

С.Г. КАЛАШНИКОВ

# ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

ИЗДАНИЕ ШЕСТОЕ, СТЕРЕОТИПНОЕ

*Допущено Министерством образования  
Российской Федерации  
в качестве учебного пособия  
для студентов физических специальностей  
высших учебных заведений*



МОСКВА  
ФИЗМАТЛИТ  
2003

УДК 537  
ББК 22.33  
К17

Калашников С. Г. **Электричество**: Учебн. пособие. — 6-е изд., стереот. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 624 с. — ISBN 5-9221-0312-1.

Книга написана на основе курса лекций, читанных автором в течение многих лет на физическом факультете Московского государственного университета. В результате обобщения опытных фактов формулируются в сжатой, но ясной форме основные законы электродинамики и выясняется их физический смысл. Изложение построено на основе СИ.

5-е изд. — 1985 г.

Для студентов физических и физико-математических факультетов университетов, физико-технических и инженерно-физических институтов, а также для всех вузов, где физика является основной дисциплиной; книга может быть также полезна для преподавателей физики в высшей школе.

Табл. 20. Ил. 448.

---

Учебное издание

*КАЛАШНИКОВ Сергей Григорьевич*

## **ЭЛЕКТРИЧЕСТВО**

Редактор *Д. А. Миртова*

Оригинал-макет: *О. Б. Широкова*

Оформление переплета: *А. Ю. Алетина*

ЛР № 071930 от 06.07.99. Подписано в печать 03.12.02. Формат 60×90/16.

Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 39. Уч.-изд. л. 38,13.

Тираж 3000 экз. Заказ № 467.

Издательская фирма «Физико-математическая литература»

МАИК «Наука/Интерпериодика»

117997 Москва, Профсоюзная, 90

E-mail: fizmat@maik.ru

Отпечатано с готовых диалозитивов в ФГУП «Московская

типография № 6» Министерства РФ по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций.

115088 Москва, Ж-88, Южнопортовая ул., 24

ISBN 5-9221-0312-1



---

ISBN 5-9221-0312-1

© ФИЗМАТЛИТ, 1985, 2003

## ОГЛАВЛЕНИЕ

От редакции . . . . .	
Из предисловия к первому изданию . . . . .	

### ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

<b>Глава I. Электрические заряды . . . . .</b>	<b>11</b>
§ 1. Введение (11). § 2. Закон взаимодействия электрических зарядов (12). § 3. Абсолютная электростатическая система единиц (15). § 4. Международная система единиц (СИ) (16). § 5. Гальванические элементы (18). § 6. Электризация как разделение зарядов (19). § 7. Электроны (19).	
<b>Глава II. Электрическое поле . . . . .</b>	<b>21</b>
§ 8. Понятие об электрическом поле (21). § 9. Напряженность электрического поля (22). § 10. Сложение электрических полей (24). § 11. Объемная и поверхностная плотности заряда (24). § 12. Линии напряженности электрического поля (25). § 13. Теорема Остроградского–Гаусса (29). § 14. Уравнение Пуассона (36). § 15. Диполь в электрическом поле (38).	
<b>Глава III. Разность потенциалов . . . . .</b>	<b>40</b>
§ 16. Работа в электростатическом поле (40). § 17. Разность потенциалов (41). § 18. Условия равновесия зарядов в проводниках (44). § 19. Разность потенциалов и напряженность поля (44). § 20. Эквипотенциальные поверхности (46). § 21. Измерение напряжений между проводниками (47). § 22. Нормальные элементы (49). § 23. Электрический зонд (50). § 24. Потенциал в простейших электрических полях (51). § 25. Вычисление потенциала в поле заданных зарядов (53). § 26. Общая задача электростатики (55). § 27. Проводники в электрическом поле (57). § 28. Точная проверка закона Кулона (58). § 29. Острия (60). § 30. Электростатический генератор (61).	
<b>Глава IV. Энергия электрического поля . . . . .</b>	<b>63</b>
§ 31. Электрическая емкость (63). § 32. Емкость простых конденсаторов (64). § 33. Метод зеркальных изображений (68). § 34. Энергия заряженного конденсатора (69). § 35. Соединение конденсаторов	

(70). § 36. Сложные конденсаторы (72). § 37. Энергия электрического поля (74).

## Глава V. Диэлектрики . . . . . 77

§ 38. Поляризация диэлектриков (77). § 39. Поляризованность (80). § 40. Напряженность электрического поля внутри диэлектрика (83). § 41. Электрическое смещение в диэлектрике (85). § 42. Изотропные и анизотропные диэлектрики (88). § 43. Преломление линий смещения и напряженности поля (89). § 44. Законы электрического поля в диэлектриках (90). § 45. Механические силы при наличии диэлектриков (93). § 46. Электронная теория поляризации диэлектриков (94). § 47. Диэлектрическая проницаемость неполярных диэлектриков (96). § 48. Диэлектрическая проницаемость полярных диэлектриков (98). § 49. Определение дипольных моментов молекул (99). § 50. Сегнетоэлектрики (101). § 51. Пьезоэлектрический эффект (104). § 52. Обратный пьезоэлектрический эффект (110).

## Глава VI. Постоянный электрический ток . . . . . 115

§ 53. Характеристики электрического тока (115). § 54. Уравнение непрерывности (117). § 55. Действия электрического тока (118). § 56. Баллистический гальванометр (121). § 57. Закон Ома (123). § 58. Измерение сопротивлений (124). § 59. Сопротивление проводов (126). § 60. Зависимость сопротивления от температуры (127). § 61. Закон Ома в дифференциальной форме (128). § 62. Электролитическая ванна (132). § 63. Заземление в линиях связи (133).

## Глава VII. Электродвижущая сила . . . . . 136

§ 64. Источники тока (136). § 65. Работа и мощность постоянного тока. Закон Джоуля–Ленца (136). § 66. Энергия, освобождаемая в гальваническом элементе (138). § 67. Электродвижущая сила гальванического элемента (138). § 68. Напряжение на зажимах источника тока (141). § 69. Электродвижущая сила и работа источника тока (143). § 70. Разветвленные цепи. Правила Кирхгофа (146). § 71. Мощность во внешней цепи и коэффициент полезного действия источника тока (152). § 72. Закон сохранения энергии для электрического поля (154). § 73. Квазистационарные токи (157). § 74. Конденсатор в цепи с сопротивлением (159).

## МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

## Глава VIII. Магнитное поле токов в вакууме . . . . . 162

§ 75. Магнитное взаимодействие токов (162). § 76. Магнитная индукция (164). § 77. Абсолютная электромагнитная система единиц (168). § 78. Магнитная постоянная (170). § 79. Напряженность магнитного поля (171). § 80. Линии индукции магнитного поля (173). § 81. Вихревой характер магнитного поля (174). § 82. Магнитный момент тока (179). § 83. Два параллельных проводника с



током (181). § 84. Механическая работа в магнитном поле. Магнитный поток (182). § 85. Контур с током в магнитном поле (185). § 86. Магнитное поле движущегося заряда (188). § 87. Опыты Рюландта и Эйхенвальда (189). § 88. Сила Лоренца (191).

## Глава IX. Электромагнитная индукция . . . . . 192

§ 89. Электромагнитная индукция (192). § 90. Закон Ленца (194). § 91. Основной закон электромагнитной индукции (195). § 92. Измерение магнитного напряжения (200). § 93. Самоиндукция (201). § 94. Магнитная проницаемость вещества (205). § 95. Исчезновение и установление тока (206).

## Глава X. Энергия магнитного поля . . . . . 208

§ 96. Собственная энергия тока (208). § 97. Энергия магнитного поля (210). § 98. Взаимная индукция (212). § 99. Взаимная энергия двух токов (214). § 100. Закон сохранения энергии при наличии магнитного поля (215). § 101. Механические силы в магнитном поле (218). § 102. Давления и напряжения Фарадея-Максвелла (221).

## Глава XI. Магнетики . . . . . 222

§ 103. Намагничивание сред (222). § 104. Напряженность магнитного поля внутри магнетика (224). § 105. Магнитная индукция в магнетике (225). § 106. Законы магнитного поля в магнетиках (227). § 107. Влияние формы тела на намагничивание (230). § 108. Преломление линий индукции магнитного поля (232). § 109. Магнитные свойства веществ. Диамагнетизм и парамагнетизм (236). § 110. Ферромагнетизм (238). § 111. Работа при намагничивании (242). § 112. Магнитные материалы. Ферриты (245). § 113. Магнитные заряды. Формальная теория магнетизма (247). § 114. Влияние среды на магнитное взаимодействие (253). § 115. Природа молекулярных токов (255). § 116. Магнитомеханическое и механомагнитное явления (257). § 117. Магнитный и механический моменты электрона (259). § 118. Объяснение пара- и диамагнетизма (261). § 119. Объяснение ферромагнетизма (265).

## Глава XII. Техническое использование магнитного потока. Генераторы и двигатели . . . . . 271

§ 120. Магнитные цепи (271). § 121. Электромагниты (274). § 122. Разветвление магнитного потока (276). § 123. Генераторы переменного тока (278). § 124. Генераторы постоянного тока (280). § 125. Электродвигатель постоянного тока (282). § 126. Синхронные двигатели (283). § 127. Двухфазный ток (284). § 128. Трехфазный ток (286). § 129. Векторные диаграммы (290). § 130. Вращающееся магнитное поле (293).

## Глава XIII. Взаимные превращения электрических и магнитных полей. Теория Максвелла . . . . . 296

§ 131. Вихревое электрическое поле (297). § 132. Вихревые токи (299). § 133. Трансформатор (301). § 134. Вытеснение переменного

тока (скин-эффект) (304). § 135. Индукционный ускоритель (306). § 136. Ток смещения (308). § 137. Уравнения Максвелла (311). § 138. Уравнения Максвелла в дифференциальной форме (313). § 139. Значение теории Максвелла (316). § 140. Электромагнитное поле в движущихся телах (317). § 141. Для электромагнитных явлений важно относительное движение (320). § 142. Электромагнитная индукция в движущихся проводниках (323). § 143. Преобразование Лоренца (325).

## ЭЛЕКТРОННЫЕ И ИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ

### Глава XIV. Природа электрического тока в металлах и полупроводниках . . . . . 329

§ 144. Измерение заряда электрона (329). § 145. Природа носителей заряда в металлах (332). § 146. Причина электрического сопротивления (334). § 147. Классическая электронная теория металлов (336). § 148. Сверхпроводимость (340). § 149. Пределы применимости классической электронной теории металлов (344). § 150. Концентрация и подвижность электронов в металлах (346). § 151. Полупроводники и диэлектрики (348). § 152. Собственная проводимость полупроводников (350). § 153. Примесная проводимость полупроводников (352). § 154. Понятие об энергетических зонах (354). § 155. Распределение импульса и энергии у электронов (359).

### Глава XV. Электрические токи в вакууме . . . . . 363

§ 156. Электронная эмиссия (363). § 157. Вольт-амперная характеристика вакуумного диода (364). § 158. Зависимость тока насыщения от температуры (367). § 159. Электронная лампа как выпрямитель (369). § 160. Трехэлектродная электронная лампа (триод) (370). § 161. Усиление электрических сигналов (374). § 162. Электрические флуктуации (377). § 163. Вторичная электронная эмиссия (379). § 164. Многосеточные лампы (381). § 165. Автоэлектронная эмиссия (382).

### Глава XVI. Разряды в газах . . . . . 383

§ 166. Ионизация газов (383). § 167. Ионизация электронными ударами (385). § 168. Движение ионов в газах (386). § 169. Несамостоятельные и самостоятельные разряды (388). § 170. Возникновение самостоятельных разрядов (390). § 171. Тлеющий разряд (394). § 172. Короновый разряд (397). § 173. Искровой разряд (400). § 174. Молния (402). § 175. Дуговой разряд (403). § 176. Устойчивость электрических разрядов (406). § 177. Плазма (410).

### Глава XVII. Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях . . . . . 412

§ 178. Движение заряженных частиц в однородном электрическом поле (412). § 179. Движение заряженных частиц в однородном

магнитном поле (413). § 180. Циклотрон (416). § 181. Определение удельного заряда электронов методом магнитной фокусировки (418). § 182. Магнетрон (419). § 183. Определение удельного заряда  $\beta$ -частиц (422). § 184. Результаты измерений удельного заряда электрона (424). § 185. Циклотронный (диамагнитный) резонанс (425). § 186. Эффективная масса (427). § 187. Отражение и преломление электронных пучков. Электронная и ионная оптика (429). § 188. Электронный осциллограф (433).

#### Глава XVIII. Электрический ток в электролитах . . . . . 435

§ 189. Законы электролиза Фарадея (435). § 190. Электролитическая диссоциация (438). § 191. Движение ионов в электролитах (441). § 192. Проводимость электролитов (443). § 193. Числа переноса. Подвижности ионов в электролитах (444). § 194. Электродные потенциалы (447). § 195. Химические источники тока (451). § 196. Напряжение разложения электролита (455). § 197. Аккумуляторы (457).

#### Глава XIX. Электрические явления в контактах . . . . . 459

§ 198. Контактная разность потенциалов (459). § 199. Термоэлектричество (463). § 200. Эффект Пельтье (467). § 201. Эффект Томсона (470). § 202. Применения термоэлектричества (472). § 203. Электронно-дырочные переходы в полупроводниках (473). § 204. Полупроводниковые диоды (478). § 205. Неравновесные электроны и дырки в полупроводниках (479). § 206. Полупроводниковые усилители (482).

### ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

#### Глава XX. Собственные электрические колебания . . . . . 485

§ 207. Собственные электрические колебания (485). § 208. Затухание колебаний (488). § 209. Уравнение собственных электрических колебаний. Колебания в отсутствие затухания (490). § 210. Колебания при наличии затухания (493). § 211. Поддержание колебаний. Искровой контур (496). § 212. Автоколебательные системы (497). § 213. Использование отрицательных сопротивлений (498). § 214. Ламповые генераторы. Обратная связь (500). § 215. Условие самовозбуждения (503). § 216. Релаксационные колебания (505).

#### Глава XXI. Вынужденные электрические колебания. Переменные токи . . . . . 506

§ 217. Сопротивление в цепи переменного тока (507). § 218. Емкость в цепи переменного тока (508). § 219. Индуктивность в цепи переменного тока (511). § 220. Закон Ома для переменных токов (514). § 221. Резонанс напряжений (516). § 222. Установление колебаний (520). § 223. Работа и мощность переменного тока (522).

§ 224. Разветвление переменных токов (525). § 225. Резонанс токов (527). § 226. Параметрический резонанс (530). § 227. Комплексные величины (532). § 228. Комплексные сопротивления (536).

## Глава XXII. Электромагнитные волны вдоль проводов . . . 541

§ 229. Распределенные системы (541). § 230. Электромагнитный импульс вдоль проводов (542). § 231. Электромагнитные волны (545). § 232. Стоячие электромагнитные волны (547). § 233. Собственные колебания двухпроводной линии (551). § 234. Экспериментальное исследование стоячих электромагнитных волн (553). § 235. Открытый вибратор (555). § 236. Стоячие волны в катушках (556).

## Глава XXIII. Свободные электромагнитные волны . . . . . 557

§ 237. Образование свободных электромагнитных волн (557). § 238. Волновое уравнение (558). § 239. Плоские электромагнитные волны (560). § 240. Свойства электромагнитных волн (562). § 241. Экспериментальное исследование электромагнитных волн (563). § 242. Энергия электромагнитных волн (567). § 243. Элементарный диполь (571). § 244. Давление электромагнитных волн (574). § 245. Импульс и масса электромагнитного поля (575). § 246. Электромагнитная масса движущегося заряда (579).

## Глава XXIV. Применение электромагнитных волн для целей связи . . . . . 582

§ 247. Принцип радиосвязи (582). § 248. Модуляция колебаний (583). § 249. Радиопередатчик (586). § 250. Демодуляция колебаний. Радиоприемник (588). § 251. Гетеродинный прием (591). § 252. Супергетеродинный приемник (591). § 253. Полусвободные электромагнитные волны (593).

