было сказано, в этом направлении излучается линейно-поляризованная синусоидальная волна частоты  $\omega_0$ , в которой вектор  $\mathbf{E}$  параллелен оси  $z$ . Свет, излучаемый по направлению оси  $z$ , представляет собой суперпозицию двух синусоидальных волн, поляризованных по кругу в разные стороны и имеющих частоты  $\omega_1, \omega_2$  \*). Спектры волн, излу-

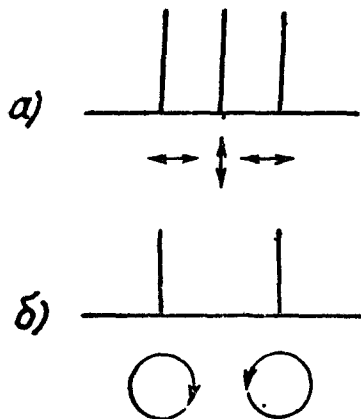


Рис. 479. Спектры волн, излучаемых электронами, движущимися в магнитном поле под действием квазиупругой силы: а — перпендикулярно, б — параллельно магнитному полю.

\*) Разумеется, учет явлений, рассмотренных в гл. X, показал бы, что в действительности здесь все составляющие волны не идеально синусоидальные, а хаотически модулированные.

чаемых параллельно плоскости  $xy$  и параллельно оси  $z$ , показаны на рис. 479.

**6. Выражение среднего квадрата периодической и почти-периодической функции через амплитуды гармонических составляющих.** Во многих опытах измеряется средний квадрат той или иной функции  $f(t)$  за определенный промежуток времени. Покажем, что средний квадрат почти-периодической функции за большое время (смысл, который имеет здесь слово «большое», указан ниже) очень просто выражается через амплитуды ее синусоидальных составляющих.

Возведя в квадрат равенство  $f(t) = \sum C_n \cos(\omega_n t - \alpha_n)$ , имеем:

$$f^2(t) = \sum_m \sum_n C_m C_n \cos(\omega_m t - \alpha_m) \cos(\omega_n t - \alpha_n)$$

или

$$f^2(t) = \frac{1}{2} \sum \sum C_m C_n \cos[(\omega_m - \omega_n)t - (\alpha_m - \alpha_n)] + \\ + \frac{1}{2} \sum \sum C_m C_n \cos[(\omega_m + \omega_n)t - (\alpha_m + \alpha_n)].$$

Среднее значение от  $f^2(t)$  равно сумме средних значений всех членов правой части. Обозначим  $T_0$  наибольший из периодов  $2\pi/|\omega_m - \omega_n|$  синусоидальных колебаний, стоящих в правой части последнего равенства. За время, достаточно большое по сравнению с  $T_0$ , средние значения всех членов с  $\omega_m \neq \omega_n$  будут, очевидно, сколько угодно малы. Поэтому приближенно

$$\overline{f^2(t)} = \frac{1}{2} \sum C_n^2,$$

где двойная черта означает среднее за время, большое по сравнению с  $T_0$ . Словами: средний квадрат почти-периодической функции за достаточно большое время равен полусумме средних квадратов амплитуд ее гармонических составляющих.

Если  $f(t)$  — периодически-модулированное колебание,  $T_0$  есть период модуляции и двойная черта имеет тот же смысл, что в гл. IV, § 9. Если  $f(t)$  — сумма модулированных колебаний с неперекрывающимися спектрами,  $T_0$  есть период модуляции наиболее медленного модулированного колебания.

Если  $f(t)$  — периодическая функция (частный случай почти-периодической функции),  $T_0$  совпадает с периодом  $T$ .

Предоставляем читателю показать, что в этом случае имеет место точное равенство

$$\overline{\overline{f^2(t)}} = \frac{1}{2} \sum C_n^2,$$

где теперь две черты обозначают усреднение за период.

### § 3. Спектральное разложение как физическое явление. Его осуществление колебательным контуром\*)

**1. Решение задачи о вынужденных колебаниях под действием силы, представленной в виде тригонометрического ряда.** Будем говорить для определенности о вынужденных колебаниях в электрическом колебательном контуре.

\*) Вопросы, излагаемые в этом и следующих параграфах, составили предмет пробной лекции, читанной в Московском университете в 1913 г. Н. Н. Андреевым и опубликованной в статье «Решетка, призма, резонатор» (Журнал Русского физико-хим. о-ва, Физ. отд., 47, вып. 5, 1915 г.).

Имеем дифференциальное уравнение

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = f(t),$$

где  $f(t)$  — внешняя э.д.с. или, если она представлена в виде тригонометрического ряда,

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = \sum \mathcal{E}_n \cos(\omega_n t - \alpha_n). \quad (11.8)$$

Легко найти решение уравнения (11.1), изображающее установившееся вынужденное колебание, если воспользоваться известным нам из гл. III решением уравнения

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = \mathcal{E} \cos(\omega t - \alpha) \quad (11.9)$$

и тем, что решение уравнения (11.8) есть сумма решений, соответствующих отдельным слагаемым правой части (обобщение теоремы о суперпозиции, стр. 75).

Решение уравнения (11.9), изображающее установившиеся вынужденные колебания, таково:

$$q = \frac{\frac{\mathcal{E}}{L} \cos(\omega t - \alpha - \psi)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}}, \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

где  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$  ( $\omega_0$  — собственная частота контура). Следовательно, согласно теореме о суперпозиции установившееся вынужденное колебание под действием э. д. с., изображаемой правой частью, выражается формулой (11.8)

$$q = \sum \frac{\frac{\mathcal{E}_n}{L} \cos(\omega_n t - \alpha_n - \psi_n)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_n^2)^2 + 4\delta^2 \omega_n^2}}. \quad (11.10)$$

Для напряжения  $u_C$  на конденсаторе имеем:

$$u_C = \frac{q}{C} = \omega_0^2 \sum \frac{\mathcal{E}_n \cos(\omega_n t - \alpha_n - \psi_n)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_n^2)^2 + 4\delta^2 \omega_n^2}}. \quad (11.11)$$

Представим себе, что контур состоит из отдельных элементов  $L$ ,  $R$ ,  $C$  (рис. 480) и будем интересоваться напряжением на сопротивлении

$$u_R = R\dot{q}. \quad (11.12)$$

На основании (11.10), (11.12) имеем, заменяя  $\omega_0^2$  через  $1/LC$ ,

$$u_R = \sum_{n=1}^N \frac{R \mathcal{E}_n \cos\left(\omega_n t - \alpha_n - \psi_n + \frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{R^2 + \left(\omega_n L - \frac{1}{\omega_n C}\right)^2}}. \quad (11.13)$$

**2. Физический смысл решения: выделение синусоидальных компонент.** Нарисуем (рис. 481) спектрограмму э. д. с. (а), а под ней (б) график

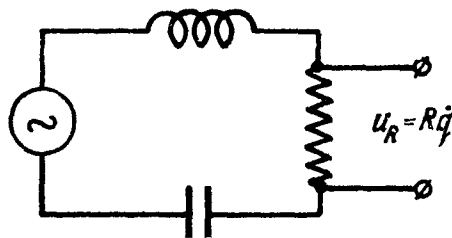


Рис. 480. Контур с отдельными  $L$ ,  $R$ ,  $C$ .

функции

$$\Phi(\omega) = \frac{R^2}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}, \quad (11.14)$$

т. е. резонансную кривую, изображающую зависимость квадрата амплитуды  $u_R$  от частоты синусоидальной внешней э. д. с. при амплитуде последней, равной единице. Эта кривая имеет максимум при частоте  $\omega = \omega_0$ . Она тем острее, чем больше добротность контура  $Q$ . Выполним

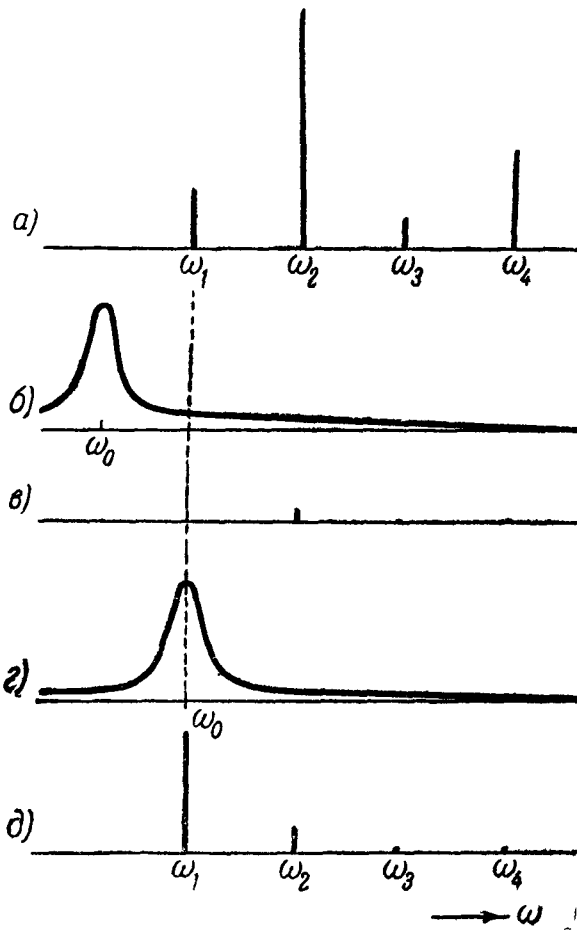


Рис. 481. Преобразование спектра внешней э. д. с. колебательным контуром.

ни одно из них заметно не преобладает над остальными. Но зафиксируем ручку конденсатора в таком положении, когда  $\omega_0 = \omega_1$  (рис. 481, г). Прделав такое же построение, как на рис. 481, в, мы получим для  $u_R$  спектрограмму, показанную на рис. 481, д. Здесь бросается в глаза, что гармоническая составляющая частоты  $\omega_1$  резко преобладает по интенсивности над всеми остальными. Она преобладает тем резче, чем острее резонансная кривая. Для случая  $\omega_0 = \omega_1$  формула (11.13) принимает вид

$$u_R = \mathcal{E}_1 \cos(\omega_1 t - \alpha_1) + R \sum_{n=2}^N \frac{\mathcal{E}_n \cos\left(\omega_n t - \alpha_n - \psi_n - \frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{R^2 + \left(\omega_n L - \frac{1}{\omega_n C}\right)^2}}, \quad (11.15)$$

откуда видно, что преобладающее колебание частоты  $\omega_1$  в точности совпадает с первым членом разложения  $f(t)$  в тригонометрический ряд. Из формулы (11.15) видно также, что при достаточно малом  $R$  сумма остальных компонент  $u_R$  сколь угодно мала.

рис. 481, а, 481, б так, чтобы точки, расположенные на них одна под другой, соответствовали одинаковым  $\omega$ . Тогда, как показывает формула (11.13), умножая длины черточек спектрограммы внешней э. д. с. (рис. 481, а) на ординаты расположенных под ними точек резонансной кривой (рис. 481, б), мы получим спектрограмму напряжения  $u_R$  (рис. 481, в). Мы всюду будем предполагать в этом параграфе, что ширина  $\Delta\omega$  резонансной кривой на уровне  $1/2$  (ср. гл. III, § 8) мала по сравнению с разностями  $\omega_{n+1} - \omega_n$ .

Не меняя вида функции  $f(t)$ , будем, медленно поворачивая ручку настройки конденсатора колебательного контура, изменять его емкость. При этом будет изменяться собственная частота контура  $\omega_0$ , резонансная кривая будет непрерывно деформироваться, ее максимум будет смещаться и последовательно проходить через положения  $\omega_0 = \omega_n$  (рис. 481, г,  $n = 1, 2, \dots$ ). При том значении  $\omega_0$ , для которого построен рис. 481, в, колебание в контуре является суперпозицией очень слабых гармонических колебаний с частотами  $\omega_1, \omega_2, \dots$ , причем



Электронный осциллоскоп, подключенный к  $R$ , покажет при достаточно малом  $R$  колебание, практически совпадающее с первым членом разложения  $f(t)$ . Мы имеем право сказать, что контур *выбирает* или *выделяет* из спектра внешней силы ту линию, на которую он настроен, очищая соответствующее гармоническое колебание  $\mathcal{E}_1 \cos(\omega_1 t - \alpha_1)$  от «примешанных» к нему гармонических колебаний с другими частотами.

Будем увеличивать  $\omega_0$ . В контуре, вообще говоря, опять будет наблюдаться слабое колебание без резкого преобладания одной частоты. Но, если мы дойдем до  $\omega_0 = \omega_2$  и остановим ручку настройки в таком положении, в контуре снова возникнет сильное колебание, но с преобладанием на этот раз гармонической составляющей частоты  $\omega_2$ . При достаточно малом  $R$  напряжение  $u_R$  теперь практически совпадает с  $\mathcal{E}_2 \cos(\omega_2 t - \alpha_2)$ . Медленно вращая ручку настройки и перемещая, таким образом, пик резонансной кривой по спектрограмме внешней э. д. с., мы последовательно получим при соответствующих настройках *отдельно существующие* колебания, практически совпадающие с отдельными членами разложения  $f(t)$  в тригонометрический ряд. Можно сказать и так: при  $\omega = \omega_1, \omega_2, \dots$  и очень малых  $R$  контур выделяет отдельные гармонические колебания, входящие в состав внешней э. д. с. Мы можем говорить здесь о спектральном разложении внешней э. д. с. как о реальном физическом явлении.

С математической точки зрения выделение контуром отдельных синусоидальных компонент  $f(t)$  связано с тем, что спектр  $u_R$  получается из спектра  $f(t)$  умножением на функцию, имеющую очень острый максимум. Такого рода функцию называют иногда *пинцетной* функцией — умножение на такую функцию выхватывает «наподобие тонкого пинцета» ту черточку спектрограммы, которая расположена против ее максимума.

Будем называть *резонансом* тот случай, когда при  $R \rightarrow 0$  амплитуда тока неограниченно растет, а следовательно, напряжение  $u_R$  остается конечным. Мы имеем право сказать: под действием э. д. с.  $f(t)$  возможен ряд резонансов, соответствующих  $\omega_0 = \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$ ; при каждом резонансе контур выделяет из состава  $f(t)$  синусоидальную компоненту соответствующей частоты.

Мы рассмотрели в первую очередь напряжение  $u_R$  потому, что здесь с особенной наглядностью выступает физическое явление спектрального разложения внешней э. д. с. Практически гораздо важнее, однако, напряжение на конденсаторе  $u_C$ , превышающее в  $Q$  раз при резонансе (если  $R$  мало) напряжение  $u_R$ . Формула (11.11) может быть исследована точно так же, как (11.13). При большом  $Q$  напряжение на конденсаторе имеет резкие максимумы почти в точности при  $\omega_0 = \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$ . При этом  $u_C$  весьма близко к синусоидальным колебаниям соответственно с частотами  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$ , имеющим амплитуду  $Q_1 \mathcal{E}_1, Q_2 \mathcal{E}_2, \dots, Q_N \mathcal{E}_N$ , где  $Q_1, Q_2, \dots$  — добротность контура при соответствующих настройках. Эти колебания отстают по фазе на  $\pi/2$  от соответствующих компонент внешней э. д. с.

**3. Физический смысл решения (продолжение): спектр как реально существующая картина.** Будем следить за тем, как изменяется при плавном поворачивании ручки настройки конденсатора нашего колебательного контура, т. е. при плавном изменении  $\omega_0$ , интенсивность  $\overline{u_C^2}$  (измеряемая, например, с помощью усилителя и квадратичного инерционного прибора).

Возведя в квадрат формулу (11.11) и усредняя по времени (ср. § 2, п. 6), мы получаем для интенсивности выражение

$$\overline{u_C^2} = \frac{1}{2} \sum \frac{\omega_0^4 \mathcal{E}_n^2}{(\omega_0^2 - \omega_n^2)^2 + 4\delta^2 \omega_n^2}, \quad (11.16)$$

т. е. сумму выражений, соответствующих отдельным синусоидальным слагаемым внешней э. д. с. Зависимость отдельных слагаемых от  $\omega_0$  изображается резонансными кривыми (рис. 482) того типа, который был изучен в гл. III (§3, п. 2). Если контур обладает большой добротностью, эти резонансные кривые имеют острые максимумы соответственно (практически) при  $\omega_0 = \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$ . Суммарная интенсивность будет изображаться «многогорбой» резонансной кривой, форма которой вблизи  $\omega_0 = \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$  очень мало отличается от формы резонансных кривых для отдельно взятых соответствующих синусоидальных слагаемых  $f(t)$ . Таким образом, высота максимумов будет пропорциональна длине черточек рис. 482, и, сняв график  $\overline{u_c^2}$  как функции  $\omega_0$ , мы получим полное и наглядное представление о спектре функции  $f(t)$ .

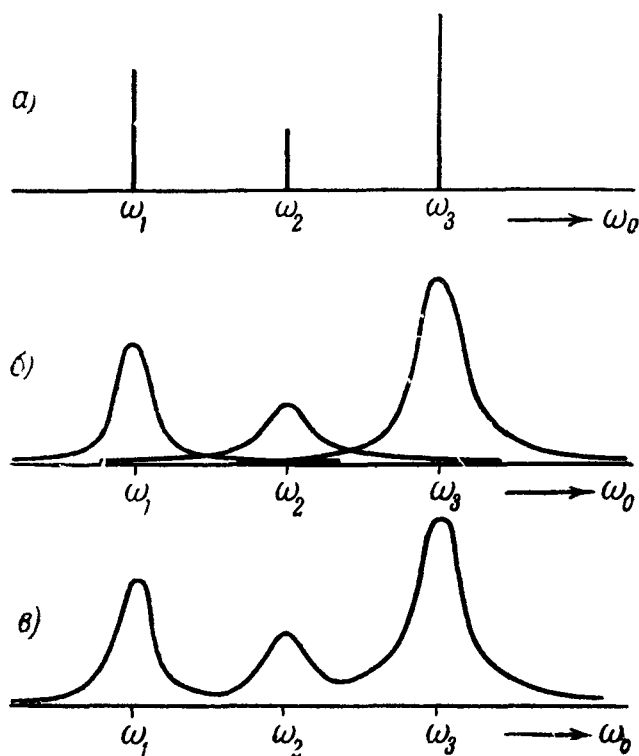


Рис. 482. а—спектрограмма внешней э. д. с.; б—кривые зависимости интенсивности от  $\omega_0$  для отдельных слагаемых внешней э. д. с.; в—зависимость суммарной интенсивности от  $\omega_0$ .

Посредством соответствующего механического или электрического \*) устройства будем периодически изменять собственную частоту контура иотрегулируем генератор развертки электронного осциллоскопа так, чтобы подаваемое им на горизонтально отклоняющие пластины напряжение менялось пропорционально собственной частоте контура. Пусть период изменения  $\omega_0$  велик по сравнению со временем установления вынужденных колебаний в контуре. Мы увидим на экране картину, показанную на рис. 483, где абсциссы максимумов изображают в известном масштабе частоту, а ординаты — интенсивность отдельных компонент разложения  $f(t)$  в тригонометрический ряд. Мы получаем, таким образом, на экране реальную физическую картину, являющуюся изображением спектра внешней э. д. с. Мы будем называть эту картину спектром э. д. с. (ср. конец § 1).

Указанное здесь сочетание колебательного контура, устройства для изменения емкости и электронного осциллоскопа мы будем называть *электронно-*

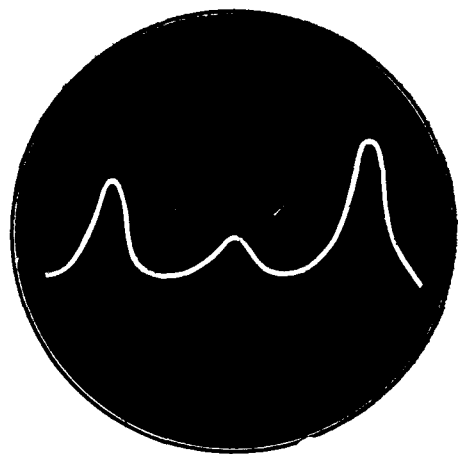


Рис. 483. Картина на экране электронного осциллоскопа для случая, показанного на рис. 482.

\*) Существуют электронно-ламповые схемы, действие которых эквивалентно изменению собственной частоты колебательного контура. Такие схемы широко используются для частотной модуляции.

лучевым спектроскопом. Разновидностью электронного спектроскопа являются так называемые *панорамические радиоприемники*, позволяющие видеть на экране спектр всей совокупности воспринимаемых антенной электромагнитных волн.

**4. Первый пример: выделение синусоидальных компонент и наблюдение спектра пилообразного колебания.** Свяжем колебательный контур, являющийся входным контуром электронно-лучевого спектроскопа, с генератором пилообразных колебаний (гл. IV, § 6). Мы получим на экране ряд вертикальных горбиков убывающей высоты, расположенных на одинаковом расстоянии один от другого, в соответствии с тем, что показывает разложение пилообразной функции в ряд Фурье.

Приключим теперь к контуру с большей добротностью одну из пар вертикально отклоняющих пластин двухлучевого осциллоскопа, а другую пару подключим к источнику пилообразного напряжения. Мы получим, плавно меняя собственную частоту  $\omega_0$  контура, ряд картин, сильно отличающихся одна от другой. При  $\omega_0 = \omega, 2\omega, 3\omega, \dots$  осциллограммы не отличаются заметно от синусоид частоты  $\omega, 2\omega, 3\omega, \dots$  Их амплитуды пропорциональны коэффициентам Фурье пилообразного колебания. В промежутках между указанными резонансными настройками мы видим слабые колебания сложной формы, весьма далекой от синусоидальной.

**5. Второй пример: резонанс маятника под действием периодических толчков.** Рассмотрим со спектральной точки зрения действие периодических толчков на маятник (гл. III, § 4). Разложение в ряд Фурье силы  $f(t)$  имеет здесь вид, указанный в § 2 (если исключить гармоники очень высокого номера — те, периоды которых сравнимы с длительностью толчка или меньше его). Результаты этого параграфа указывают, что резонанс наступает при значениях собственной частоты маятника  $\omega_0$ , равных  $\omega, 2\omega, 3\omega, \dots$  При каждой из этих настроек маятник совершает сильные колебания, весьма близкие к синусоидальным частотам  $\omega, 2\omega, 3\omega, \dots$

**6. Третий пример: выделение синусоидальных компонент и наблюдение спектра модулированных колебаний.** Если контуром рис. 470 является входной контур электронно-лучевого спектроскопа, мы увидим на экране в полном соответствии с рис. 471 *три линии*, высоты которых относятся, как  $b^2 : a^2 : b^2$ . Перейдя к наблюдению с помощью осциллоскопа, мы увидим, меняя настройку контура, что при  $\omega_0 = \omega - \Omega, \omega, \omega + \Omega$  в контуре происходят колебания, не отличающиеся заметно от синусоидальных колебаний частоты  $\omega - \Omega, \omega, \omega + \Omega$ . Еще раз подчеркнем, что в точности то же самое наблюдается, если э. д. с.

$$b \cos(\omega - \Omega)t + a \cos \omega t + b \cos(\omega + \Omega)t$$

создается *три* независимыми генераторами синусоидальных колебаний.

Замечательной иллюстрацией теории действия модулированного колебания на резонатор (синоним термина «гармонический осциллятор») являются следующие опыты Л. И. Мандельштама (1907 г.).

а) **Выделение боковой частоты камертоном.** Возьмем два слегка расстроенных камертона  $A, B$ . Заставим звучать оба камертона (возбудив каждый из них смычком) и заметим частоту биений  $\omega_2 - \omega_1$ , где  $\omega_1, \omega_2$  — частоты колебаний камертонов ( $\omega_2 > \omega_1$ ). Возбудим теперь смычком только камертон  $A$  (частоты  $\omega_1$ ). Заглушив его колебания рукой, мы не обнаружим заметного звучания камертона  $B$  (ср. гл. I, § 2). Снова возбудим смычком колебания камертона  $A$ , но будем теперь периодически открывать и закрывать (рукой или заслонкой) отверстие его резонатора, подобрав частоту модуляции (закрывания и открывания)  $\Omega$  **равной**  $\omega_2 - \omega_1$ . После нескольких секунд такого воздействия **заглушим**

камертон *A*. Мы продолжаем слышать отчетливое звучание. Это звучит камертон *B*: он отрезонировал на синусоидальное колебание частоты  $\omega_1 + \Omega$  (боковую частоту), входящее в состав спектра модулированного колебания, излучаемого резонатором камертона *A*.

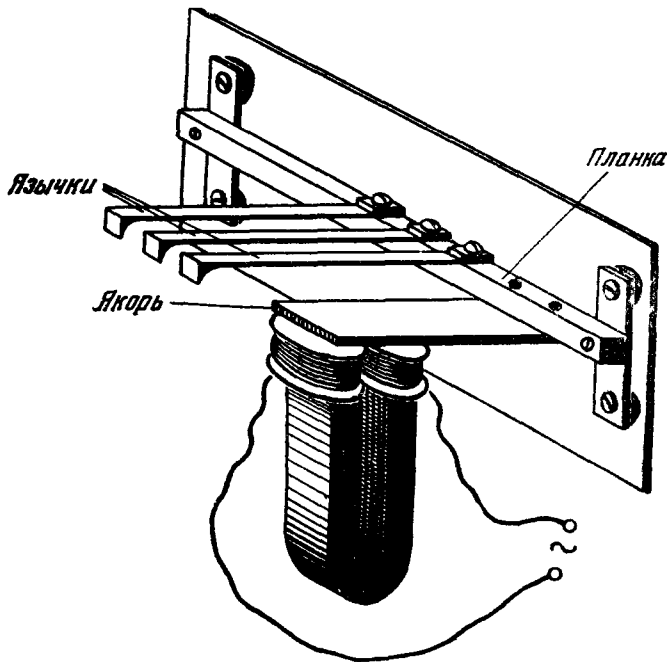


Рис. 484. Конструкция язычкового частотомера (показаны три языка)

б) Язычковый частотомер в роли спектроסקопа. Конструкция язычкового частотомера ясна из рис. 484. Исследуемый переменный ток течет по обмотке электромагнита, колебания якоря передаются планке, укрепленной на гибких пластинках. Колебания планки передаются гибким язычкам — тонким стальными пластинками, нагруженными на концах сосредоточенными массами. Язычки имеют собственные частоты  $(50 \pm n \cdot 0,5)$  герц, ( $n$  — целые числа). Когда частотомер включен в сеть переменного тока, сильнее всего колеблется тот язычок, собственная

частота которого наиболее близка к частоте переменного тока. Это и позволяет измерить последнюю. Для удобства наблюдения на свободных концах язычков укреплены белые поперечные квадратные пластинки; чем сильнее колеблется язычок, тем размытее мы видим соответствующую пластинку

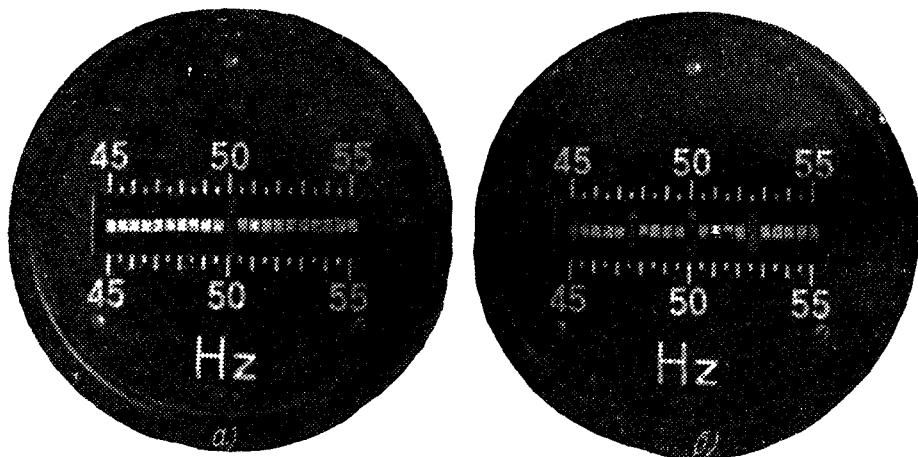


Рис. 485. *a* — установившаяся картина при подключении частотомера к городской сети (50 герц); *б* — установившаяся картина при периодическом прерывании тока от городской сети с частотой около 2,5 герц.

Включим язычковый частотомер в сеть городского переменного тока. Через несколько секунд устанавливается картина, показанная на рис. 485, *a*: сильно размывается, резонируя, язычок  $n = 0$ , частота тока равна 50 герц. Включим теперь в цепь городского переменного тока последовательно с язычковым частотомером телеграфный ключ и будем его ритмично (периодически) нажимать и отжимать рукой. Теперь устанавливается картина, показанная на рис. 485, *б*: сильно размываются (резонируют) язычки, настроенные на несущую и боковые частоты прерывисто

модулированного тока, текущего через частотомер. При другой частоте прерывания размоются другие (также эквидистантные) язычки.

Картина, которую образуют язычки частотомера, есть *спектр* тока. Язычковый частотомер является электромеханическим спектроскопом

#### § 4. Спектральное разложение как физическое явление (продолжение). Его осуществление с помощью решетки и призмы

1. Решение задачи о прохождении через синусоидальную решетку волны, представленной в виде тригонометрического ряда. Пусть на дифракционную решетку падает нормально плоская линейно-поляризованная световая волна \*)

$$E = f\left(t - \frac{z}{c}\right).$$

(Источник находится в бесконечности или в фокальной плоскости линзы.) Мы будем здесь считать форму волны (вид функции  $f$ ) произвольной, т. е., вообще говоря, *несинусоидальной*.

Пусть решетка расположена вдоль оси  $x$  и состоит из элементов, расположенных параллельно оси  $y$ . Предположим, что в плоскости  $x, z$  расположена труба (рис. 486), которая может поворачиваться в этой плоскости так, что ось трубы пересекает ось  $y$ . Пусть  $\theta$  — угол между осью трубы  $\zeta$  и осью  $z$ , т. е. нормалью к решетке. В трубе на-

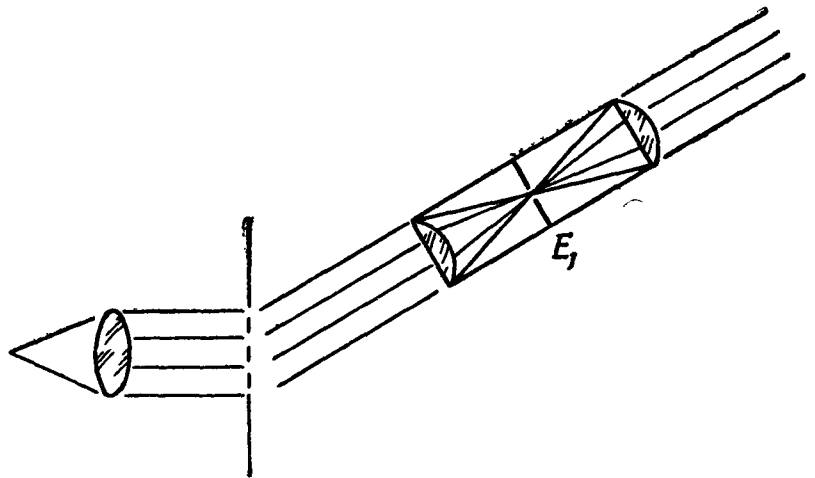


Рис. 486. Схема обсуждаемого опыта с дифракционной решеткой.

ходится центрированная оптическая система, состоящая из объектива и «окуляра», расположенных так, что плоскость  $F$  является для обоих фокальной плоскостью. В этой плоскости расположен непрозрачный экран, в котором прорезана узкая щель, параллельная оси  $y$  (т. е. элементам решетки); середина щели находится на оси трубы. Из теории дифракции Фраунгофера (гл. IX, § 3) следует, что через такую щель проходит только свет, дифрагированный решеткой под углом  $\theta$  к ее нормали. Окуляр превращает свет, прошедший через щель, снова в плоскую волну.

Мы хотим построить теорию, устанавливающую связь между функцией  $f(t - z/c)$ , описывающей *входящую* в нашу аппаратуру плоскую волну, и функцией  $\varphi(t - \zeta/c)$ , описывающей плоскую волну, *выходящую* из аппаратуры. Если входящая (падающая) плоская волна представлена как суперпозиция плоских синусоидальных волн

$$f\left(t - \frac{z}{c}\right) = \sum_{n=1}^N C_n \cos(\omega_n t - k_n z - \alpha_n), \quad (11.17)$$

\*) Обобщение всего дальнейшего разбора на случай суперпозиции двух таких волн со взаимно перпендикулярным направлением колебаний не представляет никаких трудностей. Происходит просто сложение освещенностей (см. гл. X, § 9).

такую теорию легко построить, воспользовавшись принципом суперпозиции, а также тем, что мы уже знаем о дифракции синусоидальных волн на решетке (гл. IX, § 3).

Предположим для простоты, что мы имеем дело с *синусоидальной* решеткой. Тогда амплитуда волны, посылаемой решеткой под углом  $\theta$  к ее нормали, когда на нее падает синусоидальная волна  $\cos(\omega t - kz)$ , равна на основании § 9 гл. IX (для положительных  $\theta$ )

$$\Phi(k, \theta) = a \left| \frac{\sin \left\{ \frac{D}{2} (k \sin \theta - K) \right\}}{k \sin \theta - K} \right|, \quad (11.18)$$

где  $a$  — постоянный множитель,  $k$  — волновое число,  $D$  — длина решетки, а

$$K = \frac{2\pi}{d},$$

где  $d$  — период решетки.

Угол  $\theta$  соответствует главному максимуму для света, волновое число которого  $k_\theta$  удовлетворяет соотношению

$$k_\theta \sin \theta = K. \quad (11.19)$$

Мы можем сказать, что  $k_\theta$  есть волновое число, на которое мы *настроили* установкой трубы под углом  $\theta$  нашу аппаратуру.