## Добавления . . . . . 595

1. Теория опытов Кавендиша и Максвелла (к § 28) . . . . . 595
2. Ориентировка полярных молекул в электрическом поле (к § 48) . 598
3. Лилии напряженности и тока (к § 61) . . . . . 599
4. Метод контурных токов (к § 70) . . . . . 600
5. Максвелловское время релаксации (к § 73) . . . . . 601
6. Взаимная энергия двух токов (произвольные контуры) (к § 90) . 602
7. Теорема Лармора (к § 115) . . . . . 603
8. Закон Богуславского-Лэнгмюра . . . . . 604
9. Устойчивость электрических разрядов (к § 176, 213) . . . . . 605
10. К объяснению циклотронного резонанса (к § 185) . . . . . 608
11. Электромагнитное поле диполя (к § 243) . . . . . 610
12. Давление электромагнитных волн (к § 244) . . . . . 612
13. Система единиц Гаусса . . . . . 614
14. Таблица электрических и магнитных единиц . . . . . 619

## Предметный указатель . . . . . 621

## ОТ РЕДАКЦИИ

Предлагаемая вниманию читателей книга профессора С.Г. Калашникова «Электричество» написана на основе лекций, которые автор читал в течение ряда лет на физическом факультете Московского государственного университета. Лекции С.Г. Калашникова по курсу общей физики и созданный им курс по физике полупроводников всегда отличались глубиной содержания, точностью и прозрачной ясностью изложения и неизменно современным уровнем. Эта особенность лекций привлекала к ним не только студентов, на которых они прежде всего были рассчитаны, но и аспирантов, преподавателей и научных сотрудников всех рангов.

Книга впервые увидела свет в 1956 году, быстро получила широкое признание и стала одним из основных учебных пособий для студентов физических специальностей высших учебных заведений. При подготовке переизданий автор постоянно совершенствовал курс, дополняя его новым материалом и расширяя содержание. За несколько дней до своей кончины, последовавшей 23 апреля 1984 года, Сергей Григорьевич Калашников завершил работу над основным текстом настоящего, пятого, издания «Электричества»; не написанным осталось только предисловие.

Как и в предыдущих изданиях, автор внес в книгу некоторые улучшения и изменения, сохраняя при этом общий замысел, структуру курса и стиль изложения. Так, расширены и переработаны § 113 (Магнитные заряды. Формальная теория магнетизма), § 117 (Магнитный и механический моменты электрона), § 246 (Электромагнитная масса движущегося заряда). Добавлены важные сведения об изотропных и анизотропных диэлектриках (§ 42), прямом и обратном пьезоэлектрических эффектах (§ 42, 51), энергии заряженного конденсатора (§ 34) и энергии магнитного поля (§ 47), а также о термоэлектричестве (§ 199). Включен вопрос об ориентировке полярных молекул в электрическом поле (Добавление 2). Кроме того, сделано значительное число более мелких вставок и замен в других местах книги.

В процессе редактирования и окончательной подготовки рукописи к публикации проведено уточнение терминологии; обозначения единиц физических величин приведены в соответствии с действующим ГОСТ 8.417-81 (СТ СЭВ 1052-78).

## ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящая книга задумана как учебное пособие по разделу «Электричество» общего курса физики, который я читал в течение ряда лет на физическом факультете Московского университета.

В основу изложения материала, за редкими исключениями, обусловленными методическими соображениями, я стремился положить опыт. Я старался также уделить внимание разъяснению принципов измерения основных электрических и магнитных величин, которое, по возможности, следует непосредственно за введением соответствующих физических понятий. Однако описание различных опытов отнюдь не претендует на полноту и, кроме того, касается только принципов этих опытов, так как предполагается, что читатели этой книги слушают лекционный курс с демонстрациями и работают в учебных лабораториях. По этой же причине большинство рисунков выполнено в виде умышленно простых схем, легко доступных воспроизведению студентами.

Текст книги разделен на три группы. Материал, набранный основным шрифтом, соответствует принятой программе и, по мнению автора, является обязательным для изучения. Факультативный материал дан петитом. Наконец, в добавления вынесены некоторые (факультативные) вопросы, которые имеют чисто вычислительный характер.

Так как в настоящее время имеются задачки, соответствующие университетскому курсу физики, то включение в книгу задач и упражнений казалось мне излишним. Поэтому в книге приведены лишь сравнительно немногочисленные примеры, иллюстрирующие применение наиболее важных законов и составляющие, как правило, органическую часть текста.

# ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

---

## Г Л А В А I

### ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЗАРЯДЫ

#### § 1. Введение

Напомним некоторые элементарные факты, касающиеся электрических зарядов. Так как они должны быть известны читателям из курса физики средней школы, мы остановимся на них лишь очень кратко.

Уже в глубокой древности было известно, что янтарь, потертый о шерсть, приобретает способность притягивать легкие предметы. Однако только в конце XVI века английский врач Джильберт подробно исследовал это явление и нашел, что аналогичным свойством обладают многие другие вещества. Тела, способные, подобно янтарию, после натирания притягивать легкие предметы, он назвал наэлектризованными (от греческого *э л е к т р о н* — янтарь). Теперь мы говорим, что на телах в таком состоянии имеются электрические заряды, а сами эти тела называем заряженными.

Укажем, что само трение при «электризации трением» не играет никакой принципиальной роли. Электрические заряды всегда возникают при тесном соприкосновении различных веществ. В случае твердых тел тесному соприкосновению препятствуют микроскопические выступы и неровности, всегда имеющиеся на поверхности. Сдавливая тела и притирая их друг к другу, мы лучше сближаем поверхности обоих тел, которые без притирания соприкасались бы только в немногих точках.

В некоторых телах электрические заряды могут свободно перемещаться между различными частями тела, в других же телах это не имеет места. Тела первого рода называют *проводниками* электричества, а тела второго рода — *диэлектриками* или *изоляторами*. Проводниками являются все металлы в твердом и жидком состояниях, водные растворы солей и кислот и многие другие вещества. Примерами изоляторов могут служить янтарь, кварц, эбонит и все газы в нормальных условиях.

Отметим, что разделение тел на проводники и диэлектрики весьма условно. Все известные вещества в большей или мень-

шей степени проводят электричество. Когда мы говорим, что данное тело есть изолятор, то этим мы выражаем только то обстоятельство, что в данных условиях опыта заряд, прошедший через тело, мал по сравнению с другими зарядами, участвующими в рассматриваемом явлении.

Опыт показывает, далее, что два заряженных тела могут либо отталкиваться, либо притягиваться друг к другу. Если зарядить два легких тела, подвешенных на изолирующих шелковых нитях, прикасаясь к ним стеклянной палочкой, потертой о шелк, то оба тела отталкиваются. То же наблюдается, если оба тела заряжены при помощи эбонитовой палочки, потертой о мех. Но если зарядить одно из тел от стеклянной палочки, а другое — от эбонитовой, то оба тела притягиваются друг к другу. Это означает, что заряды стекла и эбонита качественно различны.

Несмотря на обилие различных веществ в природе, существуют только два вида электрических зарядов: заряды, подобные возникающим на стекле, потертом о шелк, и заряды, подобные появляющимся на эбоните, потертом о мех. Первые из них получили название *положительных зарядов*, а вторые — *отрицательных зарядов*. Следовательно, одноименные заряды отталкиваются, а разноименные притягиваются.

Явление электрического отталкивания используют для устройства электроскопа, предназначенного для обнаружения электрических зарядов. Он состоит из изолированного металлического стержня, к которому прикреплены легкие металлические или бумажные листочки. При соприкосновении с заряженным телом часть заряда тела переходит на электроскоп и листочки под действием сил электрического отталкивания отклоняются на некоторый угол.

## § 2. Закон взаимодействия электрических зарядов

Начало количественного изучения электрических явлений относится к концу XVIII века, когда Кулон (1785 г.) установил на опыте закон взаимодействия электрических зарядов.

Для заряженных тел произвольных размеров такой закон в общей форме дать нельзя, так как сила взаимодействия протяженных тел зависит от их формы и взаимного расположения. Однако форма тел и их взаимная ориентировка перестают сказываться, если размеры тел весьма малы по сравнению с расстоянием между ними. Поэтому закон взаимодействия, имеющий общее значение, можно установить только для точечных зарядов.

Так как электрические заряды всегда распределены в объеме, то никаких конечных зарядов в математической точке, разумеется, быть не может. Под точечным зарядом в физике все-



гда понимают протяженное заряженное тело, размеры которого весьма малы по сравнению с расстоянием от других зарядов.

Схема опытов Кулона изображена на рис. 1 (*a* — общий вид прибора, *b* — его головка, *в* — проводник для зарядки шариков *A* и *B*). На тонкой металлической нити *H* подвешено легкое изолирующее коромысло *K*, имеющее на одном из концов шарик *A*, а на другом — противовес *П*. Верхний конец нити закреплен на вращающейся головке прибора, позволяющей точно отсчитывать угол закручивания нити. Внутри прибора можно вносить второй изолированный шарик *B* такого же размера, как и шарик *A*. Большой стеклянный цилиндр защищает чувствительные части прибора от движения воздуха.

Чтобы установить, как зависит сила взаимодействия от расстояния между зарядами, шарикам *A* и *B* сообщают произвольные заряды, касаясь их третьим заряженным шариком, укрепленным на изолирующей ручке. Ша-

рики отталкиваются и устанавливаются на некотором расстоянии, которое измеряют, пользуясь шкалой прибора. Затем вращают головку прибора и закручивают нить подвеса, замечая при этом расстояния, до которых сближаются шарики при различных углах закручивания нити. Как известно из механики, при деформации кручения (в области обратимых упругих деформаций) угол закручивания пропорционален моменту крутящей силы; зная, во сколько раз мы увеличили угол закручивания нити, мы тем самым определяем, во сколько раз увеличился момент силы, а отсюда можно определить и силу, действующую на шарик коромысла. В результате этих опытов Кулон заключил, что сила взаимодействия двух точечных зарядов направлена вдоль линии, соединяющей оба заряда, и обратно пропорциональна квадрату расстояния между зарядами:

$$F \sim 1/r^2.$$

Сила взаимодействия между шариками зависит еще от зарядов шариков. Эту зависимость можно выяснить при помощи следующего опыта. Если коснуться на короткое время одного из шариков, *A* или *B*, другим шариком, имеющим такие же размеры,

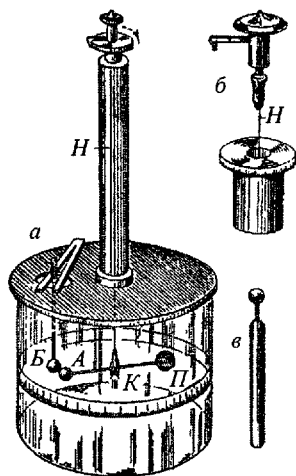


Рис. 1. Крутильные весы Кулона

но не заряженным, то в силу тождественности обоих соприкасающихся шариков заряд распределяется между ними поровну. При этом оказывается, что сила взаимодействия между шариками  $A$  и  $B$ , на одном из которых теперь находится лишь половина первоначального заряда, при том же расстоянии уменьшается в два раза. Повторяя этот прием, можно уменьшить заряд шарика в два, четыре и т.д. раз и убедиться, что сила взаимодействия пропорциональна заряду каждого из шариков.

Более точно этот вопрос можно исследовать следующим образом. Сообщим шарикам  $A$  и  $B$  некоторые (неизвестные) заряды и измерим силу взаимодействия  $F_{AB}$  между ними при некотором определенном расстоянии. Заменим, далее, шарик  $B$  другим заряженным шариком  $B'$  и измерим снова силу взаимодействия  $F_{AB'}$  между  $A$  и  $B'$  при том же расстоянии, что и в первом случае. Если теперь изменить произвольным образом заряд шарика  $A$  и опять измерить силы взаимодействия шарика  $A$  с шариками  $B$  и  $B'$ , то опыт показывает, что отношение сил  $F_{AB'}/F_{AB}$  в обоих случаях одинаково, т.е. не зависит от заряда шарика  $A$ . Это значит, что указанное отношение сил зависит только от зарядов шариков  $B$  и  $B'$ , а следовательно, можно положить его равным отношению зарядов обоих шариков, т.е.

$$F_{AB'}/F_{AB} = q_B/q_{B'}.$$

Это соотношение является определением отношения двух зарядов и указывает способ сравнения зарядов.

Полученный результат показывает, что сила взаимодействия пропорциональна заряду одного из шариков ( $A$ ). Так как оба шарика в этих опытах равноправны, то отсюда следует, что сила взаимодействия пропорциональна каждому из зарядов  $q_1$  и  $q_2$ .

Таким образом, сила взаимодействия двух точечных зарядов равна

$$F = f \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (2.1)$$

Здесь  $f$  — коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора единиц заряда, расстояния и силы.

Для того чтобы выразить не только модуль силы, но и ее направление, закон Кулона можно представить в векторной форме:

$$\mathbf{F}_{12} = f \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12}, \quad (2.1a)$$

где  $\mathbf{F}_{12}$  — вектор силы, действующей на заряд  $2$  со стороны заряда  $1$ , а  $\mathbf{r}_{12}$  — радиус-вектор, направленный от заряда  $1$  к заряду  $2$ .

Опыты Кулона, конечно, не являются единственным доказательством справедливости закона обратных квадратов. В настоящее время имеется большое количество других экспериментальных данных, показывающих, что закон Кулона выполняется

очень точно и притом как для очень больших, так и для очень малых расстояний. В частности, исследования атомных явлений позволяют заключить, что он справедлив, по крайней мере, вплоть до расстояний порядка  $10^{-15}$  м.

### § 3. Абсолютная электростатическая система единиц

Для определения коэффициента пропорциональности  $f$  в законе Кулона мы должны остановиться на какой-либо определенной системе единиц.

Всякая система единиц состоит из некоторого числа основных единиц, выбираемых независимо друг от друга, и совокупности производных единиц. Последние образуются из основных (и других производных) единиц с помощью подходящим образом выбранных соотношений, выражающих определенные физические законы и связывающих между собой данную физическую величину, для которой устанавливается единица, с другими величинами, единицы которых уже определены. Каждое такое соотношение, используемое для установления той или иной производной единицы, мы будем называть определяющим соотношением для данной единицы.

В физике до настоящего времени часто употребляют абсолютную систему единиц (механических, электрических и магнитных) СГС, построенную на трех основных единицах: длины (сантиметр), массы (грамм) и времени (секунда). Единицей силы в этой системе служит дина. Если выражать расстояние  $r$  в сантиметрах, а силу  $F$  в динах, то в законе Кулона будет единственная неопределенная единица — единица заряда. Поэтому можно выбрать эту единицу таким образом, чтобы было  $f = 1$ , т.е. чтобы закон Кулона приобрел наиболее простую форму. Такая единица заряда получила название *абсолютной электростатической единицы заряда*.

Полагая в формуле (2.1)  $r = 1$ ,  $q_1 = q_2 = 1$ , получаем  $F = 1$ . Это значит, что *абсолютная электростатическая единица заряда есть такой заряд, который действует в вакууме на равный ему заряд, удаленный на расстояние 1 см, с силой 1 дин*.

Если выражать заряды в абсолютных электростатических единицах, силу — в динах, а расстояние — в сантиметрах, то закон Кулона (2.1) принимает вид

$$F = \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (3.1)$$

Выбирая за основные единицы сантиметр, грамм и секунду и пользуясь абсолютной электростатической единицей заряда, можно определить единицы всех электрических и магнитных величин, с которыми мы познакомимся в дальнейшем. Такая

система единиц называется *абсолютной электростатической системой* и обозначается символом СГСЭ.

Таким образом, в системе СГСЭ единица заряда есть производная единица. Определяющим соотношением для нее служит закон Кулона.

В дальнейшем мы будем пользоваться общепринятым способом обозначения производных единиц. Для этого данную величину будем выражать из определяющего соотношения и в полученное выражение подставлять вместо физических величин их единицы. Так, например, из формулы (3.1) имеем

$$q = rF^{1/2};$$

отсюда единица заряда в системе СГСЭ равна

$$1 \text{ СГСЭ}_q = 1 \text{ см} \cdot \text{дин}^{1/2}.$$

Такой способ обозначения производных единиц удобен потому, что он определяет их размерность, т.е. показывает, как изменяется единица данной физической величины при изменении других единиц системы. Так, например, приведенное выражение показывает, что при увеличении единицы длины в  $a$  раз и единицы силы в  $b$  раз единица заряда увеличивается в  $ab^{1/2}$  раз.

Производные единицы можно также выразить только через основные единицы. Так, например, учитывая, что 1 дин есть  $1 \text{ г} \cdot \text{см} \cdot \text{с}^{-2}$ , получаем

$$1 \text{ СГСЭ}_q = 1 \text{ см}^{3/2} \cdot \text{г}^{1/2} \cdot \text{с}^{-1}.$$

#### § 4. Международная система единиц (СИ)

Помимо системы СГСЭ, можно построить и другие абсолютные системы электрических и магнитных единиц. Так, например, в § 77 мы познакомимся с электромагнитной системой единиц СГСМ, которая, как и система СГСЭ, построена на трех основных единицах: длины (сантиметр), массы (грамм) и времени (секунда), но основана не на законе электростатического взаимодействия зарядов, а на законе магнитного взаимодействия токов. Эта система является также абсолютной, так как в ней все магнитные единицы определяются таким образом, чтобы коэффициенты пропорциональности в законах магнетизма обратились в единицу. Система единиц СГСЭ весьма удобна для описания электрических явлений, а система СГСМ — для магнитных явлений. Особенно широко в физической литературе применяется также так называемая симметричная система электрических и магнитных единиц (система единиц Гаусса), представляющая собой сочетание обеих систем СГСЭ и СГСМ (см. Добавление 13).

Однако эти абсолютные системы единиц, наряду с весьма большими их достоинствами, обладают тем недостатком, что единицы многих электрических и магнитных величин получаются в них неудобными для целей практики, так как оказываются или слишком большими, или слишком малыми. Поэтому в настоящее время получила широкое распространение Международная система единиц, сокращенно обозначаемая латинскими буквами SI (The system international of units) и русскими буквами СИ (система интернациональная). При разработке этой системы стремились к тому, чтобы единицы основных электрических и магнитных величин совпали с соответствующими практическими единицами, давно установившимися и принятыми в электротехнике и радиотехнике<sup>1)</sup>.

Система СИ построена на основе семи основных единиц: единица длины — метр (м), единица массы — килограмм (кг), единица времени — секунда (с), единица силы тока — ампер (А), единица термодинамической температуры — кельвин (К), единица силы света — кандела (кд) и единица количества вещества — моль (моль). Кроме семи основных, система СИ имеет две дополнительные единицы: единицу плоского угла — радиан (рад) и единицу телесного угла — стерадиан (ср).

Каждая из этих единиц позволяет образовать все производные единицы для величин, имеющих немеханическую природу: ампер — единицы электрических и магнитных величин, кельвин — единицы тепловых величин, кандела — единицы световых величин, моль — единицы величин молекулярной физики и химии.

Единица электрического заряда в системе СИ есть кулон (Кл) — заряд, проходящий за 1 с через сечение проводника, в котором имеется неизменяющийся ток силой 1 А, т.е.

$$1 \text{ Кл} = 1 \text{ А} \cdot 1 \text{ с} = 1 \text{ А} \cdot \text{с}.$$

Определение ампера основано на законе магнитного взаимодействия токов и будет дано в § 83. Из этого определения следует, что 1 кулон содержит 0,1 с единиц заряда СГСЭ, где  $c = 2,99792458 \cdot 10^{10}$  есть скорость света в вакууме, выраженная в см/с. В дальнейшем мы будем пользоваться округленным значением этой величины и считать, что заряд

$$1 \text{ Кл} = 3 \cdot 10^9 \text{ СГСЭ}_q.$$

<sup>1)</sup> Постановлением Государственного комитета СССР по стандартам от 19 марта 1981 г с 1 января 1982 г в Советском Союзе введен в действие государственный стандарт ГОСТ 8 417-81 (СТ СЭВ 1052-78), согласно которому обязательному применению подлежат единицы Международной системы (СИ), а также десятичные кратные и дольные от них. (Примеч. ред.)

Отличие системы СИ от системы СГСЭ заключается еще и в том, что в ней используется так называемая *рационализованная* форма записи законов электричества. Это изменение заключается в следующем. Во многие формулы электричества, в особенности в те, которые часто встречаются в практике, входит множитель  $4\pi$ . Чтобы избавиться от него в практически важных формулах, в выражение для закона Кулона с самого начала вводят множитель  $1/4\pi$ . Такой же множитель оказывается удобным ввести и в основной закон магнитного взаимодействия токов (ср. § 79). Поэтому закон Кулона в системе единиц СИ записывают в виде

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}, \quad (4.1)$$

где вместо коэффициента пропорциональности  $f$ , входящего в формулу (2.1), написано  $1/(4\pi\epsilon_0)$ . Здесь  $\epsilon_0$  — некоторая постоянная, зависящая от выбора единиц. Однако, так как единица заряда уже определена, эту постоянную нельзя обратить в единицу. Поэтому в системе СИ, в отличие от системы СГСЭ, в законы электричества входит новая постоянная  $\epsilon_0$ , имеющая определенную размерность. Эту постоянную мы будем называть в дальнейшем *электрической постоянной*.

Нетрудно найти, чему равно значение  $\epsilon_0$  в системе единиц СИ. Положим, что два точечных заряда  $q_1 = q_2 = 1$  Кл, удаленных на расстояние  $1 \text{ м} = 10^2 \text{ см}$ , взаимодействуют в вакууме. Тогда, согласно формуле (3.1), сила взаимодействия равна

$$F = \frac{(3 \cdot 10^9)^2}{(10^2)^2} = 1 \cdot 10^{14} \text{ дин} = 9 \cdot 10^9 \text{ Н.}$$

С другой стороны, согласно формуле (4.1), та же сила есть

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 \cdot 1}{1^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \text{ Н.}$$

Отсюда

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi(9 \cdot 10^9)} = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ СИ}_{\epsilon_0}.$$

О единице электрической постоянной  $\epsilon_0$  см. § 32.

## § 5. Гальванические элементы

Электрические заряды можно получить различными способами, с которыми мы познакомимся в дальнейшем. Сейчас же мы упомянем о получении зарядов с помощью гальванических элементов.

Гальваническим элементом называют два различных проводника, соединенных электропроводящим раствором (обычно вод-

ным раствором кислоты или соли). На рис. 2 показан один из простейших элементов — элемент Вольты. Он состоит из медной и цинковой пластин, называемых *электродами* элемента, погруженных в слабый водный раствор серной кислоты. Медь заряжается положительно, а цинк — отрицательно. Положительный электрод часто называют *анодом*, а отрицательный — *катодом*.

Устройство различных гальванических элементов и процессы, в них происходящие, будут рассмотрены в гл. XVIII.

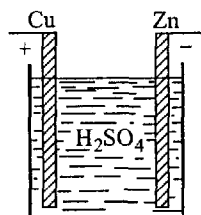


Рис. 2. Элемент Вольты

## § 6. Электризация как разделение зарядов

Опыт показывает, что возникновение заряда на любом теле всегда сопровождается появлением другого заряда, равного ему по модулю, но противоположного по знаку. Так, например, в гальванических элементах мы имеем всегда два электрода, один из которых заряжается положительно, а другой — отрицательно. При электризации трением также всегда заряжаются оба притираемых тела и притом равными по модулю, но противоположными по знаку зарядами.

Одновременное появление разноименных зарядов при всяком процессе заряжения привело к заключению, что во всех телах всегда содержатся положительные и отрицательные заряды. В обычных условиях, однако, количество положительного заряда в каждом объеме тела равно количеству отрицательного заряда, и поэтому тело представляется нам незаряженным. Всякий процесс заряжения есть процесс разделения электрических зарядов, при котором на одном из тел (или части тела) появляется избыток положительного заряда, а на другом (или другой части тела) — избыток отрицательного заряда. Общее количество положительного и отрицательного зарядов, содержащихся в телах, не изменяется, а эти заряды только перераспределяются между телами. Поэтому алгебраическая сумма зарядов, возникающих при любом электрическом процессе на всех телах, участвующих в процессе, всегда равна нулю.

## § 7. Электроны

В настоящее время твердо установлено, что электрические заряды существуют в природе в виде заряженных частиц, которые мы считаем простейшими, или элементарными. Элементарная отрицательно заряженная частица, с которой нам приходится встречаться в электрических явлениях, получила название

*электрона.* Заряд каждого из электронов равен  $1,60 \cdot 10^{-19}$  Кл (§ 144). Масса электрона чрезвычайно мала и составляет всего около  $10^{-30}$  кг. Поэтому можно принести на тело и убрать с него огромное число электронов без заметного изменения массы тела.

В состав атома каждого элемента входит определенное свойственное ему число электронов. Атом в целом, однако, не заряжен, так как в нем имеется и положительный заряд, равный по модулю сумме зарядов всех электронов атома. Положительный заряд атома заключен в ядре атома, в котором сосредоточена практически вся масса атома.

Если атом теряет один или несколько электронов, то он обращается в положительно заряженный атом, или положительный ион. Если атом захватывает дополнительные электроны, образуется отрицательно заряженный атом, или отрицательный ион. Процесс заряжения какого-либо тела представляет собой либо перенос на это тело, либо увод с него некоторого количества электронов или ионов.

Теория, объясняющая различные свойства вещества наличием в нем электронов и их движением, носит название *электронной теории*.

Хорошие проводники электричества — это такие тела, в которых электрические частицы могут свободно перемещаться. Электропроводность металлов обусловлена тем, что часть электронов, содержащихся в металле, находится в подвижном состоянии. Такие электроны называются *свободными* электронами или *электронами проводимости*.

Если к изолированному незаряженному металлическому проводнику приблизить заряженное тело, то на проводнике появ-

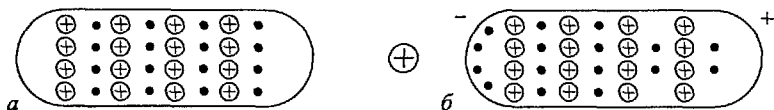


Рис. 3. Схема объяснения электрической индукции в электронной теории

ляются наведенные, или индуцированные, заряды (рис. 3, где кружки с плюсом — положительные ионы металла, темные точки — электроны проводимости). В рамках электронной теории это объясняется тем, что приближение влияющего тела вызывает появление сил, действующих на электроны проводимости металла, отчего они перемещаются и перераспределяются, пока не будет достигнуто новое положение равновесия. Если, например, влияющее тело заряжено положительно, то электроны проводимости будут притягиваться к нему и на ближнем к телу конце



проводника появятся избыточные электроны, т.е. отрицательный заряд; на удаленном конце образуется недостаток электронов, а следовательно, здесь появляется избыток положительных ионов, т.е. возникает положительный заряд (рис. 3 б).

В дальнейшем мы рассмотрим основные опыты, доказывающие существование электронов, позволяющие определить их свойства и выясняющие участие электронов в различных электрических явлениях. Однако существование электронов целесообразно учесть уже с начала изучения электричества, так как это сразу позволяет просто и наглядно объяснить многие электрические явления.

## Г Л А В А II

### ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

#### § 8. Понятие об электрическом поле

При исследовании взаимодействия электрических зарядов, естественно, возникает вопрос, почему появляются силы, действующие на заряды, и как они передаются от одного заряда к другому? Совершенно так же можно поставить и следующий вопрос: механические силы возникают только при наличии двух зарядов; происходят ли, однако, какие-либо изменения в окружающем пространстве при наличии только одного заряда, когда второго нет вовсе?

В процессе развития физики существовали два противоположных подхода к ответу на поставленные вопросы. При одном из них предполагалось, что телам присуще свойство действовать на другие тела на расстоянии, без участия промежуточных тел или среды, т.е. предполагалось, что силы могут передаваться от одного тела к другому через пустоту и притом мгновенно (теории дальнего действия). С этой точки зрения при наличии только одного заряда никаких изменений в окружающем пространстве не происходит.

Согласно второму взгляду силовые взаимодействия между разобщенными телами могут передаваться только при наличии какой-либо среды, окружающей эти тела, последовательно от одной части этой среды к другой, и с конечной скоростью (теории ближнего действия); даже при наличии одного-единственного заряда в окружающем пространстве происходят определенные изменения.

Современная физика сохраняет только идею ближнего действия и отвергает дальнее действие. Действительно, допущение возможности передачи силовых взаимодействий, т.е. движения, через

пустоту, без участия материи, равносильно допущению возможности движения без материи, что бессодержательно.

Таким образом, для понимания происхождения и передачи сил, действующих между покоящимися зарядами, необходимо допустить наличие между зарядами какого-то физического агента, осуществляющего это взаимодействие. Этим агентом и является электрическое поле. Когда в каком-либо месте появляется электрический заряд, то вокруг него возникает электрическое поле. Основное свойство электрического поля заключается в том, что на всякий другой заряд, помещенный в это поле, действует сила.

Рассматривая взаимодействие покоящихся зарядов, мы приходим к понятию электрического поля. Подобным же образом, рассматривая магнитное взаимодействие движущихся зарядов (токов) или постоянных магнитов, мы приходим к понятию магнитного поля. Мы увидим (гл. XIII), что электрические и магнитные поля могут превращаться друг в друга и что каждое из них есть частный случай более общего электромагнитного поля. Далее будет показано, что электрические (и магнитные) поля могут существовать и без зарядов (и токов), первоначально их породивших (гл. XXIII), и что именно в электромагнитном поле нужно видеть основную причину электрических и магнитных явлений. Электромагнитное поле включает в себе и переносит определенную энергию (§ 242), а также обладает импульсом и массой (§ 245). Следовательно, электромагнитное поле не есть абстрактный образ, введенный нами для описания электрических и магнитных взаимодействий, но представляет собой объективную реальность, обладающую физическими свойствами. Оно является определенной формой материи, которая осуществляет электрические и магнитные взаимодействия. Таким образом, современная физика при помощи понятия поля расширяет представление о близкодействии и распространяет его на немеханические явления.

## § 9. Напряженность электрического поля

Для количественной характеристики электрического поля служит специальная физическая величина — напряженность электрического поля.

Рассмотрим точечный электрический заряд  $q$  и будем вносить в электрическое поле этого заряда другой точечный пробный заряд  $q_1$ . На пробный заряд  $q_1$  будет действовать сила  $F$ , различная в разных точках поля, которая, согласно закону Кулона, будет пропорциональна пробному заряду  $q_1$ . Поэтому отношение этой силы к пробному заряду  $F/q_1$  уже не зависит от выбора пробного заряда и характеризует электрическое поле в

той точке, где находится пробный заряд. Эта величина и получила название *напряженности* поля.

Если электрическое поле вызвано одним точечным зарядом  $q$ , то напряженность поля получается непосредственно из закона Кулона путем деления обеих частей равенства на пробный заряд. Обозначая напряженность поля через  $E$ , имеем

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}. \quad (9.1)$$

Напряженность поля точечного заряда убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от заряда.

Так как электрический заряд есть скаляр, а сила — вектор, то напряженность поля, получаемая от деления вектора на скаляр, есть вектор. Направление этого вектора определяет направление силы, действующей на положительный заряд, помещенный в рассматриваемую точку поля. Так, например, если поле вызвано положительным зарядом, то вектор напряженности направлен вдоль радиус-вектора от заряда во внешнее пространство (отталкивание положительного пробного заряда); если поле вызвано отрицательным зарядом, то вектор напряженности направлен к заряду (рис. 4).