Введя (11.19) в (11.18), получаем:

$$\Phi(k, \theta) = a \left| \frac{\sin \left\{ \frac{DK}{2} \left( \frac{k}{k_\theta} - 1 \right) \right\}}{K \left( \frac{k}{k_\theta} - 1 \right)} \right|.$$

Следовательно, каждая синусоидальная слагаемая

$$C_n \cos(\omega_n t - k_n z - \alpha_n)$$

света, падающего на решетку, порождает выходящую из трубы монохроматическую плоскую волну вида

$$\varphi_n \left( t - \frac{\zeta}{c} \right) = \Phi(k_n, \theta) C_n \cos(\omega_n t - k_n \zeta - \beta_n).$$

Суммарная волна, выходящая из трубы, является суперпозицией таких монохроматических волн:

$$\varphi \left( t - \frac{\zeta}{c} \right) = \sum_{n=1}^N \varphi_n \left( t - \frac{\zeta}{c} \right) = \sum \Phi(k_n, \theta) C_n \cos(\omega_n t - k_n \zeta - \beta_n). \quad (11.20)$$

**2. Та же задача для призмы.** Заменяем решетку призмой, расположенной так, что плоскость падения света на нее параллельна плоскости  $xz$  (рис. 487). В остальном задачу поставим так же, как в п. 1.

Амплитуда волны, посылаемой призмой под углом  $\theta$  к оси  $z$ , когда на нее падает синусоидальная волна  $\cos(\omega t - kz)$ , равная, как мы знаем,

$$\Phi(k, \theta) = a(k) \left| \frac{\sin \left\{ \frac{kD(k)}{2} \sin[\theta - \psi(k)] \right\}}{\frac{kD(k)}{2} \sin[\theta - \psi(k)]} \right| \quad (11.21)$$

(см. гл. IX, § 9), где  $a(k)$  — множитель, не зависящий от  $\theta$ . Вид функции  $\psi(k)$  зависит от углов призмы и вида кривой дисперсии вещества, из которого сделана призма. То же относится к  $D(k)$ .

Угол  $\theta$  соответствует главному максимуму для света, волновое число которого  $k_\theta$  удовлетворяет соотношению

$$\psi(k_\theta) = \theta; \quad (11.22)$$

$k_\theta$  есть волновое число, на которое настроена аппаратура (ср. п. 1).

Вводя (11.22) в (11.21), получаем:

$$\Phi(k, \theta) = a(k) \left| \frac{\sin \left\{ \frac{kD(k)}{2} \sin [\psi(k) - \psi(k_\theta)] \right\}}{\frac{kD(k)}{2} \sin [\psi(k) - \psi(k_\theta)]} \right|. \quad (11.23)$$

Рассуждая так же, как в п. 1, снова получим для суммарной волны, выходящей из трубы, выражение (11.20), однако теперь функция  $\Phi(k, \theta)$  определена формулой (11.23).

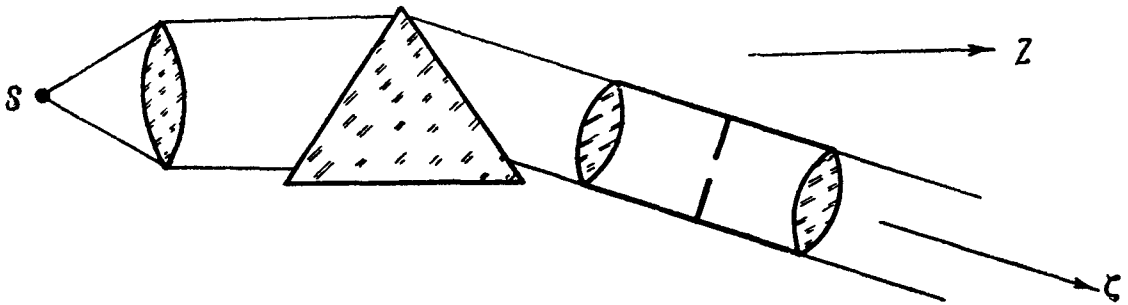


Рис. 487. Схема обсуждаемого опыта с призмой.

**3. Физический смысл решений. Монохроматизация.** Нарисуем спектрограмму света, падающего на решетку или призму (рис. 488, а), а под ней — график зависимости  $[\Phi(k, \theta)]^2$  от  $k$  при фиксированном значении  $\theta$ . На основании (11.20) мы получим спектрограмму света, проходящего через щель, умножая длину черточек рис. 488 а на ординаты находящихся под ними точек кривой рис. 488, б. Мы будем считать в этом параграфе, что все разности  $k_{n+1} - k_n$  велики по сравнению с шириной главного максимума этой кривой.

При том положении трубы, для которого построен рис. 488, б. частота, на которую настроена аппаратура, не совпадает ни с одной из частот, входящих в состав спектра света, падающего на решетку или призму. В соответствии с этим свет, выходящий из трубы, — его спектр показан на рис. 488, в — имеет весьма слабую интенсивность и является существенно немонахроматическим (цвета, входящие в состав падающего света, в нем представлены более или менее равномерно). Будем теперь, поворачивая трубу с помощью микрометрического винта («ручка настройки»), уменьшать  $\theta$ , т. е. увеличивать  $k_\theta$ . Кривая зависимости интенсивности проходящего света от  $k$ , которую мы будем называть (для того чтобы подчеркнуть аналогию с резонатором) «кривой настройки», будет деформироваться, ее главный максимум будет плавно смещаться вправо. Эта кривая будет последовательно принимать вид, показанный на рис. 488, б, г.

Зафиксируем трубу в таком положении, когда  $k_\theta = k_1$ . Повторяя построение рис. 488, б, в, мы получим для выходящего света спектрограмму, показанную на рис. 488, д. Теперь из трубы выходит свет большой интенсивности, в котором резко преобладает составляющая  $k_1$ , — выходящий свет является почти монохроматическим (скажем, красным) и тем более монохроматическим, чем острее главный максимум. Мы можем сказать, что наша аппаратура выделяет из состава падающего света волну

с волновым числом  $k_1$  или что она придает *самостоятельное* физическое существование красной монохроматической волне  $k_1$ , входящей в состав посылаемого на нее некогерентного света.

Будем поворачивать трубу дальше. Сначала на экране, куда падает свет, выходящий из трубы, наступит потемнение, затем на нем снова

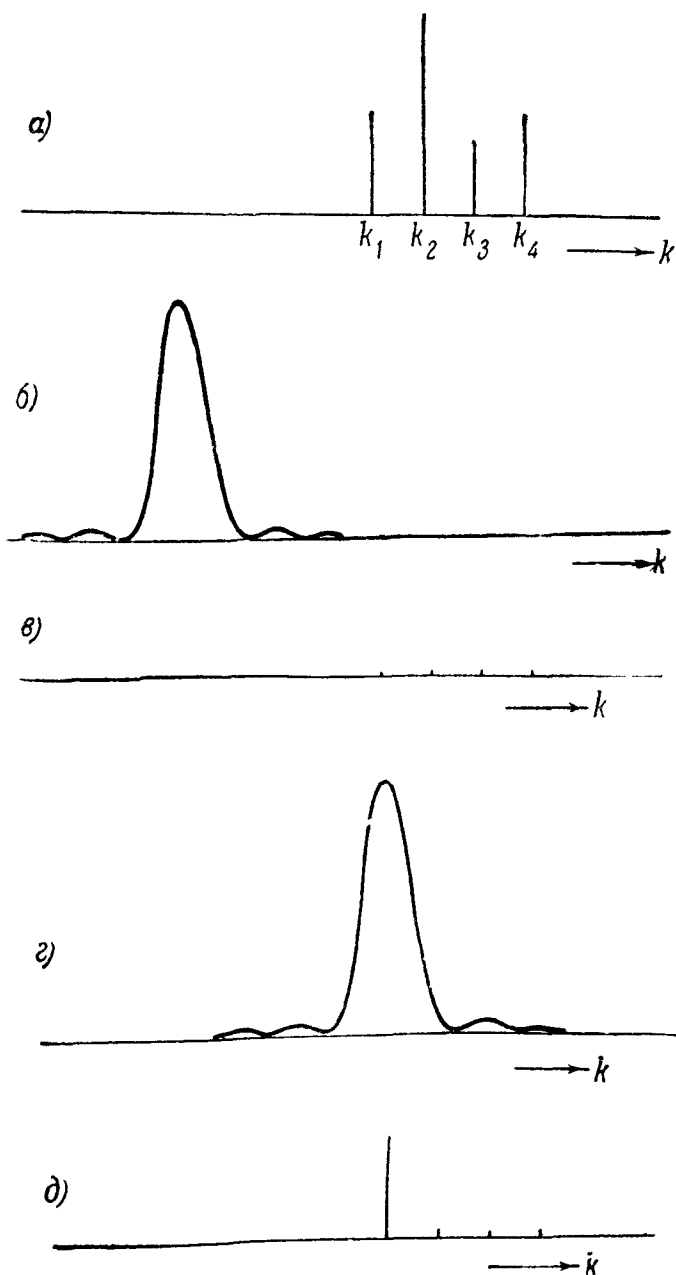


Рис. 488. Преобразование спектра решеткой или призмой.

мы должны прочесть формулы (11.18), (11.23) как уравнения, дающие зависимость интенсивности от  $k_\theta$  (или, что сводится к тому же, от  $\theta$ ) при заданном волновом числе падающего света. Распределение интенсивности на  $E_1$  есть суперпозиция распределений, соответствующих отдельным членам разложения (11.17). Эти распределения уже были рассмотрены и подробно описаны в гл. IX, § 3, 9. Каждое из них состоит, грубо говоря, из яркой светлой полосы (угловой ширины порядка  $\lambda/D$ ) с симметрично расположенными около нее менее яркими полосками. На экране  $E_1$  образуется на темном фоне ряд таких групп светлых полосок, соответствующих тем  $k_n$ , которые заключены между  $k_{\theta'}$  и  $k_{\theta''}$ . Цвет на про-

вспыхнет яркий кружок. Это будет тогда, когда  $k_\theta$  сравняется с  $k_2$ . Цвет светлого кружка — другой, чем при  $k_\theta = k_1$  (скажем, желтый). Двигая трубу дальше, т. е. перемещая пик кривой настройки по спектрограмме падающего света, мы получим на экране ряд резких просветлений, разделенных темнотой. При каждом просветлении выделяется та или иная из синусоидальных компонент падающего света — монохроматический свет того или иного цвета.

Приборы, выделяющие, подобно только что описанному, отдельные монохроматические компоненты падающего на них света, называются в оптике *монохроматорами* \*).

4. Физический смысл решения (продолжение). Образование спектра (цветной картины). До сих пор мы интересовались только светом, проходящим через щель. Сообразим, каково распределение освещенности на той стороне экрана  $E_1$  (рис. 486), которая обращена к объективу. На нее падает свет, дифрагированный под всеми углами  $\theta$ , лежащими в некотором интервале  $\theta' \leq \theta \leq \theta''$ , тем больше, чем больше диаметр объектива. Для того чтобы описать распределение освещенности на экране  $E_1$ ,

\*). Обычно в монохроматорах используется призма или комбинация призм.



тяжении каждой группы полосок одинаков (частота света в каждой из них равна частоте соответствующей компоненты разложения падающего света в тригонометрический ряд). Это одна из тех цветных картин, которые называются в оптике спектрами (ср. § 1). Здесь спектр — *линейчатый* (в отличие от *сплошного* спектра, описанного в § 1). Отдельные группы светлых полосок называются спектральными линиями.

Мы сможем *увидеть* спектр в увеличенном размере на экране  $E_2$ , убрав экран  $E_1$  и перефокусировав «окуляр» так, чтобы фокальная плоскость объектива и плоскость экрана  $E_2$  стали для нее сопряженными плоскостями (рис. 489). При каждом положении трубы на экране  $E_2$  виден, конечно, только участок спектра, ограниченный волновыми числами  $k_{\theta'}$ ,  $k_{\theta''}$ , соответствующими углам  $\theta'$ ,  $\theta''$ . Но, поворачивая трубу, т. е. из-

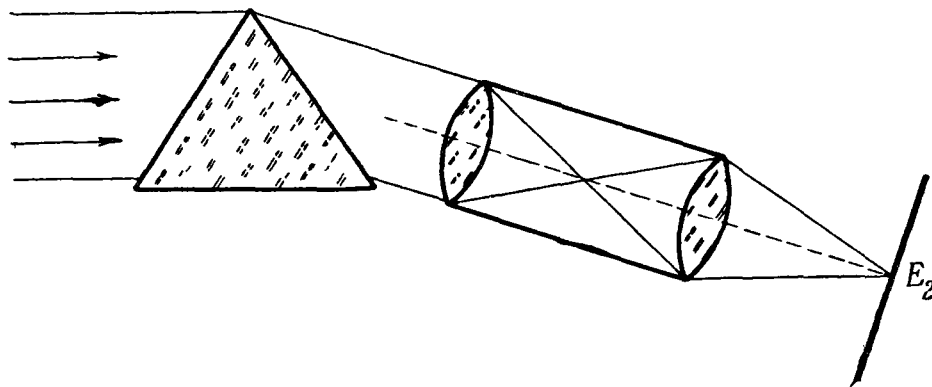


Рис. 489. Видоизменение опыта рис. 487. На экране  $E_2$  виден спектр света, падающего на призму.

меняя  $\theta'$  и  $\theta''$ , можно показать на экране весь спектр света, падающего на решетку. Здесь осуществляется как *физическое явление* спектральное разложение этого света.

Нами был описан лекционный эксперимент. При работе в лаборатории окуляр ставится в такое положение, при котором спектр образуется на сетчатке глаза, причем труба превращается в обычную зрительную трубу, или на фотопластинке. Прибор для наблюдения спектров называется *оптическим спектроскопом*. Между оптическим спектроскопом и электронно-лучевым существует такая же аналогия, как между монохроматором и колебательным контуром с фиксированной настройкой.

Описанная структура спектральных линий наблюдается лишь в том случае, когда источником света является достаточно узкая щель, параллельная оси  $y$ . Если щель широка, спектральные линии имеют приблизительно вид прямоугольников (суперпозиция освещенностей от отдельных «светящихся линий», параллельных оси  $y$ , ср. гл. X, § 10). Если вместо щели воспользоваться круглым отверстием достаточно малого диаметра, получатся спектральные линии того же типа, что на рис. 488, а если диаметр велик — вместо каждой линии светлое круглое пятно (количественные критерии легко получаются на основании сказанного в гл. X, § 10). Отсюда ясно преимущество щели перед круглым отверстием (ср. § 1).

**5. Первый пример: эффект Зеемана.** Пусть наблюдается в спектроскоп свет, испускаемый газом, находящимся в сильном магнитном поле  $H_0$ , перпендикулярно к направлению этого поля, причем при  $H_0 = 0$  все электроны испускают свет одинаковой частоты. При  $H_0 \neq 0$  наблюдаемый свет, как было показано (§ 2, п. 5), может быть представлен как суперпозиция линейно-поляризованной монохроматической волны частоты  $\omega$ , в которой вектор  $E$  параллелен  $H_0$ , и двух линейно-поляризованных волн частоты  $\omega \pm \Omega$ , в которых  $E$  перпендикулярен к  $H_0$ . Следова-

тельно, если острота «кривой настройки» решетки достаточно велика, мы должны увидеть в спектроскопе *три* линии. Если мы поместим перед спектроскопом поляризатор, то должно существовать такое положение его, при котором остаются только линии  $\omega \pm \Omega$ , и такое, при котором остается только линия частоты  $\omega$ .

Пусть теперь наблюдается свет, излучаемый параллельно  $H_0$  (через канал, просверленный в создающем поле электромагните). Этот свет, как было показано, может быть представлен как суперпозиция двух монохроматических волн частоты  $\omega \pm \Omega$ , поляризованных по кругу в противоположные стороны. Здесь спектроскоп должен показать две линии.

Если мы поместим перед спектроскопом пластинку  $\lambda/4$  и поляризатор, то должны существовать положения последнего, при которых остается только та или другая из этих линий.

Эти предсказания теории подтверждаются на опыте при наблюдении влияния магнитного поля на так называемые *сингулетные* оптические спектральные линии. Этот термин нуждается в разъяснении. В большинстве случаев оптические спектральные линии образуют *мультиплеты* — группы линий с очень близкими частотами. Пример мультиплета: желтые линии натрия  $\lambda = 5895,930 \text{ \AA}$  и  $\lambda = 5889,96 \text{ \AA}$  \*). Уединенная линия, т. е. линия, не являющаяся частью мультиплета, называется сингулетной. Пример такой линии: линия кадмия  $\lambda = 6438,7 \text{ \AA}$ . При  $H = 10\,000$  эрстед (очень сильное поле) и  $\lambda = 5000 \text{ \AA}$  расщепление линии — всего лишь порядка  $0,2 \text{ \AA}$ . Для того чтобы можно было обнаружить такое расщепление, спектральный прибор должен иметь очень острую кривую настройки (очень большую разрешающую силу (ср. § 5).

Описанное здесь расщепление спектральных линий под действием магнитного поля называется *нормальным эффектом Зеемана* (в отличие от аномального эффекта Зеемана, см. § 12).

**6. Второй пример: комбинационное рассеяние.** Рассмотрим свет, рассеиваемый электронами, входящими в состав молекул многоатомного газа.

Частью теплового движения газа (наряду с поступательными и вращательными движениями молекул) являются колебания атомов в молекуле. Такое колебание изображено для двухатомной молекулы на рис. 490. Поляризуемость каждого из оптических электронов молекулы зависит, вообще говоря, от расположения атомных ядер в молекуле. Поэтому естественно ожидать, что поляризуемость  $\beta$  каждого атома изменяется со временем около некоторого среднего значения  $\beta_0$  в такт с колебанием ядер в молекуле

$$\beta = \beta_0 + F(t).$$

Частота этого колебания порядка  $10^{12} \div 10^{13}$  герц (инфракрасные частоты).

Представим себе теперь, что на газ падает монохроматический видимый свет (частоты  $\omega/2\pi$  порядка  $10^{15}$  герц) от постороннего источника. Тогда на каждый электрон действует поле вида

$$E = E_m \cos \omega t,$$

возбуждающее электрический момент

$$p = \beta E = [\beta_0 + F(t)] E_m \cos \omega t. \quad (11.24)$$

\*)  $1 \text{ \AA}$  (1 ангстрем) — единица длины, обычно употребляемая в оптической и рентгеновской спектроскопии, равная  $10^{-8} \text{ см}$ .

Он представляет собой амплитудно-модулированное колебание. Несущая частота есть частота падающего света, частота модуляции равна частоте колебаний ядер в молекуле газа. Такими же модулированными колебаниями, очевидно, будут и колебания вектора  $E$  в свете, рассеиваемом газом.

Вспоминая сказанное в § 2, мы можем ожидать, что спектр рассеянного света состоит из колебания несущей частоты  $\omega$  и колебаний с боковыми частотами  $\omega \pm \Omega$ ,  $\omega \pm 2\Omega$ , ... ( $\Omega$  — частота колебаний ядер в молекуле). Направив рассеянный свет в спектроскоп с достаточно острой кривой настройки, мы должны получить спектр, состоящий из линий с частотами  $\omega$ ,  $\omega \pm \Omega$ ,  $\omega \pm 2\Omega$ , ..., являющимися комбинациями частоты падающего света и частоты колебаний ядер рассеивающих атомов.

Такое явление действительно существует. Это — частный случай *комбинационного рассеяния*, открытого одновременно и независимо в 1928 г. Г. С. Ландсбергом и Л. И. Мандельштамом в Москве и Раманом в Калькутте и наблюдаемого при рассеянии света твердыми телами, жидкостями и газами.

Обратим внимание на сходство формул (11.24) и (11.4). В (11.24) функция  $F(t)$ , изображающая колебание молекулы, играет ту же роль, что в формуле (4.28) функция, изображающая, например, передаваемый по радио разговор. Это позволило Л. И. Мандельштаму сделать следующее сравнение: «Так же как спектр обычного радиотелефонного передатчика несет в себе весь наш разговор, все, что вы хотите сказать, так и спектр рассеянного света несет то, что молекула говорит о себе. Изучая его, вы изучаете ее строение» \*). Исследование спектров комбинационного рассеяния является наиболее мощным средством распознавания структуры молекул и характера внутримолекулярных колебаний.

Модуляционные явления при рассеянии происходят не только вследствие периодических изменений  $\beta$ , но и вследствие флуктуаций плотности.

Как уже было сказано в гл. X, § 13, флуктуации плотности в твердом теле можно себе представить как результат суперпозиции стоячих упругих (акустических) волн. Упругие волны представляют собой трехмерные фазовые дифракционные решетки (см. гл. IX, § 9). Рассеяние, вызванное флуктуациями плотности, есть не что иное, как дифракция на этих решетках. Но эти решетки — пульсирующие: они периодически появляются и исчезают (исчезают в моменты, когда деформация обращается в нуль). Поэтому дифрагируя свет, они вместе с тем *модулируют* его. Эта модуляция также должна проявляться как расщепление спектральных линий падающего света. Именно это расщепление имелось в виду в конце гл. X (§ 13). Оно гораздо меньше, чем то, о котором шла речь выше. Как показывает теория, здесь  $\Omega/\omega$  порядка отношения скорости звука в кристалле к скорости света, т. е. порядка  $10^{-5}$ . С целью обнаружить это явление был предпринят тот цикл экспериментальных исследований Г. С. Ландсберга и Л. И. Мандельштама, который увенчался открытием комбинационного рассеяния света. Расщепление линий, вызванное флуктуациями плотности, впервые удалось обнаружить Е. Ф. Гроссу (Ленинград) в 1930 г., и притом не только в твердых телах, но и в жидкостях.

**7. Несинусоидальные решетки.** Проведем те же рассуждения, что в пп. 3, 4, для произвольной (несинусоидальной) решетки. Здесь «кривая

\*) Л. И. М а н д е л ь ш т а м, Полное собрание трудов, т. III, а также Успехи физических наук, т. 13, 1933.

настройки» изображается уравнением вида

$$\Phi(k, \theta) = a(k\theta) \frac{\sin\left(\frac{N}{2} kd \sin \theta\right)}{\sin\left(\frac{1}{2} kd \sin \theta\right)} \quad (11.25)$$

и имеет ряд главных максимумов, удовлетворяющих условию

$$kd \sin \theta = \pm m \cdot 2\pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (11.25a)$$

Направление  $\theta$  соответствует главному максимуму не только для волнового числа

$$k_\theta = \frac{2\pi}{d \sin \theta}, \quad (12.26)$$

но и для кратных ему волновых чисел  $2k_\theta, 3k_\theta, \dots$ . Некоторые из этих главных максимумов могут отсутствовать. Это будет в том случае, если для соответственных волновых чисел  $a(\theta) = 0$ .

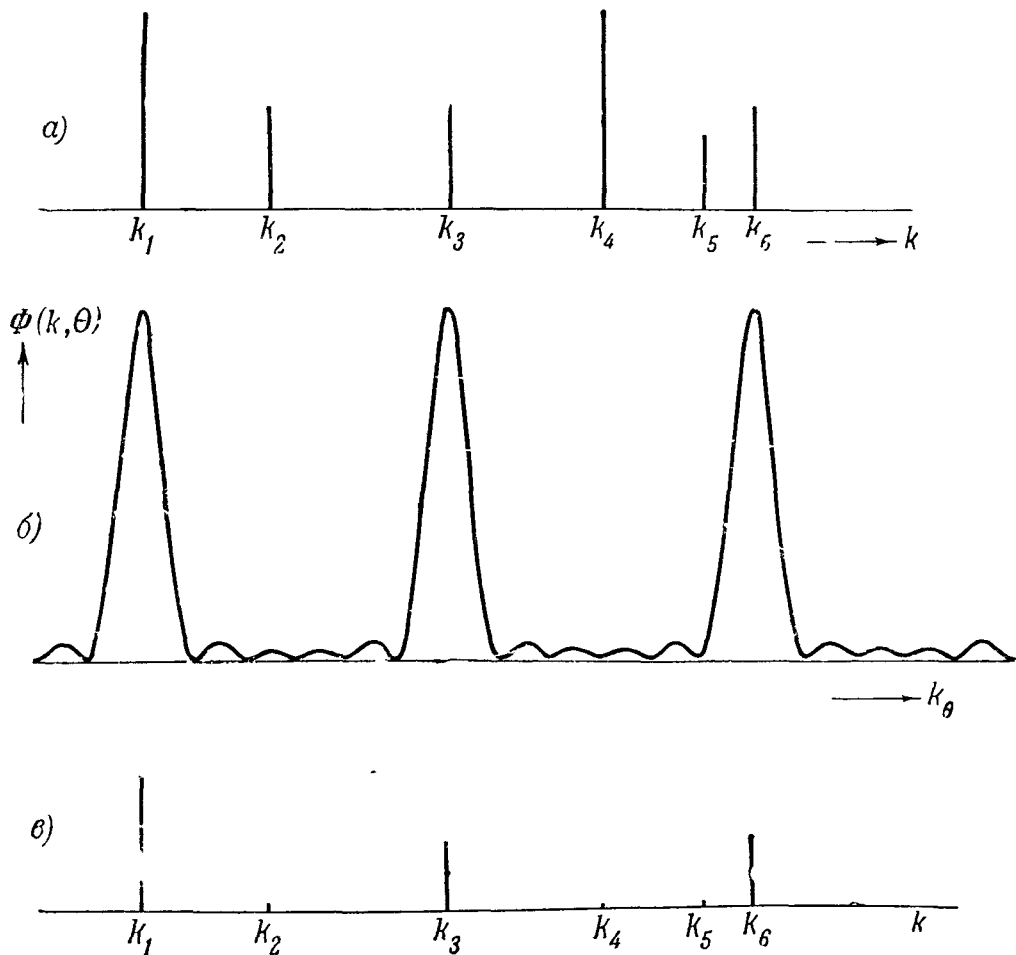


Рис. 491. Преобразование спектра решеткой: а—спектрограмм падающей волны; б—«кривая настройки» решетки; в—преобразованный спектр.

Проделав (рис. 491) построение, аналогичное проведенному в п. 3 для синусоидальной решетки (рис. 488), мы получаем следующий результат: решетка выделяет по направлению  $\theta$  не одну синусоидальную компоненту падающей волны, а ряд компонент, имеющих волновые числа  $k_\theta, 2k_\theta, 3k_\theta, \dots$  (точнее, те из них, для которых  $a \neq 0$ ). Таким образом, несинусоидальная решетка монохроматизирует свет только в том случае,

если его спектр охватывает меньше одной октавы, т. е. отношение волновых чисел крайних линий меньше, чем  $2:1$  (рис. 492).

Проделав построение, аналогичное рис. 482, мы получим распределение освещенности в поле зрения спектроскопа, в котором используется несинусоидальная решетка. Здесь получается, вообще говоря, не один спектр, а картина, состоящая из ряда спектров, частично перекрывающихся друг друга. Первый спектр состоит из главных максимумов первого порядка для всех частот, входящих в состав падающего света, второй спектр — из главных максимумов второго порядка, и т. д. Для того чтобы спектры  $m$ -го и  $(m+1)$ -го порядка не перекрывались, спектр падающего света должен быть заключен в достаточно узком интервале волновых

чисел, а именно  $k' < k < k''$ , где

$$(m+1)k' = mk'' \quad (11.27)$$

Только в этом случае картина, наблюда-

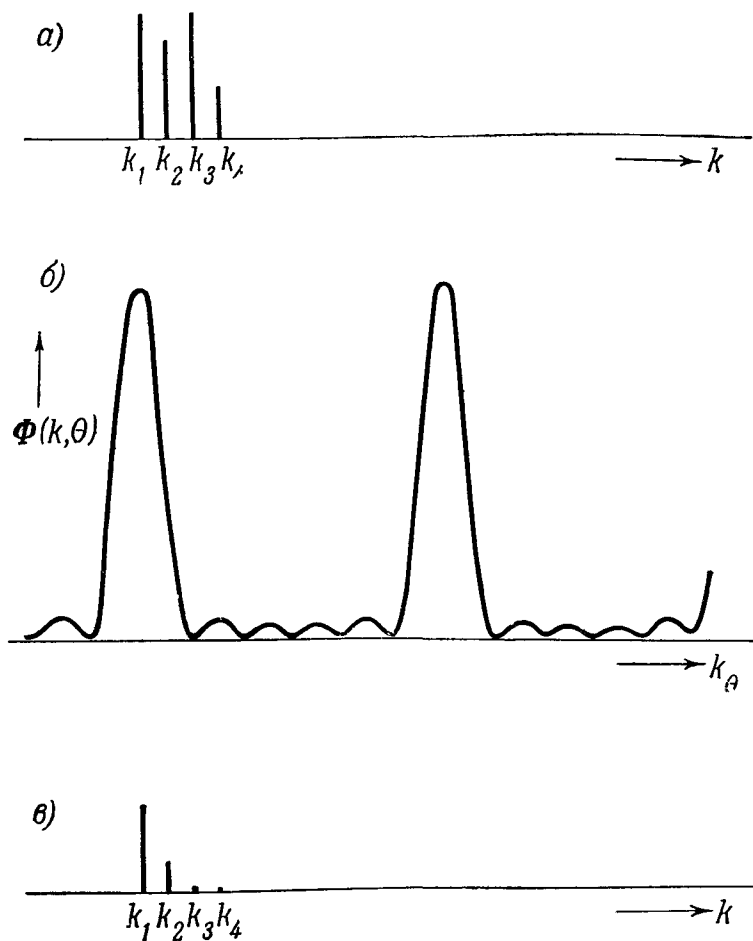


Рис. 492. То же, что рис. 491, при более узком спектре падающего света.

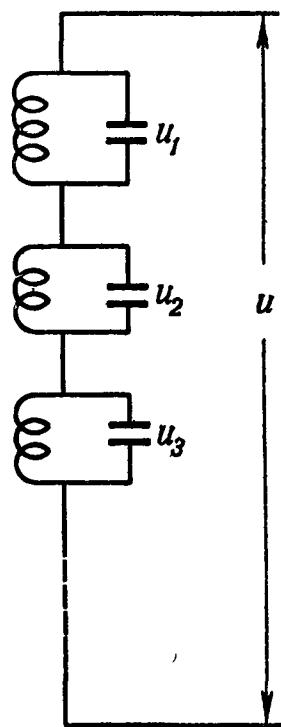


Рис. 493. Комбинация контуров, являющаяся моделью несинусоидальной решетки.

емая в спектроскопе, будет состоять из одного спектра. Спектроскоп с несинусоидальной решеткой пригоден только для наблюдения достаточно узких спектров. Если требуется наблюдать структуру широкого спектра, необходима предварительная грубая монохроматизация, вырезающая из него участок, удовлетворяющий условию (11.27), тем более узкий, чем больше  $m$ . Мы увидим (§ 5), что выгодно работать с большим  $m$ .

Аналогом несинусоидальной решетки является комбинация контуров, показанная на рис. 493. Все контуры настраиваются одной ручкой, их собственные частоты при каждом положении ручки находятся в отношении  $1:2:3 \dots$ . Напряжение  $u$  на выходе такой системы является суммой напряжений  $u_1, u_2, u_3, \dots$  на отдельных контурах. При данном положении ручки настройки такая комбинация выделяет из спектра внешней э. д. с.,

действующей на каждый из контуров, составляющие частоты  $\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, \dots$  ( $\omega_0$  — собственная частота первого контура), поэтому кривая зависимости интенсивности от угла поворота ручки настройки будет состоять, вообще говоря, из ряда перекрывающихся спектров.

## § 5. Избирательность и спектральная разрешающая сила

1. **Постановка задач.** Во всех рассмотренных до сих пор случаях мы считали, что разности между частотами (волновыми числами) синусоидальных составляющих колебания (волны) на входе спектрального прибора значительно превосходят ширину его «кривой настройки». Очень важен, однако, случай, когда отличие между некоторыми частотами (или волновыми числами) — того же порядка, что ширина кривой настройки, или даже мало по сравнению с ней. Этими случаями нам теперь и предстоит заняться.

а) **Задача о монохроматоре.** Пусть спектр излучения, падающего на монохроматор, состоит из произвольного числа линий, как угодно расположенных. Цель, для которой применяется монохроматор, — выделить из падающего света синусоидальную волну определенной частоты или определенный узкий участок спектра. Качество монохроматора характеризуется тем, что можно назвать его *избирательностью* или *монохроматизирующей способностью* — его способностью очищать требуемую составляющую падающего света от остальных. Целесообразно *определить* некоторую величину в качестве меры избирательности монохроматора и затем проделать расчеты, устанавливающие зависимость этой величины от конструктивных данных монохроматора.

б) **Задача о радиоприемнике.** В гл. III, § 7 мы рассматривали действие на радиоприемник *синусоидального* электрического поля. Но в действительности электрическое поле, действующее на антенну радиоприемника, — это *чрезвычайно сложное* поле, создаваемое десятками тысяч одновременно работающих на земном шаре передатчиков, имеющих всевозможные несущие частоты, и, кроме того, грозвыми электрическими разрядами, радиоизлучением, приходящим от Солнца и от звезд, а также всевозможными промышленными электрическими установками. Когда мы принимаем передачу дальней станции, поле, создаваемое ею около антенны приемника, — ничтожно малая слагаемая бушующей около нее электромагнитной бури. Каким образом достигается, что поле, создаваемое нашей дальней станцией, может быть отдельно воспринято приемником, — не тонет в этой буре, подобно тому как, скажем, слабый звук камертона тонет в грохоте оживленного уличного движения? Это техническое «чудо», без которого были бы невозможны почти все применения радио, осуществляется благодаря резонансным свойствам контуров, входящих в состав радиоприемника.