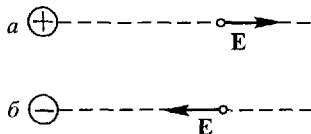


Рис. 4. Направление напряженности электрического поля, создаваемого положительным (а) и отрицательными (б) зарядами

Пользуясь законом Кулона в векторной форме, можно написать выражение для напряженности электрического поля точечного заряда также в векторной форме:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \mathbf{r}. \quad (9.1a)$$

Здесь  $r$  — модуль расстояния от заряда до рассматриваемой точки поля, а  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, направленный от заряда в данную точку. Из сказанного следует, что если известна напряженность поля в какой-либо точке, то тем самым определена и сила, действующая на электрический заряд, помещенный в эту точку. А именно:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}. \quad (9.2)$$

Отметим в заключение, что для случая поля, вызванного точечным зарядом, выбор величины пробного заряда безразличен. В более сложных случаях, рассматриваемых ниже, может оказаться, что само его внесение вызывает перераспределение зарядов, создающих поле, и поэтому пробный заряд может вызвать искажение поля. Чтобы это не имело места, пробный заряд должен быть достаточно малым.

## § 10. Сложение электрических полей

Рассмотрим теперь электрическое поле двух точечных зарядов  $q_1$  и  $q_2$ . Пусть  $\mathbf{E}_1$  — напряженность поля в точке  $a$ , создаваемая зарядом  $q_1$  (когда заряда  $q_2$  нет вовсе), а  $\mathbf{E}_2$  — напряженность поля заряда  $q_2$  (когда нет заряда  $q_1$ ). Опыт показывает, что напряженность  $\mathbf{E}$  результирующего поля (при наличии обоих зарядов) может быть найдена по правилу сложения векторов (по правилу параллелограмма) (рис. 5). Или, иначе, напряженность результирующего электрического поля есть векторная сумма напряженностей полей, создаваемых отдельными зарядами.

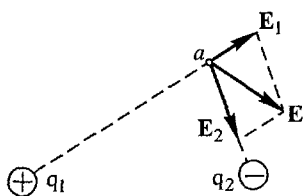


Рис. 5. Сложение электрических полей

Правило векторного сложения электрических полей справедливо не только для двух, но и для какого угодно числа зарядов. Если  $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \dots$  — напряженности полей, создаваемых отдельными зарядами в какой-либо точке, то напряженность  $\mathbf{E}$  результирующего поля в той же точке равна

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 + \dots = \sum_k \mathbf{E}_k. \quad (10.1)$$

Соотношение (10.1) выражает принцип суперпозиции (или наложения) электрических полей и представляет важное свойство электрического поля.

Отметим, что справедливость этого принципа заранее не очевидна и в его правильности нас убеждает только опыт. А именно, вычисляя электрические поля при помощи принципа суперпозиции, мы всегда получаем результаты, согласующиеся с опытом. Однако при очень малых расстояниях ( $\sim 10^{-13}$  см) и экстремально сильных электрических полях (ср. § 245) принцип суперпозиции электрических полей, возможно, и не выполняется.

## § 11. Объемная и поверхностная плотности заряда

Пользуясь формулами (9.1a) и (10.1), можно вычислить напряженность электрического поля, создаваемого любыми заряженными телами.

Если линейные размеры каждого из заряженных тел малы по сравнению с расстояниями между этими телами и рассматриваемой точкой поля, то каждое из тел можно рассматривать как точечный заряд. В этом случае по формуле (9.1a) можно вычислить напряженность поля, создаваемого каждым из заря-

женных тел, и затем, пользуясь принципом суперпозиции полей (10.1), найти их векторную сумму.

Если заряженное тело настолько велико, что его нельзя рассматривать как точечный заряд, то в этом случае необходимо знать распределение зарядов внутри тела.

Выделим внутри заряженного тела малый объем  $\Delta\tau$  и обозначим через  $\Delta q$  электрический заряд, находящийся в этом объеме. Предел отношения  $\Delta q/\Delta\tau$ , когда объем неограниченно уменьшается, называют *объемной плотностью заряда* в данной точке. Обозначая ее через  $\rho$ , имеем

$$\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta\tau} = \rho. \quad (11.1)$$

Таким образом, объемная плотность заряда измеряется зарядом единицы объема тела. Заряд, находящийся в элементе объема  $d\tau$ , равен  $\rho d\tau$ . В общем случае неравномерно заряженного тела  $\rho$  различно в разных точках. Распределение заряда в объеме тела задано, если известно  $\rho$  как функция координат.

Очень часто заряды распределяются в телах только внутри тонкого слоя, прилегающего к поверхности. В этом случае удобно пользоваться *поверхностной плотностью заряда*, которая, по определению, есть

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \sigma. \quad (11.2)$$

Здесь  $\Delta q$  — заряд, находящийся на элементе поверхности  $\Delta S$ . Иными словами, поверхностная плотность заряда измеряется зарядом единицы поверхности тела. Заряд, находящийся на элементе поверхности  $dS$ , равен  $\sigma dS$ . Для задания распределения зарядов на поверхности тела нужно знать  $\sigma$  как функцию координат поверхности.

Если известно распределение зарядов внутри тела, то можно вычислить и создаваемое ими электрическое поле. Для этого заряженное тело разбивают на бесконечно малые части и, рассматривая их как точечные заряды, вычисляют напряженность поля, создаваемую отдельными частями тела. Полное поле находят затем суммированием полей, вызываемых отдельными частями тела; суммирование обычно сводится к интегрированию.

Следует, однако, отметить, что определение электрического поля по заданным зарядам чаще всего производят посредством вычисления разности потенциалов (гл. III), так как в этом случае расчеты проще.

## § 12. Линии напряженности электрического поля

Для описания электрического поля нужно задать вектор напряженности в каждой точке поля. Это можно сделать аналитически, выражая зависимость напряженности поля от координат

в виде формул. Однако такую зависимость можно представить и графически, используя линии напряженности электрического поля.

Линиями напряженности электрического поля (или линиями вектора  $\mathbf{E}$ ) называют линии, касательные к которым направлены так же, как и вектор напряженности  $\mathbf{E}$  в данной точке поля (рис. 6). Поскольку касательная, как и всякая прямая, определяет два взаимно противоположных направления, то линии напряженности приписывают определенное направление, отмечая его на чертеже стрелкой.

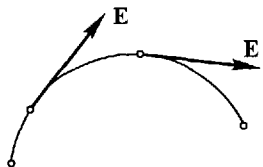


Рис. 6. К определению линии напряженности

Чтобы при помощи линий напряженности изобразить не только направление, но и модуль напряженности поля, условились на графиках поля проводить линии напряженности с определенной густотой, а именно так, чтобы число линий, проходящих через единицу поверхности, перпендикулярной к ним, было равно (или пропорционально) напряженности поля в данном месте.

Изображая линии электрического поля, мы получаем своеобразные графики или карты поля, которые сразу наглядно показывают, чему равна напряженность в разных частях поля и как она изменяется в пространстве. Вследствие большой наглядности этот способ представления полей широко применяют в электротехнике.

Из сказанного следует, что линию напряженности можно провести через всякую точку поля. Далее, так как в каждой точке поля вектор напряженности имеет вполне определенное направление, то линии напряженности нигде не пересекаются.

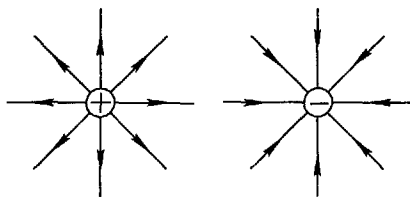


Рис. 7. Линии напряженности точечного заряда

Линии напряженности заканчиваются (или начинаются) на окружающих предметах, на которых возникают индукционные заряды.

На рис. 7 в качестве примера дана картина линий напряженности точечного заряда. Густота линий напряженности на каком-либо расстоянии  $r$  от заряда равна отношению полного числа  $N$  линий напряженности, вышедших из заряда, к поверхности сферы радиуса  $r$ , т.е.  $N/(4\pi r^2)$ . Она убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от заряда, т.е. так же, как и напряженность поля.

Если удастся вычислить напряженность электрического поля, то можно построить и чертежи линий напряженности этого поля. Однако в случае заряженных тел сложной формы такие вычисления могут быть трудны. В этих случаях картину линий напряженности можно получить на опыте.

Если в электрическом поле поместить какие-либо мелкие частицы, то на них возникнут индукционные заряды (рис. 8 а). Такие частицы

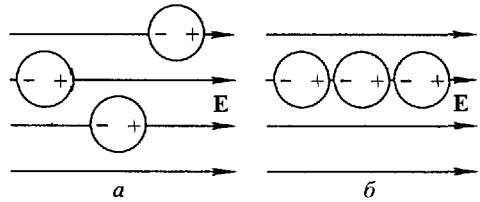


Рис. 8. Мелкие частицы в электрическом поле

будут перемещаться под влиянием взаимного притяжения разноименных зарядов и отталкивания одноименных, пока не установятся в виде цепочки, направленной вдоль линии напряженности (рис. 8 б). Этим и пользуются для экспериментального исследования электрического поля: в изучаемое поле вносят подходящий жидкий изолятор, к которому подмешан порошок из мелких твердых частичек; частицы порошка образуют в электрическом поле множество цепочек, простирающихся от одного заряженного электрода до другого, и воспроизводят форму и расположение линий напряженности.

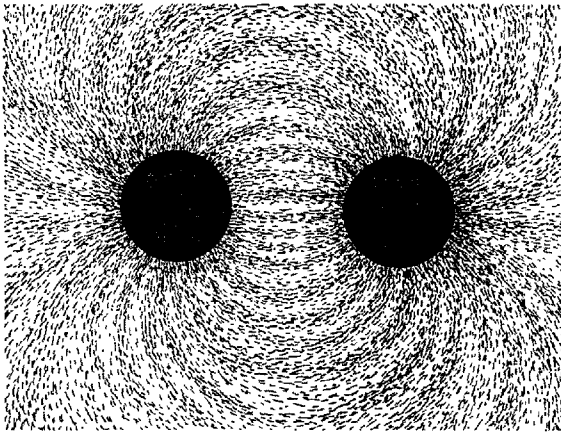


Рис. 9. Линии напряженности электрического поля между двумя разноименно заряженными шариками

На рис. 9 показано электрическое поле между двумя одинаковыми шариками, заряженными разноименно. Изображенное

поле возникает в том случае, если другие окружающие тела расположены достаточно далеко, т.е. на расстояниях, значительно больших, чем расстояние между шариками.

Рассмотрим еще электрическое поле между двумя параллельными металлическими пластинами, заряженными разноименными зарядами. Такая система называется *плоским конденсатором*.

Электрическое поле плоского конденсатора показано на рис. 10. Если расстояние между пластинами мало по сравнению с размерами пластин, то практически все линии напряженности,

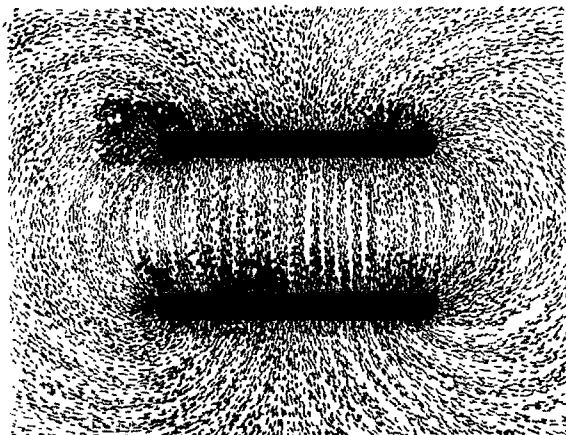


Рис. 10. Электрическое поле плоского конденсатора

исходящие из одной пластины, заканчиваются на другой. Это значит, что при зарядке одной пластины на другой возникает индукционный заряд, равный ему по модулю. Далее, в средней части конденсатора линии напряженности имеют вид параллельных линий, расположенных с одинаковой густотой. Следовательно, напряженность поля в плоском конденсаторе одинакова в разных точках поля. Такое поле является простейшим и называется *однородным*. На рис. 10 также видно, что вблизи краев пластин линии напряженности искривляются, т.е. поле делается неоднородным.

Отметим в заключение, что линии напряженности перпендикулярны к поверхности металлических электродов. Это и понятно. Если бы напряженность поля была не перпендикулярна к поверхности проводника, то существовала бы составляющая поля, направленная по касательной к поверхности. Под действием этой составляющей электроны проводимости проводника при-



пли бы в движение вдоль поверхности, и мы не имели бы равновесия электрических зарядов.

### § 13. Теорема Остроградского-Гаусса

Вычисление электрического поля во многих случаях сильно упрощается применением важной теоремы, излагаемой ниже. Она была установлена М.В. Остроградским в виде некоторой общей математической теоремы и Гауссом — применительно к случаю электрического поля.

Чтобы сформулировать эту теорему, введем новое понятие *электрического смещения*. Для вакуума электрическое смещение, по определению, равно

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}. \quad (13.1)$$

Обобщение этого понятия на случай произвольной среды будет дано в § 41. Если электрическое поле создается одним точечным зарядом, то электрическое смещение на расстоянии  $r$  от заряда равно по модулю

$$D = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^2}, \quad (13.2)$$

а направление смещения  $\mathbf{D}$  совпадает с направлением поля  $\mathbf{E}$ .

Отметим, что в системе СГСЭ напряженность поля и электрическое смещение в вакууме равны друг другу. В системе же СИ они различны.

По аналогии с линиями напряженности электрического поля (§ 12) для графического изображения распределения электрического смещения в пространстве мы будем пользоваться *линиями электрического смещения*. Направление этих линий в каждой точке пространства совпадает с направлением вектора электрического смещения, а их густота равна электрическому смещению.

Введем далее понятие потока электрического смещения. Рассмотрим в электрическом поле плоскую поверхность  $S$  и выберем определенное направление нормали  $\mathbf{n}$  к ней (рис. 11). Будем считать сначала, что поле однородно, но составляет произвольный угол  $\alpha$  с направлением нормали. Величину

$$N = SD \cos \alpha = SD_n \quad (13.3)$$

называют *поток электрического смещения* через данную поверхность. Здесь через  $D_n$  обозначена проекция  $\mathbf{D}$  на направление нормали  $\mathbf{n}$ . Так как густота линий электрического сме-

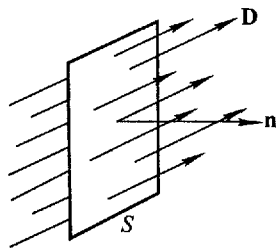


Рис. 11. Поток электрического смещения через данную поверхность

щения равна  $D$ , то можно сказать также, что поток вектора электрического смещения через данную поверхность равен полному числу линий электрического смещения, проходящих через эту поверхность.

Если поле неоднородно и поверхность, через которую разыскивают поток, не является плоскостью, то эту поверхность можно разбить на бесконечно малые элементы  $dS$  и каждый элемент считать плоским, а поле возле него — однородным. Поэтому для любого электрического поля поток смещения через элемент поверхности есть  $dN = D_n dS$ . Полный поток смещения через поверхность  $S$  в любом неоднородном электрическом поле равен

$$N = \int_S D_n dS. \quad (13.4)$$

Отметим, что поток смещения, определяющий число проходящих линий смещения, есть скаляр.

Из (13.3) видно, что поток может быть как положительным, так и отрицательным. Если направление линий смещения составляет острый угол с направлением нормали ( $\cos \alpha > 0$ ), то поток будет положительным. Если же этот угол тупой ( $\cos \alpha < 0$ ), то поток будет отрицательным.

Рассмотрим теперь точечный положительный заряд  $q$  и вычислим поток электрического смещения через замкнутую сферическую поверхность  $S$  (рис. 12), окружающую этот заряд и

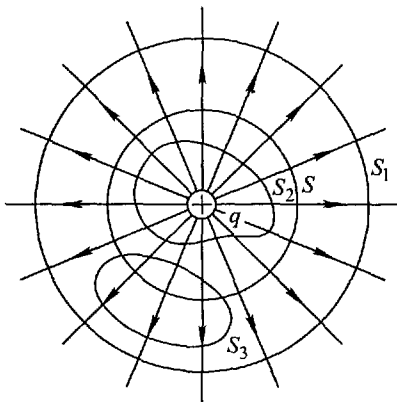


Рис. 12. К выводу теоремы Остроградского-Гаусса

имеющую центр в точке нахождения заряда. За положительное направление нормали выберем направление внешней нормали. В этом случае  $D$  во всех точках сферы одинаково и, кроме того, везде  $\cos \alpha = 1$ . Поэтому

$$N = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{R^2} 4\pi R^2 = q.$$

Легко видеть, что этот результат справедлив не только для сферической поверхности, но и для любой замкнутой поверхности и для любого произвольного расположения заряда внутри этой поверхности.

Действительно, полученный результат показывает, что поток смещения через сферическую поверхность не зависит от радиуса сферы, он один и тот же для сферы  $S$  и любой другой кон-

центрической с ней сферы  $S_1$  (рис. 12). Это значит, что линии смещения в пространстве между  $S$  и  $S_1$ , где не имеется зарядов, непрерывны. Линии электрического смещения начинаются и заканчиваются только на электрических зарядах.

Но из непрерывности линий смещения следует, что полное число линий смещения, проходящих через произвольную поверхность  $S_2$  (рис. 12), охватывающую заряд, т.е. поток смещения  $N$ , имеет такое же значение, как и для сфер  $S_1$  и  $S$ , т.е.

$$N = \int D_n dS = q. \quad (13.5)$$

Напротив, если замкнутая поверхность не охватывает заряда ( $S_3$  на рис. 12), то поток смещения через эту поверхность равен нулю, так как число линий смещения, входящих через поверхность, равно числу линий, выходящих из нее.

Из (13.5) также следует, что поток через замкнутую поверхность не зависит от расположения заряда внутри поверхности. Это значит, что полученный результат справедлив не только для одного заряда, но и для какого угодно числа произвольно расположенных зарядов, если только подразумевать под  $q$  алгебраическую сумму всех зарядов, находящихся внутри поверхности.

Формула (13.5) выражает теорему Остроградского-Гаусса: *поток электрического смещения через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме всех зарядов, расположенных внутри поверхности.*

Отметим, что при доказательстве этой теоремы мы исходили из закона Кулона, и потому она есть следствие этого закона. Если бы показатель степени у расстояния в формуле (2.1) был не 2, а каким-либо другим, то и доказанная теорема была бы несправедливой.

Из формулы (13.5) видно, что размерность потока смещения такая же, как и электрического заряда. Поэтому единицей потока смещения, как и заряда, служит кулон. Это — поток через замкнутую поверхность, окружающую заряд 1 Кл.

Электрическое смещение можно определить как поток смещения через единицу поверхности, нормальной к направлению смещения, или, иначе, как плотность потока смещения. Поэтому единица электрического смещения есть кулон на квадратный метр (Кл/м<sup>2</sup>).

Рассмотрим некоторые простые примеры вычисления электрического поля с помощью теоремы Остроградского-Гаусса.

**Пример 1. *Равномерно заряженная плоскость.*** Имеется безграничная плоскость, заряженная равномерно с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$ . Из симметрии задачи очевидно, что линии смещения могут быть направлены только перпен-

дикулярно к плоскости. В этом случае в качестве замкнутой поверхности в теореме Остроградского-Гаусса удобно выбрать

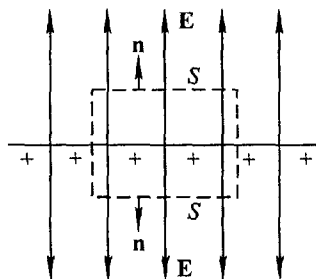


Рис. 13. Электрическое поле равномерно заряженной плоскости

прямо́й цилиндр, перпендикулярный к заряженной плоскости и ограниченный двумя плоскими основаниями перпендикулярными к линиям напряженности поля и расположенными по обеим сторонам заряженной плоскости (рис. 13). Так как образующие цилиндра параллельны линиям смещения ( $\cos \alpha = 0$ ), то поток смещения через боковую поверхность цилиндра равен нулю и поэтому полный поток сквозь цилиндр равен сумме потоков через его основания:  $N = 2DS$ . Полный заряд, заключенный внутри цилиндра, равен  $\sigma S$ . Поэтому, применяя теорему Остроградского-Гаусса, имеем

$$2DS = \sigma S,$$

откуда

$$D = \sigma/2.$$

Напряженность поля равномерно заряженной плоскости в вакууме равна

$$E = \sigma/2\epsilon_0. \quad (13.6)$$

**Пример 2. Поверхность заряженного проводника.** Посмотрим теперь, чему равна напряженность поля вблизи поверхности произвольного заряженного металлического проводника, если заряды на нем находятся в равновесии.

При решении задачи мы учтем, что в отсутствие электрического тока линии напряженности всегда перпендикулярны к поверхности проводника (§ 12). Далее очевидно, что в этом случае напряженность поля внутри проводника всегда равна нулю. Действительно, если бы это было не так, то электроны бы в движении, т.е. в проводнике возник бы электрический ток, что противоречит условию.

Выделим на поверхности проводника бесконечно малый элемент поверхности  $dS$  (рис. 14) и обозначим поверхностную плотность заряда на нем через  $\sigma$ . В качестве замкнутой поверхности выберем опять прямо́й цилиндр с осно-

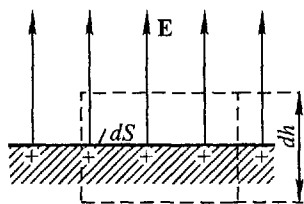


Рис. 14. Электрическое поле у поверхности заряженного проводника

ваниями  $dS$  и бесконечно малой высотой  $dh$ . В данном случае нужно рассматривать бесконечно малый элемент поверхности проводника, так как в общем случае  $\sigma$  меняется от точки к точке поверхности. Высота цилиндра должна быть также бесконечно малой, потому что в случае проводника произвольной формы линии смещения будут перпендикулярными к поверхности проводника только в непосредственной близости от нее. В этом случае полный поток смещения равен потоку через одно основание, и мы имеем

$$D dS = \sigma dS.$$

Поэтому

$$D = \sigma, \quad E = \sigma/\epsilon_0. \quad (13.7)$$

Таким образом, значение  $D$  у поверхности проводника равно непосредственно поверхностной плотности заряда, т.е. заряду, сместившемуся внутри проводника, в расчете на единицу поверхности. Этим объясняется происхождение термина «электрическое смещение». Замечательным в этом результате является то обстоятельство, что напряженность поля и электрическое смещение вблизи рассматриваемой точки поверхности не зависят явно от формы проводника, от распределения зарядов на нем, а также от расположения других соседних проводников.

При сравнении формул (13.6) и (13.7) возникает кажущееся противоречие: в обоих случаях мы имеем заряженные поверхности, однако напряженность поля около них отличается в два раза. На самом же деле никакого противоречия здесь нет. Формула (13.6) выражает поле, вызванное только зарядами, расположенными на плоскости. В случае же поверхности проводника исходящие из нее линии напряженности всегда заканчиваются на других телах, на которых возникают индукционные заряды. Формула (13.7) учитывает действие всех фактически существующих зарядов как на рассматриваемой поверхности, так и на окружающих телах.

Сказанное можно пояснить на примере плоского конденсатора (рис. 15). При появлении на какой-либо пластине заряда с плотностью  $+\sigma$  на второй пластине всегда возникает заряд противоположного знака с плотностью  $-\sigma$ . Эти заряды под влиянием взаимного притяжения будут сосредоточены на внутренних поверхностях пластин. Заряженная плоскость каждой пласти-

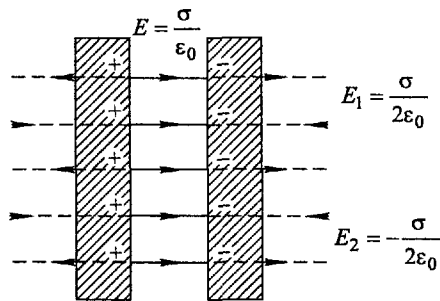


Рис. 15. Электрическое поле внутри плоского конденсатора есть сумма полей, создаваемых заряженными плоскостями его обкладок

на внутренней поверхности пластин. Заряженная плоскость каждой пласти-

ны создает по обе стороны от себя напряженность поля, выражаемую формулой (13.6) и равную  $\pm\sigma/2\epsilon_0$ . Внутри металлических пластин и вне конденсатора эти поля направлены противоположно и поэтому в сумме дают нуль. Внутри конденсатора эти поля, напротив, направлены одинаково и, складываясь, дают у поверхности пластин напряженность  $\sigma/\epsilon_0$  в соответствии с (13.7). В данном частном случае электрическое поле однородно, и поэтому его напряженность у поверхности пластин такая же, как и в других точках поля. Это мы и видели на опыте, описанном в § 12.

**Пример 3. Равномерно заряженный шар.** Рассмотрим электрическое поле между двумя шаровыми концентрическими электродами (рис. 16). Такая система электродов называется *шаровым конденсатором*.

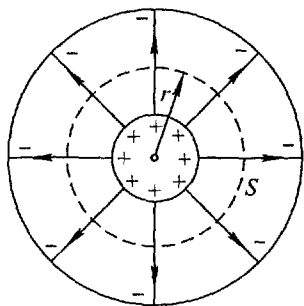


Рис. 16. Электрическое поле шарового конденсатора

Если заземлить внешний электрод и сообщить внутреннему шару заряд  $+q$ , то на внешнем электроде возникает индуцированный заряд  $-q$ . Под действием взаимного притяжения эти заряды расположатся только на поверхности внутреннего шара и на внутренней поверхности внешнего электрода.

Из условий симметрии задачи очевидно, что заряды на обоих шарах будут распределены равномерно и что линии смещения могут быть только радиальными прямыми. Поэтому в качестве замкнутой поверхности удобно выбрать сферу с радиусом  $r$ , расположенную между электродами и имеющую общий центр с обоими электродами. Тогда из теоремы Остроградского–Гаусса следует

$$N = D \cdot 4\pi r^2 = q,$$

откуда

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}. \quad (13.8)$$

Эта формула показывает, что напряженность поля между электродами зависит от расстояния  $r$  рассматриваемой точки поля от центра внутреннего шара, но не зависит вовсе от размеров внешнего электрода. Поэтому мы получим ту же напряженность поля, если радиус внешнего электрода будет как угодно велик.

Если внешний электрод значительно больше внутреннего, то электрическое поле вблизи внутреннего шара не зависит и от формы внешнего электрода. Это происходит по той причине, что при удаленном внешнем электроде изменение его формы не оказывает влияния на распределение зарядов на внутреннем шаре, которое остается по-прежнему равномерным. Следовательно, и

в том случае, когда роль внешнего электрода играют различные удаленные заземленные предметы, например стены, пол и потолок комнаты, формула (13.8) будет также применима для участков поля вблизи шара. Поэтому часто говорят просто о поле заряженного шара, не указывая, что именно является вторым электродом.

Электрическое поле шара, равномерно заряженного по поверхности, во внешнем пространстве совпадает с полем точечного заряда, равного полному заряду шара и помещенного в центре шара.

Если бы мы рассмотрели шар, заряженный равномерно по объему, то напряженность поля вне шара выражалась бы тоже формулой (13.8). Напряженность же поля внутри шара в обоих случаях различна. В случае шара, равномерно заряженного по поверхности, напряженность поля в любой внутренней точке равна нулю. Если же шар заряжен равномерно по объему, то напряженность поля равна нулю только в центре шара и с увеличением расстояния  $r$  от центра возрастает пропорционально  $r$ . В справедливости этого можно убедиться также при помощи теоремы Остроградского-Гаусса.

**Пример 4. Равномерно заряженный цилиндр.** Вычислим напряженность электрического поля между двумя коаксиальными металлическими цилиндрами. Такая система называется *цилиндрическим конденсатором*.

Предположим, что внешний цилиндр соединен с землей, а внутреннему цилиндру сообщен заряд  $+q_1$  на каждую единицу длины цилиндра. Тогда на внешнем цилиндре появится заряд  $-q_1$  на единицу его длины и эти заряды будут сосредоточены только на обращенных друг к другу поверхностях обоих цилиндров. Длину цилиндров будем считать весьма большой по сравнению с их радиусами.

Из условий симметрии ясно, что заряды будут распределены равномерно по поверхности цилиндров, а линии смещения будут радиальными прямыми, перпендикулярными к поверхности обоих цилиндров. В этом случае в качестве поверхности для вычисления

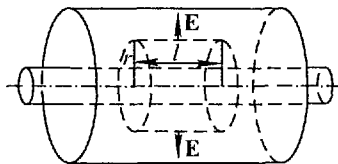


Рис. 17. К вычислению поля цилиндрического конденсатора

поверхности для вычисления потока электрического смещения удобно выбрать цилиндрическую поверхность, показанную на рис. 17. Так как поток электрического смещения через основания цилиндра равен нулю ( $\cos \alpha = 0$ ), а боковая поверхность перпендикулярна к линиям смещения ( $\cos \alpha = 1$ ), то формула (13.5) дает

$$D \cdot 2\pi r l = q_1 l.$$

Отсюда получаем, что напряженность поля между электродами в точке, отстоящей на расстоянии  $r$  от оси цилиндра, равна

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r}. \quad (13.9)$$

Это выражение справедливо для всех участков конденсатора, не слишком близких к его краям. Практически его можно применять уже на расстоянии от края порядка одного диаметра внешнего цилиндра.

Так же как и в предыдущем примере, напряженность поля между электродами не зависит от радиуса внешнего цилиндра. Если размеры внешнего электрода значительно больше радиуса внутреннего цилиндра, то напряженность поля вблизи него не зависит и от формы внешнего электрода. Поэтому и здесь часто говорят о поле равномерно заряженного цилиндра. Напряженность поля, выражаемую формулой (13.9), мы имеем возле металлических проволок, удаленных от окружающих предметов на расстояния, значительно превышающие их радиус.

## § 14. Уравнение Пуассона

Теорема Остроградского–Гаусса в форме (13.5) связывает электрическое смещение в точках некоторой замкнутой поверхности с зарядом, находящимся внутри объема, ограниченного этой поверхностью, т.е. связывает величины, относящиеся к раз-

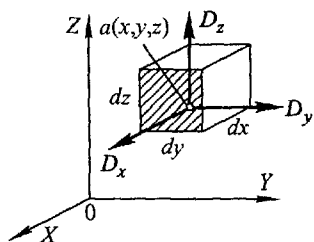


Рис. 18. К выводу теоремы Остроградского–Гаусса в дифференциальной форме

ным точкам поля. Можно, однако, придать этой теореме такую форму, чтобы в нее входили величины, относящиеся к одной и той же точке поля. Для этого нужно применить теорему к бесконечно малому объему.

Введем прямоугольную систему координат  $X, Y, Z$  и обозначим электрическое смещение в какой-либо точке  $a(x, y, z)$  через  $\mathbf{D}(D_x, D_y, D_z)$ . Рассмотрим бесконечно малый прямоугольный параллелепипед с вершиной в точке  $a$

и ребрами  $dx, dy, dz$ , параллельными координатным осям (рис. 18), и вычислим поток смещения через его поверхность. Поток через грань  $dy dz$ , проходящую через  $a$ , есть

$$-D_x dy dz,$$

где знак минус означает, что внешняя нормаль к  $dy dz$  и положительное направление  $D_x$  составляют угол  $\alpha = \pi$  ( $\cos \alpha = -1$ ). Поток через параллельную ей грань, смещенную вдоль  $X$  на  $dx$



(она заштрихована), есть  $\left(D_x \frac{\partial D_x}{\partial x} dx\right) dy dz$ . Поэтому поток через обе эти грани равен

$$\left(D_x + \frac{\partial D_x}{\partial x} dx\right) dy dz - D_x dy dz = \frac{\partial D_x}{\partial x} d\tau,$$

где  $d\tau = dx dy dz$  — объем параллелепипеда. Вычисляя аналогичным образом потоки через две другие пары граней и складывая их, получим полный поток через всю поверхность параллелепипеда

$$\left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right) d\tau.$$

Если в рассматриваемом пространстве имеется распределенный в объеме заряд с объемной плотностью  $\rho = \rho(x, y, z)$ , то величина заряда, содержащегося в объеме параллелепипеда, равна  $\rho d\tau$ . Приравнявая ее, согласно (13.5), значению полного потока через поверхность параллелепипеда, мы получим

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho. \quad (14.1)$$

Это соотношение, выражающее теорему Остроградского-Гаусса в дифференциальной форме, носит название *уравнения Пуассона*.