Первое требование, предъявляемое к радиоприемнику, аналогично требованию, предъявляемому к монохроматору. Оно состоит в том, чтобы приемник обладал достаточной *избирательностью* (или *селективностью*), т. е. был способен хорошо очищать участок спектра, создаваемый той передающей радиостанцией, передачу которой требуется принять, от всех остальных составляющих этого спектра. Здесь также целесообразно определить некоторую величину в качестве меры избирательности и затем выяснить, как эта величина зависит от конструктивных данных приемника.

Речь идет о выделении *участка спектра* (а не *одной* синусоидальной слагаемой) потому, что когда есть передача, радиопередатчик излучает не синусоидальные, а модулированные колебания (см. гл. IV, § 7). Второе

требование, предъявляемое к радиоприемнику, состоит в том, чтобы он верно воспроизводил модуляцию принимаемой передачи. Нам предстоит обсудить, в каком отношении находятся друг к другу требование избирательности и требование верности воспроизведения модуляции.

в) Задача о спектроскопе. Если ширина кривой настройки спектроскопа (оптического или электронно-лучевого, рис. 494, б) велика по сравнению с разностью частот двух линий спектра (рис. 494, а), кривая зависимости суммарной интенсивности от  $\omega_0$  будет иметь почти такой же вид, как в случае одной линии. Мы увидим в оптическом спектроскопе не две разделенные темнотой спектральные линии, а только одну; на экране электронно-лучевого спектроскопа мы увидим только один максимум (рис. 494, в), а не два отдельных. Спектр — реально существующая картина — не является теперь правильным изображением спектра функции, описывающей проходящее колебание; как принято говорить, наши спектроскопы *не разрешают* составляющие этого спектра. Требование, предъявляемое к спектроскопу (оптическому или электронно-лучевому), состоит в том, чтобы он *разрешал* возможно более близкие составляющие спектра проходящего колебания, т. е. чтобы каждому члену его разложения в тригонометрический ряд соответствовала отдельная спектральная линия (в физическом смысле). Спектроскоп тем ценнее, чем более тонкие детали спектра исследуемого колебания проявляются в создаваемой им картине.

Целесообразно *определить* некоторую меру спектральной разрешающей силы \*) (или разрешающей способности) спектроскопа и затем вычислить, как эта величина зависит от его конструктивных данных.

2. Избирательность и разрешающая сила колебательного контура. Способность приемника выделять передачу одной станции, способность электронно-лучевого спектроскопа разрешать отдельные линии спектра определяются главным образом свойствами входящих в их состав колебательных контуров. Поэтому мы будем говорить об избирательности и разрешающей силе колебательного контура. Для того чтобы дать целесообразное определение этих величин, рассмотрим случай, когда на контур действует сумма двух синусоидальных э. д. с. равной амплитуды и различной частоты, причем одна из частот совпадает с собственной частотой контура. При этом, так как речь будет идти лишь об *относительной* интенсивности колебаний, создаваемых каждой из слагаемых э. д. с., мы примем их амплитуды равными единице. Итак, пусть на контур действует внешняя э. д. с.

$$f(t) = \cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t. \quad (11.28)$$

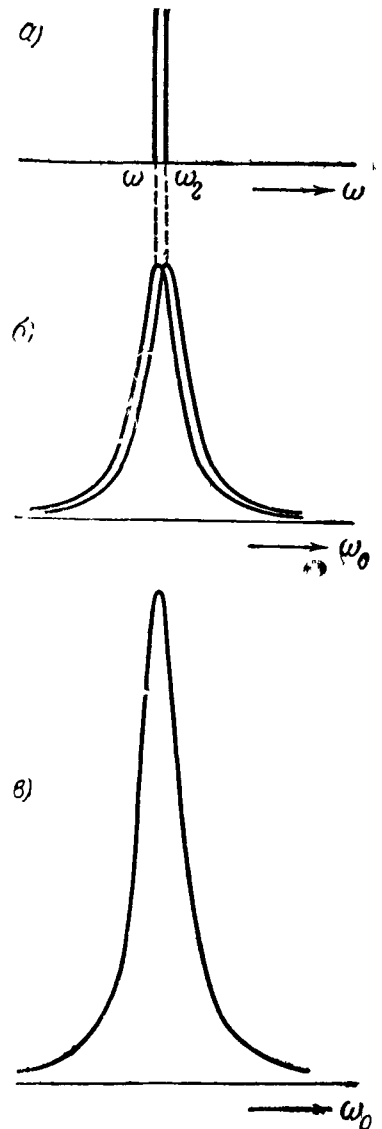


Рис. 494. Зависимость интенсивности от настройки контура для случая, когда ширина резонансной кривой велика по сравнению с разностью частот гармонических составляющих внешней силы.

\*) Не смешивать с разрешающей силой прибора, дающего оптическое изображение (телескопа, микроскопа), рассмотренной в гл. X.

Мы назовем *избирательностью* (селективностью) контура величину

$$S = \frac{\omega_0}{2|\Delta\omega|_S}, \quad (11.29)$$

где  $|\Delta\omega|_S$  — значение величины  $|\omega_1 - \omega_2|$ , при котором, если  $\omega_0 = \omega_1$ , в колебании на выходе составляющая частоты  $\omega_2$  имеет вдвое меньшую интенсивность, чем составляющая частоты  $\omega_1$ . При этом, как мы знаем (см. гл. III, § 8), для контура с большой добротностью

$$\frac{\omega_0}{2|\Delta\omega|_S} = Q \quad (11.30)$$

и, следовательно, для такого контура

$$S = Q,$$

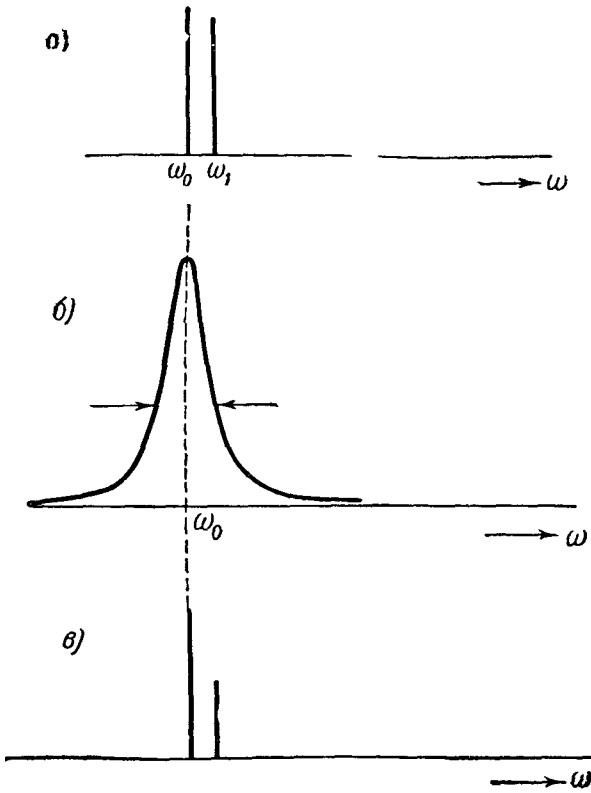


Рис. 495. Полоса пропускания контура на уровне  $\frac{1}{2}$ . Составляющая частоты  $\omega_1$  дает вдвое меньшие интенсивности, чем составляющая частоты  $\omega_0$ .

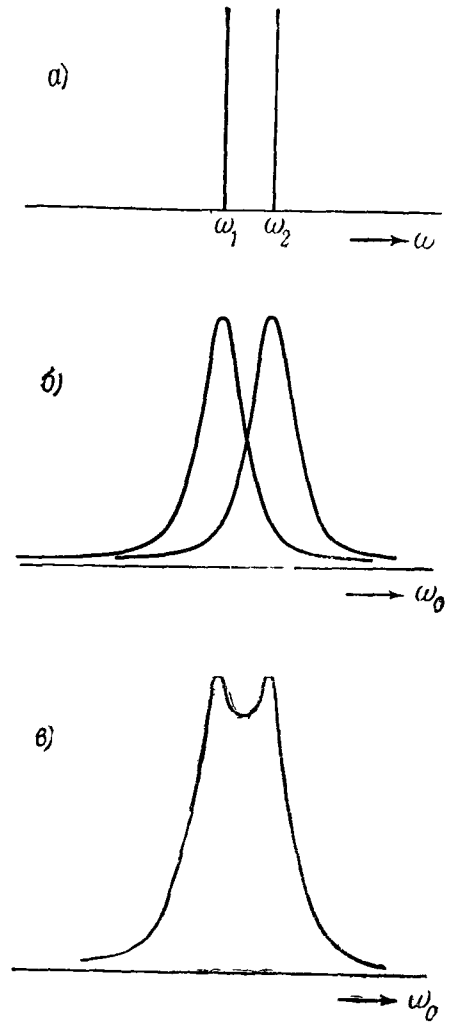


Рис. 496. К определению разрешающей силы колебательного контура: а — гармонические составляющие внешней силы; б — соответствующие им кривые зависимости интенсивности от настройки контура; в — зависимость суммарной интенсивности от настройки контура.

*избирательность контура равна его добротности.*

Величина  $2\Delta\nu$ , где  $\Delta\nu = |\Delta\omega|_S/2\pi$ , называется *полосой пропускания* контура на уровне  $\frac{1}{2}$  (рис. 495). Можно (условно) говорить, что контур хорошо пропускает частоты  $\nu$ , лежащие в интервале  $\nu_0 - \Delta\nu \leq \nu \leq \nu_0 + \Delta\nu$ , и плохо пропускает частоты, лежащие вне этого интервала.

Имеем на основании (11.30) (3.36а)

$$2|\Delta\omega|_S = 2\delta = \frac{R}{L}, \quad 2\Delta\nu = \frac{1}{2\pi} \frac{R}{L},$$

полосы пропускания тем шире, чем больше сопротивление контура.

Мы назовем *разрешающей силой* контура величину

$$R = \frac{\omega_0}{|\Delta\omega|_R} \quad (11.31)$$



(не смешивать с сопротивлением  $R$ ), где  $|\Delta\omega|_R$  — то минимальное значение  $|\omega_1 - \omega_2|$ , при котором суммарная интенсивность как функция собственной частоты  $\omega_0$  изображается двугорбой кривой с двумя достаточно отчетливо выраженными максимумами. Условимся считать, что максимумы достаточно хорошо выражены, если имеет место картина, показанная на рис. 496, т. е.  $|\omega_2 - \omega_1|$  вдвое превышает то значение расстройки  $|\omega_1 - \omega_0|$ , при котором интенсивность колебания частоты  $\omega_1$  спадает вдвое по сравнению с резонансом. При таком определении для контура с большим  $Q$  имеем:

$$|\Delta\omega|_R = 2 |\Delta\omega|_S,$$

и

$$R = S = Q. \quad (11.32)$$

Разрешающая сила, как и селективность, равна добротности контура\*). Она неодинакова при различных настройках контура — растет при данных  $R, L$  с уменьшением его емкости. Но полоса пропускания  $2\Delta\nu$  и разрешаемый интервал частот  $|\Delta\omega|_R$  не зависят от емкости. Само собой разумеется, все сказанное непосредственно переносится на случай механического или акустического осциллятора.

**3. Разрешающая сила дифракционной решетки и призмы (определение).** Будем считать (это уже молчаливо предполагалось в § 4) диаметры всех линз настолько большими, что характер наблюдаемой дифракционной картины определяется целиком решеткой или призмой (т. е. можно отвлечься от дифракционного характера явления фокусировки света). Будем считать также ширину входной щели настолько узкой, что можно ею пренебрегать (ср. гл. X, § 10). Тогда разрешающая сила спектроскопа определяется исключительно свойствами решетки (призмы), и вопрос сводится к рассмотрению разрешающей силы решетки (призмы).

Будем считать, далее, ширину выходной щели монохроматора настолько малой, что спектральный состав фокусируемого на нее света можно считать одинаковым на всем ее протяжении\*\*). Тогда избирательность монохроматора определяется исключительно свойствами решетки

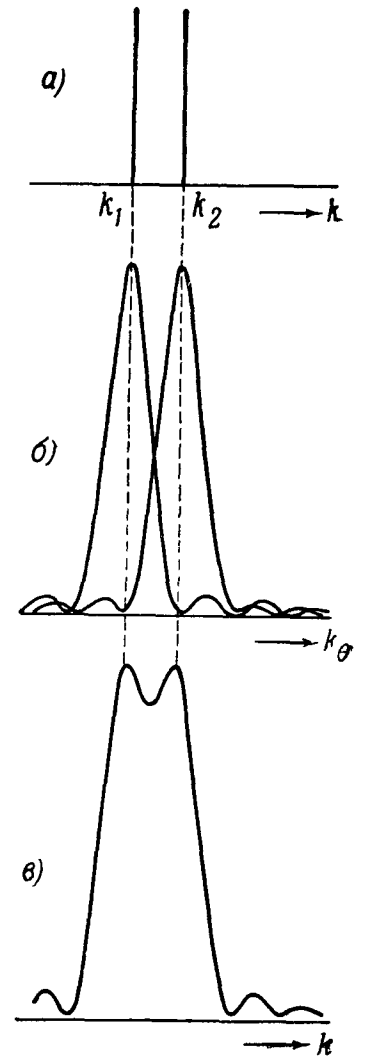


Рис. 497. К определению разрешающей силы дифракционной решетки: а — гармонические составляющие падающей волны; б — соответствующие им кривые зависимости интенсивности от направления наблюдения; в — зависимость суммарной интенсивности от направления наблюдения.

\*) [Описанный критерий разрешения для колебательного контура тоже условен (речь идет о такой «двугорбости» резонансной кривой, которая была бы легко различима «на глаз», например, в изображении этой кривой на экране электронного осциллографа) и в этом смысле не отличается от рэлеевского критерия разрешения в оптическом изображении (гл. X, § 10 и 12), а также в оптических спектральных приборах, о которых говорится в следующих разделах этого параграфа. Более тонкие способы анализа формы резонансной кривой (а в оптике — распределения интенсивности в спектре, даваемом дифракционной решеткой или призмой) могут продвинуть далеко за условную границу разрешения, т. е. приблизить к его естественному флуктуационному пределу (см. конец п. 3 в этом параграфе и дополнение редактора на стр. 271, 272).

\*\*\*) О щели конечной ширины мы скажем несколько слов в п. 5.

(призмы), и исследование качества монохроматора сводится к рассмотрению *избирательности решетки (призмы)*.

Пусть спектроскопом анализируется суперпозиция двух синусоидальных волн различной частоты и одинаковой интенсивности. Кривую суммарной освещенности  $\Phi^2(k_1, \theta) + \Phi^2(k_2, \theta)$  в фокальной плоскости объектива мы получим, складывая ординаты кривых освещенности, соответствующих отдельным синусоидальным волнам. Возможны случаи, когда эта кривая имеет два сильно разделенных главных максимума, спектроскоп *хорошо разрешает* составляющие  $k_1, k_2$ . Возможны случаи, когда эта кривая имеет только один главный максимум, и практически очень трудно установить по дифракционной картине наличие двух составляющих в спектре приходящего света. Как принято говорить, спектроскоп не разрешает составляющие  $k_1, k_2$ . Возможны также различные промежуточные случаи.

Следуя Рэлею, оптики-экспериментаторы условились считать границей разрешения тот случай, когда минимум функции  $\Phi^2(k_1, \theta)$ , ближайший к ее главному максимуму, совпадает с главным максимумом функции  $\Phi^2(k_2, \theta)$ . Кривая суммарной освещенности имеет при этом «слегка двугорбый» вид показанный, на рис. 497. Разрешающей силой называется величина

$$R = \frac{k}{|\Delta k|_R}, \quad (11.33)$$

где  $k$  — волновое число, для которого место наблюдения является главным максимумом,  $k + |\Delta k|_R$  — волновое число, для которого это место является первым минимумом.

Легко видеть, что

$$R = \frac{\lambda}{|\Delta \lambda|_R}, \quad [(11.33a)]$$

где  $\lambda, \lambda + |\Delta \lambda|_R$  — длины волн, соответствующие волновым числам  $k, k + |\Delta k|_R$ . Действительно,

$$\Delta \lambda = \Delta \left( \frac{2\pi}{k} \right) = -\frac{2\pi}{k^2} \Delta k = -\frac{\lambda}{k} \Delta k,$$

откуда

$$\frac{\lambda}{|\Delta \lambda|} = \frac{k}{|\Delta k|}.$$

Подчеркнем, что здесь отнюдь не утверждается принципиальная невозможность распознать с помощью спектрального прибора наличие в анализируемом свете двух составляющих, разделенных интервалом меньшим, чем  $|\Delta k|_R$ . Если достаточно точно промерить зависимость почернения фотопластинки от  $\theta$ , можно заметить, даже если  $|k_1 - k_2| < |\Delta k|_R$ , отклонение от кривой, соответствующей монохроматическому свету. То, что считается в оптике границей разрешения, соответствует приблизительно возможностям непосредственного визуального наблюдения. (Аналогично, разумеется, обстоит дело с разрешающей силой осциллятора.)

4. **Вычисление разрешающей силы решетки.** Подставим в формулу (11.33) в согласии с определением входящих в нее величин значения  $k, |\Delta k|_R$ , удовлетворяющие условию главного максимума

$$k d \sin \theta = m \cdot 2\pi$$

и минимума, ближайшего к главному максимуму  $m$ -го порядка,

$$N [k + |\Delta k|_R] d \sin \theta = (N m + 1) 2\pi.$$

Эти уравнения дают:

$$|\Delta k|_R d \sin \theta = \frac{1}{N} 2\pi$$

и, следовательно,

$$R = mN; \quad (11.34)$$

таким образом, в спектре  $m$ -го порядка разрешающая сила решетки равна произведению порядка спектра на число элементов решетки. В частности, для синусоидальной решетки, где существуют только спектры первого порядка,

$$R = N. \quad (11.34a)$$

Разрешающая сила синусоидальной решетки равна числу элементов решетки\*).

5. Вычисление разрешающей силы призмы. Здесь  $k$ ,  $|\Delta k|_R$  удовлетворяют уравнениям

$$k = k_0, \quad \frac{(k + \Delta k) D(k + \Delta k)}{2} \sin [\psi(k) - \psi(k + \Delta k)] = \pi,$$

которые получаются из (11.23) как условие главного максимума для  $k$  и первого минимума для  $k + \Delta k$ . Считая  $\Delta k$  малым, мы можем написать приближенно:

$$\sin [\psi(k) - \psi(k + \Delta k)] = -\sin [\psi'(k) \Delta k] = -\psi'(k) \Delta k$$

и заменить множитель  $(k + \Delta k) D(k + \Delta k)$  приближенным значением  $kD(k)$ , после чего из второго уравнения получаем:

$$-kD(k) \psi'(k) \Delta k = 2\pi$$

и, следовательно,

$$R = \left| \frac{k^2 \psi'(k) D(k)}{2\pi} \right|.$$

Формула принимает более простой вид, если ввести вместо  $\psi'(k)$  производную от  $\psi$  по длине волны; имеем:

$$\psi'(k) = \frac{\partial \psi}{\partial k} = \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dk} = -\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \cdot \frac{2\pi}{k^2}$$

и, следовательно,

$$R = \left| \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right| \cdot D(\lambda). \quad (11.35)$$

В исследуемом месте спектра разрешающая сила призмы равна производной от отклонения по длине волны, умноженной на ширину пучка у выхода из призмы.

Оба множителя имеют вполне прозрачный физический смысл. Первый множитель означает, что разрешающая сила тем больше, чем сильнее расходятся на диаграмме направленности света, выходящего из призмы,

\*) Легко получить этот же результат на основании формулы (11.18).

оси главных лепестков, соответствующих различным длинам волн. Второй множитель означает, что разрешающая сила тем больше, чем острее эти лепестки (рис. 498).

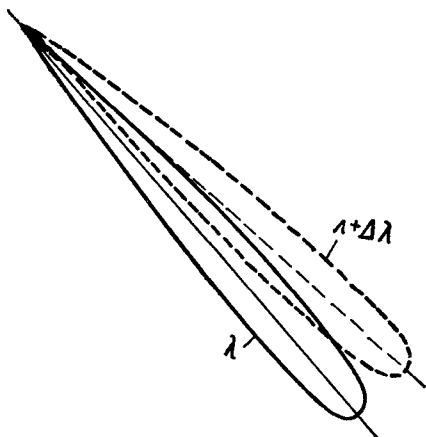


Рис. 498. Главные лепестки диаграммы направленности волн  $\lambda$  и  $\lambda + \Delta\lambda$ , выходящих из призмы (границы разрешения).

падения на призму выбран так, что угол  $\theta$ , соответствующий главному максимуму, — наименьший. В этом случае имеем, обозначив через  $b$  ширину основания призмы,

$$R = b \left| \frac{dn}{d\lambda} \right|, \quad (11.36)$$

разрешающая сила равна произведению ширины основания призмы на дисперсию стекла.

**6. Избирательность решетки и призмы.** Для избирательности (монокроматизирующей способности) решетки или призмы нет общепринятого определения. Если определить избирательность как

$$S = \frac{k}{|\Delta k|_S}, \quad (11.37)$$

где  $|\Delta k|_S$  — наименьшее  $\Delta k$ , при котором прибор, настроенный на  $k$ , полностью «очищает»  $k$  от  $k + \Delta k$ , мы получим:

$$S = R; \quad (11.38)$$

избирательность призмы или решетки равна ее разрешающей силе.

**7. Противоречие между избирательностью и верностью воспроизведения модуляции.** Предположим на мгновение, что радиопередатчики посылают идеально синусоидальные колебания. В таком случае мы тем лучше примем нужное колебание, чем больше избирательность приемника. Как бы ни была мала амплитуда нужного колебания и как бы ни были велики амплитуды мешающих колебаний, мы выделим нужное колебание и «отстроимся» от остальных, если сумеем сделать приемник с достаточно большой избирательностью. В действительности, однако, дело обстоит гораздо сложнее, так как при всякой передаче передатчики излучают *модулированное* колебание.

Нарисуем спектрограмму амплитудно-модулированного колебания, а под ней резонансную кривую колебательного контура и спектрограмму колебания, снимаемого с контура (рис. 499). Для того чтобы контур абсолютно верно воспроизводил модуляцию, необходимо, чтобы спектро-

грамма на выходе совпадала (с точностью до масштаба по оси ординат) со спектрограммой подаваемого на вход модулированного колебания \*). Это требование не может быть выполнено точно, но оно может быть выполнено приближенно, если «верхушка» резонансной кривой — достаточно плоская, т. е. полоса пропускания достаточно велика. Верность воспроизведения модуляции тем больше, чем больше отношение полосы пропускания контура к ширине спектра модулированного колебания. Практически для того, чтобы обеспечить хорошее воспроизведение звука, ширина полосы должна быть около 10 кГц. Рис. 499, б, в соответствует случаю, когда полоса пропускания и ширина спектра приблизительно одинаковы; здесь спектры колебаний на входе и на выходе контура уже заметно различаются между собой. Случай, когда полоса пропускания велика по сравнению с шириной спектра и верность воспроизведения модуляции велика, показан на рис. 499, г, д. Случай, когда полоса пропускания мала по сравнению с шириной спектра, показан на рис. 499, е, ж. Здесь боковые полосы почти полностью «обрезаются», контур превращает модулированное колебание, в почти немодулированное.

Но увеличение ширины полосы пропускания равносильно уменьшению избирательности контура. Итак, чем вернее контур передает модуляцию принимаемой передачи, тем меньше его избирательность. Но, как мы знаем, только большая избирательность позволяет «отстроиться» от мешающих радиопередач. При малой избирательности «пролезают» передачи остальных станций и мы будем слышать их одновременно (рис. 499, д).

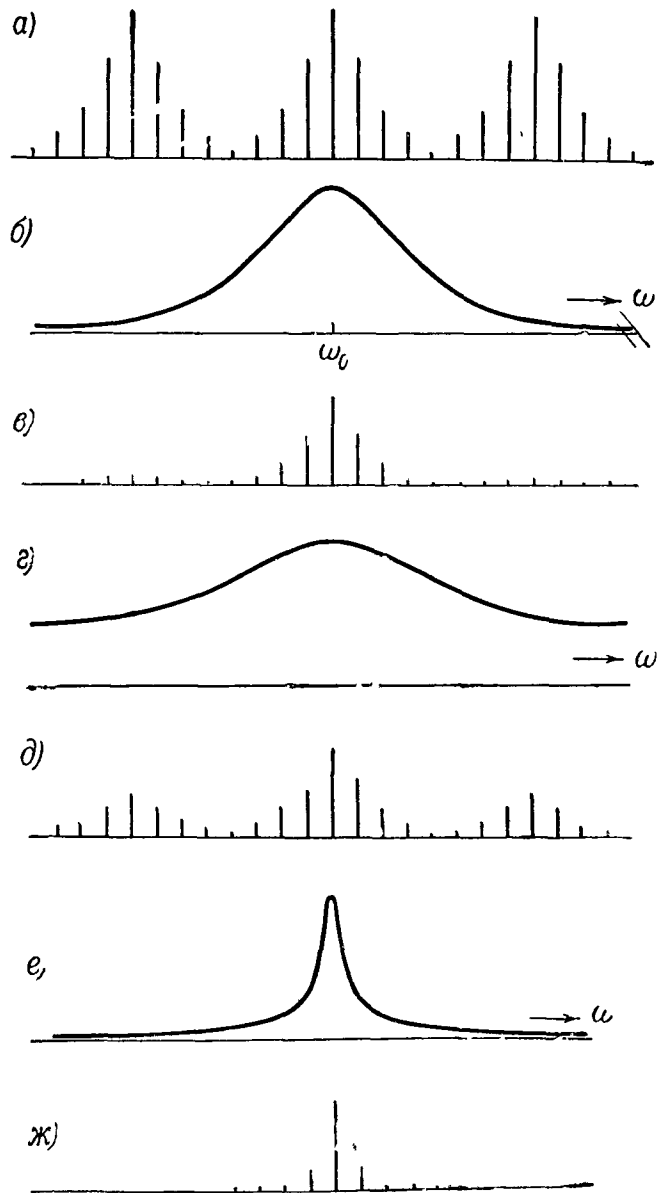


Рис. 499. а—спектрограмма совокупности нескольких амплитудно-модулированных колебаний; б—резонансная кривая контура; в—спектрограмма колебаний в контуре; г, д—то же, что б, в для контура с большей полосой пропускания; е, ж—то же, что б, в для контура с малой полосой пропускания.

\*) В случае радиотелефонной передачи этого достаточно, так как фазовые соотношения не играют роли: можно показать, что спектр после демодуляции, целиком определяющий звуковое ощущение (ср. стр. 221), не зависит от фаз синусоидальных компонент модулированного колебания. Дальше всюду имеется в виду именно этот случай. В случае телевизионной передачи фазовые соотношения играют существенную роль, и поэтому важно, чтобы контур правильно воспроизводил не только спектр модулированной э. д. с., но и фазовые соотношения ее синусоидальных компонент.

Итак, требование большой избирательности и верной передачи модуляции в корне противоречат одно другому. Чем лучше выполняется одно требование, тем хуже выполняется другое.

Противоречие между требованием хорошей отстройки от «мешающих» станций и высококачественной передачи музыки или речи — могло бы быть смягчено значительным раздвиганием несущих частот передающих радиостанций. Но тогда одновременно могло бы работать лишь небольшое число станций. Практическая необходимость одновременной работы огромного числа передающих радиостанций приводит к «тесноте в эфире»

(как принято говорить), или, выражаясь удачнее, к *тесноте в спектре*: несущие частоты радиостанций настолько близки, что боковые полосы одной станции непосредственно примыкают к боковым полосам другой. При конструировании приемников приходится искать приемлемый компромисс между требованием высокой избирательности и требованием верной передачи модуляции.

**8. Полосовой фильтр. Монохроматор с щелью конечной ширины.** Нахождение удовлетворительного компромисса между противоречивыми требованиями хорошей отстройки от мешающих станций и верным воспроизведением модуляции значительно облегчается применением вместо простых колебательных контуров так называемых *полосовых фильтров*: комбинаций контуров, имеющих резонансную кривую с уплощенной вершиной.

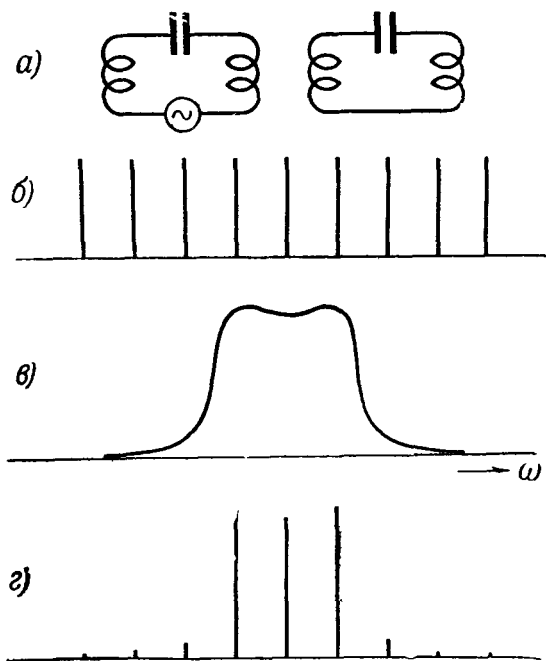


Рис. 500. *а*—полосовой фильтр; *б*—спектрограмма внешней э. д. с.; *в*—кривая пропускания полосового фильтра; *г*—спектр на выходе полосового фильтра.

Схема полосового фильтра и диаграмма, показывающая преобразование спектра таким фильтром, показаны на рис. 500.

Монохроматор с выходной щелью конечной ширины действует до известной степени наподобие полосового фильтра. В свете, выходящем из щели, равномерно представлены все составляющие спектра в интервале от  $k'$  до  $k''$ , где  $k'$ ,  $k''$  — волновые числа, для которых главные максимумы лежат на краях выходной щели. Полным аналогом такого монохроматора был бы приемник с большим набором колебательных контуров, собственные частоты которых равномерно заполняют некоторый интервал  $\omega' \leq \omega_0 \leq \omega''$ .

**9. Отличие между восприятием спектра в оптике и радио.** Наблюдая свет, выходящий из монохроматора, мы не можем по зрительному впечатлению судить о том, состоит ли он из одной спектральной линии или двух близких линий (например, о том, выделена ли одна из двух близких желтых линий натрового пламени). Но радиослушатель прекрасно различает случай, когда колебание на выходе колебательного контура синусоидально (он при этом ничего не слышит), от случая, когда оно состоит из близких линий, излучаемых *одной* станцией (он слышит речь диктора), и от случая, когда оно состоит из близких линий, излучаемых двумя станциями (он слышит, например, что одновременно, перебивая друг друга, говорят два диктора).

## § 6. Сплошной спектр

1. Математическое введение. Пусть функция  $f(t)$  — *непериодическая*. Теорема Фурье утверждает, что мы можем ее представить в интервале  $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ , где  $t_0$ , произвольно,  $T$  — произвольное положительное число, в виде ряда

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(n\omega t - \alpha_n), \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

или

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t),$$

причем для коэффициентов Фурье  $A_n, B_n$  справедливы формулы § 2, п. 3. Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(n\omega t - \alpha_n)$$

имеет смысл и *вне* интервала  $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ : этот ряд — *периодическая функция* периода  $T$ . Отсюда ясно, что вне указанного интервала он не равен нашей *непериодической* функции  $f(t)$ .

Если интересующие нас явления начинаются и кончаются в пределах промежутка времени  $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ , мы имеем право при их исследовании заменить функцию  $f(t)$  ее написанным выше разложением в ряд Фурье, справедливым *только* в этом промежутке.

Легко показать, проводя вычисление так же, как в § 2, п. 6, что

$$\int_{t_0}^{t_0+T} f^2(t) dt = \frac{T}{2} \sum_{n=0}^{\infty} C_n^2.$$

Применим теперь теорему Фурье к *непериодическим* функциям, изображенным на рис. 501 (обрывок синусоиды частоты  $\omega^*$ ) и на рис. 502 (беспорядочное колебание неограниченной продолжительности).

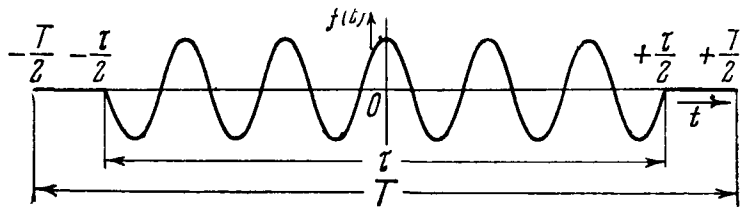


Рис. 501. Обрывок синусоиды и интервал разложения в ряд Фурье.

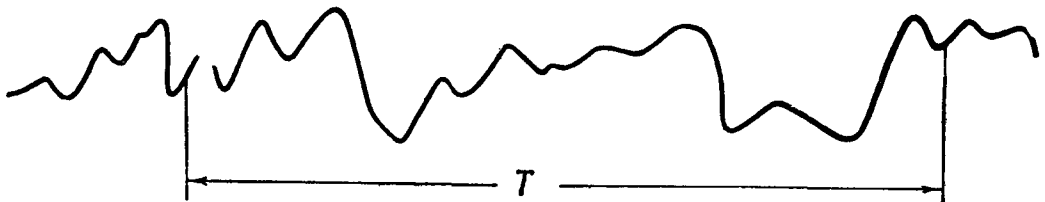


Рис. 502. Осциллограмма непериодической функции и интервал разложения.