В векторном анализе показывают, что предел отношения потока какого-либо вектора  $\mathbf{A}$  через замкнутую поверхность  $S$  к объему  $\tau$ , ограниченному поверхностью  $S$ , при  $\tau \rightarrow 0$  (если этот предел существует) не зависит от формы поверхности  $S$ . Предел этого отношения получил название *дивергенции* или *расхождения* вектора  $\mathbf{A}$  и обозначается специальным символом  $\operatorname{div} \mathbf{A}$ . Таким образом, по определению,

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int_S A_n dS.$$

Так как поток вектора и объем суть скаляры, то и дивергенция вектора тоже есть скаляр.

Пользуясь этим понятием, можно записать уравнение Пуассона в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho.$$

Если составляющие электрического смещения  $\mathbf{D}$  заданы в какой-либо системе координат в виде функции этих координат, то всегда можно вычислить и значение  $\operatorname{div} \mathbf{D}$  в каждой точке. Так, например, мы видели выше, что если пользоваться прямоугольными декартовыми координатами, то

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}.$$

## § 15. Диполь в электрическом поле

Рассмотрим два точечных заряда  $+q$  и  $-q$ , жестко связанных между собой и смещенных на расстояние  $l$  друг от друга. Смещение обоих зарядов будем характеризовать вектором  $\mathbf{l}$ , направленным от отрицательного заряда к положительному. Таковую пару зарядов называют *электрическим диполем*.

С электрическими диполями нам приходится встречаться весьма часто. Небольшое проводящее тело в электрическом поле можно приближенно рассматривать как диполь, так как на его концах возникают индукционные заряды, равные по модулю и противоположные по знаку. В гл. V мы увидим, что подобные заряды возникают и на диэлектриках, и поэтому небольшое диэлектрическое тело в электрическом поле также можно рассматривать как диполь. Наконец, многие молекулы построены из

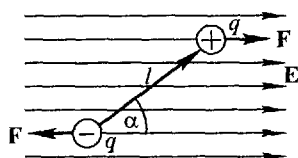


Рис. 19. Диполь в однородном поле

$F = qE$ , где  $E$  — напряженность поля. Эти силы направлены в противоположные стороны и образуют пару сил. Момент  $M$  этой пары равен

$$M = qEl \sin \alpha,$$

где  $\alpha$  — угол между вектором  $\mathbf{l}$  и напряженностью поля  $\mathbf{E}$ .

Мы видим, что момент пары сил зависит от произведения заряда  $q$  на длину диполя  $l$ . Это произведение называют *электрическим моментом диполя*. Момент диполя  $\mathbf{p}$  есть вектор, равный

$$\mathbf{p} = q\mathbf{l}. \quad (15.1)$$

Он направлен так же, как и  $\mathbf{l}$ , т.е. от отрицательного заряда к положительному. Единица электрического момента диполя есть кулон-метр (Кл·м).

Пользуясь понятием электрического момента диполя, можно написать выражение для момента пары сил, действующей на диполь, в виде

$$M = pE \sin(\mathbf{p}, \mathbf{E}). \quad (15.2)$$

Направление момента этой пары совпадает с направлением оси вращения диполя, т.е. перпендикулярно к  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{E}$ .

Модуль и направление момента пары  $\mathbf{M}$  можно выразить одной формулой, если воспользоваться обозначениями векторной алгебры. Как известно, векторным произведением  $[\mathbf{ab}]$  двух векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  называют вектор, модуль которого равен  $ab \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ , т.е. равен площади параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  как на сторонах. Этот вектор перпендикулярен к  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  и направлен в сторону перемещения буравчика с правой нарезкой, вращаемого от  $\mathbf{a}$  к  $\mathbf{b}$  (рис. 20). Поэтому вектор момента пары сил  $\mathbf{M}$ , действующей на диполь, можно выразить формулой

$$\mathbf{M} = [\mathbf{pE}]. \quad (15.3)$$

Мы видим, что в однородном поле на диполь действует только пара сил, которая стремится повернуть диполь таким образом, чтобы  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{E}$  были параллельны.

Для того чтобы повернуть диполь в электрическом поле на некоторый угол, нужно совершить определенную работу. Так как эта работа равна увеличению потенциальной энергии диполя, то можно найти выражение для энергии диполя в электрическом поле. Примем за нуль энергию диполя, перпендикулярного к направлению поля ( $\alpha = \pi/2$ ). Тогда энергия диполя, момент которого составляет угол  $\alpha$  с направлением поля, равна

$$W = \int_{\pi/2}^{\alpha} pE \sin \alpha \, d\alpha = -pE \cos \alpha. \quad (15.4)$$

Рассмотрим теперь диполь в неоднородном поле и положим для простоты, что момент диполя параллелен направлению поля ( $\alpha = 0$ ). В этом случае силы, действующие на концы диполя, уже неодинаковы, и поэтому их результирующая не равна нулю (рис. 21). На диполь в неоднородном поле действует сила, стремящаяся передвинуть диполь в область поля с большей напряженностью.

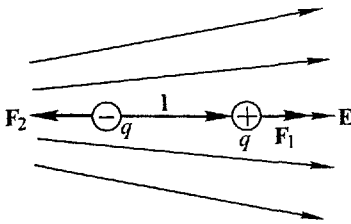


Рис. 21. Диполь в неоднородном поле

Найдем эту силу. Направим координатную ось  $X$  вдоль момента диполя и будем считать, что длина диполя  $\Delta l$  весьма мала (элементарный диполь). Сила, действующая на отрицательный конец диполя, есть  $-qE$ , где  $E$  — напряженность поля в точке нахождения заряда  $-q$ .

Сила, действующая на положительный конец диполя, равна  $+q[E + (dE/dx)\Delta l]$ , где  $\Delta l$  — длина диполя. Поэтому полная сила  $F$  оказывается равной

$$F = q \left( E + \frac{dE}{dx} \Delta l - E \right) = q \Delta l \frac{dE}{dx} = p \frac{dE}{dx}. \quad (15.5)$$

В однородном поле  $dE/dx = 0$  и результирующая сила равна нулю.

Если диполь находится в неоднородном поле и не параллелен полю, то на него действуют и пара сил, стремящаяся повернуть диполь параллельно полю, и сила, втягивающая диполь в область более сильного поля.

Пусть  $E_x, E_y, E_z$  — составляющие напряженности электрического поля в прямоугольных осях координат, а  $p_x, p_y, p_z$  — составляющие момента диполя в тех же осях. Тогда, поступая так же, как и выше, легко получить, что составляющая силы по оси  $X$  равна

$$F_x = p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_x}{\partial z}. \quad (15.6)$$

Составляющие силы  $F_y$  и  $F_z$  выражаются аналогичными формулами.

Этот результат можно выразить векторной формулой:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \text{ grad})\mathbf{E}, \quad (15.7)$$

где введен дифференциальный оператор

$$(\mathbf{p} \text{ grad}) = p_x \frac{\partial}{\partial x} + p_y \frac{\partial}{\partial y} + p_z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (15.8)$$

## Г Л А В А III

### РАЗНОСТЬ ПОТЕНЦИАЛОВ

#### § 16. Работа в электростатическом поле

Для понимания свойств электрического поля большое значение имеет понятие разности потенциалов, или электрического напряжения. К этому понятию мы приходим, рассматривая работу сил электрического поля.

Предположим, что электрический заряд перемещается в каком-нибудь электрическом поле из некоторой точки 1 в другую точку 2. Так как на заряд в электрическом поле действует сила, то при таком перемещении будет произведена определенная работа, которую мы обозначим через  $A_{12}$ . Ясно, что если

тот же заряд перемещается по прежнему пути в обратном направлении (от точки 2 к точке 1), то работа будет той же, но изменится ее знак, т.е.  $A_{12} = -A_{21}$ .

Рассмотрим теперь электрическое поле, созданное неподвижными зарядами (*электростатическое поле*). Легко видеть, что в электростатическом поле работа при перемещении заряда не зависит от формы пути, по которому движется заряд, и определяется только положением точек 1 и 2 — начала и конца пути заряда.

Действительно, допустим, что это не так и что работа  $A_{12}^{(L)}$  при перемещении заряда вдоль контура  $L$  (рис. 22) не равна работе  $A_{12}^{(L_1)}$  для контура  $L_1$ , причем оба они соединяют одни и те же точки 1 и 2. Тогда, перемещая заряд по замкнутому контуру, составленному из путей  $L$  и  $L_1$ , мы найдем, что электрические силы совершили работу

$$A_{12}^{(L)} + A_{21}^{(L_1)} = A_{12}^{(L)} - A_{12}^{(L_1)},$$

которая не равна нулю. Но это противоречит общему закону сохранения энергии. Если заряды, создающие поле, неподвижны, то при перемещении подвижного заряда в окружающих телах не происходит никаких процессов.

После возвращения заряда в исходную точку 1 мы не имеем никаких изменений в рассматриваемой системе тел и поэтому не можем получить ни выигрыша работы, ни ее потери. Это значит, что наше предположение неверно и что в действительности

$$A_{12}^{(L)} = A_{12}^{(L_1)}.$$

Таким образом, в электростатическом поле работа перемещения заряда между двумя точками не зависит от формы пути, соединяющего эти точки. При перемещении заряда по замкнутому контуру работа равна нулю.

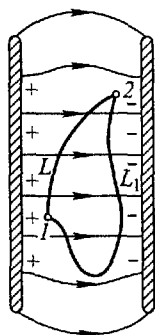


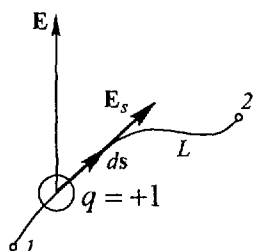
Рис. 22. Работа при перемещении заряда в электростатическом поле не зависит от формы пути

## § 17. Разность потенциалов

Положим теперь, что в электростатическом поле из точки 1 в точку 2 перемещается положительный заряд +1. Согласно § 16 работа, совершаемая силами поля при этом перемещении, не зависит от формы пути. Так как заряд выбран определенным (+1), то эта работа зависит только от существующего электрического поля и поэтому может служить его характеристикой. Она называется *разностью потенциалов* точек 1 и 2 в данном электрическом поле или *электрическим напряжением* между

точками 1 и 2. Разность потенциалов двух точек 1 и 2 в электростатическом поле измеряется работой, совершаемой силами поля при перемещении заряда  $+1$  из точки 1 в точку 2.

Зная напряженность поля в каждой точке, можно вычислить и разность потенциалов любых двух точек. Если  $ds$  — элемент перемещения заряда,  $E_s$  — проекция вектора напряженности поля на направление  $ds$  (рис. 23), то работа при перемещении заряда  $+1$  на отрезок  $ds$  есть  $E_s ds$ . Поэтому разность потенциалов точек 1 и 2 равна



$$U_{12} = \int_1^2 E_s ds, \quad (17.1)$$

Рис. 23. К определению разности потенциалов

где интегрирование производится вдоль любого контура  $L$ , соединяющего рассматриваемые точки, в направлении от точки 1 к точке 2.

Если в электрическом поле перемещается не единичный заряд, а заряд произвольной величины  $q$ , то в каждой точке сила, действующая на заряд, увеличится в  $q$  раз. Поэтому работа  $A_{12}$ , совершаемая силами поля при перемещении заряда  $q$  из точки 1 в точку 2, равна

$$A_{12} = qU_{12}. \quad (17.2)$$

Из сказанного следует, что физический смысл имеет только *разность* потенциалов, или напряжение, между двумя точками поля, так как работа определена только тогда, когда заданы две точки — начало и конец пути. Несмотря на это, часто говорят просто о потенциале, или напряжении, в данной точке, но всегда имеют в виду разность потенциалов, подразумевая, что одна из точек выбрана заранее. Такую постоянную точку часто выбирают «в бесконечности», т.е. на достаточном удалении от всех заряженных тел.

Мы видели, что в электростатическом поле напряжение между двумя точками не зависит от формы пути, соединяющего эти точки. Поэтому, если заряд  $+1$  перемещается по замкнутому контуру, например, сначала из точки 1 к точке 2 по контуру  $L$  (рис. 22), а затем от 2 к 1 вдоль  $L_1$ , то работа будет равна

$$U_{12} + U_{21} = U_{12} - U_{12} = 0.$$

В электростатическом поле напряжение вдоль замкнутого контура всегда равно нулю.

Последнее утверждение выражает важное свойство электростатического поля. Именно по этой причине для электростатического поля можно ввести разность потенциалов, которая одно-

значно определяется действующим полем (не зависит от формы пути) и поэтому может служить характеристикой поля.

Пользуясь формулой (17.1), можно выразить это свойство электростатического поля в следующей форме:

$$\oint E_s ds = 0, \quad (17.3)$$

где кружок у интеграла означает, что интегрирование производится по замкнутому контуру. Криволинейный интеграл какого-либо вектора вдоль замкнутого контура называется *циркуляцией* вектора вдоль этого контура. Следовательно, можно также сказать, что циркуляция напряженности электрического поля вдоль любого контура равна нулю.

Понятие разности потенциалов широко используют по двум основным причинам. Во-первых, описание электрического поля при помощи потенциала гораздо проще, чем при помощи напряженности поля. Напряженность поля есть вектор, и поэтому для каждой точки поля нужно знать три скалярные величины — составляющие напряженности по координатам. Потенциал же есть скаляр и вполне определяется в каждой точке одной величиной — своим числовым значением. В § 19 мы увидим, что, зная потенциал в каждой точке поля, можно найти и вектор напряженности.

Во-вторых, разность потенциалов гораздо легче измерить на опыте, чем напряженность поля. Для измерения напряженности поля нет удобных методов. Напротив, для измерения разности потенциалов существуют многочисленные методы и разнообразные приборы. Поэтому и описывать электрическое поле гораздо удобнее при помощи потенциала.

Единица разности потенциалов (напряжения) в системе СИ есть вольт (В). Вольтом называется потенциал в такой точке, для перемещения в которую из бесконечности заряда, равного 1 Кл, надо совершить работу 1 Дж.

Отметим, что, пользуясь формулой (17.2), можно выражать энергию не в механических единицах (эргах, джоулях и т.п.), а в электрических. Для этого служит внесистемная единица энергии, называемая электронвольт (эВ). Электронвольт — это энергия, которую приобретает частица с зарядом, равным заряду электрона  $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$  Кл, пробегающая в вакууме разность потенциалов 1 В, т.е.

$$1 \text{ эВ} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 1,60 \cdot 10^{-12} \text{ эрг.}$$

В электронвольтах обычно выражают энергию различных элементарных частиц (электронов, протонов и др.). При этом применяют также более крупные единицы энергии: 1 килоэлектронвольт (кэВ) =  $10^3$  эВ, 1 мегаэлектронвольт (МэВ) =  $10^6$  эВ и др.

## § 18. Условия равновесия зарядов в проводниках

Если электрические заряды находятся в равновесии в каком-либо проводнике, т.е. в этом проводнике нет электрического тока, то напряженность поля  $E_i$  в любой точке внутри проводника равна нулю. Действительно, если бы это условие не выполнялось, то подвижные электрические частицы, имеющиеся во всяком проводнике, под действием сил поля пришли бы в движение и равновесие было бы нарушено. Кроме того, в § 12 мы нашли, что при равновесии зарядов вектор напряженности поля у поверхности проводника перпендикулярен к поверхности. Отсюда следует, что для перемещения заряда из любой точки проводника в любую другую его точку не требуется никакой работы. Но согласно (17.1) это обозначает, что разность потенциалов любой пары точек как внутри проводника, так и на его поверхности равна нулю. В отсутствие электрического тока все точки проводника имеют одинаковый электрический потенциал.

Земля является также проводником. Хотя в земле существуют токи, но они невелики, и можно считать, что заряды земли близки к равновесию. Поэтому для многих случаев можно принять, что все точки земли имеют одинаковый потенциал. По этой причине постоянную точку при измерении потенциала часто выбирают в земле и говорят о потенциале относительно земли.