а) О б р ы в о к с и н у с о и д ы. Согласно теореме Фурье мы можем представить функцию, изображенную на рис. 501, в интервале  $-T/2 \leq t \leq T/2$  в виде ряда

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos \omega_n t \quad (11.39)$$

(вследствие синусоидальности разлагаемой функции относительно оси ординат все  $B_n = 0$ ), где

$$C_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos \omega_n t dt, \quad \omega_n = n \frac{2\pi}{T}, \quad (11.39a)$$

причем в данном случае

$$\left. \begin{aligned} f(t) &= 0 \text{ при } t < -\frac{\tau}{2} \text{ и при } t > \frac{\tau}{2}, \\ f(t) &= \cos \omega^* t \text{ при } -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (11.40)$$

Пусть  $T$  превышает «длину обрывка»  $\tau$ , как показано на рис. 501. Тогда наше разложение годится на всем протяжении обрывка синусоиды. Подставляя (11.40) в (11.39a), имеем:

$$C_n = \frac{T}{2} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \cos \omega^* t \cos \omega_n t dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \cos (\omega^* - \omega_n) t dt + \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \cos (\omega^* + \omega_n) t dt$$

или, произведя интеграцию,

$$\frac{TC_n}{2} = \frac{\sin \left[ (\omega^* - \omega_n) \frac{\tau}{2} \right]}{\omega^* - \omega_n} + \frac{\sin \left[ (\omega^* + \omega_n) \frac{\tau}{2} \right]}{\omega^* + \omega_n}. \quad (11.41)$$

Назовем величину  $TC_n$  *приведенной амплитудой* синусоидальной составляющей частоты  $\omega_n$ , совокупность пар чисел  $(\omega_n, T^2 C_n)$  — *приведенным спектром*, ее графическое изображение — *приведенной спектрограммой*. Непрерывную функцию от  $\omega$

$$g^2(\omega) = \left\{ \frac{\sin \left[ (\omega^* - \omega) \frac{\tau}{2} \right]}{\omega^* - \omega} + \frac{\sin \left[ (\omega^* + \omega) \frac{\tau}{2} \right]}{\omega^* + \omega} \right\}^2 \quad (11.42)$$

мы назовем *распределением интенсивности* в спектре  $f(t)$ .

Если  $\omega^* \tau \gg 2\pi$ , т. е. обрывок содержит большое число периодов  $T^* = 2\pi/\omega^*$ , второй член сравнительно очень мал и распределение интенсивности в спектре практически выражается формулой

$$g^2(\omega) = \left\{ \frac{\sin \left[ (\omega^* - \omega) \frac{\tau}{2} \right]}{\omega^* - \omega} \right\}^2, \quad (11.42a)$$

имеющей такой же вид, как формула распределения интенсивности по углам в случае дифракции Фраунгофера от щели (см. гл. IX). Аналогом ширины щели является  $\tau$ .

Построение приведенной спектрограммы показано на рис. 503 при двух различных значениях интервала разложения  $T$ . Приведенные спектрограммы (рис. 503, в, д), получаются путем умножения ординат графика  $g^2(\omega)$  (рис. 503, а) на спектрограммы, показанные на рис. 503, б, г. Распределение интенсивности в спектре не зависит выбора интервала разложения  $T$  (если только он превышает  $\tau$ ). Линии приведенных спектрограмм расположены тем гуще, чем больше  $T$  (интервал между ними равен  $2\pi/T$ ).



На рис. 504 показаны приведенные спектрограммы, построенные (при фиксированных  $\omega^*$  и  $T$ ) для обрывков разной длины  $\tau$ . Чем короче обрывок, тем расплывчатее приведенная спектрограмма. Если назвать

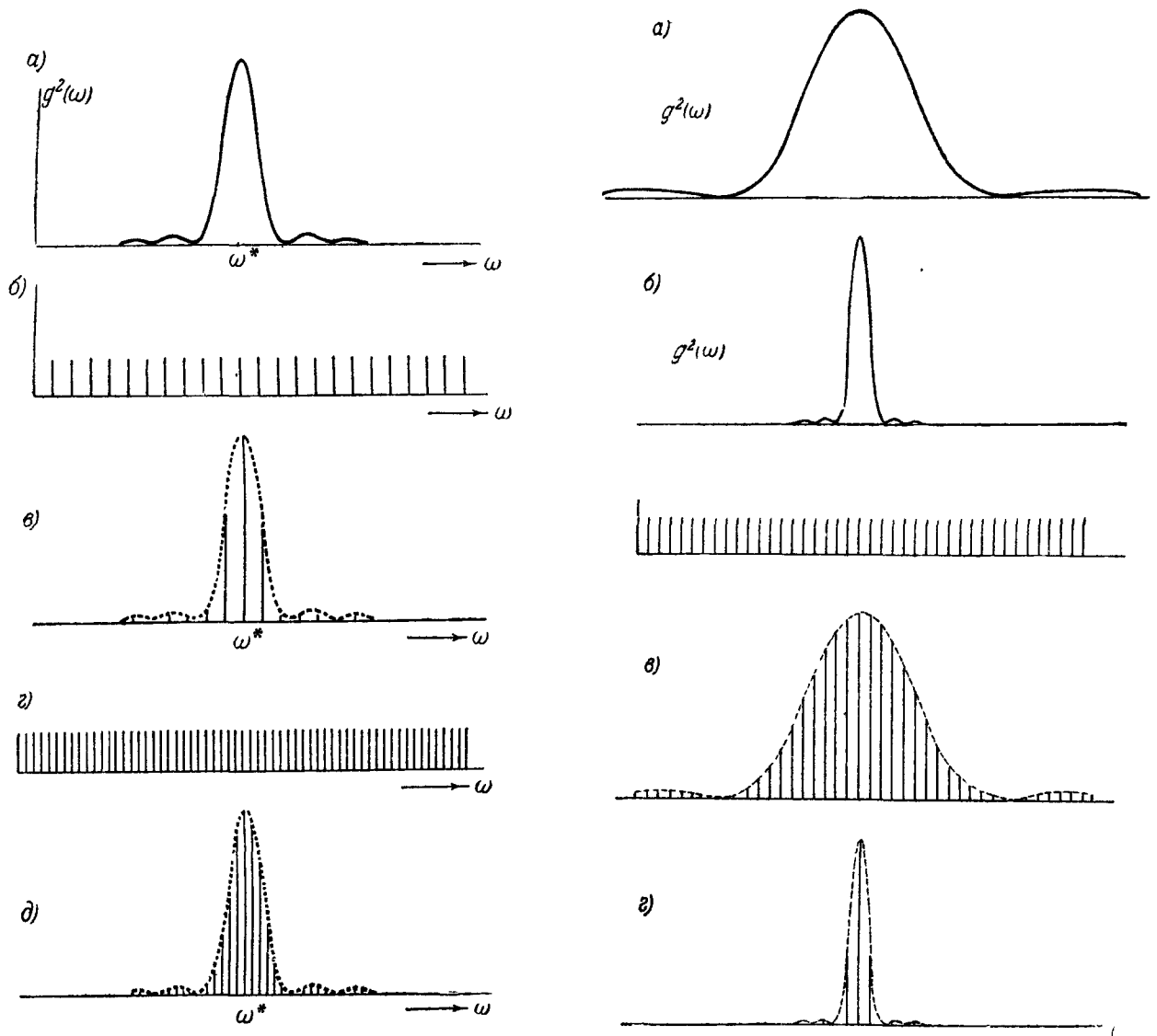


Рис. 503. Построение приведенных спектрограмм для обрывка синусоиды: *a*—график функции (11.42а); *b* и *в*—построение приведенной спектрограммы; *г* и *д*—то же, что *b* и *в* при увеличенном интервале разложения в ряд Фурье.

Рис. 504. Изменение приведенных спектрограмм при изменении длины обрывка синусоиды: *a*—график функции  $g^2(\omega)$ ; *б*—то же при возросшем  $\tau$  (масштаб по оси ординат уменьшен); *в* и *г*—приведенные спектрограммы, соответствующие случаям *a* и *б*.

шириной спектра интервал частот  $\Delta\omega$  между двумя ближайшими к главному максимуму  $\omega = \omega^*$  нулями функции  $g(\omega)^2$ , имеем на основании (11.42а)

$$\Delta\omega \cdot \tau = 4\pi. \quad (11.43)$$

Произведение продолжительности обрывка на ширину его спектра есть величина постоянная. Эта математическая теорема имеет для физики огромное значение.

б) Беспорядочное колебание неограниченной продолжительности. Согласно теореме Фурье мы можем представить функцию, изображенную на рис. 502, в произвольном интервале продолжительности  $T$  в виде ряда

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(\omega_n t - \alpha_n), \quad \omega_n = \frac{2\pi}{T}. \quad (11.44)$$

Выберем начало счета времени так, чтобы интервал разложения начинался при  $t=0$ . Тогда

$$C_n \cos \alpha_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \omega_n t dt, \quad C_n \sin \alpha_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \omega_n t dt. \quad (11.44a)$$

Это разложение представляет функцию  $f(t)$  только на протяжении интервала  $0, T$ . Здесь, как и в предыдущем примере, частоты и высоты линий спектрограммы зависят от  $T$ . Здесь также можно ввести понятие о распределении интенсивности в спектре. В отличие от предыдущего примера здесь, вообще говоря, она зависит от выбора интервала разложения.

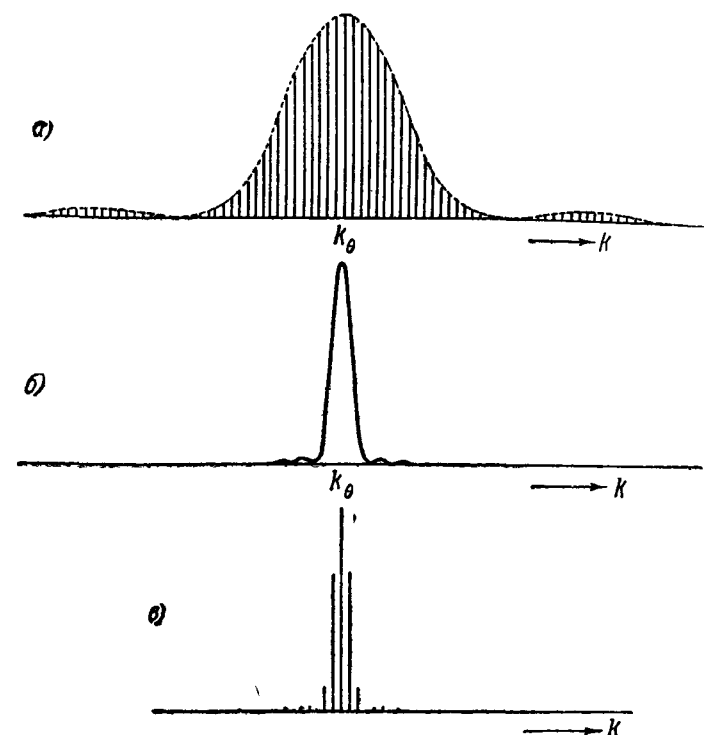


Рис. 505. Преобразование спектра обрывка синусоиды решеткой большой селективности; а—спектр падающего света; б—кривая настройки; в—спектр волны, распространяющейся в направлении  $\theta$ .

Нужно лишь взять интервал разложения  $T$  достаточно большим, а именно, большим по сравнению со временем установления на выходе спектрального прибора колебания, создаваемого синусоидальным колебанием на входе (относительно времени установления резонатора см. гл. III, относительно времени установления в случае решетки и призмы см. § 9, 10 этой главы). Тогда можно считать, что каждая синусоидальная составляющая дает установившееся синусоидальное колебание, определяемое в случае резонатора формулами (11.10), (11.11) или (11.13), в случае решетки — формулами (11.18), (11.20), в случае призмы — формулами (11.20), (11.23), и что колебание на выходе есть суперпозиция таких синусоидальных колебаний. Мы приходим, таким образом, к построению приведенной спектрограммы колебания на выходе, показанному на рис. 505, 506, 507. Здесь возможны два характерных случая.

а) Ширина кривой настройки  $2|\Delta\omega|_S$  (см. § 5) велика по сравнению с шириной спектра  $f(t)$ , как показано, например, для действия обрывка синусоиды на резонатор на рис. 506. Здесь спектр на выходе практически такой же, как на входе. Если мы примем, кроме того, во внимание фазовую резонансную кривую (рис. 104,

Но если функция  $f(t)$  определяется «случайным» процессом, подобным рассмотренным в гл. X, то, как показывает теория вероятностей, при  $T \rightarrow \infty$  распределение интенсивности в спектре стремится к пределу не зависящему от  $T$ . Мы будем считать, когда будем иметь дело со случайными процессами, что  $T$  достаточно велико для того, чтобы можно было пользоваться этим предельным распределением интенсивности в спектре.

## 2. Физическая задача.

Разберем прохождение через спектральные приборы колебаний, описываемых функциями типа рассмотренных в п. 1. Мы можем и здесь воспользоваться разложением колебания на входе в ряд Фурье и принципом суперпозиции, подобно тому как это делалось в § 3—5.

фаза мало меняется в интервале, малом по сравнению с  $2|\Delta\omega|_S$ , мы приходим к выводу, что колебание на выходе пропорционально колебанию на входе — обрывок синусоиды преобразуется в подобный ему обрывок синусоиды. Согласно соотношению (11.43), чем короче обрывок синусоиды, тем шире должна быть полоса пропускания  $2|\Delta\omega|_S$  для того, чтобы было  $2|\Delta\omega|_S \gg \Delta\omega$  и, следовательно, имело место такое преобразование без искажения. Этот результат чрезвычайно важен, в частности, для радиолокации.

Интенсивность колебания на выходе зависит здесь от настройки аппаратуры так же, как в случае синусоидального колебания. Это видно из рис. 506, где показано построение спектра колебания, получающегося на выходе при различных  $\omega_0$ . Аналитическое рассмотрение здесь сводится к следующему.

Пусть (для определенности)  $f(t)$  — э. д. с., действующая на колебательный контур, и мы измеряем средний квадрат напряжения на конденсаторе за промежуток времени от  $t = -T/2$  до  $t = T/2$ . Имеем на основании п. 1

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u^2 dt = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} C_n^2 \Phi^2(\omega_n, \omega_0),$$

где

$$\Phi(\omega_n, \omega_0) = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_n^2)^2 + 4\delta^2 \omega_n^2}}$$

или приближенно, так как  $C_n^2$  имеет значения, заметно отличные от нуля лишь там, где  $\Phi(\omega_n, \omega_0)$  равна приблизительно  $\Phi(\omega^*, \omega_0)$ ,

$$\frac{1}{2} \Phi^2(\omega^*, \omega_0) \sum_{n=0}^{\infty} C_n^2 = \text{const } \Phi^2(\omega^*, \omega_0).$$

Зависимость измеряемой величины от  $\omega_0$ , т. е. от настройки контура — такая же, как если бы на него действовала синусоидальная э. д. с. частоты  $\omega^*$ . По зависимости средней интенсивности от настройки контура здесь нельзя обнаружить различия между обрывком синусоиды частоты  $\omega^*$  и синусоидой частоты  $\omega^*$ .

б) Ширина кривой настройки мала по сравнению с шириной спектра. Такой случай показан на рис. 507 (действие обрывка синусоиды на резонатор) и на рис. 505 (действие обрывка синусоиды на призму или синусоидальную решетку). Здесь спектр

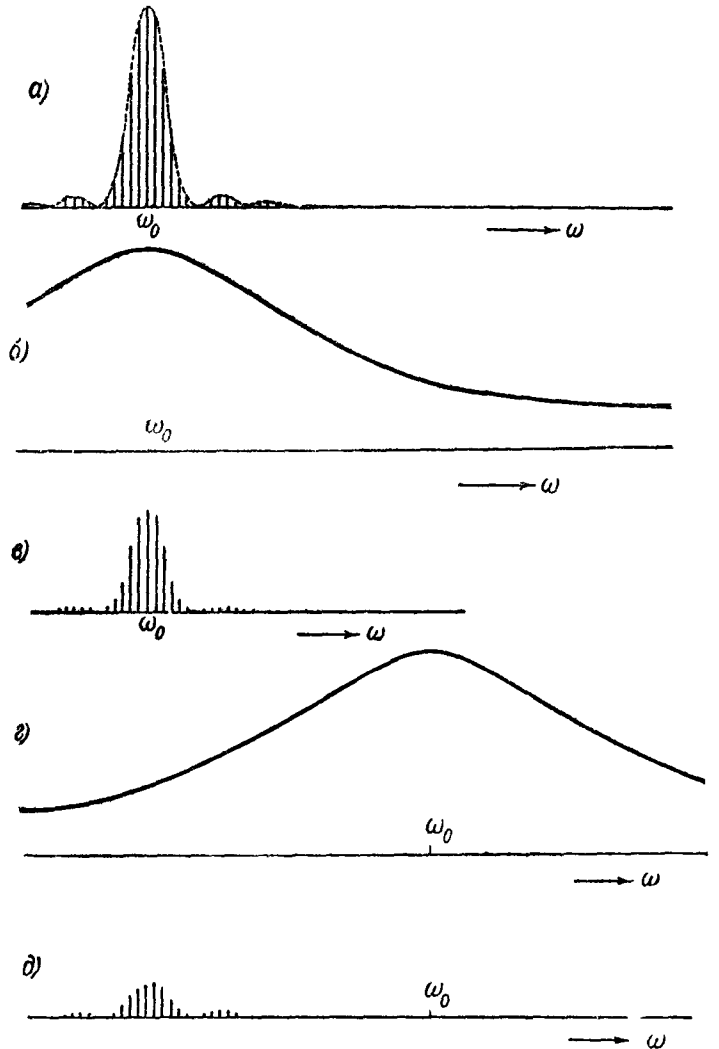


Рис. 506. Преобразование спектра обрывка синусоиды при различных настройках широкополосного контура: а — спектр внешней э. д. с.; б — резонансная кривая контура; в — спектр на выходе контура; г, д — то же, что б, в при изменении настройки контура.

на выходе при фиксированном  $\omega_0$  или  $\theta$  гораздо уже, чем спектр на входе: радиоприемник или монохроматор выделяет узкий участок спектра входящего колебания. При изменении  $\theta$  будут выделяться различные участки спектра и интенсивность на выходе будет меняться практически пропорционально  $g^2(\omega_0)$  или  $g^2(\omega_\theta)$ . Мы увидим на экране электронно-

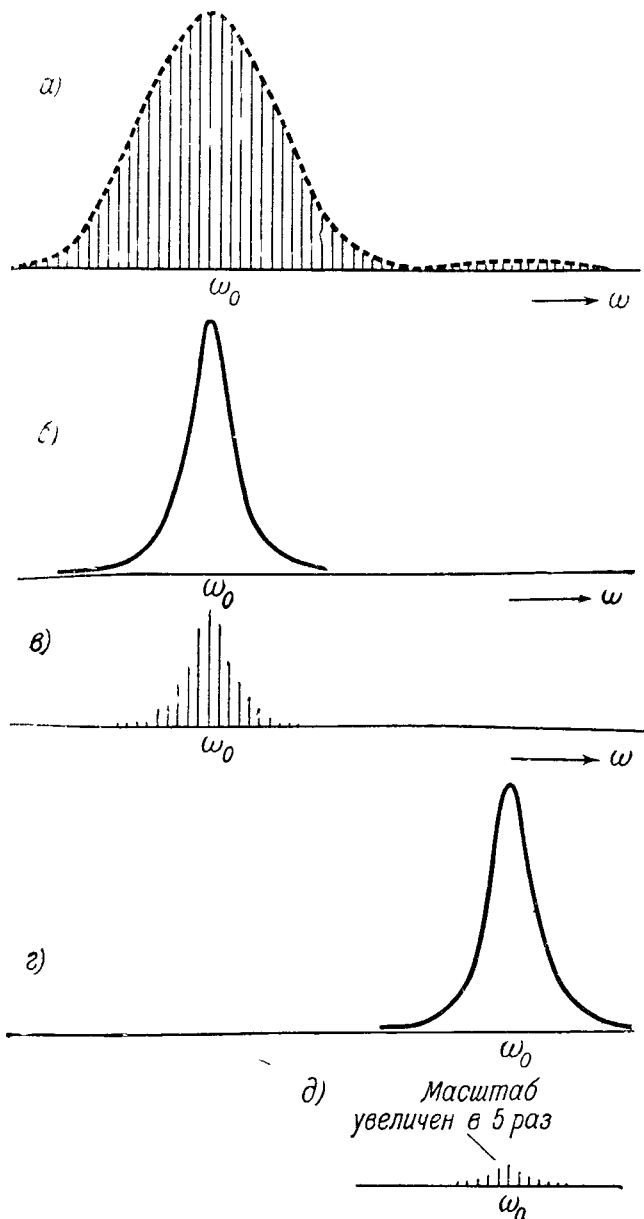


Рис. 507. Преобразование спектра обрывка синусоиды при различных настройках узкополосного контура; а—приведенная спектрограмма колебания на входе; б—резонансная кривая контура; в—спектрограмма колебания на выходе; г и д—то же, что б и в при измененной настройке контура. На рисунке д масштаб по оси ординат в пять раз крупнее, чем на рисунке в.

мер, заряд, который накопится на конденсаторе квадратичного демодуляционного устройства (гл. IV), имеющего временную постоянную, бóльшую по сравнению с  $\tau$ , если на его вход подается напряжение  $u_c$ .

Имеем на основании п. 1 этого параграфа

$$I = \frac{T}{2} \sum_{n=0}^{\infty} C_n^2 \Phi^2(\omega_n, \omega_0) = \frac{2}{T} \sum_{n=0}^{\infty} g^2(\omega_n) \Phi^2(\omega_n, \omega_0).$$

лучевого осциллоскопа не узкую вертикальную черточку, а кривую, воспроизводящую график функции  $g^2(\omega_0)$ . Оптический спектроскоп покажет засвеченную полосу, ширина которой велика по сравнению с интервалом  $(\Delta\lambda)_\tau$ . Здесь свет, посылаемый решеткой или призмой под различными углами  $\theta$ , имеет различные цвета, соответствующие частотам  $\omega_\theta$ , и интенсивность, пропорциональную  $g^2(\omega_\theta)$ ; распределение интенсивности в спектре (реально существующей картине) воспроизводит функцию  $g^2(\omega)$ , т. е. распределение интенсивности в спектре функции  $f(t)$ . Такая картина называется в оптике *сплошным спектром*. Мы будем называть также сплошным спектром картину описанного типа на экране электронно-лучевого осциллоскопа.

Остановимся подробнее на случае обрывка синусоиды. На основании соотношения (11.43) здесь ширина сплошного спектра тем больше, чем короче обрывок синусоиды. Проведем и здесь количественные расчеты.

Предположим сначала, что э. д. с., имеющая вид обрывка синусоиды, действует на колебательный контур. Вычислим величину

$$I = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u_c^2 dt.$$

Ее можно назвать интегральным квадратичным эффектом сигнала. Эта величина определяет, напри-

Положение здесь — обратное случаю а): во всем интервале значений  $\omega_n$ , где  $\Phi^2(\omega_n, \omega_0)$  заметно отличается от нуля,  $g^2(\omega_n)$  имеет приблизительно постоянное значение, равное  $g^2(\omega_0)$ , и мы можем написать приближенно:

$$I = \frac{2}{T} g^2(\omega_0) \sum_{n=0}^{\infty} \Phi^2(\omega_n, \omega_0) = M g^2(\omega_0),$$

где

$$M = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\Phi^2(\omega_n, \omega_0)}{T}.$$

Величина  $M$  полностью определена формой резонансной кривой колебательного контура и не зависит от выбора интервала разложения  $T$ . Действительно, в выражении для  $M$  число членов суммы, относящихся к любому фиксированному интервалу частот  $\omega' \leq \omega \leq \omega''$ , пропорционально  $T$ , а величина этих членов обратно пропорциональна  $T$ . В согласии со сказанным выше кривая зависимости  $I$  от  $\omega_0$  совпадает (с точностью до масштаба по оси ординат) с графиком функции  $g^2(\omega_0)$ .

Рассмотрим теперь другую задачу. Пусть вспышка света в виде обрывка синусоиды проходит через решетку с синусоидальной пропускаемостью.

Рассмотрим величину

$$I = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} E^2 dt,$$

где  $E$  — напряженность поля в точке наблюдения. Здесь величина  $I$  определяет почернение фотопластинки, зрительное впечатление от короткой вспышки света, отброс гальванометра, включенного в цепь фотоэлемента. Аналогично случаю контура имеем здесь:

$$I = \frac{T}{2} \sum_{n=0}^{\infty} C_n^2 \Phi^2(k_n, k_\theta) = \frac{2}{T} \sum_{n=0}^{\infty} g^2(\omega_n) \Phi^2(k_n, k_\theta), \quad k_n = \frac{\omega_n}{c},$$

и приближенно, так как по предположению  $\Phi^2(k_n, k_\theta)$  заметно отличается от нуля лишь в интервале значений  $k_n$  таком, что в соответствующем интервале значений  $\omega_n$ , функцию  $g^2(\omega_n)$  можно считать постоянной,

$$I = \frac{2}{T} g^2(\omega_\theta) \sum_{n=0}^{\infty} \Phi^2(k_n, k_\theta) = M g^2(\omega_\theta) = M g^2\left(\frac{cK}{\sin \theta}\right),$$

где коэффициент

$$M = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\Phi^2(k_n, k_\theta)}{T},$$

как и для контура, полностью определяется формой кривой настройки. Следовательно, зависимость  $I$  от  $1/\sin \theta$  (распределение почернения на фотопластинке) воспроизводит в определенном масштабе график функции  $g^2(\omega)$ .

в) П р и б л и ж е н н о е в ы ч и с л е н и е к о э ф ф и ц и е н т о в  $M$ . Вычислим сначала  $M$  для контура. Так как  $T$  велико по сравнению с временем установления контура, разность  $\Delta\omega = 2\pi/T$  частот соседних линий мала по сравнению с шириной резонансной кривой  $\Phi^2(\omega_n, \omega_0)$ .

Поэтому сумму можно приближенно заменить интегралом

$$M = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\Phi^2(\omega_n, \omega_0)}{T} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \Phi^2(\omega_n, \omega_0) \Delta\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \Phi^2(\omega_n, \omega_0) d\omega$$

или, воспользовавшись выражением для  $\Phi$ ,

$$M = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega_0^4 d\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2} = \frac{\omega_0^4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{(\omega_0 - \omega)^2 (\omega_0 + \omega)^2 + 4\delta^2 \omega^2}.$$

В случае очень острой резонансной кривой заметную долю в интеграл вносят только значения подынтегральной функции при  $\omega^2$ , близком к  $\omega_0^2$ , и мы можем написать приближенно:

$$M = \frac{\omega_0^4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{(\omega - \omega_0)^2 (2\omega_0)^2 + 4\delta^2 \omega_0^2} = \frac{\omega_0^2}{4\pi} \int_{-\omega_0}^{\infty} \frac{d(\omega - \omega_0)}{(\omega - \omega_0)^2 + 4\delta^2} = \frac{\omega_0^2}{4\pi\delta} \int_{-\frac{\omega_0}{\delta}}^{\infty} \frac{d\left(\frac{\omega - \omega_0}{\delta}\right)}{\left(\frac{\omega - \omega_0}{\delta}\right)^2 + 1}.$$

На том же основании мы можем приближенно заменить нижний предел интегрирования на  $(-\infty)$ , что дает:

$$M = \frac{\omega_0^2}{4\pi\delta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{1 + \xi^2} = \frac{\omega_0^2}{4\pi\delta} [\arctg \xi]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\omega_0^2}{4\pi\delta} \cdot \pi = \frac{\omega_0^2}{4\delta}.$$

Прделаем аналогичное вычисление для синусоидальной решетки. На основании (11.18), (11.19) и соотношения  $\Delta k = 2\pi/cT$ , где  $\Delta k = k_n - k_{n-1}$ , имеем:

$$M = \frac{c}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a^2 \left\{ \frac{\sin \left[ \frac{DK}{2} \left( \frac{k_n}{k_\theta} - 1 \right) \right]}{K \left( \frac{k_n}{k_\theta} - 1 \right)} \right\}^2 \Delta k$$

или (приближенно), заменяя сумму интегралом

$$M = \frac{ca^2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{\sin \left[ \frac{DK}{2} \left( \frac{k_n}{k_\theta} - 1 \right) \right]}{K \left( \frac{k_n}{k_\theta} - 1 \right)} \right\}^2 dk = \frac{ca^2 k_\theta D}{2\pi K} \int_{-\xi_1}^{\infty} \left( \frac{\sin \xi}{\xi} \right)^2 d\xi,$$

где

$$\xi = \frac{DK}{2} \left( \frac{k}{k_\theta} - 1 \right), \quad \xi_1 = \frac{DK}{2},$$

или также приближенно, так как подынтегральная функция очень мала везде, за исключением области значений  $k$ , близких к  $k_\theta$ :

$$M = \frac{ca^2 k_\theta D}{2\pi K} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin \xi}{\xi} \right)^2 d\xi.$$

Последний интеграл равен  $\pi^*$ ), и следовательно,

$$M = \frac{ca^2 k_\theta D}{2K} = \frac{ca^2 Nd}{2 \sin \theta}.$$

Предоставляем читателю провести аналогичные вычисления для призмы и решетки с несинусоидальной пропускаемостью.

\*) Он не берется в элементарных функциях.

**3. Шум и белый свет.** Исследуя шум с помощью микрофона и электронно-лучевого спектроскопа, мы получаем широкий сплошной спектр: шум есть хаотическое акустическое колебание. Исследуя «белый» свет, испускаемый Солнцем, электрической дугой, раскаленным металлом с помощью оптического спектроскопа, мы видим широкий сплошной спектр, охватывающий всю область видимых частот (явление, описанное в § 1). Наблюдение с помощью приемников ультрафиолетового излучения и весьма чувствительных современных приемников микрорадиоволн показывает, что спектры раскаленных тел содержат вполне заметные составляющие и в этих областях частот. Отсюда мы заключаем, что в излучении раскаленных тел происходят хаотические изменения векторов  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ .

Мы написали «белый» в кавычках, потому что «белым» светом называют в оптике и слегка желтоватый свет, приходящий к нам от Солнца, и слегка голубоватый, красноватый и т. д. свет, излучаемый или рассеиваемый многими другими телами. Термин «белый свет» употребляется в оптике для обозначения всякого света, имеющего очень широкий сплошной спектр. С другой стороны, свет, имеющий линейчатый спектр, состоящий из нескольких линий разного цвета, может вызвать то зрительное ощущение, которое также характеризуем словом «белый». Такой свет *не* является «белым» в смысле только что данного определения.

Шум, имеющий очень широкий спектр, называют иногда «белым шумом» (соединение акустического языка с оптическим, ср. гл. I, § 2). Шум флуктуационного происхождения на выходе радиоприемника имеет очень широкий сплошной спектр и является одним из случаев «белого шума».

**4. Можно ли увидеть свет лампы до того, как ее зажгли?** Несмотря на всю нелепость, этот вопрос невольно может возникнуть при обдумывании теории, изложенной в начале этого параграфа. Действительно, пусть источник монохроматического света зажигается в момент  $t = -\tau/2$  и гаснет в момент  $t = \tau/2$ . Возьмем спектральный прибор такой большой избирательности, чтобы он практически полностью очистил одну из составляющих разложения (11.39) от остальных, как показано на рис. 508. Тогда мы получим на выходе колебание, очень мало отличное от синусоидального. А синусоидальное колебание, как мы знаем, длится «вечно». Значит, колебание на выходе существует и при  $t < -\tau/2$ , т. е. до того, как зажгли источник. Это заключение — явно ошибочное.

Источник ошибки в том, что мы применили построение рис. 508 для случая, когда ширина кривой настройки аппаратуры  $|\Delta\omega|_S$  меньше интервала  $2\pi/T$  между линиями; в этом случае время установления  $\tau_0$  больше интервала разложения  $T$ , как показано для резонатора в гл. III и как будет показано для решетки и для призмы в § 9, 10. Поэтому мы не имеем права пользоваться кривой настройки, относящейся лишь к *установившемуся* колебанию на выходе спектральной аппаратуры. Построение рис. 508 применимо лишь, если взять достаточно большой интервал разложения

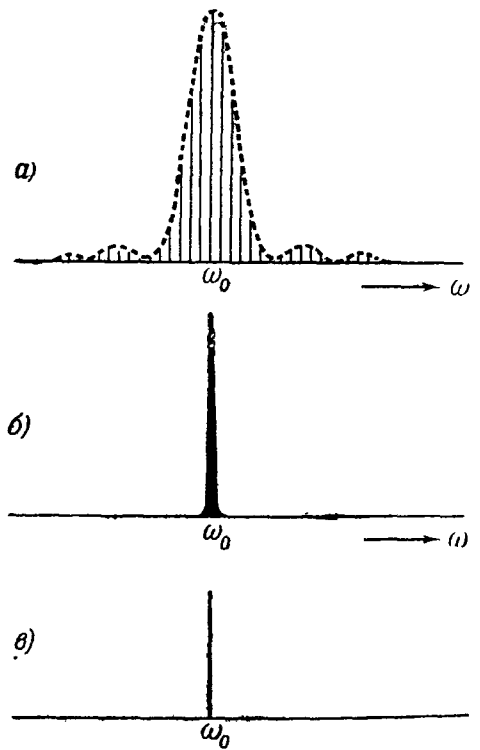


Рис. 508. Построение, приводящее к выводу о возможности выделить одну из синусоидальных составляющих спектра обрывка синусоиды. *a*, *b* и *в* имеют тот же смысл, что и на рис. 507.