Если соединить два проводника металлической проволокой, то оба проводника и проволока образуют единый проводник. Если до соединения между проводниками существовала разность потенциалов, то равновесие зарядов будет невозможно. Напряженность поля  $E$  внутри проволоки не будет равна нулю, и электроны проводимости в проволоке придут в движение, т.е. в ней возникнет электрический ток. Этот ток будет продолжаться до тех пор, пока потенциалы обоих проводников не сделаются равными.

## § 19. Разность потенциалов и напряженность поля

Если известно распределение потенциала, т.е. его значение в каждой точке поля, то можно найти и напряженность этого поля в каждой точке.

Рассмотрим в однородном электрическом поле две точки 1 и 2 и предположим, что заряд  $+1$  переходит из точки 1 в точку 2 вдоль прямолинейного отрезка  $\Delta s$  (рис. 24). Работу электрических сил  $\Delta A$  при этом перемещении можно выразить, во-первых, через напряженность поля:

$$\Delta A = E_s \Delta s,$$



где  $E_s$  — проекция вектора напряженности  $\mathbf{E}$  на направление  $\Delta s$ . С другой стороны, ту же работу можно выразить через разность потенциалов  $\Delta U_{12}$  точек 1 и 2:

$$\Delta A = \Delta U_{12}.$$

Введем теперь приращение потенциала при перемещении  $\Delta s$ , т.е. разность потенциалов  $\Delta U_{21}$  точки 2 (конец пути) и точки 1 (начало пути), и обозначим его через  $\Delta U$ . Тогда

$$\Delta U = \Delta U_{21} = -\Delta U_{12}.$$

Приравнивая оба выражения для работы, получаем для напряженности электрического поля выражение

$$E_s = -\Delta U / \Delta s.$$

В общем случае неоднородного поля обе точки 1 и 2 нужно выбирать достаточно близко друг от друга, строго говоря, бесконечно близко, чтобы можно было считать напряженность поля на отрезке  $\Delta s$  постоянной. Переходя к пределу при  $\Delta s \rightarrow 0$ , получим

$$E_s = -dU/ds. \quad (19.1)$$

Производная, стоящая в правой части равенства, выражает быстроту изменения потенциала в данном направлении. Мы видим, что проекция вектора напряженности на данное направление равна скорости изменения потенциала в этом направлении с обратным знаком.

Градиентом любой скалярной величины  $\varphi$  в векторном анализе называют вектор, направление которого совпадает с направлением быстрейшего увеличения  $\varphi$ . Модуль же этого вектора равен изменению  $\varphi$  при перемещении на единицу длины в направлении быстрейшего изменения. Этот вектор обозначается символом  $\text{grad } \varphi$ . Из сказанного следует, что напряженность электрического поля равна градиенту потенциала с обратным знаком:

$$\mathbf{E} = -\text{grad } U. \quad (19.2)$$

Таким образом, зная распределение потенциала, мы всегда можем определить и проекцию напряженности поля на любое направление, а значит, и проекции  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_z$  на координатные оси.

Если поле однородно, т.е. создается плоским конденсатором, а  $U$  — напряжение между пластинами,  $d$  — расстояние между ними, то

$$E = U/d. \quad (19.3)$$

Это соотношение используют для определения единицы напряженности электрического поля. Единица напряженности вольт

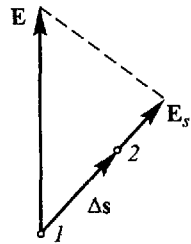


Рис. 24. К соотношению между разностью потенциалов и напряженностью поля

на метр (В/м) — это напряженность однородного электрического поля, создаваемая разностью потенциалов 1 В между точками, находящимися на расстоянии 1 м на линии напряженности.

Из сказанного ясно, что если между какими-нибудь проводниками есть электрическое напряжение, то между ними существует и электрическое поле. Это обстоятельство разъясняет так называемое отведение зарядов в землю. Когда мы желаем разрядить какой-либо проводник, то соединяем его с заземленным предметом, например, с водопроводным краном, или даже просто касаемся его рукой, и говорим, что заряды с проводника «ушли через наше тело в землю».

Более точно это явление заключается в следующем. Все электрические действия обусловлены электрическим полем. Поэтому мы наблюдаем их только тогда, когда имеется напряжение между рассматриваемым телом и окружающими предметами. При соединении тела с землей исчезает напряжение между этим телом и окружающими заземленными предметами, а значит, и электрическое поле, и все электрические действия прекращаются. Само соединение с землей не играет принципиальной роли. Мы наблюдали бы то же самое, если бы вместо заземленных предметов, например стен комнаты, имели замкнутый проводник, изолированный от земли.

## § 20. Эквипотенциальные поверхности

Объединяя в электрическом поле точки, обладающие одинаковым потенциалом, мы получаем некоторые поверхности, называемые *поверхностями равного потенциала* или *эквипотенциальными поверхностями*. Пользуясь эквипотенциальными поверхностями, можно изображать электрические поля графически, подобно тому как мы это делали с помощью линий напряженности. Пересекаясь с плоскостью чертежа, эквипотенциальные поверхности дают эквипотенциальные линии (рис. 25). Прочерчивая эквипотенциальные линии, соответствующие различным значениям потенциала, мы получаем сразу наглядное представление о том, как изменяется потенциал в данном поле.

Так как все точки эквипотенциальной поверхности находятся при одинаковом потенциале, то перемещение заряда вдоль нее не требует работы. Это значит, что сила, действующая на заряд, все время перпендикулярна к перемещению. Отсюда мы заключаем, что линии напряженности всегда перпендикулярны к эквипотенциальным поверхностям.

Если прочерчивать эквипотенциальные линии так, чтобы они соответствовали одинаковым приращениям потенциала, например 1, 2, 3 и т.д. вольт, то быстрота изменения потенциала в направлении линий напряженности будет обратно пропорцио-

нальна расстоянию между соседними эквипотенциальными линиями. Это значит, что густота эквипотенциальных линий пропор-

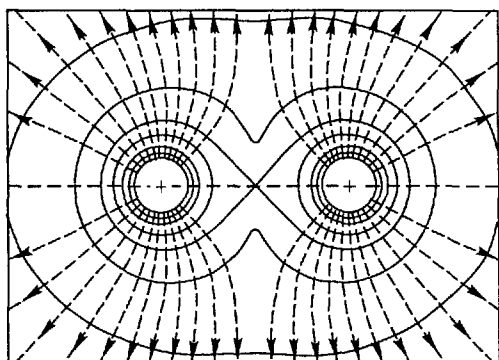


Рис. 25. Эквипотенциальные линии (сплошные) и линии напряженности (штриховые) поля двух одноименно заряженных металлических шаров

порциональна напряженности поля: там, где больше напряженность поля, там и эквипотенциальные линии располагаются теснее друг к другу.

Мы видим, что, зная эквипотенциальные поверхности, можно всегда построить линии напряженности данного поля и наоборот. Поэтому любое электрическое поле можно графически изобразить при помощи эквипотенциальных поверхностей так же хорошо, как и при помощи линий напряженности.

В § 18 мы видели, что если заряды находятся в равновесии, то все точки проводника имеют одинаковый потенциал. Это значит, что в отсутствие тока поверхность проводника есть одна из эквипотенциальных поверхностей.

## § 21. Измерение напряжения между проводниками

Электрическое напряжение можно просто измерить на опыте. Для этого служат приборы, называемые *электрометрами* или *электростатическими вольтметрами*.

На рис. 26 изображен один из простейших электрометров. Штриховыми линиями изображены сечения эквипотенциальных поверхностей плоскостью чертежа, сплошными линиями — линии напряженности электрического поля. Электрометр содержит легкую алюминиевую стрелку *a*, укрепленную на металлическом стержне *b*. Стрелка может поворачиваться вокруг горизонтальной оси. Стержень со стрелкой заключены внутри металлического корпуса *c* и хорошо изолированы от него при помощи пробки *г* из непроводящего материала (янтарь, кварц,

эбонит и т.п.). Прибор имеет шкалу, позволяющую отсчитывать угол отклонения стрелки.

Рассмотрим сначала, как измеряют напряжение между двумя проводниками. Для этого соединяют корпус электрометра с одним из проводников, а его стержень — с другим. Если нужно измерить напряжение между заряженным проводником и землей, то корпус электрометра соединяют с землей, а стержень присоединяют с помощью металлической проволоки к заряженному проводнику (рис. 27).

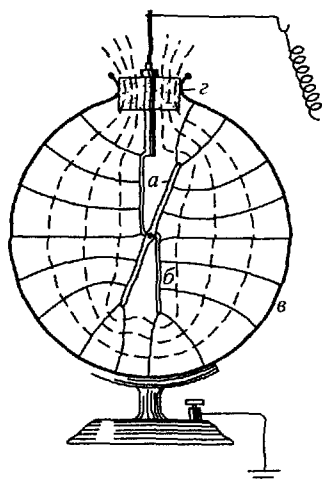


Рис. 26. Электрометр со стрелкой

Создавая каждый раз одно и то же напряжение между стрелкой и корпусом, мы будем получать одну и ту же напряженность поля у поверхности стрелки, а значит, будут одинаковы и силы, действующие на стрелку, и ее отклонение. А это и означает, что электрометр измеряет напряжение. Такой прибор можно проградуировать, т.е. определить, каким напряжениям соответствуют различные углы отклонения стрелки.

Таким образом, электрометр всегда измеряет напряжение, существующее между его стрелкой и корпусом. Поэтому в опыте, изображенном на рис. 27, можно было бы изолировать корпус и соединить его с исследуемым телом, а стержень соединить с землей, и при этом показания электрометра не изменились бы.

Пользуясь электрометром, легко убедиться, что поверхность проводника всегда является эквипотенциальной поверхностью.

Легко видеть, что отклонение стрелки электрометра будет зависеть от напряжения, существующего между стрелкой и корпусом. Действительно, на стрелку действуют силы, поворачивающие ее, потому, что внутри электрометра возникает электрическое поле. Так как электрометр имеет корпус неизменной формы, то это поле будет зависеть только от напряжения, приложенного к электрометру.

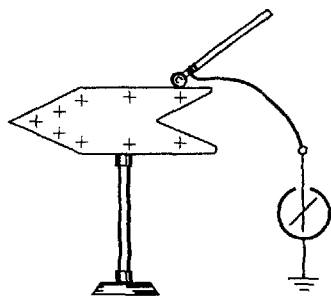


Рис. 27. Измерение напряжения между заряженным проводником и землей

Если в опыте, изображенном на рис. 27, соединять электрометр с различными точками проводника, то, как бы сложна ни была форма проводника, отклонение стрелки электрометра не изменится.

Описанный электрометр удобен для измерения высоких напряжений (тысячи и десятки тысяч вольт). Для измерения малых напряжений применяют электрометры других типов.

## § 22. Нормальные элементы

Для того чтобы с помощью электрометров измерять напряжение, их необходимо проградуировать. Для градуировки электрометров в настоящее время часто пользуются нормальными элементами, которые представляют собой гальванические элементы, составленные из таких веществ, которые обеспечивают весьма большое постоянство напряжения между электродами. Это напряжение было тщательно измерено и теперь хорошо известно, поэтому нормальные элементы являются удобными эталонами напряжений, которые легко воспроизвести в любой лаборатории. Нормальные элементы играют в электрической измерительной технике ту же роль, что и эталоны длины (метра) и массы (килограмма) при измерении механических величин.

Большое распространение получил кадмиевый нормальный элемент. Его напряжение при  $20^{\circ}\text{C}$  равно 1,0186 В.

При комнатных температурах напряжение этого элемента почти не зависит от температуры: при повышении температуры на  $1^{\circ}\text{C}$  оно уменьшается менее чем на 0,0001 В.

Устройство кадмиевого нормального элемента показано на рис. 28. Он состоит из двух соединяющихся стеклянных пробирок, в дно которых впаяны платиновые проволоки. На дне одной из пробирок находится небольшое количество ртути, а поверх наложена паста из смеси сернокислой ртути и сернокислого кадмия. На дне другой пробирки имеется амальгама кадмия. Пробирки заполнены насыщенным раствором сернокислого кадмия. В этом элементе положительным электродом (анодом) служит ртуть, а отрицательным (катодом) — амальгама кадмия.

От такого элемента можно брать только очень слабые токи, не превышающие нескольких микроампер, так как только при этом условии его напряжение можно считать неизменяющимся. Однако этого вполне достаточно для проведения измерений.

Для получения более высоких напряжений нормальные элементы можно соединять между собой последовательно в бата-

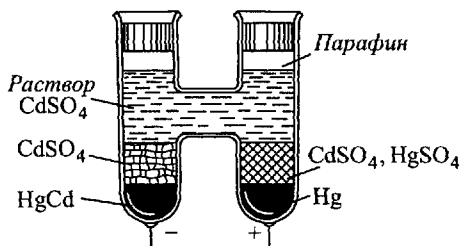


Рис. 28. Кадмиевый нормальный элемент

реи так, чтобы положительный полюс каждого предыдущего элемента был соединен с отрицательным полюсом последующего. При  $n$  элементах, соединенных последовательно, напряжение между крайними электродами батареи будет в  $n$  раз больше, чем у одного элемента.

Отметим, однако, что на практике соединение нормальных элементов применяют редко. При использовании компенсационных схем измерения напряжений (§ 70) оказывается возможным измерить напряжение какого-нибудь источника, применяя всего один нормальный элемент, даже если измеряемое напряжение намного больше или намного меньше, чем у нормального элемента.

### § 23. Электрический зонд

Посмотрим теперь, как можно измерить потенциал внутри диэлектрика.

Пусть требуется измерить потенциал в какой-либо точке в воздухе относительно земли. Если мы поместим в эту точку металлический шарик, то на шарике возникнут индукционные заряды. Эти заряды вызовут дополнительное поле, и поэтому результирующее поле изменится. Электрическое поле будет искажено внесением шарика.

Если, однако, шарик мал, то и разноименные индукционные заряды будут расположены близко друг к другу, и искажение, вносимое ими, будет проявляться только в непосредственной близости от шарика (рис. 29 *a*). Поэтому шарик практически

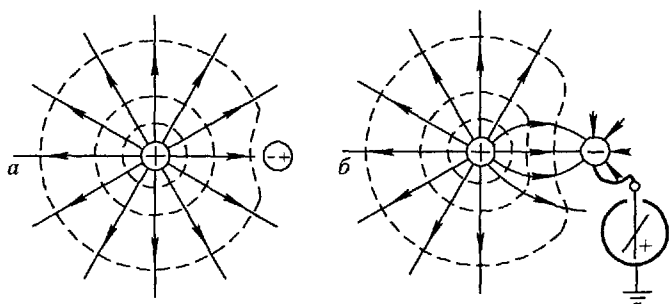


Рис. 29. Маленький металлический шарик слабо искажает поле (*a*), но при соединении шарика с электрометром искажение поля увеличивается (*b*): сплошные линии — линии напряженности, штриховые — эквипотенциальные линии

примет потенциал, который существовал в данной точке до внесения шарика.

Однако мы получим совсем иную картину, если, желая измерить этот потенциал, соединим шарик проволокой с электрометром (рис. 29 б). В этом случае на шарике будут находиться индукционные заряды только одного знака, а заряды противоположного знака будут внутри электрометра. Поэтому возникнет сильное искажение первоначального поля и его эквипотенциальные поверхности и линии напряженности существенно изменятся. Электрометр и в этом случае, как и всегда, покажет потенциал стрелки относительно корпуса, равный потенциалу шарика относительно земли. Однако этот потенциал будет совсем другим, нежели тот, который существовал до внесения шарика.

Из сказанного ясно, что мы получим правильное значение потенциала, если уберем индукционные заряды, искажающие поле. Это можно сделать, если вблизи шарика создать в воздухе небольшое количество ионов. Тогда ионы, противоположные по знаку заряду шарика, будут переходить на шарик до тех пор, пока индукционный заряд не исчезнет вовсе. Это обстоятельство используют на практике для устройства электрического зонда.

Электрический зонд представляет собой небольшой металлический электрод, вокруг которого создается ионизация газа. Ее можно осуществить, помещая зонд в небольшое пламя горящего светильного газа (пламенный зонд). Для этого можно также использовать металлическую проволоку, накаливаемую током (зонд с накаленной нитью), или применить любой другой прием ионизации газа. Зонд соединяют металлической проволокой с электрометром, корпус которого заземлен. Тогда показание электрометра даст потенциал относительно земли той точки поля, где находится зонд.