$T \gg \tau_0$ , т. е. для случая, когда  $|\Delta\omega|_S$  велико по сравнению с расстоянием между линиями спектра функции  $f(t)$  (рис. 509). Здесь принципиально спектральный прибор никогда не выделит *одну* линию, а всегда в лучшем случае — узкий *участок спектра* конечной ширины (порядка  $|\Delta\omega|_S$ ). Вычислением можно проверить, что, просуммировав синусоиды, относящиеся к такому участку спектра, мы получим функцию, равную нулю при всех  $t \ll -\tau/2$ . Такое вычисление выходит, однако, за пределы тех математических средств, которыми мы здесь пользуемся\*).

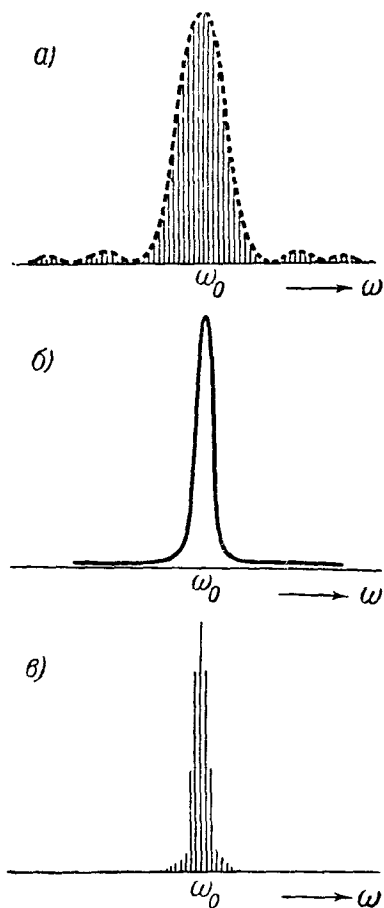


Рис. 509. Исправленное построение рис. 508.

Попутно мы получаем разрешение другого парадокса.

Меняя величину интервала разложения  $T$ , мы меняем спектр функции  $f(t)$  (ср. рис. 503), а следовательно, и спектр колебания на выходе. Но не может же колебание на выходе спектральной аппаратуры зависеть от того, как нам захочется выбрать интервал  $T$ !

Ответ состоит в следующем. Вся изложенная здесь теория, как только что было разъяснено, справедлива лишь для  $|\Delta\omega|_S \gg 2\pi/T$ . Но тогда колебание на выходе состоит из большого числа синусоидальных составляющих (как показано на рис. 509, а, б), спектр на выходе представляет при различных  $2\pi/T$  приблизительно одно и то же реально существующее на выходе колебание (с тем бóльшим приближением, чем больше отношение  $|\Delta\omega|_S/2\pi/T$ , т. е.  $T/\tau_0$ ). Физический смысл имеет, таким образом, только функция  $g(\omega)$ , а не отдельные линии\*\*).

Подчеркнем, что в случае периодической функции или модулированного колебания (§ 2) интервалы  $2\pi/T$  между линиями математического спектра задаются *периодом*  $T$  периодической функции; там мы *можем* сделать  $|\Delta\omega|_S$  сколько угодно малым по сравнению с  $2\pi/T$  и выделить *одну* синусоидальную слагаемую анализируемого колебания. Там физический смысл имеет каждая отдельная линия. Не надо, впрочем, забывать, что этот результат является идеализацией, так как в действительности ни одно колебание не является строго периодическим; всегда существует, как мы знаем (гл. X), хотя бы очень медленная хаотическая модуляция.

## § 7. Обсуждение физического смысла спектрального разложения

Парадоксы, подобные тем, на которые мы только что натолкнулись, возникают довольно часто в связи с вопросами, разбираемыми в этой главе. Эти вопросы принадлежат к числу наиболее тонких в классической физике. Они вызывали и продолжают иногда вызывать недоумения, споры и даже

\*) См. С. М. Рытов, О некоторых «парадоксах», связанных со спектральным разложением, Успехи физических наук 29, 147 (1946).

\*\*) Мы могли бы перейти к пределу  $T \rightarrow \infty$  и получить также и математическое изображение функции  $f(t)$  в виде сплошного спектра («непрерывная совокупность линий»). Такое представление называется разложением в интеграл Фурье. С ним оперируют в курсах, использующих более сложный математический аппарат. Однако оно не дает *физически* ничего нового по сравнению с приведенным здесь рассмотрением.



грубые ошибки. Ошибки проистекают главным образом от отсутствия полного (не формального) понимания физической сущности спектрального разложения. Часть необходимых по этому поводу разъяснений мы изложим в форме беседы. Дальнейшие разъяснения содержатся в § 8—10.

**П р е п о д а в а т е л ь.** — В чем заключается с современной точки зрения истинное содержание открытия Ньютона, сформулированного им в словах «солнечный свет состоит из лучей различной преломляемости»?

**С т у д е н т.** — Ньютон доказал посредством своих опытов с призмой, что солнечный свет состоит из монохроматических волн различного цвета.

**В т о р о й с т у д е н т.** — Решительно не согласен. Неверно думать, будто в солнечном свете *в самом деле* есть монохроматические волны различного цвета, подобно тому как в ящике с масляными красками есть тюбик с красной краской, тюбик с желтой краской, тюбик с синей краской и т. д. В солнечном свете ничего такого нет. Солнечный свет — это беспорядочный процесс изменения электромагнитного поля. Мы можем *математически* представить этот процесс в виде суммы синусоид, только математически! Эти синусоиды не существуют на самом деле. Это — *воображаемые* синусоиды, существующие только в наших формулах, а не в солнечном свете. Мне известно из математики, что функции можно разлагать не только по синусам и косинусам, но и по разным другим функциям, например по полиномам Чебышева или по полиномам Лежандра. Все эти разложения совершенно равноправны. Я могу привести еще такой аргумент. Осциллограмма шума водопада также изображается кривой, вроде той, что показана на рис. 502. Я могу разложить ее по теореме Фурье на синусоиды. Одна из них соответствует звуку этого большого камертона (показывает набор камертонов), другая — звуку этого меньшего камертона, третья — еще меньшего и т. д. Так неужели можно серьезно утверждать, что шум водопада *в самом деле* сложен из звуков этих камертонов? Согласитесь, что это только математический фокус.

**Т р е т ь и й с т у д е н т.** — Я думаю, что вы оба и правы и неправы. Весь вопрос в том, *как возникает* солнечный свет. Если отдельные электроны Солнца испускают синусоидальные волны различной частоты и солнечный свет есть результат сложения этих синусоидальных волн, тогда солнечный свет *в самом деле* состоит из синусоидальных волн различной частоты: подобно этому, если бы зазвучали все камертоны, стоящие на этом столе, мы получили бы какой-то очень сложный звук, состоящий из синусоидальных звуков отдельных камертонов. Но если отдельные электроны Солнца испускают какие-то несинусоидальные короткие импульсы, подобные тем коротким звуковым импульсам, которые дают отдельные капли водопада, ударяясь о камни, то тогда прав ты (обращается ко второму студенту). Здесь действительно представление солнечного света в виде набора синусоид есть только математический фокус, или, если говорить более почтительно, удобный математический прием. Таким образом, вопрос о том, состоит ли в самом деле белый свет из монохроматических волн, должен быть решен опытом — исследованием света, испускаемого отдельным атомом.

**Ч е т в е р т ы й с т у д е н т.** — Можно привести еще такой пример. Когда мы разлагаем модулированное колебание на три синусоидальных колебания — это математический фокус. На самом деле *нет трех* синусоид, а существует *одно* колебание с периодически меняющейся амплитудой. А когда работают три генератора синусоидальных колебаний, то создаваемое ими поле *в самом деле* состоит из трех синусоид.

**П р е п о д а в а т е л ь.** — Я думаю, что вы все неправы, хотя в некоторых ваших словах есть разумные элементы. Обсуждаемый вопрос не нов.

Он составил полвека тому назад предмет знаменитой дискуссии о природе белого света \*), в которой участвовали и разделились на два лагеря виднейшие физики. Этот вопрос снова был поднят в 1930 г. английским радио-специалистом Флемингом, который утверждал как раз то самое, что говорил последний товарищ. Исчерпывающий ответ на это дал Л. И. Мандельштам, и смысл этого ответа я хотел бы сейчас изложить. Речь будет идти для простоты о модулированном колебании. Вы сами легко перенесете всю аргументацию на случай произвольной  $f(t)$ .

Левая и правая части формулы

$$(a + 2b \cos \Omega t) \cos \omega t = b \cos (\omega - \Omega) t + a \cos \omega t + b \cos (\omega + \Omega) t$$

равны друг другу, подобно тому как число 10 равно сумме  $5 + 5$ . Поэтому вопрос: «чем же является рассматриваемый процесс в самом деле — одним модулированным колебанием или суммой трех синусоидальных?» имеет примерно такой же смысл, как вопрос: «сколько у меня в самом деле на руках пальцев, 10 или  $5 + 5$ ?». Иначе говоря, этот вопрос не имеет смысла. Слово «или» здесь неуместно. Одинаково прав и тот, кто скажет, что на руках у меня 10 пальцев, а интересующий нас процесс есть *одно модулированное колебание*, и тот, который утверждает, что на руках у меня  $5 + 5$  пальцев, а интересующий нас процесс есть *сумма трех синусоидальных колебаний*. Столь же прав будет и тот, кто объявит, что на руках у меня  $3 + 7$  пальцев, а интересующий нас процесс есть *сумма синусоидального колебания  $b \cos (\omega - \Omega) t$  и модулированного колебания*

$$\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \Omega t} \cos \left( \omega t + \arctg \frac{b \sin \Omega t}{a + b \cos \Omega t} \right).$$

Пока обсуждение ведется в пределах математики, все три представления (и еще бесчисленное множество других) совершенно равноправны — и в отношении числа 10, и в отношении функции  $(a + 2b \cos \Omega t) \cos \omega t$ . Но поставим вопрос по-другому — не математически, а *физически*. Для вязальщицы перчаток представления числа 10 в виде  $5 + 5$  и  $3 + 7$ , конечно, неравноправны. Она отдает предпочтение первому. Если нас интересует, как действует модулированное колебание, изображаемое как правой, так и левой частями нашей формулы, на набор остро настроенных резонаторов, наиболее *целесообразным* является представление его, даваемое правой частью. Оно сразу указывает нам, какие резонаторы сильно откликнутся. Оно является здесь *физически адекватным* представлением, т. е. соответствующим сущности физической задачи. Здесь прибор может выделить, как мы знаем, любую из трех синусоидальных составляющих

$$b \cos (\omega - \Omega) t, \quad a \cos \omega t, \quad b \cos (\omega + \Omega) t.$$

Здесь *целесообразно* говорить, что наше колебание состоит из трех синусоидальных колебаний.

**В т о р о й с т у д е н т.** — Но тогда мыслимы случаи, когда физически целесообразно представление функции  $f(t)$  не в виде суммы синусоид, а в виде суммы каких-нибудь других функций.

**П р е п о д а в а т е л ь.** — Безусловно. Не только мыслимы, но существуют. Пусть, например, синусоидальная э. д. с.  $E \cos \omega t$  действует на контур с периодически меняющейся емкостью. Я не могу войти в подробности и скажу лишь следующее: такой контур физически *разлагает* синусоидальное колебание, выделяя из него колебание другой формы. Здесь целесообразно представить всякую функцию  $f(t)$ , изобра-

\*) См. сборник: Новые идеи в физике, № 5, Природа света.

жающую внешнюю э. д. с. (в том числе и синусоидальную), в виде суммы несинусоидальных функций определенного типа, задаваемого характером изменения емкости колебательного контура. Здесь *эти* функции, а не синусоидальные колебания, адекватны физической задаче. Приведу такое сравнение. Лист железа мы можем себе представить как совокупность кружков диаметра  $D$  и «остатка» (рис. 510). Если лист пойдет под штамп для изготовления кружков диаметра  $D$ , такое представление целесообразно (штамп придает самостоятельное существование этим кружкам и «остатку»). Если лист пойдет на изготовление полосок для сердечника трансформатора, *такое* представление *остается* верным, но оно нецелесообразно. Подобно этому одну и ту же функцию целесообразно представить в виде суммы синусоид, если мы ее анализируем остро настроенным контуром с *постоянными* параметрами, и в виде суммы других функций, если мы ее анализируем контуром с периодически меняющейся емкостью.

**Первый студент.** — Я, кажется, понял. Согласно волновой теории свет изображается некоторой функцией  $E(x - ct)$  (я беру плоскую волну). Солнечный свет несинусоидален. Утверждение «солнечный свет состоит из синусоидальных волн различной частоты» есть *математическая теорема*, и тут эксперимент не может ничего ни доказать, ни опровергнуть. Относительно вопроса: «является ли в самом деле солнечный свет суммой синусоидальных волн или нет», можно повторить то же, что вы сказали относительно аналогичного вопроса для модулированного колебания. Представление солнечного света в виде суммы синусоидальных волн является адекватным, когда мы имеем дело со спектральной аппаратурой.

**Преподаватель.** — Теперь я с вами вполне согласен. Но не надо впадать в другую крайность и думать, что опыт Ньютона бессодержателен, излишен. Этот опыт навсегда сохранит фундаментальное значение. Нужно только правильно понимать, что именно он доказывает. Интерференционные опыты (например, отражение от клина, дифракция на решетке) показывают, что чистым спектральным цветам, образующимся после призмы, соответствуют почти синусоидальные волны (этого Ньютон не знал, хотя и утверждал в связи с цветами тонких пластин наличие какой-то периодичности в монохроматическом свете, и в этом — одно из его наиболее замечательных открытий). Если это принять, то истинное содержание опытов Ньютона заключается в том...

**Второй студент.** — Я понял. В том, что призма есть спектральный прибор, что она физически выделяет те синусоидальные составляющие света, о которых только что говорили, физически осуществляет его разложение в ряд Фурье.

**Преподаватель.** — Вот именно. Или если говорить абсолютно точно, имея в виду и сплошной спектр: выделяет группы членов разложения в ряд Фурье, имеющих очень близкие частоты.

**Второй студент.** — Кроме того, опыты Ньютона (а не математика!) показывают, что солнечный свет действительно несинусоидален, и позволяют узнать, каков именно спектр солнечного света. Из опытов Ньютона мы узнаем, что он является весьма широким сплошным спектром, в котором содержатся весьма интенсивные слагаемые всех видимых цветов.

**Преподаватель.** — Мы, кажется, полностью договорились. Я только еще раз подчеркну существенную роль самого спектрального

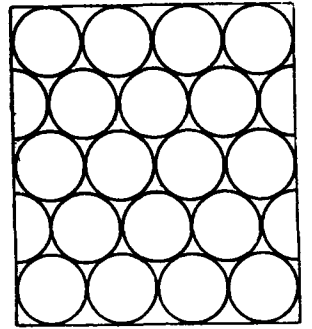


Рис. 510. Лист железа с размеченными на нем кругами.

прибора в физическом процессе спектрального разложения. Когда мы говорим: в белом свете уже содержится зеленый и монохроматор его *только* выделяет — в этом нет ошибки, но это напоминает известную шутку: в глыбе мрамора уже существует статуя, скульптор только убирает все лишнее.

**Третий студент.** — Выходит, что никакой опыт не решит, получается ли белый свет от накаливаемого металла в результате сложения синусоид, излучаемых отдельными колеблющимися электронами, или в результате того, что каждый электрон в металле излучает белый свет?

**Преподаватель.** — Никакой опыт над «готовым» белым светом этого решить не может. Я приведу такую аналогию. Предположим, я слышу, что громкоговоритель издает несинусоидальную ноту (отличную по тембру от звука камертона, имеющего ту же высоту). Никаким опытом над этим «готовым» звуком (ни на слух, ни с помощью резонаторов) я не решу, создается ли ток, подводимый к громкоговорителю, одним генератором несинусоидальных колебаний или несколькими генераторами синусоидальных колебаний. Для того чтобы решить этот вопрос, мне нужно будет заглянуть в ящик, откуда подводятся колебания, и посмотреть, что там смонтировано (сколько ламп, какие контуры), разобраться теоретически в схеме или исследовать осциллографом колебания в отдельных звеньях. Для того чтобы ответить на вопрос о том, как образуется белый свет, необходимо конкретное исследование (теоретическое и экспериментальное) механизма того, что происходит в накаленном металле. Такое исследование относится к области физики металлов. Оно приводит к выводу, что белый свет излучается в результате беспорядочного движения электронов, т. е. *каждый* электрон в результате теплового движения в металле излучает очень широкий спектр. Картина здесь существенно отлична от той, которая имеет место в разреженном газе, где излучаемые колебания близки к синусоидальным.

Но вернемся к вопросу об адекватности разложения на синусоиды. Даже когда мы имеем дело с обычными спектральными приборами (в отличие, например, от контуров с периодически меняющейся емкостью), вовсе не всегда целесообразно представлять несинусоидальное колебание в виде суммы синусоидальных. Пусть имеет место случай, показанный на рис. 506, — спектральный прибор не разрешает отдельные синусоидальные компоненты. В этом случае на выходе будет почти такое же модулированное колебание, как и на входе. Будем говорить для определенности о колебательном контуре. Здесь можно воспользоваться формулой

$$u_C = \omega_0^2 \frac{E \cos(\omega t - \psi)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}},$$

относящейся к действию *синусоидальной* э. д. с. на колебательный контур, и положить в ней  $E = E(t)$ , где  $E(t)$  — заданная характером модуляции функция времени. Здесь целесообразно говорить о модулированном колебании не как о сумме трех синусоидальных, а как об «одном синусоидальном колебании с медленно меняющейся амплитудой». Писать это лучше в кавычках, потому что этот термин внутренне противоречив — так же как, например, словосочетание «слегка изогнутая прямая линия»; синусоидальное колебание есть по определению колебание вида  $A \cos(\omega t - \varphi)$ , где  $A$ ,  $\omega$ ,  $\varphi$  — постоянные. Если мы поочередно включаем и выключаем, скажем на минуту, ток, питающий разрядную трубку (источник света), то мы не сделаем заметной ошибки, если скажем, что в спектральном приборе в течение минуты существует картина, соответствующая источнику постоянной интенсивности, затем в течение минуты будет полная темнота и т. д. Здесь тоже верно, что модуляция перестановками рычажка выключо-

чателя превращает синусоидальное световое колебание в сумму синусоид различной частоты. Но здесь такое представление нецелесообразно, т. е. оно неадекватно рассматриваемому объективному процессу, оно только мешает нам правильно отразить этот процесс. Когда мы говорим о биениях (гл. II, § 5), мы представляем колебание, заданное нам условиями опыта, как сумму двух синусоидальных колебаний с близкими частотами, в виде *одного* модулированного колебания, и это целесообразно, потому что ухо воспринимает его как *одну* ноту переменной громкости (опять синусоидальное колебание переменной амплитуды). Но это целесообразно до тех пор, пока разность частот настолько мала, что ухо не слышит диссонанса — наличия *двух* нот, не образующих музыкального аккорда. Таким образом, и здесь вопрос о целесообразности (но не о законности!) того или другого представления — сумма *двух* синусоидальных колебаний или *одно* модулированное — решается свойствами анализирующего прибора, в данном случае — уха. Ухо начинает слышать диссонанс приблизительно при  $|\omega_1 - \omega_2|/2\pi \approx 10$  герц. Следовательно, при  $|\omega_1 - \omega_2|/2\pi < 10$  герц целесообразно называть звук, создаваемый двумя камертонами, модулированным колебанием, а при  $|\omega_1 - \omega_2|/2\pi > 10$  герц — суммой двух синусоидальных колебаний. Но в обоих случаях оба представления верны. В случае обрывка синусоиды не всегда целесообразно говорить, что он состоит из отдельных синусоид. Это может привести к парадоксу, разобранному в § 6. В случае шума или белого света часто целесообразно говорить, что они состоят из групп синусоид близкой частоты. Именно такие группы выделяют, как мы уже говорили, спектральные приборы.

При решении любой конкретной задачи — например, задачи о прохождении сигнала через фильтр или другой линейный преобразователь — физику или инженеру приходится выбирать какое-нибудь *одно* из бесчисленного множества математически эквивалентных выражений. Необходимо знать, *как* выбирать в том или ином случае то или иное из ряда таких выражений.

Говоря, что выбирать следует выражение, которое наиболее целесообразно, наиболее адекватно, мы имеем в виду, что оно лучше всего соответствует объективным свойствам излучаемого процесса, лучше всего *отражает* эти свойства. Именно в этом и только в этом объективном, а не субъективистском смысле надо понимать выражения «целесообразно», «адекватно», которые неизбежны при изложении вопросов, в которых речь идет о выборе того или иного из нескольких эквивалентных математических представлений объективного процесса, происходящего в некоторых определенных объективных условиях, в частности в спектральном устройстве.

П я т ы й с т у д е н т. — Точка зрения, к которой мы пришли в результате дискуссии, пожалуй, логически безупречна, так же как и вся теория спектрального разложения. Но мне психологически трудно ее принять. Формально все правильно, и тем не менее я испытываю чувство неудовлетворенности... Вероятно, вот отчего. Мы заранее разлагаем математически функцию  $f(t)$  на синусоиды, и невольно создается впечатление, что «вся сила» — именно в этой математической операции. Затумшевается реальный процесс, происходящий в спектральном приборе. Покажите нам, *не разлагая заранее белый свет или модулированное колебание на синусоиды*, что дифракционная решетка или колебательный контур превращают, перерабатывают его в отдельно существующее синусоидальное или почти синусоидальное колебание. Пусть синусоидальные составляющие функции  $f(t)$  появятся не на *втором* этапе исследования \*), а лишь на *четвертом*,

\*) Ср. § 2 этой главы.

не преднамеренно, как это было до сих пор, а как бы «против нашей воли» — тогда, как мы начнем выяснять физический смысл полученного решения. Тогда, я думаю, отпадет тот произвольный протест, который в данном случае мешает мне — и, вероятно, не только мне — покориться логике.

## § 8. «Механизм» спектрального разложения. Простейшие случаи

1. **Постановка вопроса.** Только что предъявленная претензия вполне законна. Она возникает тогда, когда мы хотим не только производить вычисления на физические темы, но также, — что важнее для будущего физика и вместе с тем гораздо труднее, — научиться *физически мыслить*. Довольно трудно дать точное определение того, что значит «физически мыслить». Но мы считаем, что в данном случае сюда входит как существенный элемент умение представить себе физический процесс преобразования спектральным прибором произвольного колебания, не прибегая к спектральному разложению как математической операции. Такое умение мы можем назвать пониманием «механизма» спектрального разложения. Для того чтобы достигнуть такого понимания, необходимо научиться отвечать иначе, чем отговоркой: «это можно показать, применяя разложение в тригонометрический ряд и принцип суперпозиции», на следующие вполне естественные вопросы.

1. Представим себе, что сначала на вход спектральной аппаратуры подается синусоидальное колебание частоты  $\omega$ , достаточно сильно отличающейся от частоты  $\omega_0$ , на которую мы настроили эту аппаратуру. Тогда в случае контура на конденсаторе будет очень малое напряжение; в случае решетки в месте наблюдения будет почти полная темнота. Но если мы пропустим в спектральный прибор только *обрывок* синусоиды частоты  $\omega$  или будем периодически *прерывать* проходящее колебание, на контуре может появиться заметное напряжение, в интересующем нас месте поля зрения может наступить посветление. Почему в результате *ослабления* колебания на входе может стать светло там, где было темно, или произойти возрастание амплитуды напряжения?

2. В спектральном аппарате достаточно большой избирательности, настроенном на одну из частот, входящих в спектр модулированного колебания, возникает практически синусоидальное колебание, т. е. колебание практически *постоянной* амплитуды. Почему усиления и ослабления (или даже появления и прекращения) колебания на входе не вызывают здесь соответствующих заметных изменений амплитуды колебания на выходе?

3. Каким образом обрывание синусоиды частоты  $\omega$  вызывает появление на выходе спектральной аппаратуры колебания *другой* частоты (а именно  $\omega_0$ )? *Каким образом* периодическое прерывание с частотой  $\Omega$  подведенного синусоидального колебания частоты  $\omega$  порождает колебание частоты  $\omega_0$ , *отличной* от  $\omega$ , в резонаторе, настроенном так, что  $|\omega_0 - \omega| = \Omega$ ? Особенно остро аналогичный вопрос может быть сформулирован для света. Если бы нам удалось прерывать достаточно быстро, скажем, *желтый* свет, то мы должны были бы видеть согласно изложенному в § 4 в соответствующих местах поля зрения спектроскопа *красную* и *зеленую* линии. *Каким образом* прерывание света может привести к появлению новых цветов?

Мы постараемся удовлетворить потребность в ответе на эти вопросы, рассматривая *ход установления во времени* колебания на выходе спектрального прибора.

Прежде чем ответить на эти вопросы, полезно рассмотреть несколько более простых примеров.

**2. Преобразование периодических коротких импульсов резонатором.** Сопоставим результаты § 3, полученные путем исследования преобразования спектра внешней силы резонатором, и результаты гл. III, § 5, полученные путем прослеживания во времени процесса колебаний маятника. Тут и там рассматривалась различными методами одна и та же задача (маятник — частный случай резонатора).

*Исследование преобразования спектра*

*Исследование хода процесса во времени*

а) Собственная частота не близка к целому кратному частоты толчков

В спектре вынужденного колебания не преобладает заметно ни одна из линий, входящих в состав спектра внешней силы.

Осциллограмма вынужденного колебания имеет форму, очень далекую от синусоидальной.

б) Собственная частота равна целому кратному частоты толчков

При острой резонансной кривой в спектрограмме вынужденного колебания резко преобладает линия частоты  $\omega_0$ .

При малом затухании собственных колебаний осциллограмма вынужденного колебания отличается от синусоиды только еле заметным уменьшением амплитуды за время между ударами и увеличением ее во время удара.

Высказывания, напечатанные в левом и правом столбцах, являются, очевидно, разными выражениями одного и того же.

Посмотрим, например, на рис. 89. Маятник колеблется в промежутке между ударами почти синусоидально; он «затягивает» промежутки между ударами куском почти-синусоиды. Это тот физический факт, который на спектральном языке мы выражаем словами: резонатор почти полностью выделяет из разложения в ряд Фурье член, пропорциональный  $\cos 3\omega t$ . Еле заметная на рис. 89 модуляция (уменьшение и возрастание амплитуды) — это проявление на осциллограмме того, что, взглянув на спектрограмму, мы сможем выразить так: имеется слабое «пролезание» частот, отличных от  $3\omega = \omega_0$ .

«Пролезание» частот, отличных от резонансной, тем меньше, чем острее резонансная кривая.

Модуляция колебания на ходе имеет тем меньшую глубину, чем меньше затухание резонатора.

Эти высказывания эквивалентны в силу соотношения

$$|\Delta\omega|_s = \delta,$$

т. е. равенства половины ширины полосы пропускания (спектральный язык) и коэффициента затухания (характеристика хода процесса во времени).

Напишем дифференциальное уравнение движения маятника, представив внешнюю силу (см. рис. 473) в виде ряда Фурье (ср. § 2, п. 3):

$$\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = \frac{1}{J} \sum \frac{2G}{T} \cos m \omega t,$$

где  $J$  — момент инерции маятника. При  $m\omega = \omega_0$  ( $m$  — целое) и остром резонансе ( $\delta \ll \omega_0$ ) установившееся вынужденное колебание близко к синусоидальному колебанию, соответствующему гармонической составляющей внешней силы, имеющей частоту  $\omega_0$ . На основании теории вынужденных колебаний под действием синусоидальной силы (гл. III, § 7) оно имеет амплитуду

$$B = \frac{2G}{TJ} \frac{1}{2\delta\omega_0} = \frac{2G}{TJ} \cdot \frac{1}{\frac{h}{J} \cdot m \cdot \frac{2\pi}{T}} = \frac{G}{m\pi h}.$$

Это приближенное значение, полученное в результате *спектрального* рассмотрения задачи, совпадает с тем, которое было получено в гл. III, § 5 в результате *временного* рассмотрения (без разложения в ряд Фурье), так как  $P = G/J\omega_0$ .

Рис. 511. Компенсация действия последовательных толчков различного знака при  $\omega = \omega_0$ .

Напишем рядом еще два эквивалентных высказывания, относящихся к периодическим знакопеременным толчкам, показанным на рис. 473, в.

#### *Спектральный язык*

Спектр внешней силы содержит только нечетные гармоники  $\omega, 3\omega, 5\omega$  и т. п. (рис. 437, з), и следовательно, нет резонанса при  $\omega_0 = 2\omega, 4\omega, 6\omega, \dots$

#### *Временной язык*

Если период собственных колебаний — целое кратное промежутка времени между последовательными толчками, возрастание амплитуды под действием одного из них компенсируется ее уменьшением под действием следующего (рис. 511).

«Временной» подход, которым мы пользовались в гл. III, § 5, показывает, как происходит образование на выходе спектрального прибора колебания, близкого к одной из составляющих тригонометрического ряда, представляющего колебание на входе. При таком подходе видно, что это колебание образуется постепенно, как уже подчеркивалось в гл. III. Процесс его образования длится тем дольше, чем меньше затухание резонатора, т. е. чем острее резонанс.

**3. Преобразование шума резонатором.** «Белый» шум (рис. 502) можно рассматривать как последовательность положительных и отрицательных толчков, следующих беспорядочно и очень часто один за другим.

Преобразование белого шума резонатора мы, в сущности, уже рассматривали в гл. X, § 3. Мы там исследовали суперпозицию собственных колебаний, возбуждаемых в гармоническом осцилляторе каждым отдельным толчком, и выяснили, что она представляет собой колебание собственной частоты осциллятора  $\omega_0$ , хаотически модулированное по амплитуде и по фазе, причем среднее время модуляции равно времени затухания осциллятора  $1/\delta$ . Это и есть тот физический факт, который на спектральном языке мы выражаем словами: резонатор вырезает из широкого спектра шума узкий участок. Сказанное в гл. X, § 3 дает нам, таким образом, наглядную картину «механизма» преобразования спектра шума резонатором.



Напишем две пары эквивалентных высказываний.

*Спектральный язык*

Если шум имеет равномерный спектр, резонаторы, настроенные на различные частоты и имеющие одинаковую полосу пропускания, преобразуют его в спектры, отличающиеся лишь несущей частотой.

Чем острее резонансная кривая резонатора, тем более узкий участок он вырезает из спектра шума.

*Временной язык*

Случайные толчки возбуждают в резонаторах с различными собственными частотами и одинаковыми временами затухания хаотически модулированные колебания различной частоты  $\omega_0$  и одинаковой интенсивности.

Чем больше время затухания резонатора, тем медленнее в нем хаотическая модуляция.

Эквивалентность последних двух утверждений следует из сказанного в § 6.

4. Преобразование короткого импульса решеткой. «Объяснение механизма» преобразования периодических и случайных толчков резонатором было основано на том, что резонатор преобразует каждый *отдельный*

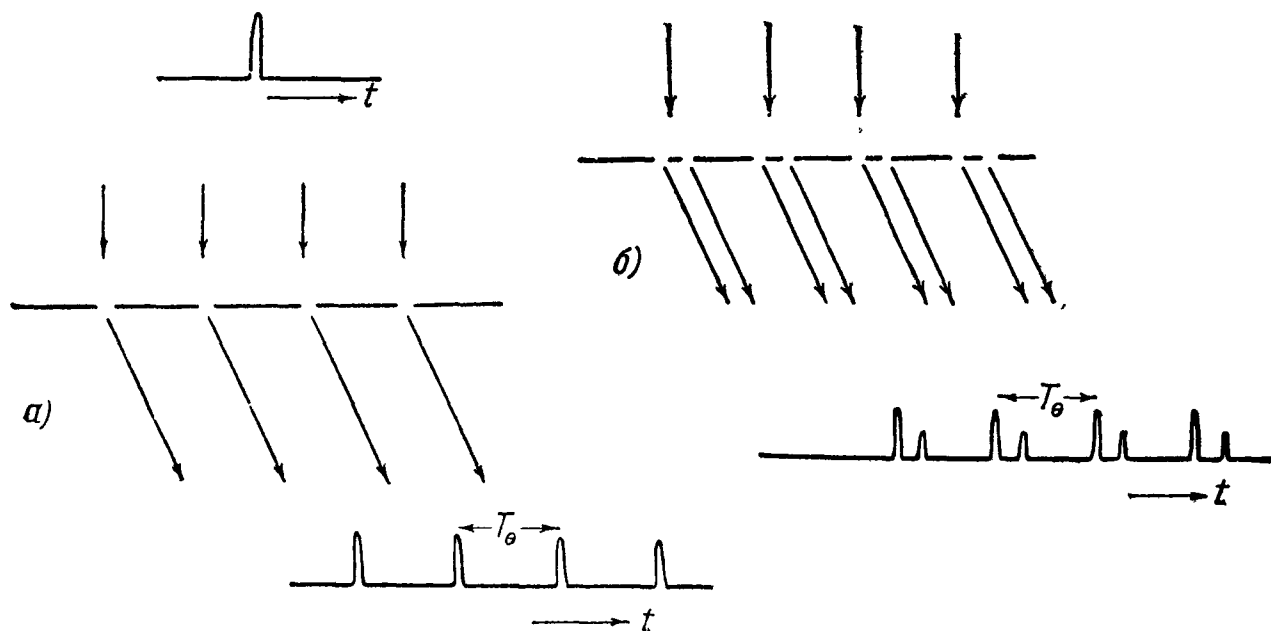


Рис. 512. Импульс, падающий на решетку, и импульсы, дифрагированные в определенном направлении; а—все щели одинаково прозрачны, б—чередуются щели большей и меньшей прозрачности.

толчок в слабое затухающее (почти синусоидальное) колебание, «частота» которого есть собственная частота резонатора. Аналогичный факт имеет место для решетки.

Предположим сначала, что на решетку, состоящую из очень узких щелей, падает нормально плоская волна, имеющая вид короткого импульса (его длина мала по сравнению с периодом решетки). Согласно основной идее принципа Гюйгенса — Френеля\*) решетка пошлет по каждому направлению  $\theta$  (рис. 512, а) ряд коротких импульсов, разделенных промежутками времени  $T_\theta = d \sin \theta / c$ , различными для различных направлений. Общее число таких импульсов равно числу элементов решетки  $N$ .

Предположим, что на расстоянии  $d/4$  от только что рассмотренных щелей добавлены другие щели, одинаковые между собой и менее прозрач-

\*) Этот принцип был высказан в гл. IX в применении лишь к синусоидальным колебаниям. Здесь идея вторичных волн применяется к импульсам.

ные, чем предыдущие. Такая решетка пошлет по направлению  $\theta$  ряд импульсов, показанных на рис. 512, б. От этого примера нетрудно перейти к случаю решетки с *синусоидальной пропускаемостью*.

Ее можно рассматривать как совокупность очень узких щелей, причем кратковременный импульс, падающий на отдельную щель, порождает за решеткой импульс, распространяющийся во всех направлениях и пропорциональный  $\sin Kx$  (ср. гл. IX, § 9). Отсюда ясно, что решетка с синусо-

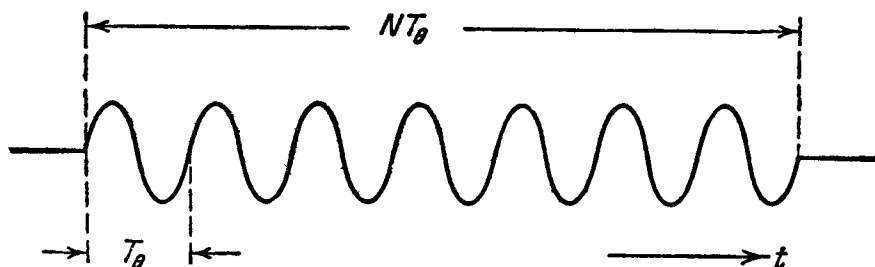


Рис. 513. Обрывок синусоиды, посылаемый по направлению  $\theta$  синусоидальной решеткой при падении на нее очень короткого импульса,  $T_\theta = d \sin \theta/c$ .

идальной пропускаемостью посылает по направлению  $\theta$  колебание, показанное на рис. 513: обрывок синусоиды.

Обрывок синусоиды — тем более длинный, чем больше число элементов решетки  $N$ . Он аналогичен здесь тому затухающему колебанию, в которое гармонический осциллятор преобразует получаемый им кратковременный импульс. Аналогом времени затухания резонатора  $\tau_0 = 1/\delta$  является в случае решетки продолжительность обрывка синусоиды  $NT_\theta$ , аналогом логарифмического декремента — отношение  $T_\theta/NT_\theta = 1/N$ , аналогом добротности  $Q$  — число элементов решетки  $N$ .

Приведем еще пару эквивалентных высказываний.

#### Спектральный язык

Чем больше избирательность решетки, тем меньше «пролезают» по данному направлению  $\theta$  синусоидальные составляющие падающего импульса, имеющие частоты, отличные от  $2\pi/T_\theta$ .

#### Временной язык

Чем дольше длится обрывок синусоиды, который решетка создает в направлении  $\theta$  в результате падения на нее импульса, тем ближе свет, посылаемый в этом направлении, к идеально монохроматическому.

**5. Преобразование периодических импульсов решеткой.** Пусть теперь на решетку с синусоидальной пропускаемостью падает нормально, через равные промежутки времени  $T$ , ряд коротких импульсов, показанных на рис. 514, а. Рассмотрим направление  $\theta$ , для которого  $T = nT_\theta$  ( $n$  — целое).

Здесь ход процесса во времени имеет вид, показанный на рис. 514 для  $n = 3$ . Каждый импульс перерабатывается решеткой в обрывок синусоиды, состоящий из  $N$  периодов. Через каждые  $n$  периодов добавляется новый обрывок, и колебание постепенно нарастает. Так длится до момента  $\tau_\theta = NT_\theta$ , когда кончается обрывок синусоиды, происшедший от первого импульса. После этого каждый раз, когда добавляется колебание, происшедшее от очередного импульса (номера  $s + N$ ), прекращается колебание, происшедшее от импульса номера  $s$ . Таким образом, здесь по истечении времени  $\tau_\theta$ , тем большего, чем больше число элементов решетки  $N$ , устанавливается синусоидальное колебание. Его амплитуда тем больше, чем больше  $\tau_\theta$ , т. е. чем больше время установления. Это — другая форму-

лировка того, что по каждому из рассматриваемых направлений  $\theta$  решетка выделяет одну из синусоидальных составляющих падающей на нее несинусоидальной волны. Снова получается далеко идущая аналогия с резонатором. В частности, и для решетки может быть введено понятие «время установления колебания». Это время  $\tau_\theta = NT_\theta$  играет такую же роль, как  $\tau_0 = 1/\delta$  в случае резонатора. Разрешающая сила решетки может быть представлена в виде

$$R = \frac{\tau_\theta}{T_\theta}.$$

Таким образом, для решетки, как и для резонатора, разрешающая сила тем больше, чем больше  $\tau_\theta$ , чем дольше нужно ждать установления того колебания, к которому относятся все результаты § 4, 5, 6.

**6. Преобразование белого света решеткой.** Как уже говорилось (§ 6), белый свет — оптический аналог шума. Механизм его преобразования решеткой аналогичен механизму преобразования шума резонатором (п. 3). Будем рассматривать белый свет как беспорядочное чередование импульсов обоих знаков. Каждый из них создает в направлении  $\theta$ , как уже было сказано (п. 3), обрывок синусоиды периода  $T_\theta$ , состоящий из  $N$  периодов. В результате действия всех импульсов, составляющих белый свет, возникает суперпозиция таких обрывков, имеющих всевозможные фазы. В результате по направлению  $\theta$  возникает хаотически модулированное (почти монохроматическое) колебание несущей частоты  $\omega_\theta = 2\pi/T_\theta$ , имеющей среднее время модуляции  $\tau_\theta = NT_\theta$ . Для того частного случая белого света, который может быть представлен как чередование совершенно случайных толчков, применимо буквально все сказанное в гл. X, § 3, если понимать под  $\tau$  величину  $\tau_\theta$ , характеризующую решетку и направление наблюдения.

Под углом  $\theta$ , таким, что  $cT_\theta = d \sin \theta = 7 \cdot 10^{-5}$  см, мы получим почти монохроматический красный свет, под соответственно меньшими углами — оранжевый, желтый и т. д. Мы имеем право сказать следующее. Решетка благодаря периодичности своей структуры перерабатывает каждый импульс в излучаемые ею в разных направлениях обрывки синусоид различной частоты. Тем самым решетка *создает* тот набор цветов, который мы видим в спектре, и ту периодичность, которой обладает свет, посылаемый ею по каждому отдельному направлению. Когда с помощью интерференционных опытов мы обнаруживаем периодичность света, который решетка, освещаемая электрической дугой, посылает под некоторым углом, мы можем сказать, что мы наблюдаем *периодичность решетки*, запечатленную на переработанных ею непериодических импульсах. (По своему фактиче-

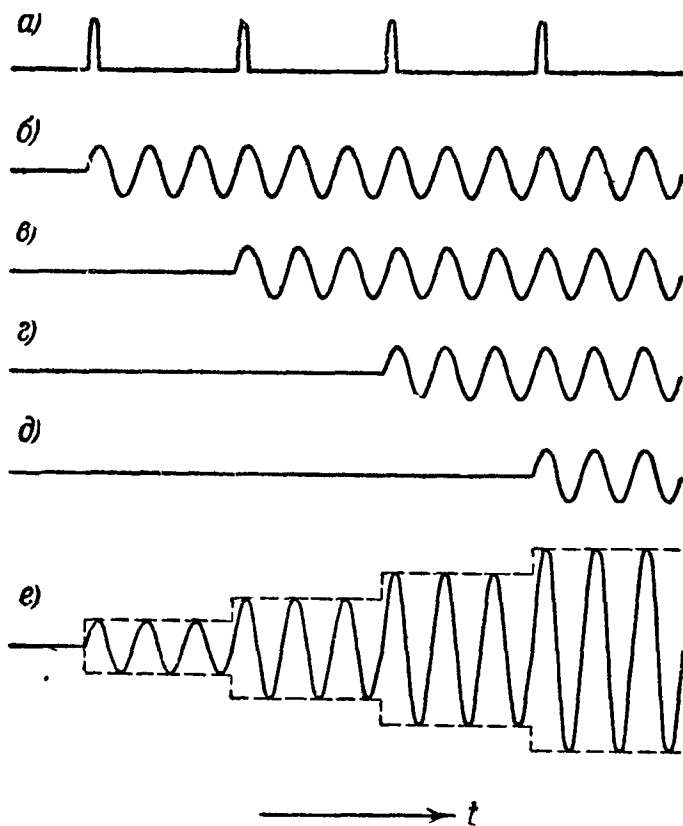


Рис 514. Преобразование решеткой периодически чередующихся импульсов (период импульсов кратен  $T_\theta$ ).

скому содержанию эта формулировка, особенно подчеркивающая роль спектральной аппаратуры, не отличается от данной в § 4: решетка осуществляет спектральное разложение белого света.)

Здесь слово «периодичность» мы употребляем не совсем точно, так как решетка превращает импульс не в синусоиду, а в *кусоч* синусоиды. Свет, посылаемый решеткой под определенным углом, тем синусоидальнее (хаотическая модуляция тем медленнее), чем длиннее эти кусочки, т. е. чем больше  $N$ . Это и есть то, что на спектральном языке выражается словами: чем больше  $N$ , тем уже участок спектра, выделяемый решеткой по данному направлению.

Гюйгенс рассказывал в одном письме \*), что он слышал, гуляя около монументальной каменной лестницы, перед которой бил фонтан, чистый музыкальный тон. Этот тон исчез зимой, когда лестница покрылась снегом. Лестница играла роль акустической отражательной решетки. Можно с одинаковым правом сказать, что лестница осуществляет разложение в ряд Фурье шума фонтана или, как писал Гюйгенс, что она преобразует каждый звуковой импульс от фонтана в вереницу импульсов, отраженных от каждой ступени и периодически следующих один за другим.

### § 9. Временной ход преобразования обрывка синусоиды спектральным аппаратом

1. Резонатор. а) Д л и н н ы й о б р ы в о к. Пусть на резонатор действует внешняя сила, изображенная обрывком синусоиды  $\cos \omega^* t$ , продолжительность которого  $\tau$  велика по сравнению с временной постоянной резонатора  $\tau_0$ . В момент  $t = 0$ , когда на резонатор начинает действовать обрывок синусоиды, в нем начинают нарастать колебания. Если  $\omega^* = \omega_0$ ,

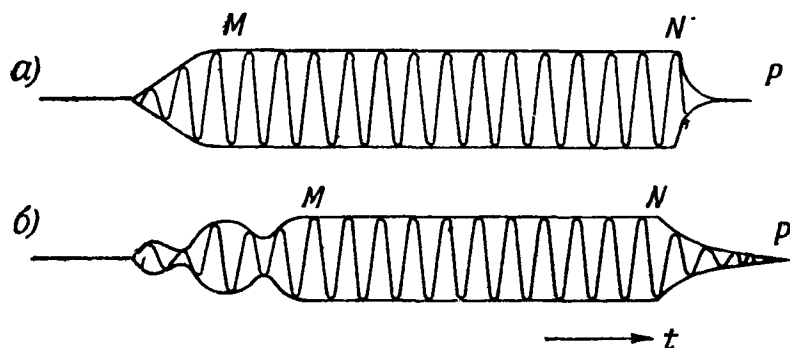


Рис. 515. Преобразование длинного обрывка синусоиды резонатором.

они нарастают монотонно (рис. 515, а), если  $\omega^*$  заметно отличается от  $\omega_0$ , — с биениями (рис. 515, б) (гл. III, § 6) Через время порядка нескольких  $\tau_0$  амплитуда колебаний практически примет значение, определяемое резонансной кривой, и будет сохранять это значение до момента  $t = \tau$ . После этого колебания резонатора начнут затухать. Отрезок осциллограммы  $MN$  есть кусок синусоиды частоты  $\omega^*$ , часть  $NP$  — затухающее колебание частоты  $\omega_0$ . Колебание резонатора, взятое в целом, мало отличается от куска синусоиды вынужденной частоты  $\omega^*$ . Это — выраженный иначе тот самый результат, который был получен в § 6 (см. рис. 506).

б) К о р о т к и й о б р ы в о к. Пусть теперь  $\tau$  мало по сравнению с  $\tau_0$ . Если  $\omega^* = \omega_0$ , получается (рис. 516, а) линейное нарастание амплитуды

\*) Ф. Ф. С о к о л о в, Природа белого цвета, сборник «Новые идеи в физике», 5, 1912 (стр. 31).

вынужденного колебания в течение времени  $\tau$ , затем медленное экспоненциальное спадание; значение  $A$ , до которого успевает вырасти амплитуда, тем больше, чем больше  $\tau$ . Если же  $\omega^* \neq \omega_0$ , характер явления существенно зависит от соотношения между  $\tau$  и периодом биений  $2\pi/|\omega^* - \omega_0|$ . Если  $\tau$  содержит целое число  $m$  периодов биений (рис. 516, б), произойдет  $m$  биений, после которых колебания полностью прекращаются. Если же  $\tau$  содержит нечетное число полупериодов биений, резонатор после прекращения действия сигнала колеблется наиболее интенсивно (рис. 516, в.) Разумеется, имеет место плавный переход от случая рис. 516, б к случаю рис. 516, в.

В общем виде (произвольные  $\omega_0, \omega^*, \tau$ ) имеем на основании (3.53)

$$A = \omega_0 \frac{\sin(\omega_0 - \omega^*) \frac{\tau}{2}}{\omega_0 - \omega^*}. \quad (11.46)$$

Мы взяли для определенности случай, когда обрывок синусоиды  $\cos \omega^* t$  ( $0 \leq t \leq \tau$ ) изображает э. д. с., действующую на колебательный контур, причем  $A$  — значение, принимаемое в момент  $t = \tau$  амплитудой напряжения  $u_C$  на конденсаторе.

Здесь «видно», как при  $\tau \ll \tau_0$  резонатор преобразует короткий обрывок синусоиды частоты  $\omega^*$  в колебание, которое, взятое в целом, мало отличается от слабо затухающего колебания собственной частоты  $\omega_0$ , имеющего начальную амплитуду  $A$ .

Отметим следующее обстоятельство. Сигнал продолжительности  $\pi/|\omega^* - \omega_0|$  возбуждает в резонаторе сильные колебания, сигнал вдвое большей продолжительности не оставляет после себя вовсе никаких колебаний. Можно сказать в последнем случае, что действие первой половины обрывка синусоиды полностью компенсируется действием второй половины или что энергия, сообщаемая резонатору первой половиной обрывка, полностью уносится второй половиной.

Первый случай при спектральном рассмотрении соответствует настройке резонатора на середину между главным максимумом и первым минимумом, второй — настройке резонатора на первый минимум кривой распределения интенсивности в спектре (рис. 504).

Вычислим с помощью формулы (11.46) интегральный квадратичный эффект (см. стр. 515) напряжения на конденсаторе за произвольное время  $T$ , большое по сравнению с  $\tau_0$ , и подавно большое по сравнению с  $\tau$ . Пренебрегая частью  $I$ , относящейся к промежутку времени  $0 \leq t \leq \tau$ , и принимая во внимание, что при  $t > \tau$  колебание имеет вид

$$u_C = A e^{-\delta(t-\tau)} \cos(\omega t - \varphi), \quad \delta = \frac{1}{\tau_0},$$

имеем приближенно:

$$I = \int_{\tau}^T A^2 e^{-2\delta(t-\tau)} \cos^2(\omega_0 t - \varphi) dt, \quad (11.47)$$

или, также приближенно, заменяя верхний предел интегриации через  $\infty$ , а множитель  $\cos^2(\omega_0 t - \varphi)$ , который меняется очень быстро по сравнению

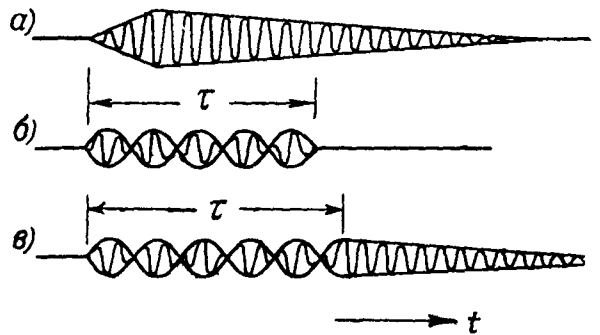


Рис. 516. Преобразование короткого обрывка синусоиды резонатором.

с  $e^{-2\delta t}$ , его средним значением, равным  $1/2$ ,

$$I = \frac{A^2}{2} \int_{\tau}^{\infty} e^{-2\delta(t-\tau)} dt = \frac{A^2}{4\delta} = \frac{\omega_0^2}{4\delta} \left\{ \frac{\sin(\omega_0 - \omega^*) \frac{\tau}{2}}{\omega_0 - \omega^*} \right\}^2, \quad (11.48)$$

что совпадает с результатом, полученным в § 6, п. 2 путем спектрального разложения. (Заметим, что, таким образом, приближения, сделанные при вычислении  $I$  спектральным методом и путем рассмотрения хода процесса во времени, эквивалентны друг другу.)

2. Решетка. а) Д л и н н ы й о б р ы в о к. Пусть рис. 505 изображает осциллограмму волны, падающей на синусоидальную решетку, причем

$\tau \gg \tau_0$  (ср. § 8). Рассмотрим сначала то, что происходит под углом  $\theta = \theta^*$ , для которого  $d \sin \theta = c2\pi/\omega^*$ , т. е. там, где в случае синусоидального колебания частоты  $\omega^*$  возникает *главный максимум*.

В некоторый момент  $t = t_0$  начинает приходить колебание от первого элемента решетки, спустя время  $T^* = 2\pi/\omega^*$  к нему прибавится имеющее ту же фазу полное колебание от второго элемента, и колебание удвоится по амплитуде, еще через время  $T^*$  прибавится полное колебание от третьего элемента и т. д. Такое нарастание колебаний будет продолжаться до тех пор, пока не прибавится полное колебание от  $N$ -го (последнего) элемента решетки. Тогда амплитуда примет значение  $Na$ , где  $a$  — амплитуда колебаний от одного элемента, и уже не будет изменяться до тех пор, пока сквозь решетку не пройдет весь обрывок. Так же как в ре-

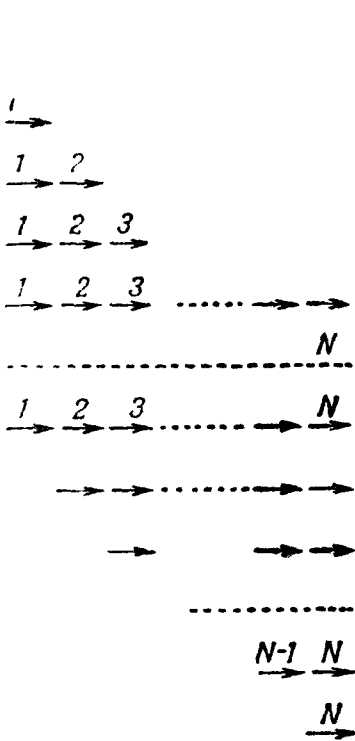


Рис. 517. Эволюция векторной диаграммы для направления  $\theta = \theta^*$  (длинный обрывок синусоиды).

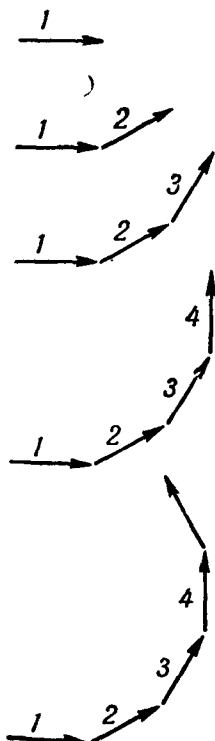


Рис. 518. Эволюция векторной диаграммы для направления  $\theta \neq \theta^*$  (длинный обрывок синусоиды)

зонаторе настроенном в резонанс, амплитуда монотонно растет со временем. Спадение колебаний вследствие окончания приходящего обрывка синусоиды также произойдет не мгновенно: сначала исчезнет колебание от первого элемента решетки, затем от второго и т. д. и, наконец, через время  $NT^*$ , от последнего.

Эволюция векторной диаграммы для направления  $\theta = \theta^*$  показана на рис. 517; около каждого вектора написан номер элемента решетки, посылающего обрывок синусоиды, изображенной этим вектором. Отметим и здесь, что продолжительность нарастания и спадания колебаний тем больше, чем больше  $N$ , т. е. (ср. § 4) чем больше разрешающая сила решетки.

Если наблюдение ведется не в главном максимуме для частоты  $\omega^*$  ( $\theta \neq \theta^*$ ); происходит нечто, напоминающее показанное на рис. 515, б. Рассуждая так же, как и для главного максимума, мы увидим, что

установление происходит путем биений и что устанавливается колебание с постоянной амплитудой и частотой  $\omega^*$ . Но здесь в отличие от резонатора спадание также происходит путем биений. Картина эволюции векторной диаграммы показана на рис. 518.

Мы приходим к тем же выводам, что и для резонатора. Колебание в целом мало отличается от обрывка продолжительности  $\tau$  синусоиды *вынужденной* частоты  $\omega^*$ .

б) Короткий обрывок. Пусть теперь  $\tau \ll \tau_\theta$ . В некоторый момент  $t_0$  в точку наблюдения придет колебание от первого элемента решетки, в момент  $t_0 + T_\theta$ , где

$$T_\theta = \frac{d \sin \theta}{c},$$

придет колебание от второго элемента, в момент  $t_0 + 2T_\theta$  — от третьего элемента и т. д. Так будет продолжаться до момента  $t_0 + \tau$ . В этот момент начинает приходить колебание от элемента номера  $n + 1$ , где

$$n = \frac{\tau}{T_\theta},$$

но прекращается колебание, пришедшее от первого элемента. В момент  $t_0 + T_\theta + \tau$  начинает приходить колебание от элемента номера  $n + 2$ , но прекращается колебание, пришедшее от элемента номера 2 и т. д. Так будет продолжаться до момента  $t_0 + \tau_\theta$ , где

$$\tau_\theta = NT_\theta,$$

после чего прекращается добавление новых колебаний и последовательно отпадают колебания от элементов номера  $N - n, N - n + 1, \dots, N$ . Максимальное число колебаний, одновременно складывающихся в точке наблюдения, равно  $n$ . Заметим, что продолжительность колебания в месте наблюдения определяется не продолжительностью приходящего обрывка, а числом элементов решетки.

Рассмотрим угол  $\theta = \theta^*$ . Здесь (в отличие от случая а)) нарастание колебаний в точке наблюдения прекращается не потому, что прекращается вступление в строй новых элементов решетки слева\*), а потому, что, начиная с момента  $t_0 + \tau$ , каждый раз, когда добавляется новое колебание слева, отпадает равное ему по амплитуде и фазе колебание справа (решетку считаем расположенной горизонтально, направление  $\theta$ ), вследствие чего амплитуда и фаза суммарного колебания будут оставаться постоянными

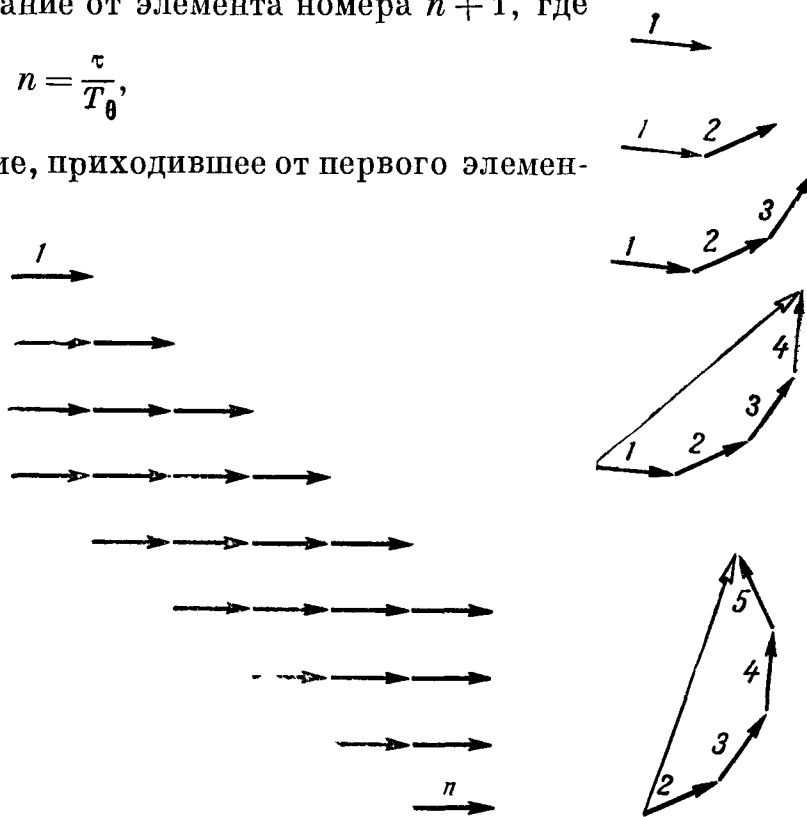


Рис. 519. То же, что рис. 517, но для короткого обрывка синусоиды.

Рис. 520. То же, что рис. 518, но для короткого обрывка синусоиды.

\*) Мы считаем, что решетка расположена горизонтально, свет падает на нее сверху, наблюдается свет, дифрагированный вправо.

Как только вступит в строй крайний слева элемент решетки, амплитуда начнет падать: теперь отпадание колебаний от элементов справа не будет возмещаться приходом колебаний от новых элементов слева. Эволюция векторной диаграммы для случая  $\theta = \theta^*$  показана на рис. 519.

Пусть теперь  $\theta \neq \theta^*$ . Сначала будут происходить биения, как на рис. 518, но они прекратятся не из-за того, что прибавление колебаний от новых элементов слева будет компенсироваться прекращением колебаний, приходящих от элементов справа. Здесь компенсация происходит только в отношении амплитуды, а не фазы. Происходит то, что показано на рис. 520: после того как амплитуда суммарного колебания перестает нарастать, его фаза равномерно растет со временем, изменяясь на  $\varepsilon_\theta = k^*d \sin \theta - 2\pi$  за промежутки времени, равные  $T_\theta = d \sin \theta / c$ . Суммарное колебание имеет, таким образом, вид

$$E = A \cos [\omega^*t - \varphi(t)], \quad (11.49)$$

где

$$\varphi(t) = \frac{\varepsilon_\theta}{T_\theta} t = \left( k^* \frac{d \sin \theta}{T_\theta} - \frac{2\pi}{T_\theta} \right) t = \omega^*t - \omega_\theta t. \quad (11.50)$$

Подставляя (11.50) в (11.49), получаем:

$$E = A \cos \omega_\theta t.$$

В направлении  $\theta$  решетка преобразует обрывок продолжительности  $\tau$  синусоиды частоты  $\omega^*$  в обрывок синусоиды *собственной частоты*  $\omega_\theta$ , соответствующей этому направлению, имеющий продолжительность, практически равную  $\tau_\theta$ .

Амплитуда  $A$  выражается, как видно из рис. 520, формулой

$$A = b \left| \frac{\sin \frac{n\varepsilon}{2}}{\sin \frac{\varepsilon}{2}} \right| = b \left| \frac{\sin \left[ \frac{nT_\theta}{2} (\omega^* - \omega_\theta) \right]}{\sin \frac{\varepsilon_\theta}{2}} \right|, \quad (11.51)$$

где  $b$  — амплитуда колебания от отдельного элемента решетки. В случае решетки с синусоидальной пропускаемостью имеем (см. гл. IX, § 9):

$$b = a \left| \frac{\sin \left( \frac{1}{2} k^* d \sin \theta \right)}{K - k^* \sin \theta} \right| = ac \left| \frac{\sin \frac{\varepsilon_\theta}{2}}{(\omega_\theta - \omega^*) \sin \theta} \right|.$$

Подставляя это значение в предыдущую формулу и принимая во внимание, что  $nT_\theta = \tau$ , получаем:

$$A = \frac{ac}{\sin \theta} \left| \frac{\sin \left[ (\omega^* - \omega_\theta) \frac{\tau}{2} \right]}{\omega^* - \omega_\theta} \right|. \quad (11.52)$$

Интегральный квадратичный эффект колебания равен здесь приблизительно

$$I = \frac{1}{2} A^2 \tau_\theta = \frac{a^2 c^2 N T_\theta}{2 \sin^2 \theta} \left\{ \frac{\sin \left[ (\omega^* - \omega_\theta) \frac{\tau}{2} \right]}{\omega^* - \omega_\theta} \right\}^2 = \frac{ca^2 Nd}{2 \sin \theta} \left\{ \frac{\sin \left[ (\omega^* - \omega_\theta) \frac{\tau}{2} \right]}{\omega^* - \omega_\theta} \right\}^2,$$

что совпадает с результатом § 6, п. 2, полученным с помощью спектрального разложения. (Здесь также приближения, сделанные при вычислении  $I$  обоими методами, оказываются эквивалентными.)



**3. Призма.** Для нее может быть проведено такое же рассмотрение во времени, как для решетки. Ограничимся доказательством того, что и здесь разрешающая сила может быть представлена в виде

$$R = \frac{\tau_0}{T}, \quad (11.53)$$

где  $\tau_0$  — временная постоянная призмы (эту величину мы сейчас определим),  $T$  — период волны, для которой направление наблюдения соответствует главному максимуму.

Пусть на призму падает короткий обрывок плоской синусоидальной волны. Ограничимся случаем волны, распространяющейся по направлению к соответствующему наименьшему отклонению. Если этот обрывок очень короткий, призма превратит его в обрывок большей продолжительности  $\tau_0$ , где  $\tau_0$  — время, протекающее между приходом колебаний в точку

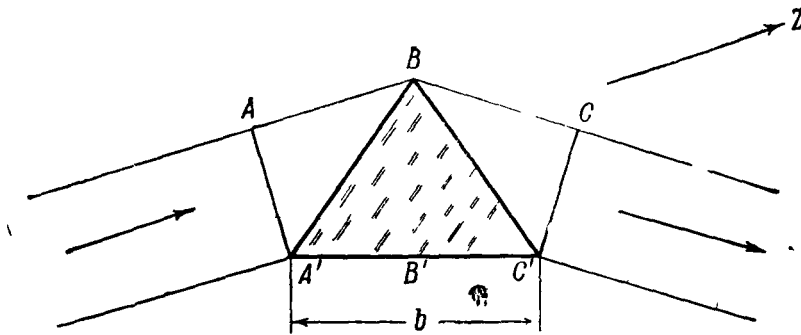


Рис. 521. К выводу соотношения (11.53). Рассматривается случай, когда свет распространяется в призме параллельно ее основанию  $A'C'$ .

наблюдения  $P$  по пути  $SABCP$  и по пути  $SA'B'C'P$  (рис. 521; точки  $S$  и  $P$  не показаны). Это время мы имели в виду, говоря о временной постоянной призмы. Имеем:

$$\tau_0 = \frac{b}{U} - \frac{AB + BC}{c},$$

где  $U$  — групповая скорость в стекле, или, так как на основании закона Снеллиуса  $AB + BC = bn$ , где  $n$  — показатель преломления стекла,

$$\tau_0 = \frac{b}{U} - \frac{bn}{c}.$$

Воспользуемся теперь соотношением

$$\frac{1}{U} = \frac{\partial(nk)}{\partial\omega} = \frac{1}{c} \frac{\partial(nk)}{\partial k} = \frac{n}{c} + \frac{k}{c} \frac{dn}{dk},$$

являющимся следствием (5.27), где  $k$  — волновое число в вакууме. Получаем:

$$\tau_0 = b \frac{k}{c} \frac{dn}{dk} = b \frac{k}{c} \frac{\lambda^2}{2\pi} \left| \frac{dn}{d\lambda} \right| = bT \left| \frac{dn}{d\lambda} \right|. \quad (11.54)$$

Сравнивая формулы (11.54) с (11.36), получаем (11.53).

Таким образом, и в случае призмы разрешающая сила тем больше, чем больше временная постоянная, — чем сильнее призма «затягивает» отдельный короткий обрывок синусоиды.

## § 10. Временной ход преобразования модулированного колебания спектральным аппаратом

Мы уже дали ответ на часть вопросов, поставленных в § 8, п. 1, и можем теперь ответить на остальные. Речь будет идти о модулированном колебании, изображенном на рис. 475. Оно получается из синусоидального колебания частоты  $\omega$  путем периодического разрывного изменения амплитуды. Можно сказать и так: оно состоит из обрывков синусоиды продолжительности  $\tau/2$ , разделенных паузами той же продолжительности. Примем, что  $\tau = nT$  ( $T = 2\pi/\omega$ ), где  $n$  — целое. В этом случае все обрывки синусоиды совершенно одинаковы и получаются один из другого смещением по оси  $t$  на отрезок  $\tau$ . (Предположения о целочисленности  $n$  и о том, что продолжительность пауз равна продолжительности обрывков, не имеют принципиального значения. Они сделаны для упрощения вычислений.) Все сказанное в этом параграфе может быть легко перенесено с соответствующими изменениями на случай произвольной модуляции, например синусоидальной.

**1. Резонатор без затухания.** Если бы приходящее колебание не было модулированным, мы имели бы в резонаторе без затухания неограниченное

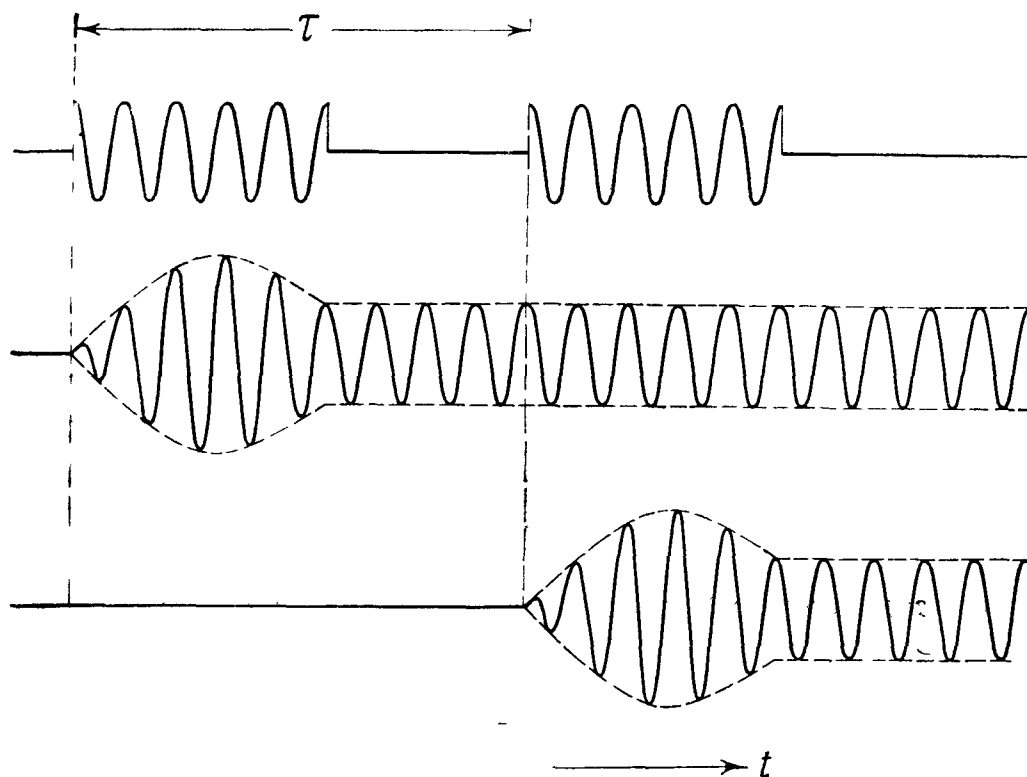


Рис. 522. Осциллограммы колебаний, возбуждаемых отдельными группами проходящих колебаний.

нарастание колебаний (резонанс) при  $\omega = \omega_0$  и биения при близких, но неравных  $\omega$ ,  $\omega_0$ , тем более частые и тем меньшие по размаху, чем больше расстройка. Что же дает модулированное колебание?

Построим на основании сказанного в § 9 осциллограммы колебаний, которые вызывались бы каждым из обрывков синусоиды частоты  $\omega$ , если бы остальные отсутствовали. Каждая осциллограмма состоит из начального участка продолжительности  $\tau/2$ , за которым следует «полусинусоида» частоты  $\omega_0$  (рис. 522). Осциллограмма колебания, вызванного каждым из обрывков, сдвинута вправо на  $\tau$  относительно осциллограммы колебания, вызванного предыдущим обрывком. На основании принципа суперпо-

зиции колебание, существующее после прохождения  $m$ -го обрывка и до прихода  $(m + 1)$ -го, есть сумма  $m$  колебаний одинаковой частоты  $\omega_0$  и одинаковой амплитуды, фазы которых образуют арифметическую прогрессию с разностью  $\omega_0 \cdot \tau$ . Вообще говоря, эта разность не будет целым кратным  $2\pi$  и с ростом  $m$ , т. е. по мере прохождения новых обрывков синусоиды, амплитуда колебания резонатора будет периодически меняться, будут происходить биения. Но пусть частота модуляции  $\Omega = 2\pi/\tau$  равна разности  $\omega_0 - \omega$ . В этом случае

$$\omega_0 \cdot \tau = \omega \tau + \Omega \cdot \tau = 2\pi \frac{\tau}{T} + 2\pi = (n + 1)2\pi.$$

Колебания частоты  $\omega_0$ , создаваемые отдельными обрывками, синфазны; в результате происходит неограниченное нарастание колебаний, имеет место резонанс (ср. гл. III, § 4).

Это есть то явление, которое на спектральном языке называется резонансом на первую боковую частоту внешней силы.

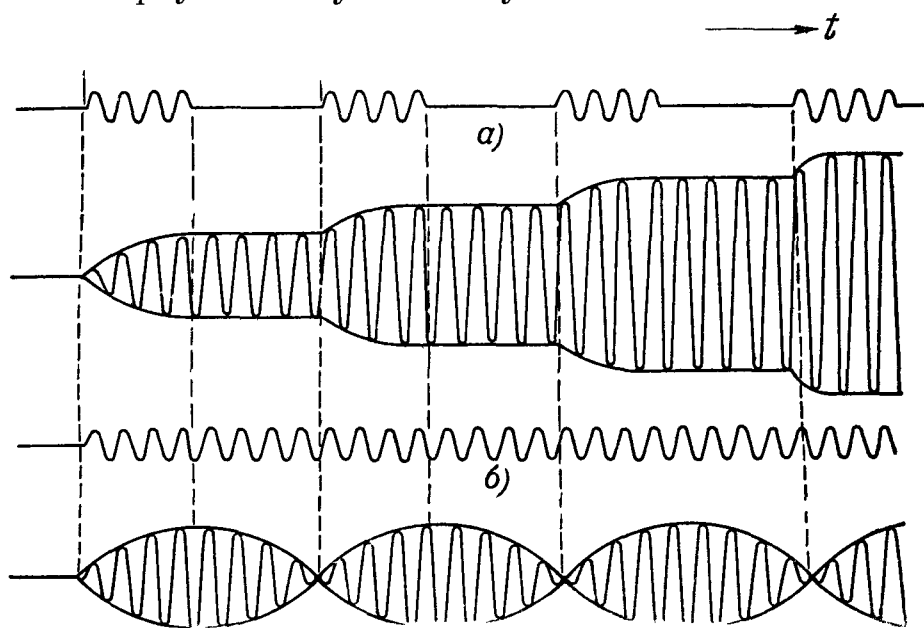


Рис. 523. *a*—нарастание колебаний при настройке на боковую частоту; *b*—биения при прекращении модуляции.

Осциллограмма суммарного колебания имеет вид, показанный на рис. 523, *a*. Сравнивая рис. 523, *a* и рис. 523, *b*, мы приходим к следующей естественной физической интерпретации. Немодулированная внешняя сила частоты  $\omega$  поочередно раскачивает резонатор на протяжении  $n/2$  колебаний и полностью гасит его на протяжении следующих  $n/2$  колебаний. Когда мы модулируем внешнюю силу с частотой  $\Omega = \omega_0 - \omega$ , мы устраняем ее в течение тех промежутков времени, когда она *гасила бы* колебания резонатора, чем и создается возможность их неограниченного нарастания, т. е. резонанса.

Теперь тот факт, что мы можем вызвать резонанс, прерывая силу в подходящем темпе, становится вполне наглядным.

Очевидно, что условие синфазности будет выполнено при любой  $\Omega$  в том случае, когда  $\omega = \omega_0$ . Нетрудно видеть, далее, что условие синфазности выполняется и тогда, когда

$$\omega_0 - \omega = s\Omega \quad (s \text{ — нечетное}). \quad (11.55)$$

При этом также наступает резонанс. Если  $|\omega_0 - \omega|$  — четное кратное  $\Omega$ , каждый обрывок не оставляет следа (рис. 516, *b*), резонанса нет. Это ясно также из спектрограммы (рис. 477, *b*).

Интерпретация резонанса на боковую частоту в случае синусоидальной модуляции амплитуды совершенно аналогична: мы ослабляем воздействие в такие моменты, когда оно имеет «неблагоприятную» фазу. То, что здесь в отличие от «прямоугольной» модуляции резонанс не имеет места тогда, когда расстройка  $|\omega - \omega_0|$  кратна  $\Omega$ , аналогично в некоторой степени отличию между резонансом на периодические импульсы и на синусоидальную силу (гл. III, § 4, 6).

**2. Резонатор с учетом затухания.** Явления носят совершенно различный характер в зависимости от соотношения между периодом модуляции  $\tau$  и временной постоянной  $\tau_0$ . Рассмотрим два крайних случая.

а) Вре́мя установле́ния мало по сравнению с периодом модуляции ( $\tau_0 \ll \tau$ ). В этом случае (ср. § 9) каждый обрывок синусоиды действует «сам по себе» и можно повторить все сказанное в § 9 относительно действия длинного обрывка синусоиды.

б) Вре́мя установле́ния велико по сравнению с периодом модуляции ( $\tau_0 \gg \tau$ ). В этом случае колебания, вызываемые отдельным обрывком внешней силы, имеют вид, показанный на рис. 516; их амплитуда успевает лишь незначительно упасть к моменту прихода следующего обрывка. Поэтому здесь, как и в п. 1, при выполнении условия (11.55) будет происходить накопление колебаний. Но вследствие затухания собственных колебаний накопление не будет неограниченным и суммарная амплитуда будет стремиться к определенному конечному значению. Покажем это подробно.

Начальная амплитуда собственного колебания, создаваемого одним обрывком внешней силы, равна приближенно на основании (11.46)

$$a = \frac{1}{\omega_0} \left| \frac{\sin \left[ (\omega - \omega_0) \frac{\tau}{4} \right]}{\omega_0 - \omega} \right| = \frac{1}{\omega_0} \left| \frac{\sin \left( \frac{s\Omega\tau}{4} \right)}{s\Omega} \right| = \frac{1}{s\omega_0\Omega}. \quad (11.56)$$

В силу (11.55) это колебание — в фазе с колебанием, оставшимся от предыдущих обрывков. Приращение амплитуды  $A$  суммарного колебания в резонаторе от момента  $t_m$  окончания действия  $m$ -го обрывка к моменту  $t_{m+1}$  окончания действия  $(m+1)$ -го обрывка было бы равно  $a$ , если бы амплитуда колебания, вызванного первыми  $m$  импульсами, не уменьшалась от значения  $A_m$  до значения  $A_m \exp(-\delta\tau)$ . В итоге амплитуда в момент  $t_{m+1}$  будет иметь значение

$$A_{m+1} = A_m e^{-\delta\tau} + a.$$

Это соотношение имеет такой же вид, как и (3.42). Амплитуда  $A_m$  стремится при  $m \rightarrow \infty$  к стационарному значению

$$A_\infty = \frac{a}{1 - e^{-\delta\tau}} \quad (11.57)$$

или приближенно в силу малости  $\delta\tau$  по сравнению с единицей, а также формулы (11.56)

$$A_\infty = \frac{a}{\delta\tau} = \frac{1}{\delta\tau s\omega_0\Omega} = \frac{\tau_0}{\tau s\omega_0}. \quad (11.57a)$$

Мы пришли бы к тому же результату при спектральном рассмотрении. Здесь видно, что чем меньше затухание, т. е. чем меньше отношение  $1 : \exp(-2\delta\tau)$  отличается от 1, тем меньше при стационарном режиме относительная величина пульсаций амплитуды, тем меньше стационарное колебание при резонансе отличается от синусоидального (немодулированного) колебания частоты  $\omega_0$  (рис. 524). Это то, что на спектральном языке выра-

жается словами: чем острее резонанс, тем меньше «пролезают» частоты, отличные от той боковой частоты, на которую настроен резонатор.

Относительно того, почему при  $|\omega - \omega_0| = s\Omega$  прерывание внешней силы в подходящем темпе вызывает усиление колебаний в резонаторе (первый вопрос § 8), можно повторить сказанное в п. 1. Ответы на второй и третий вопросы могут быть сформулированы в следующих словах. В случае резонанса резонатор с малым затуханием затягивает своими собственными колебаниями паузы внешней силы. Колебание мало отличается от синусоидального колебания частоты  $\omega_0$  (а не  $\omega$ ) вследствие того, что каждый

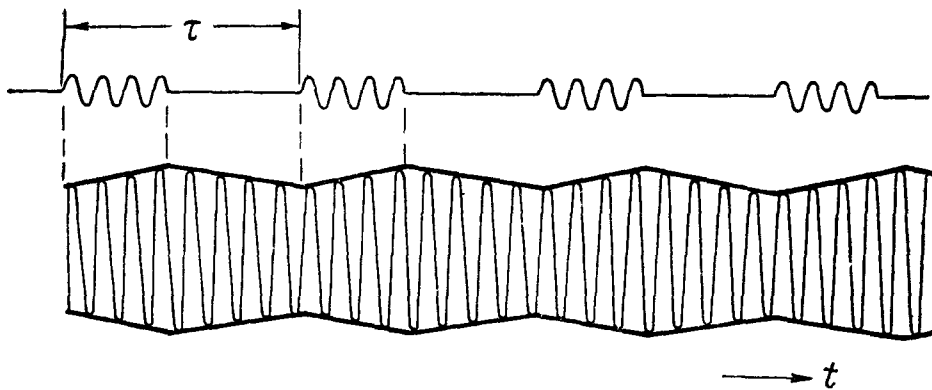


Рис. 524. Установившийся режим под действием модулированного колебания.

обрывок действует лишь на протяжении короткого времени  $\tau/2$  и оставляет после себя длящегося гораздо большее время (порядка  $\tau_0$ ) собственное колебание частоты  $\omega_0$ .

**3. Решетка.** Все сказанное в п. 1 переносится почти без изменения на решетку без затухания, т. е. с неограниченным числом элементов: согласно § 9 каждый падающий на решетку обрывок синусоиды создает в направлении  $\theta$ , настроенном на частоту  $\omega_\theta$  (таким, что  $d \sin \theta = 2\pi c/\omega_\theta$ ), колебание того же вида, что на рис. 522 (полусинусоида имеет частоту  $\omega_\theta$ ). Колебания, порождаемые отдельными обрывками, складываются. Сдвиг фаз между ними равен  $\omega_\theta \cdot \tau$ . Будут происходить биения, если он не равен целому кратному  $2\pi$ , или неограниченное нарастание колебаний частоты  $\omega_\theta$ , если  $\omega_\theta \tau$  кратно  $2\pi$ . Последнее условие равносильно

$$|\omega_\theta - \omega| = s\Omega \quad (s = 0, \pm 1, \pm 3, \dots). \quad (11.58)$$

Посмотрим, что будет, если выполнено условие (11.58) в случае ограниченной решетки. Здесь каждый обрывок воздействия оставляет после себя, как мы знаем (§ 9), обрывок синусоиды частоты  $\omega_\theta$  конечной продолжительности, равной временной постоянной решетки. Явления будут носить совершенно различный характер в зависимости от соотношения между периодом модуляции  $\tau$  и временной постоянной решетки

$$\tau_\theta = NT_\theta \quad (T_\theta = 2\pi/\omega_\theta),$$

т. е. (так как  $T$  и  $T_\theta$  одного порядка) между числом элементов решетки  $N$  и числом  $n$  периодов несущего колебания за период модуляции. Как и в п. 2, мы рассмотрим два крайних случая.

а) Решетка с малым числом элементов ( $N \ll n$ ). Здесь мы видим (рассуждая так же, как в § 9), что интенсивность света, выходящего из решетки, будет пульсировать почти так же резко, как интенсивность света, падающего на нее. Говоря на спектральном языке: решетка не выделяет отдельных синусоидальных компонент падающего на нее света.

Здесь целесообразно говорить о падающем свете как о монохроматическом свете переменной интенсивности, принимающей поочередно значения 0 и  $A_0^2$ .

б) Решетка с большим числом элементов ( $N \gg n$ ). Возьмем за  $t=0$  момент начала колебания, создаваемого в точке наблюдения первым обрывком. Сначала все происходит так, как если бы решетка была неограниченной, вплоть до момента  $t=\tau_\theta$ . В этот момент начинает пропадать колебание частоты  $\omega_\theta$ , порожденное первым обрывком, и суммарная «амплитуда» уменьшится за время  $nT_\theta/2$  на величину амплитуды  $a$ , возбуждаемой одним обрывком. Так как за время  $\tau_\theta$  успело подействовать  $\tau_\theta/\tau$  обрывков, амплитуда перед спаданием была равна  $a\tau_\theta/\tau$ . После того как амплитуда спадет до  $a\tau_\theta/\tau - a$ , придет очередной обрывок и она снова возрастет до значения  $a\tau_\theta/\tau$ , затем пропадает колебание от второго импульса и амплитуда снова спадает до  $a\tau_\theta/\tau - a$  и т. д. Ясно, таким образом, что амплитуда будет пульсировать с периодом  $\tau$  в пределах

$$\frac{\tau_\theta}{\tau} a, \quad \left( \frac{\tau_\theta}{\tau} - 1 \right) a.$$

При  $N \gg n$ , т. е.  $\tau_\theta/\tau \gg 1$ , эта пульсация относительно мала и колебание в точке наблюдения мало отличается от синусоидального (немодулированного) колебания частоты  $\omega_\theta$ . В поле зрения будет виден ряд эквивалентных светлых линий практически одинаковой интенсивности и различных по цвету под углами  $\theta_s$ , определяемыми соотношением

$$d \sin \theta_s = \frac{2\pi c}{\omega \pm s\Omega}. \quad (11.59)$$

Воспользовавшись выражением (11.51) для амплитуды, создаваемой отдельным обрывком, мы получаем для интенсивности под углом  $\theta_s$  значение

$$\left( \frac{\tau_\theta}{\tau} \right)^2 b^2 \left( \frac{\sin \frac{n\varepsilon_\theta}{2}}{\sin \frac{\varepsilon_\theta}{2}} \right)^2. \quad (11.60)$$

Мы пришли к тем же результатам, что и с помощью разложения в тригонометрический ряд. Ответ на вопросы, поставленные в § 8, здесь может быть сформулирован так же, как в случае резонатора (устранение воздействия в неблагоприятные промежутки времени, затягивание колебаний решеткой во время пауз воздействия).

4. **Аналогия с зонной пластинкой.** Сопоставим проведенный разбор с теорией зонной пластинки (гл. IX, § 6). Там экранирование части вторичных источников света, т. е. устранение воздействия, идущего из определенных частей пространства, здесь — прекращение воздействия в определенные промежутки времени не ослабляют, а во много раз *усиливают* результат воздействия. И в случае зонной пластинки усиление получаемого колебания происходит здесь вследствие того, что устраняется одна из двух взаимно компенсирующихся составляющих, на которые может быть мысленно расчленено воздействие. Там эти составляющие — колебания, происходящие от совокупности четных и совокупности нечетных зон, здесь — совокупности четных и нечетных обрывков продолжительности  $\tau/2$ , образующие вместе синусоидальное колебание (рис. 523, б).

Как и в случае зонной пластинки, еще большее усиление воздействия, чем при устранении одной из составляющих, получится при изменении ее фазы на  $\pi$ : в этом случае мы получим воздействие, показанное на рис. 525:

это — колебание, модулированное по фазе; оно выражается формулой

$$E = A(t) \cos \omega t, \quad (11.61)$$

где  $A(t)$  — периодическая функция времени, принимающая за период  $2\tau$  значения

$$A(t) = \begin{cases} +A_0, & 0 < t < \frac{\pi}{2}, \\ -A_0, & \tau < t < \tau. \end{cases} \quad (11.61a)$$

Ставя задачу без учета затухания и рассуждая так же, как в п. 1, мы убедимся, что теперь при  $|\omega - \omega_0| = \Omega$  вместо чередующихся нарастаний и задержек роста амплитуды получится непрекращающееся нарастание колебаний. Зато при  $\omega = \omega_0$  теперь *не* будет монотонного нарастания (резонанса), а будут происходить биения. Вообще неограниченное нарастание будет здесь иметь место только при

$$|\omega - \omega_0| = s\Omega \quad (s - \text{нечетное}). \quad (11.62)$$

Учитывая затухание и рассуждая так же, как в пп. 2, 3, мы убедимся, что теперь при выполнении условия (11.61) стационарная амплитуда будет вдвое больше для каждого нечетного  $s$  чем под действием силы  $E = A_0 \cos \omega t$ , и что стационарные колебания будут очень малы для четных  $s$ , в частности для  $s = 0$ .

Переведем эти высказывания на спектральный язык: спектр колебания (11.61) состоит только из частот,  $\omega \pm s\Omega$  ( $s$  — нечетное), и не содержит, в частности, несущей частоты  $\omega$ . В этом можно убедиться, вычислив коэффициенты разложения в ряд Фурье.

Хорошую иллюстрацию легко осуществить с помощью язычкового частотомера, коммутируя периодически подводимое к нему от сети напряжение, т. е. периодически меняя знак его амплитуды. Сильно размазываются язычки  $\omega \pm \Omega$ ,  $\omega \pm 3\Omega$ , ..., но язычок  $\omega$  остается не размазанным.

**5. Дополнительные замечания о временном и спектральном подходах.** В § 8 — 10 преобразование колебаний и волн линейными системами (колебательным контуром, дифракционной решеткой) было рассмотрено при помощи временного подхода и была показана его эквивалентность спектральному подходу.

Существование различных теоретических подходов (в данном случае спектрального и временного) к одним и тем же объективным процессам не является характерной чертой только учения о колебаниях и волнах. В физике, вообще, часто приходится к одним и тем же явлениям применять различные теоретические трактовки. Так, например, к процессам фазовых превращений или излучения света при решении одних задач применяется термодинамическая трактовка, а при решении других — статистическая. Кристалл рассматривается в акустике как непрерывная среда, а в теории теплоемкости учитывается его атомистическая структура.

В теории колебаний изучаются преимущественно общие черты электрических и механических колебаний, в механике сплошной среды и в электродинамике — преимущественно их специфические черты. Но и в пределах единого учения о колебаниях и волнах часто приходится при-

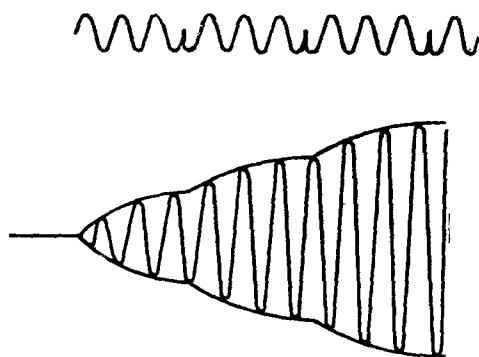


Рис. 525. Резонанс при настройке на боковую частоту в случае разрывной модуляции фазы.

менять к одним и тем же явлениям различные теоретические трактовки. Одним из примеров как раз является вопрос о преобразовании колебаний или волн линейными системами, который можно рассматривать как на основе спектрального подхода, так и на основе временного. Другой пример: колебание, поляризованное по кругу, в одних случаях представляется как сумма двух линейно-поляризованных колебаний (стр. 42), однако в теории вращения плоскости поляризации линейно-поляризованное колебание трактуется как сумма двух колебаний, поляризованных по кругу (см., например, стр. 292).

Возможность различных теоретических трактовок, различных математических представлений одного и того же объективного процесса отражает *многогранность*, разнообразие свойств этого процесса. В некоторых случаях одна трактовка отражает свойства изучаемого объекта более полно, в то время как другая передает только некоторые его черты. Так обстоит дело в примере с кристаллом: «акустическая» трактовка не может отобразить наличие внутримолекулярных колебаний. В других случаях оба подхода эквивалентны, в том смысле, что приводят к одним и тем же результатам. Так обстоит дело с разложением колебаний на синусоиды или на импульсы (спектральный и временной подходы). Но при одном подходе лучше, более отчетливо отображаются, выступают как бы на передний план, одни черты процесса, при другом подходе — другие. В подобного рода случаях выбор той или иной трактовки при решении какой-нибудь конкретной задачи диктуется тем, какие объективные свойства исследуемого процесса наиболее существенны в рассматриваемом вопросе. Впрочем, очень часто для полного овладения задачей, т. е. для всестороннего понимания происходящего процесса, необходимо применять как одну, так и другую трактовку, что и было сделано выше применительно к вопросу о действии спектральных приборов.

## § 11. Ширина спектральных линий

**1. Постановка задачи.** До сих пор, говоря о линейчатых спектрах (§ 2—5), мы отвлекались от хаотической модуляции, всегда имеющей место в тех колебаниях и волнах, которые мы там считали синусоидальными (см. гл. X). Нам предстоит теперь выяснить, как проявляется эта хаотическая модуляция в спектральной аппаратуре и (в частности) при каких условиях можно ею пренебречь, т. е. идеализация, которой мы пользовались в § 2—5, является законной.

Заметим, что согласно § 6, 8 свет, выходящий из монохроматора, освещаемого белым светом, также является хаотически модулированным. Все сказанное ниже относится и к прохождению света, вышедшего из монохроматора, через второй спектральный аппарат.

Для краткости мы будем говорить только о спектральных приборах, где используется решетка. Случаи резонатора и призмы могут быть рассмотрены аналогичным образом, и разбор приводит к аналогичным результатам.

**3. Большая разрешающая сила.** Предположим сначала, что временная постоянная решетки велика по сравнению со средним временем модуляции падающего на нее света.

Мы легко можем схватить сущность дела, воспользовавшись сначала той упрощенной картиной хаотически модулированного колебания, которая была дана в гл. X, § 2; будем считать, что оно является последовательностью обрывков синусоиды определенной частоты  $\omega$ , причем амплитуда и продолжительность  $\tau$  всех обрывков одинаковы, но *фаза меняется от обрывка к обрывку совершенно случайно.*



Каждый обрывок порождает в точке наблюдения колебание вида, изображенного на рис. 526. В силу условия  $\tau_\theta \gg \tau$  каждое такое колебание длится гораздо дольше, чем породивший его обрывок синусоиды, и поле  $E_0$  в точке наблюдения есть суперпозиция колебаний такого вида, порожденных отдельными обрывками. Отличие от § 10 заключается в том, что здесь эти колебания вследствие случайности фаз приходящих обрывков также имеют *случайные фазы*. Таким образом,  $E_\theta$  есть суперпозиция обрывков синусоид частоты  $\omega_\theta$ , имеющих одинаковую амплитуду  $a$ , определяемую формулой (11.51), и случайные фазы.

В данный момент  $t$  присутствуют только колебания, порожденные обрывками, попавшими на решетку между моментом  $t - r/c - \tau_\theta$  и моментом  $t - r/c$  ( $r$  — расстояние от точки наблюдения до ближайшего к ней края решетки). Число одновременно присутствующих в точке наблюдения колебаний равно  $\tau_\theta/\tau$  — числу обрывков, попадающих на решетку за время  $\tau_\theta$ .

Из сказанного следует (ср. гл. X, § 3), что наблюдаемое колебание  $E_\theta$  хаотически модулировано по фазе и амплитуде, причем время, за кото-



Рис. 526. Колебания, возбуждаемые отдельным обрывком синусоиды.

рое происходит «полная смена» его фазы и амплитуды, определяется самой решеткой и равно  $\tau_\theta$ . Таким образом, при  $\tau_\theta \gg \tau$  решетка образует хаотически модулированное колебание вида  $A(t) \cos[\omega t - \varphi(t)]$  в хаотически модулированное колебание вида  $B(t) \cos[\omega_\theta t - \psi(t)]$ , причем  $B(t)$  и  $\psi(t)$  меняются гораздо медленнее, чем  $A(t)$  и  $\varphi(t)$ ; кроме того,  $\omega_\theta$ , вообще говоря, отлично от  $\omega$ . Решетка преобразует и «частоту» колебания и быстроту модуляции.

На основании гл. X, § 3 средняя интенсивность  $\overline{B^2}$  за время, большое по сравнению с  $\tau_\theta$ , равна  $a^2$ , умноженному на число складываемых колебаний  $\tau_\theta/\tau$ . Воспользовавшись (11.51), получаем для интенсивности наблюдаемого света выражение

$$\frac{\tau_\theta}{\tau} a^2 = \frac{\tau_\theta}{\tau} b^2 \left( \frac{\sin \frac{n\varepsilon_\theta}{2}}{\sin \frac{\varepsilon_\theta}{2}} \right)^2. \quad (11.63)$$

В поле зрения получится светлая полоска с распределением интенсивности, показанным на рис. 527, *a*. Расплывчатость полоски — или, как ее называют оптики, ширина линии — здесь в отличие от случая § 4 определяется не решеткой, а приходящим светом (*собственная ширина* спектральной линии): она обратно пропорциональна продолжительности обрывка  $\tau$ . Частота  $\omega_\theta$  меняется на протяжении полоски. Чем меньше продолжительность обрывка, тем больше отличие в цвете краев полоски. Колебание в каждом месте полоски тем ближе к синусоидальному (хаотическая модуляция в нем тем медленнее), чем больше  $\tau_\theta$ .

Сравнение формул (11.63) и (11.42а) показывает, что спектр, образующийся в поле зрения спектроскопа, соответствует математическому спектру отдельного обрывка: под углом  $\theta$  образуется почти монохроматическое колебание частоты  $\omega_\theta$  и средней интенсивности, пропорциональной числу обрывков, приходящих за время  $\tau_\theta$ , и значению при частоте  $\omega_\theta$  функции

$g^2(\omega)$  — распределения интенсивности в спектре каждого обрывка. Угловая ширина  $\Delta\theta$  линии, наблюдаемой в спектрографе, пропорциональна ширине спектра отдельного обрывка синусоиды падающего света.

Возьмем более реальную модель падающей на решетку световой волны. Предположим наличие в ней обрывков синусоиды разной продолжительности. В этом случае распределение освещенности будет суммой распределений типа (11.63), соответствующих различным  $\tau$ , т. е. различным  $n$ . Суммарная освещенность (рис. 527, б) может при этом, например, монотонно спадать по обе стороны угла  $\theta$ , для которого  $\omega_\theta = \omega$ . Именно такая картина обычно наблюдается на опыте.

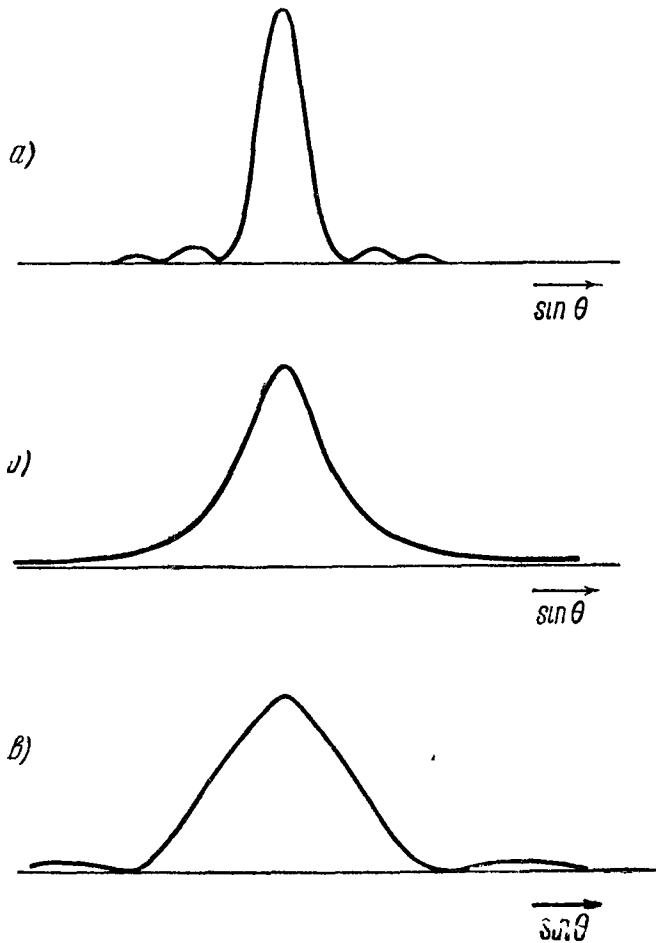


Рис. 527. а — распределение интенсивности, определяемое временем хаотической модуляции проходящего света; б — то же при неодинаковой продолжительности обрывков; в — распределение интенсивности, определяемое решеткой.

ральной линии строго одинаков, ее ширина определяется самой решеткой.

Попутно мы здесь приходим другим путем к тому критерию применимости синусоидальной идеализации, который следует из сказанного в гл. X, § 5: она применима при условии, что колебания, проходящие от различных элементов решетки, когерентны. Мы можем теперь выразить этот критерий так: синусоидальная идеализация применима, если решетка не разрешает синусоидальные компоненты хаотически модулированного колебания, т. е. если ее разрешающая сила мала по сравнению с  $\omega/\Delta\omega$ , где  $\Delta\omega$  — собственная ширина спектральной линии.

Предположим, что мы располагаем решеткой с очень большим  $N$ , но что сначала она сильно задиафрагмирована. Мы увидим спектральную линию, изображаемую рис. 527, в. Здесь ширина линии определяется решеткой. Анализ с помощью второго спектрального прибора не обнаружит, как бы ни была велика его разрешающая сила, отличий в спектральном составе света на всем протяжении линии; степень его монохроматичности окажется такой же, как в падающем свете. Будем теперь увеличивать число открытых элементов решетки и тем самым ее разрешающую силу.

3. Малая разрешающая сила. Пусть теперь  $\tau_\theta \ll \tau$ . Такие же соображения, как в § 10, сразу показывают, что изменения амплитуды и фазы в точке наблюдения будут почти в точности воспроизводить модуляцию амплитуды и фазы света, падающего на решетку. Здесь целесообразно говорить о падающем свете как о «синусоидальном колебании с переменной амплитудой и фазой». Вследствие инерционности наблюдения (ср. гл. X, § 5) мы не заметим пульсаций интенсивности, и картина в спектрографе — точно такая же, как если бы на него падала синусоидальная волна частоты  $\omega$ . Цвет на протяжении всей спек-

Наблюдаемая спектральная линия постепенно превратится в такую, которая изображена на рис. 527, б. Здесь ширина линии уже не зависит от решетки, а определяется целиком источником (собственная ширина линии). Анализ этой линии с помощью спектрального прибора, если его разрешающая сила превышает разрешающую силу нашей решетки, показал бы, что в различных частях линии свет имеет различную частоту и всюду более высокую степень монохроматичности, чем свет, падающий на решетку.

4. От чего зависит собственная ширина линии? Ответ на этот вопрос легко получить, переведя содержание гл. X, § 5 на спектральный язык. Заметим, что интерференционное измерение длины цуга — это не что иное в переводе на спектральный язык, как измерение собственной ширины спектральной линии, связанной с длиной цуга  $L$  и его продолжительностью  $\tau$  соотношением

$$\Delta\nu = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{1}{\tau} = \frac{c}{L}.$$

При значительной плотности светящегося газа ширина линий определяется главным образом соударениями атомов. При этом  $\tau$  — среднее время между гасящими ударами. Ширина линий, определяемая соударениями, называется *лорентцовой* шириной. Обычно она бывает порядка  $10^{10}$  герц.

При малой плотности светящегося газа ширина линий определяется главным образом эффектом Доплера (доплерова ширина) и имеет порядок величины

$$\Delta\nu = \nu \frac{v}{c}.$$

Последнее соотношение легко получить непосредственно из теории эффекта Доплера, т. е. рассматривая свет как суперпозицию синусоидальных волн различной частоты, испускаемых отдельными атомами, и минуя представление о хаотической модуляции. Доплерова ширина обычно порядка  $10^9 \div 10^{10}$  герц.

В случае атомных пучков, где сильно снижено влияние соударений а также (при наблюдении света, излучаемого перпендикулярно к направлению пучка) эффекта Доплера, можно приблизиться к условиям, когда  $\tau$  определяется затуханием из-за излучения. Соответствующая ширина  $\Delta\nu$  называется *естественной* шириной линий. Естественная ширина линий в оптике порядка  $10^8$  герц.

Для того чтобы можно было наблюдать расщепление линий при эффекте Зеемана или комбинационном рассеянии, а также всякую другую спектральную «тонкую структуру» (тонкой структурой называется наличие нескольких линий с близкими несущими частотами), необходима не только достаточно большая разрешающая сила спектральной аппаратуры, но и достаточно малая собственная ширина линий.

Наименьшая достижимая в настоящее время в оптике собственная ширина линий от источника значительной интенсивности — около  $10^8 \div 10^9$  герц. Такова ширина линий, излучаемых паром изотопа ртути с массовым числом 198 \*) при низких температуре и давлении.

\*) При обычных условиях вследствие наличия изотопов, излучающих слегка различные несущие частоты, отстоящие меньше, чем на ширину линий, получается кажущееся их уширение. Изотоп ртути с массовым числом 198 получают искусственным путем из золота.

На основании сказанного в гл. X, § 4 относительная ширина линий  $\Delta\nu/\nu$  лампового генератора, обусловленная флуктуациями (дробовым эффектом) порядка  $10^{-12} \div 10^{-13}$ , что гораздо меньше, чем наименьшая относительная ширина линий, достижимая в оптике \*).

## § 12. Спектральное разложение как метод исследования. Спектры и микромир

Осуществляя с помощью соответствующей аппаратуры спектральное разложение механических, акустических, электромагнитных колебаний, мы можем делать далеко идущие — и часто в высшей степени ценные — заключения о процессах, происходящих в источниках колебаний или на пути между источником и спектральной аппаратурой. Такой метод исследования называется спектральным анализом.

Так, например, по спектру звука мы можем судить, является ли колебание источника периодическим или нерегулярным: первому случаю соответствует ряд линий с кратными частотами, второму — сплошной спектр. По спектру разговора можно делать ряд заключений о строении органов речи. По спектру колебания, приходящего от радиопередатчика, мы можем судить о том, каков характер модуляции. Подведя ко входу усилителя синусоидальное колебание и исследуя спектр колебания на выходе каждого из каскадов, мы можем судить о том, в каком режиме работают лампы.

Приведем еще такие, менее тривиальные примеры.

1. Наши сведения о дробовом эффекте основаны главным образом на изучении *спектра* тока, текущего через электронную лампу. Настроивая контур и усилитель на различные частоты, мы выделяем различные участки сплошного спектра, которым обладает этот ток вследствие беспорядочности вылета электронов из катода (выражение на спектральном языке того, что мы говорили в гл. X, § 3: контур преобразует беспорядочные толчки в хаотическое модулированное колебание, несущая частота которого определяется контуром).

2. Если на вход трансформатора с ферромагнитным сердечником подается синусоидальное колебание частоты  $\omega$ , то спектральное разложение напряжения, возникающего на клеммах вторичной обмотки, дает не только линейчатый спектр (частоты, кратные  $\omega$ ), но и очень слабый сплошной спектр. Наличие частот, кратных  $\omega$ , связано, очевидно, с нелинейностью зависимости индукции от поля: индукция меняется не синусоидально. Наличие же сплошного спектра указывает, что процесс перемагничивания не носит строго периодического характера. Отсюда можно заключить, что в ферромагнитном сердечнике происходят какие-то случайные процессы, в результате которых отдельные циклы перемагничивания слегка различаются между собой.

\*) [По аналогии с оптикой Г. С. Горелик ввел понятия *естественной ширины* линии лампового генератора (о которой здесь и говорится), обусловленной флуктуациями, и ее *технической ширины*, связанной с гораздо более грубыми процессами — нестабильностью параметров схемы и источников питания и т. п. (см. Г. С. Горелик, Журнал экспериментальной и теоретической физики 20 (1950), 351, а также Известия АН СССР, серия физич. 14 (1950), 187). Техническая ширина в сотни тысяч раз превышает естественную и в известном смысле может быть уподоблена лорентцовой и доплеровой ширине линий в оптике. Если среднее время хаотической модуляции генератора, вызванной флуктуациями, порядка сотни часов (стр. 436), то для модуляции из-за технических уходов (нестабильности параметров) оно порядка секунд. Техническую ширину можно измерить, просто следя по секундомеру за «порчей» фигуры Лиссажу, даваемой на экране электронного осциллографа двумя независимыми идентичными генераторами.]

3. Созданная в последнее время (главным образом в связи с развитием радиолокации) весьма чувствительная радиоприемная аппаратура позволяет улавливать радиоволны, излучаемые (как с несомненностью установлено) Солнцем и звездами. Это излучение имеет весьма широкий сплошной спектр. Отсюда можно заключить, что оно создается какими-то происходящими на Солнце и звездах *статистическими* явлениями. Детальный анализ спектра позволяет сделать ряд заключений о характере этих явлений.

Во всех этих случаях заключения о характере изучаемых процессов делаются (на основании результатов измерений с помощью спектральной аппаратуры) при помощи *классической* теории колебаний и волн, элементы которой были изложены в этой книге.

Особенно большое — поистине огромное — значение имеет спектральный анализ в оптике, где он первоначально возник. Ему мы обязаны почти всеми сведениями о строении молекул и электронных оболочек атомов и всеми сведениями о движении звезд и происходящих в них физических явлениях.

Так, например, изучая спектр комбинационного рассеяния, мы *косвенно* улавливаем «разговор молекул», заставляя его модулировать направляемый на исследуемое вещество монохроматический свет. Когда мы наблюдаем линейчатый спектр, испускаемый разреженным газом, мы *непосредственно* улавливаем, если пользоваться тем же сравнением, ведущийся на гораздо более высоких частотах «разговор» электронов, находящихся в атомах.

Но на каком языке ведутся эти разговоры? Можно ли их расшифровать, пользуясь классической теорией колебаний и волн? Можно ли на основании оптических спектров делать заключения о молекулярных и внутриатомных процессах, пользуясь классической теорией колебаний и волн?

Мы пытались это делать при рассмотрении комбинационного рассеяния и эффекта Зеемана, а также рассматривая естественную ширину спектральных линий. Однако такой подход никогда не дает вполне удовлетворительных результатов, а в отношении структуры спектров, испускаемых атомами и молекулами, находится в вопиющем противоречии с фактами.

Например, классическая теория утверждает, что в спектре комбинационного рассеяния оба спутника должны иметь одинаковую интенсивность. Опыт показывает, что «красный» ( $\omega = \omega_0 - \Omega$ ) спутник всегда интенсивнее «фиолетового» ( $\omega = \omega_0 + \Omega$ ), а при низких температурах — существенно интенсивнее. Классическая теория утверждает, что в продольном эффекте Зеемана должно наблюдаться расщепление линий на две, в поперечном — на три составляющие. Иногда, как мы видели, опыт это подтверждает, но чаще возникает гораздо более сложное расщепление (аномальный эффект Зеемана). Особенно разительно противоречие между классической теорией и наблюдаемым на опыте спектром в случае спектра атомов водорода. Атом водорода содержит только *один* электрон. Между тем спектр света, испускаемого атомами водорода, состоит из огромного числа линий, удовлетворяющих соотношению

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

( $R$  — постоянная, равная  $109677,759 \pm 0,05$  см<sup>-1</sup>;  $m, n$  — любые целые числа), и сплошного спектра.

Классическая физика совершенно бессильна объяснить такое строение спектра.

В последние годы было обнаружено и в настоящее время усиленно исследуется радиоизлучение атомов и молекул — электромагнитное излу-

чение, спектр которого расположен в области радиочастот (порядка  $10^{10} \div \div 10^9$  герц). Классическая физика непригодна и для объяснения структуры спектров, с которыми имеет дело эта новая отрасль физики — радиоспектроскопия атомов и молекул.

Расшифровка атомных и молекулярных спектров — установление связи между строением спектра и явлениями, происходящими в атомах и молекулах, давшее прочный фундамент оптическому спектральному анализу, — стала возможной лишь после того, как был отброшен предрассудок, что явления в микромире (в мире электронов и других элементарных частиц, атомов и молекул) подчиняются законам классической физики, частью которой является классическое учение о колебаниях и волнах. Законы классической физики были установлены в результате опытного изучения движения макротел (тел, содержащих громадное число атомов), электрических макротоков (токов, в которых участвует огромное число электронов) и т. д. Законы микромира оказались иными.

Физика микромира называется *квантовой физикой*. Квантовая физика позволяет установить связь между строением атомов и молекул и строением спектров их электромагнитного излучения во всем диапазоне от радиочастот до частот рентгеновых лучей — решить для атомов и молекул ту задачу, которую мы здесь решали, например, для струны или лампового генератора.

Законы квантовой физики в корне отличаются от законов классической физики. И тем не менее нельзя понять квантовую физику, не изучив предварительно классическую физику, в частности классическое учение о колебаниях и волнах. Хотя и в совершенно ином толковании, чем то, которое было дано здесь, в квантовой физике играют фундаментальную роль такие факты, рассмотренные в этой книге, как уширение дифракционной картины при сужении щели или расплывание спектра обрывка синусоиды при его укорочении. Эти характерные для колебаний и волн соотношения дают ключ к пониманию законов движения мельчайших частиц вещества.

Вместе с тем квантовая физика указывает пределы применимости классического учения о колебаниях и волнах. опыты с рентгеновским излучением и светом показывают, что если энергия, воспринимаемая прибором, с помощью которого исследуется излучение, за время срабатывания прибора очень мала, а именно: порядка  $h\nu$ , где  $\nu$  — частота исследуемого света,  $h$  — универсальная постоянная (постоянная Планка), равная  $6,62 \cdot 10^{-27}$  эрг·сек и играющая фундаментальную роль в квантовой физике, явления носят совсем другой характер, чем описанный в этой книге: излучение проявляется как прерывный поток фотонов — «частиц» энергии  $h\nu$ . Нет оснований сомневаться, что аналогично должно обстоять дело с радиоволнами и акустическими волнами. Повышение чувствительности радиоприемной аппаратуры привело к тому, что начинает уже обсуждаться вопрос о возможности наблюдения фотонов в микроволновом радиоизлучении.

---

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аберрация 377 и д.  
Абсорбция звука 223 и д.  
Автоколебания 107 и д.  
— газовых столбов 216, 217  
— лампового генератора 115 и д.  
— систем *RC* 123 и д.  
— ферромагнитного стержня 198  
— часов 109 и д.  
Адиабатический процесс 201, 225  
Акустика движущейся среды 232  
Акустический прожектор 398  
Акустическое сопротивление 187, 204  
Амплитуда 11  
Анизотропные среды 285 и д., 341 и д.  
Антенны 235, 297 и д.  
Антифазное отражение 211  
Антифазные колебания 29  
Апериодический процесс 71  
Апертура 376, 377, 472  
Архитектурная акустика 232  
Атомный пучок 443
- Бегущая волна 157  
Безынерционное наблюдение 139, 450 и д.  
Белый свет 167, 534, 536, 546  
— шум 534, 536 и д. 546  
Биеция 48 и д., 74, 93, 94, 142  
Боковые частоты 498, 506  
«Борьба за короткую волну» 402, 488  
Броуновское движение 424 и д.
- Вектор Умова 192 и д.  
— Умова—Пойнтинга 250  
Векторные волны 155  
— гармонические колебания 16  
— диаграммы 34 и д.  
Вероятность 415, 417  
Вибратор 253 и д.  
Видимость интерференционной картины 468 и д., 485  
Вихреобразование 216  
Волна, волны 144 и д.  
Волновая теория света 164  
Волновое уравнение в газах и жидкостях 201 и д.  
— — для упругих волн в стержне 186  
— — — электромагнитных волн 243 и д.  
— —, математические сведения 168 и д.  
— — на струне 218  
— число 151, 154  
Волновой параметр 304, 318 и д., 384 и д., 396, 399 и д.
- Волновой пуг 445  
Волны на поверхности жидкости 144 и д., 170, 175  
Вращение плоскости поляризации 293, 346 и д.  
Временная постоянная 135, 136  
Время релаксации газа 228  
— среднее 419 и д.  
— установления вынужденных колебаний 86, 101  
— — в случае дифракционной решетки 545, 546  
— — — — призмы 552  
— — — спектральных приборах 529  
— хаотической модуляции 412  
Вторичные волны 333 и д., 358, 363  
— источники 358  
Вынужденные колебания 78 и д., 86 и д.  
Выпрямители 127 и д.  
Высота тона 16
- Гармоники 232  
Гармонический осциллятор 22, 63  
Гармоническое колебание 10  
Генератор звуковой 14, 16, 141  
— искровой 235  
— ламповый 16, 22, 115 и д.  
— *RC* 126  
Геометрическая оптика 354 и д., 388  
Герц (единица частоты) 11  
Гетеродин 141  
Гидролокация 212, 224  
Главные точки 403  
Главный фокус 374 и д.  
Глубина модуляции 132  
Граница разрешения объектива 471 и д.  
Граничные условия для упругих волн 209  
— — — электромагнитных волн 269  
Грозоотметчик А. С. Попова 236  
Громкоговоритель 16, 17  
Громкость звука 17  
Групповая скорость 171 и д.  
— — волн на поверхности жидкости 174  
— — звука 177  
— — радиоволн 260, 261  
— — в ионосфере 340  
— — света 177, 178
- Давление 185  
— световое 282  
Двойное преломление 289, 290, 341 и д.

- Двухлучевой электронный осциллоскоп 47  
 Декремент затухания (логарифмический) 68, 208  
 Демодуляция 135 и д.  
 Депрессия дробового эффекта 429  
 Детектор кристаллической 253, 254  
 Диаграмма направленности двойного вибратора 297 и д.  
 — — двумерной решетки из вибраторов 310 и д.  
 — — дифракционной решетки 361 и д., 394 и д.  
 — — одномерной решетки из вибраторов 300  
 — — — цепочки из вибраторов 309  
 — — пластинки, колеблющейся по толщине 317, 319  
 — — полуволнового вибратора 297  
 — — прожектора 400 и д.  
 — — щели 388  
 — — элементарного вибратора 266  
 Динамические процессы 408  
 Динамический подход к изучению колебаний 56  
 — — — волн 182  
 Диод 112, 113  
 Дисперсия 170 и д.  
 — вращения плоскости поляризации 349  
 — звука 223, 224, 227 и д.  
 — магнитной проницаемости 274  
 — электромагнитных волн 273, 274, 338 и д.  
 Диссонанс 49  
 Дифракция 356, 357  
 — в случае призмы 396, 397  
 — — — прожектора 399 и д.  
 — — — протяженного источника 470 и д., 481 и д.  
 — в фокальной плоскости 403 и д.  
 — от края экрана 382, 383  
 — — круглого отверстия 367 и д., 379 и д., 397  
 — — — экрана 371  
 — — проволоки 388  
 — — прямоугольного отверстия 379 и д.  
 — — решеток 359 и д., 393 и д.  
 — — щели 380 и д.  
 — Фраунгофера 359 и д., 384 и д., 404 и д.  
 Дихроизм 291, 342  
 Длина волны 146, 148, 151, 153, 255 и д.  
 — свободного пробега 227  
 — дуга 444 и д., 456  
 Добротность 69, 70, 208, 519, 520  
 Доплерова ширина спектральной линии 562  
 Дробовой эффект 427 и д.  
 Духовые музыкальные инструменты 107  
  
 Естественная ширина линии 562  
 Естественный свет 167, 407, 456, 464 и д.  
  
 Закон Гука 185  
 — Максвелла 246  
 — отражения 272  
 — преломления (Снеллиуса) 272  
  
 Затухание вследствие трения (омического сопротивления) 66 и д.  
 — излучения (акустического) 207  
 — — электромагнитного 268  
 — теплопроводности 226  
 Затухающие колебания 67 и д.  
 Звуковой генератор 14, 16, 17, 141  
 Зонные пластинки 372 и д. 557  
 Зоны Френеля 369 и д.  
  
 Идеальная линза 374 и д.  
 Идеальный газ 203  
 — объектив 378, 402 и д., 472  
 Избирательность 518 и д.  
 Излучение акустических волн 206 и д., 314 и д.  
 — электромагнитных волн 264 и д.  
 Изображение 357, 375 и д., 405 и д., 471 и д., 487  
 Изобретение радио А. С. Поповым 234 и д.  
 Импеданс 98  
 Импульсы 133, 134, 176, 542 и д.  
 Инерционное наблюдение 140, 447 и д.  
 Интеграл Фурье 528  
 Интегралы Френеля 320 и д.  
 Интегральный квадратичный эффект 531 и д., 548, 551  
 Интенсивность гармонического колебания,  
 — — —, средняя хаотически модулированного колебания 415 и д.  
 Интерференционно-поляризационные опыты 465  
 Интерференция 147, 164, 280, 285, 454 и д., 461 и д., 467, 481 и д.  
 Интерферометр 455, 467, 487  
 Ионосфера 264, 279 и д., 340  
 Искровой генератор 235  
  
 Камертон 11, 20, 22, 506  
 Катодный осциллограф 12  
 Квадратичная демодуляция 137  
 Квадратичное выпрямление 131  
 Квантовая физика 565  
 Килогерц (килоцикл) 11  
 Кинематический подход к изучению волн 182  
 — — — колебаний 54  
 Когерентность 436 и д.  
 — в случае протяженных источников 474 и д.  
 Когерентные колебания 437 и д.  
 Когерер 235  
 Колебательный контур 62 и д., 502 и д.  
 Комбинационное рассеяние 513, 514, 562  
 Комбинационные колебания 140, 142  
 — тона 142, 232  
 Корпускулярная теория света 163  
 Коэффициент бегучести 159, 343  
 — затухания 68  
 — отражения упругих волн 211  
 — — в случае пластинки 283, 284  
 — — электромагнитных волн 271  
 — проникновения (прохождения) упругих волн 211  
 — — электромагнитных волн 271



- Коэффициенты Фурье 496  
 Круговая частота 10  
 Круговые волны 153  
 Крутизна характеристики 115
- Ламповый генератор 15, 22, 115 и д.  
 Левая поляризация 157  
 Лестнички диаграммы направленности 298, 301 и д.  
 Линейная демодуляция 137  
 Линейно-поляризованные волны 157  
 — — колебания 41, 42  
 Линейное выпрямление 128 и д.  
 Линейные колебательные системы 59  
 Линейчатый спектр 512  
 Линза 374 и д.  
 Линии равной толщины 483  
 Лорентцова ширина спектральной линии 562  
 Лучи 354, 357  
 Люксембург-горьковский эффект 30
- Магнетрон 252, 253  
 Магнитоотрицательные колебания 198, 199  
 Малоинерционное наблюдение 140, 448 и д.  
 Массовый излучатель А. А. Глаголевой-Аркадьевой 251  
 Маятник 9, 56 и д., 110, 122, 420  
 Мегагерц (мегацкл) 11  
 Микрорадиоволны 251  
 Микроскоп 487  
 Микрофон 16, 17, 154  
 Модулированные колебания 506, 537 и д., 553 и д.  
 Модуль упругости 185  
 Модуляция 132, 171, 495, 514, 523, 524  
 — хаотическая 411 и д., 430 и д.  
 Молекулярное рассеяние света 488 и д., 514  
 Моментальный снимок волны 149 и д.  
 Монохроматизация 510, 511, 516  
 Монохроматический свет 165  
 Монохроматор 511, 517 и д., 525  
 Музыкальные инструменты 107, 221, 222  
 Мультиплет 513
- Направленность излучения 314, 317, 401 и д.  
 Напряжение (упругое) 184  
 Начальные условия 58, 220 и д.  
 Недеформирующиеся волны 149  
 Некогерентные колебания 436  
 Нелинейность 119, 120  
 Нелинейные колебательные системы 109  
 — явления в акустике 230 и д.  
 Непериодические функции (разложение Фурье) 526 и д.  
 Неправильности краев экрана 388 и д.  
 Несущая частота 498  
 Несущее колебание 136  
 Нормальные волны 287, 291, 342, 348  
 — колебания 197 и д., 219 и д.
- Обертонны 197 и д., 221  
 Обратная связь 117  
 Обрывок синусоиды 526 и д., 541 и д., 547 и д.  
 Объектив 378, 402 и д., 473  
 Одноосные среды 286  
 Октава 12  
 Оптически однородная среда 334, 488  
 Оптический прожектор 399 и д.  
 — электрон 438  
 Опыт Френеля с зеркалами 164 и д., 470, 482, 483  
 Опыты Герца 234, 251  
 — Д. С. Рождественского 340  
 Органные трубы 107, 108, 216, 217  
 Основное колебание 194 и д.  
 Острота резонанса 86  
 Осциллограмма 24, 149 и д.  
 Отражение волн на поверхности жидкости 148  
 — — от пластинки 283 и д.  
 — — упругих 209 и д.  
 — — электромагнитных 255, 270 и д., 281 и д., 333 и д.
- Панорамический радиоприемник 505  
 Параметрические машины 105, 106  
 Параметрический резонанс (параметрическое возбуждение) 104 и д.  
 Пеленгация 257, 258  
 Пентод 114  
 Период колебаний 10, 25  
 — решетки 300  
 Периодические колебания 24, 25  
 — — вынужденные 78 и д., 88 и д., 93 и д.  
 — толчки 72 и д.  
 — функции 501  
 Пилообразные колебания 45, 125, 498  
 Пластинка в четверть волны 289  
 Плоские волны 149, 242, 246, 329  
 Поглощение звука 223 и д.  
 — электромагнитных волн 274  
 Показатель преломления 270, 342  
 Полное отражение 278, 279  
 Полоса пропускания 519, 524  
 Полосовой фильтр 525  
 Полосы Френеля 381  
 Полуволновой вибратор 295 и д.  
 Полутень 474  
 Поляризация волн 155 и д.  
 — света 166, 167, 458 и д.  
 Поляризованные по кругу волны 157 и д.  
 — — — колебания 42  
 Поляризуемость 334, 342, 338, 348  
 Поляроид 167, 291, 466  
 Поперечные волны 150, 155 и д., 217  
 Постоянная Больцмана 424  
 — дифракционной решетки 359  
 — Планка 565  
 Построение Гюйгенса 355  
 Поток энергии в упругой волне 191 и д.  
 — — — электромагнитной волне 248 и д.  
 Почти-периодические функции 499, 501  
 Правая поляризация 157

- Предельный цикл 112, 120  
 Преломление 148, 333  
 Приведенная амплитуда 527  
 — разность фаз 29  
 — спектрограмма 527  
 Приведенный импульс 63  
 — спектр 527  
 Приемники ультразвука 200  
 Призма 273, 396, 509 и д., 552  
 Принцип Гюйгенса—Френеля 357 и д., 363 и д.  
 Продольные волны 156  
 Прожектор 398 и д.  
 Протяженные источники 444, 467 и д.  
 Проходящая волна 210  
 Прямолинейное распространение света 356  
 Пучности 158, 189, 248  
 Пьезоэлектрические колебания 200
- Радиоастрономия** 281  
**Радиогеодезия** 263  
**Радиоинтерферометрия** 261 и д., 456  
**Радиолог** 262, 263  
**Радиолинзы** 378, 379  
**Радиолокация** 132, 258 и д., 314, 432, 433 и д.  
**Радионавигация** 258  
**Радиопередатчик** 134  
**Радиоприемник** 95, 141, 142, 432, 505, 523 и д.  
**Радиопрожектор** 399 и д.  
**Радиоспектроскопия** 565  
**Радиотелеграфия** 132  
**Разностная частота** 140  
**Разность фаз** 27  
 — хода 159  
**Разрешающая сила колебательного контура** 520  
 — — объектива 470 и д., 487  
 — — призмы 520 и д.  
 — — решетки 520 и д.  
**Расплывание импульса** 177  
**Распределение интенсивности в спектре** 527 и д.  
**Рассеяние волн** 147  
 — комбинационное 513, 514, 564  
 — молекулярное 489 и д., 514  
 — рентгеновского излучения 349 и д.  
**Расщепление спектральных линий при рассеянии** 490, 514  
**Регенерация** 122, 123  
**Регуляторы** 120  
**Резонанс** 21 и д.  
 — гармонического осциллятора 75, 81 и д., 503 и д.  
 — стержней (пластин) 198 и д.  
 — столбов воздуха 214, 215  
 — струн 219  
 — электромагнитных стоячих волн 256, 339, 343  
 — электронов 339  
**Резонансные кривые** 84 и д., 99 и д.  
 — — фазовые 102  
**Резонатор** 506, 542 и д., 547 и д., 553 и д.  
**Рентгеновское излучение** 339, 349 и д.
- Рефракция** 280  
**Решетка двумерная** 308 и д., 330 и д.  
 — дифракционная 359 и д.  
 — из вибраторов одномерная 300 и д.  
 — — прямоугольных отверстий 393, 394  
 — — сдвоенных вибраторов 306  
 — объемная 351  
 — с синусоидальной пропускаемостью (синусоидальная) 395, 396, 508 и д.  
 — ультразвуковая 395  
 — фазовая 394, 395  
**Ряд Фурье** 54, 220 и д., 496, 526
- Самовозбуждение** 121  
**Сверхвысокие частоты** 251  
**Сверхдальнее распространение звука** 232  
**Световое давление** 282  
**Селективность** 518 и д.  
**Сингулет** 513  
**Синий цвет неба** 489  
**Синусоидальная волна** 151 и д.  
 — — упругая 187 и д.  
 — — электромагнитная 245 и д.  
**Синфазное отражение** 211, 271  
**Синфазные колебания** 29  
**Синхронизация** 120, 126  
**Синхротрон** 104  
**Скалярные волны** 149  
 — гармонические колебания 16  
**Скорость распространения волн** 150  
 155  
 — — — звука 155, 186, 204  
 — — — на струне 217 и д.  
 — — электромагнитных волн (света) 233, 245, 264  
**Сложные излучатели** 294  
**Смычковые музыкальные инструменты** 107, 222  
**Собственная ширина спектральной линии** 562  
**Собственные колебания гармонического осциллятора** 63 и д.  
 — — груза на пружине 60, 61  
 — — колебательного контура 62 и д.  
 — — маятника 56 и д.  
 — — стержней пластин 194 и д., 220  
 — — столбов воздуха 214 и д., 220  
 — — струн 218  
**Соединение звездой** 40  
 — треугольником 40  
**Сопряженные точки** 378, 402  
**Спектр** 491 и д.  
**Спектральное разложение** 494 и д.  
**Спектральный анализ** 563, 564  
**Спектрограмма** 492 и д.  
**Спектроскоп оптический** 512, 515, 518 и д.  
 — электронно-лучевой 505  
**Спираль Корню** 323, 324, 383  
**Сплошной спектр** 526 и д.  
**Среднее время хаотической модуляции** 419 и д.  
**Средний квадрат периодической функции** 501  
 — — почти-периодической функции 501  
**Средняя интенсивность хаотически-модулированного колебания** 413, 415 и д.

- Стабилизация частоты 120  
 Статистические законы 409  
 — процессы 408 и д.  
 — явления в источниках света 438 и д.  
 — — — радиоаппаратуре 429  
 Стоячая волна 157 и д.  
 — — упругая 189  
 — — электромагнитная 248, 256, 343  
 Струнные музыкальные инструменты 222 и д.  
 Струны 217 и д.  
 Суммовая частота 140 и д.  
 Супергетеродин 141, 142  
 Суперпозиция волн 145, 146, 158 и д., 169, 454, 461  
 — — первичных и вторичных 333 и д.  
 — колебаний 30 и д.  
 — — нормальных 219 и д.  
 — со случайными фазами 361 и д.  
 — хаотически модулированных 447 и д.  
 — толчков 75 и д.  
 Сферическая абберрация 378  
 Сферические волны 153, 154, 205, 318  
  
 Тембр звука 221 и д.  
 Тень 354 и д., 382, 387, 474  
 Теорема Фурье 54, 220 и д., 496 и д., 526  
  
 Теория Максвелла 233, 234, 236 и д.  
 Тепловое движение гальванометра 424, 425  
 — — твердого тела 223, 224, 490  
 — — электронов 425, 426  
 Терция 12  
 Ток смещения 238  
 Толчки 64  
 — периодические 72 и д., 496, 497, 542 и д.  
 — случайные 420 и д.  
 Точечный источник 264, 444  
 Тригонометрический полином 492  
 — ряд 492 и д.  
 Триод 113  
  
 Угловые размеры звезд 486  
 Угол Брюстера 277, 278  
 Ударные музыкальные инструменты 222  
 Удары (возбуждающие, гасящие) 440  
 Узловые точки 402  
 Узлы 158, 189, 248  
 Ультразвук 19, 198 и д., 206 и д., 212, 213, 224 и д., 314 и д., 395  
 Ультразвуковая дефектоскопия 213  
 — локация 212, 213  
 Усилитель 44, 114, 115  
 Условие интерференции 461 и д.  
 — когерентности для протяженного источника 475 и д.  
 — синусов 472  
 Установление автоколебаний 121  
 — — в спектральных приборах 529  
 — — — случае дифракционной решетки 544, 545  
 — — — — призмы 552  
 — вынужденных колебаний 86, 101<sup>д</sup>  
  
 Фаза 25 и д.  
 Фазовая плоскость 59, 60, 70, 111 и д.  
 — скорость 171 и д., 256  
 — — радиоволн 263, 264  
 — — — в ионосфере 340  
 Фазовращатель 35, 36, 437, 453  
 Фазовые соотношения между первичной и вторичной волнами 339  
 — — при вынужденных колебаниях 89 и д.  
 — — — гетеродинировании 143  
 — — — отражении упругих волн 212  
 — — — — электромагнитных волн 274  
 Фигуры Лиссажу 52, 53, 451 и д.  
 Фильтр RC 126, 450 и д.  
 — полосовой 525  
 Флуктуации 116, 424 и д.  
 — в ламповом генераторе 434 и д.  
 — плотности 488 и д., 514  
 Флуктуационный шум 429 и д.  
 Фокус 374 и д., 399, 402  
 Формула Лапласа для скорости звука 203, 225  
 — Ньютона для скорости звука в газах 203, 226  
 — Френеля 275  
 Фотон 565  
  
 Хаотически модулированные колебания 411 и д., 430 и д.  
 Характеристика трения 123  
 Характеристики электронных ламп 112 и д.  
 Хроматическая абберрация 377  
  
 Центрированная система 402  
 Цикл (цикл в секунду) 11  
 Циклотрон 104  
 Цилиндрические волны 153, 154, 205, 325  
  
 Частично когерентные колебания 446  
 Частота 10  
 Часы 107, 109 и д.  
 Чувствительность радиоприемника 432  
  
 Шаровые волны 153, 154  
 Ширина спектральной линии лампового генератора 562  
 — — — оптической 559 и д., 562, 563  
 Широковещание 132  
 Шум 534, 536 и д., 543  
  
 Щелевые антенны 296  
 Щипковые музыкальные инструменты 222  
  
 Электроакустика 232  
 Электродинамическая постоянная 233  
 Электромагнитная теория света 233, 234  
 Электромагнитные волны 243 и д.  
 Электронная теория 267, 274  
 Электронно-лучевая трубка 43  
 Электронные лампы 112 и д.

- Электронный микроскоп 488  
— осциллоскоп 12, 16, 17, 42 и д.,  
125, 127, 433 и д.  
Элементарный вибратор 264 и д.  
— излучатель 294  
Эллиптически поляризованные волны 157  
— — колебания 41  
— поляризованный свет 459  
Энергетические соотношения в упругих  
волнах 189 и д.  
— — — электромагнитных волнах 248  
и д., 266 и д.  
Энергетические соотношения при гар-  
моническом колебании 63, 64  
— — — затухающем колебании 70  
— — — отражении упругих волн 211  
— — — — электромагнитных волн  
271  
Эффект Зеемана аномальный 564  
— — нормальный 513  
Явление Брюстера 277, 278  
— Доплера, 178 и д., 441  
Язычковый частотомер 507
-