## § 24. Потенциал в простейших электрических полях

Вычислим потенциал в электрическом поле, создаваемом одним точечным зарядом  $q$ . Рассмотрим в этом поле некоторую точку, удаленную на расстояние  $r$  от заряда, и найдем потенциал в этой точке относительно бесконечности. Так как разность потенциалов не зависит от формы пути, то мы предположим, что заряд  $+1$  перемещается из точки  $r$  в бесконечность вдоль радиуса, т.е. вдоль линии напряженности электрического поля. Тогда

$$U = \int_r^{\infty} E dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_r^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}. \quad (24.1)$$

Потенциал убывает обратно пропорционально первой степени расстояния от заряда.

Поступая подобным образом, можно вычислить распределение потенциалов и в других полях, если известна напряженность

поля в каждой точке. Рассмотрим некоторые практически важные примеры.

**Пример 1. Шаровой конденсатор.** Имеются два электрода в виде концентрических сфер с радиусами  $a$  (внутренняя) и  $b$  (внешняя). Напряженность поля  $E$  между такими электродами выражается формулой (13.8) и изменяется в пространстве так же, как и в случае точечного заряда. Следовательно, разность потенциалов между внутренней сферой и какой-либо точкой внутри конденсатора, удаленной на расстояние  $r$  от центра конденсатора, равна

$$U = \int_a^r E dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_a^r \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{r} \right).$$

В этой формуле можно выразить заряд  $q$  через разность потенциалов  $U_0$  между электродами:

$$U_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right),$$

откуда окончательно получаем

$$U = U_0 \frac{1/a - 1/r}{1/a - 1/b}. \quad (24.2)$$

Таким образом, измеряя  $U_0$  между электродами, по формуле (24.2) можно вычислить потенциал в любой точке поля.

**Пример 2. Плоский конденсатор.**

Вычислим разность потенциалов между положительно заряженной пластиной и произвольной точкой, удаленной на расстояние  $x$  от нее. Напряженность поля в плоском конденсаторе выражается формулой (13.7). Поэтому

$$U = \int_0^x E dx = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \int_0^x dx = \frac{\sigma}{\epsilon_0} x. \quad (24.3)$$

Полная разность потенциалов  $U_0$  между электродами равна

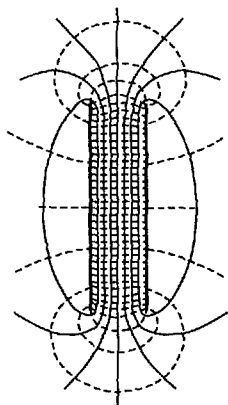
$$U_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d, \quad (24.3a)$$

Рис. 30. Эквипотенциальные линии и линии напряженности поля плоского конденсатора

где  $d$  — расстояние между пластинами. Поэтому также

$$U = U_0 \frac{x}{d}. \quad (24.3b)$$

В плоском конденсаторе потенциал изменяется с расстоянием по линейному закону.





В этих расчетах мы не учитывали искажение электрического поля вблизи краев пластин. Поэтому полученные формулы применимы только для средней части конденсатора. Электрическое поле плоского конденсатора конечных размеров показано на рис. 30.

**Пример 3. Цилиндрический конденсатор.** Рассмотрим еще распределение потенциала между коаксиальными цилиндрами. Напряженность этого поля выражается формулой (13.9). Поэтому разность потенциалов между внутренним цилиндром и произвольной точкой между электродами равна

$$U = \frac{q_1}{2\pi\epsilon_0} \int_a^r \frac{dr}{r} = \frac{q_1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{a}.$$

Здесь  $r$  — расстояние от рассматриваемой точки до оси цилиндров,  $a$  — радиус внутреннего цилиндра,  $q_1$  — заряд внутреннего цилиндра на единицу его длины. Полная разность потенциалов  $U_0$  между цилиндрами равна

$$U_0 = \frac{q_1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a},$$

где  $b$  — радиус внешнего цилиндра. Отсюда

$$U = U_0 \frac{\ln(r/a)}{\ln(b/a)}. \quad (24.4)$$

Потенциал в цилиндрическом конденсаторе изменяется по логарифмическому закону.

## § 25. Вычисление потенциала в поле заданных зарядов

В примерах предыдущего параграфа мы вычисляли потенциал по напряженности поля, которая была известна заранее. Однако часто напряженность поля бывает неизвестна и именно ее и требуется вычислить. В этих случаях находят сначала потенциал, что оказывается гораздо проще, а затем вычисляют и напряженность поля по формуле (19.1).

При вычислении потенциала следует различать два случая: а) задано распределение зарядов, вызывающих поле, и б) заданы потенциалы заряженных тел, создающих поле. Рассмотрим сначала первый случай.

Если поле создается одним-единственным точечным зарядом, то потенциал этого поля выражается формулой (24.1).

Если имеется несколько точечных зарядов, то, согласно принципу наложения электрических полей (§ 10), результирующее поле равно сумме полей, создаваемых отдельными зарядами. Поэтому и потенциал этого поля равен сумме потенциалов,

вызываемых отдельными зарядами, т.е.

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}. \quad (25.1)$$

Здесь  $U$  — потенциал результирующего поля в рассматриваемой точке относительно бесконечности,  $r_i$  — расстояние этой точки до  $i$ -го заряда, а суммирование производится по всем точечным зарядам.

Подобным образом можно рассчитать потенциал поля и протяженных заряженных тел. В этом случае нужно сначала найти потенциал, создаваемый отдельным бесконечно малым элементом объема тела  $d\tau$ , который можно рассматривать как точечный заряд. Этот потенциал есть

$$dU = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho d\tau}{r},$$

где  $\rho$  — объемная плотность заряда, а  $r$  — расстояние от рассматриваемой точки поля до  $d\tau$ . Полное значение потенциала равно

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{\rho d\tau}{r}, \quad (25.2)$$

где интегрирование распространяется на весь объем  $\tau$  заряженного тела.

Если заряды расположены только на поверхности тела, то

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma dS}{r}. \quad (25.3)$$

Здесь  $\sigma$  — поверхностная плотность заряда,  $dS$  — элемент поверхности тела,  $r$  — расстояние рассматриваемой точки поля до  $dS$ , а интегрирование распространяется по всей заряженной поверхности  $S$ .

**Электрическое поле диполя.** Применим результаты предыдущего параграфа к вычислению электрического поля, создаваемого диполем (рис. 31). Согласно (25.1) потенциал в некоторой точке поля  $a$  есть

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}.$$

Будем теперь считать, что длина диполя  $l$  весьма мала по сравнению с расстояниями  $r_1$  и  $r_2$  до точки  $a$

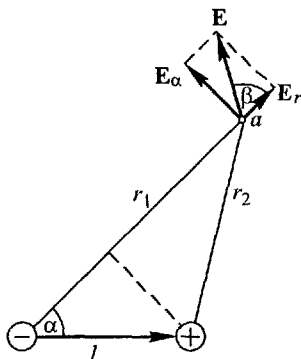


Рис. 31 К вычислению электрического поля диполя

(элементарный диполь). В этом случае можно положить

$$r_1 - r_2 = l \cos \alpha, \quad r_1 r_2 = r^2$$

и выражение для потенциала принимает вид

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \alpha}{r^2}. \quad (25.4)$$

Здесь  $p$  есть модуль момента диполя, а  $\alpha$  — угол между направлением момента диполя  $\mathbf{p}$  и направлением радиус-вектора  $\mathbf{r}$ , проведенного из диполя в рассматриваемую точку поля.

Зная  $U$  в зависимости от координат, мы можем вычислить напряженность поля  $E$  по формуле (19.1), дифференцируя выражение для  $U$  по координатам. Будем пользоваться полярными координатами  $r$  и  $\alpha$  с началом в точке нахождения диполя и направим полярную ось в направлении момента диполя  $\mathbf{p}$ . Тогда составляющая напряженности в направлении радиуса  $\mathbf{r}$  есть

$$E_r = -\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{p \cos \alpha}{2\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (25.5)$$

Составляющая, перпендикулярная к  $\mathbf{r}$ :

$$E_\alpha = -\frac{\partial U}{r \partial \alpha} = \frac{p \sin \alpha}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (25.6)$$

Полная напряженность поля в точке  $a(r, \alpha)$  будет

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{E_r^2 + E_\alpha^2} = \\ &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{3 \cos^2 \alpha + 1}. \end{aligned} \quad (25.7)$$

Вектор напряженности образует с направлением  $\mathbf{r}$  угол  $\beta$ :

$$\operatorname{tg} \beta = E_\alpha / E_r = (1/2) \operatorname{tg} \alpha. \quad (25.8)$$

Эти формулы вполне определяют напряженность поля по модулю и по направлению в каждой его точке. На рис. 32 изображены линии поля диполя.

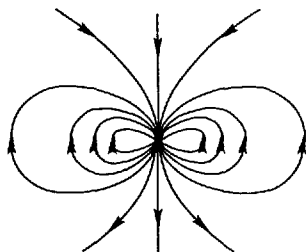


Рис. 32. Линии напряженности элементарного диполя

## § 26. Общая задача электростатики

Наиболее часто встречаются такие случаи, когда распределение зарядов неизвестно, но заданы потенциалы проводников. Такие задачи могут быть сформулированы следующим общим образом: имеется система проводников  $A$ ,  $B$ ,  $V$  и т.д. заданной формы и заданного взаимного расположения и известны потенциалы всех проводников  $U_A$ ,  $U_B$  и т.д. (например, относительно

бесконечности или относительно одного из проводников); требуется определить значение потенциала в любой точке поля между проводниками.

Математически эта задача сводится к следующей. Составляющие напряженности поля  $\mathbf{E}$  по координатам можно выразить, согласно (19.1), через потенциал:

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение Пуассона (14.1), мы получим общее уравнение, которому удовлетворяет потенциал, в виде

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (26.1)$$

Если между проводниками нет зарядов, то во всех точках  $\rho = 0$ , и уравнение (26.1) переходит в более простое:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0, \quad (26.2)$$

называемое *уравнением Лапласа*. Поэтому вычисление потенциала в общем случае сводится к нахождению такой функции координат  $U(x, y, z)$ , которая во всем пространстве между проводниками удовлетворяет дифференциальному уравнению (26.2), а на самих проводниках принимает заданные постоянные значения  $U_A, U_B$  и т.д. Можно показать, что решение такой задачи однозначно.

Легко убедиться, что найденные нами в § 24, 25 выражения для потенциала в простейших полях удовлетворяют уравнению (26.2) и граничным условиям.

Действительно, для однородного поля плоского конденсатора потенциал выражается формулой (24.3). Потенциал зависит лишь от одной координаты  $x$ , и поэтому в уравнении Лапласа (26.2) имеется всего один член. Вычисляя производные от потенциала по координатам, имеем

$$U = \frac{\sigma}{\epsilon_0} x, \quad \frac{dU}{dx} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad \frac{d^2 U}{dx^2} = 0.$$

Потенциал, кроме того, удовлетворяет граничным условиям, так как остается постоянным во всех точках одной обкладки ( $x = 0$ ) и другой обкладки ( $x = d$ ).

Для радиального поля шарового конденсатора мы нашли формулу (24.2), где  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Дифференцируя выражение для потенциала по координатам, получаем

$$\frac{\partial U}{\partial x} \propto \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \propto \frac{r^2 - 3x^2}{r^5}.$$

И аналогично

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \propto \frac{r^2 - 3y^2}{r^5}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \propto \frac{r^2 - 3z^2}{r^5}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \propto \frac{3r^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = 0.$$

Потенциал, выражаемый формулой (24.2), удовлетворяет и граничным условиям, так как постоянен во всех точках каждой обкладки (при  $r = a$  и  $r = b$ ).

Подобным же образом можно проверить, что формула (24.4), найденная для потенциала в поле цилиндрического конденсатора, также удовлетворяет и уравнению (26.2), и граничным условиям.

Решение уравнения (26.2), вообще говоря, сложно и составляет содержание специального раздела математической физики — теории потенциала.

Если форма электродов настолько сложна, что распределение потенциала трудно вычислить, то его всегда можно определить экспериментально. Для этого может служить электрический зонд (§ 23). Еще удобнее применение электролитической ванны, описанной в § 62.

## § 27. Проводники в электрическом поле

Рассмотрим теперь, каким образом распределяются электрические заряды внутри проводников в отсутствие электрического тока.

В § 18 мы видели, что для равновесия зарядов необходимо, чтобы напряженность поля  $E_i$  в любой точке внутри проводника была равна нулю. Но тогда из уравнения Пуассона (14.1) следует, что объемная плотность заряда  $\rho_i$  внутри проводника также равна нулю. В отсутствие электрического тока заряды распределяются только на поверхности проводника.

Если мы представим себе, что из сплошного проводника удалена внутренняя часть, то получится полый замкнутый проводник. Так как внутренняя часть не имела зарядов, то ее удаление не изменит ни распределение поля, ни распределение зарядов внутри оставшейся части проводника. Поэтому равновесное распределение зарядов в полом проводнике будет таким же, как и в сплошном проводнике, т.е. заряды будут только на внешней поверхности. Напряженность же поля будет равна нулю в любой точке внутри стенок и в любой точке внутри полости.

Заряды в состоянии равновесия распределяются на поверхности проводника всегда, независимо от того, каким образом они возникли. Если замкнутый полый металлический проводник находится во внешнем электрическом поле (рис. 33 а), то на нем появятся индукционные заряды. Эти заряды будут также сосредоточены только на внешней поверхности, а электрическое поле и в толще металла, и внутри полости будет равно нулю. Поэтому

полый металлический проводник экранирует электрическое поле всех внешних зарядов. Этим широко пользуются на практике для устройства электростатической защиты. Для того чтобы оградить чувствительные электрические приборы от возмущающего действия внешних электрических полей, их заключают в замкнутые металлические ящики, которые соединяют с землей.

Отметим, что замкнутый полый проводник экранирует только поле внешних зарядов. Если электрические заряды находятся

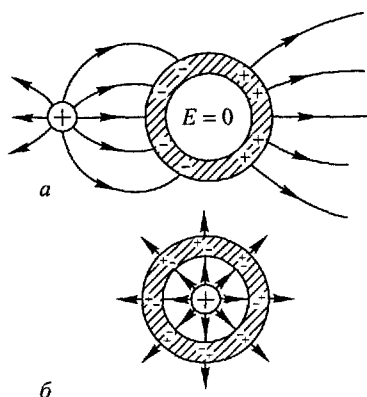


Рис. 33. Заряд вне (а) и внутри (б) металлической полости

внутри полости, индукционные заряды возникнут не только на внешней поверхности проводника, но и на внутренней (рис. 33 б). Распределение этих индуцированных зарядов будет таким, чтобы полное поле, равное сумме полей, создаваемых зарядом внутри полости и индукционными зарядами, в любой точке в толще металла было равно нулю (условие равновесия). Однако внутри полости поле не будет равно нулю, и здесь будут проходить линии напряженности, соединяющие заряд, заключенный в полости, с индукционными зарядами на внутренней поверхности. Индукционные же заряды на внешней поверхности вызовут поле во внешнем пространстве, и поэтому замкнутая проводящая полость не экранирует поле электрических зарядов, помещенных внутри нее.

В связи с изложенным выше находится важный практический прием передачи заряда от одного проводника к другому. Пусть, например, требуется передать заряд с металлического проводника на электрометр. Чтобы осуществить эту передачу полностью, электрометр соединяют с полым проводником, приближающимся по форме к замкнутой полости, например с металлическим цилиндром («фарадеев цилиндр»), и вносят заряженный проводник внутрь этой полости. Тогда проводник разряжается полностью и его заряд целиком переходит на электрометр.

## § 28. Точная проверка закона Кулона

В предыдущем параграфе, объясняя, почему заряды распределяются только на поверхности проводника, мы основывались на теореме Остроградского–Гаусса. Но эта теорема есть

следствие закона Кулона, и поэтому найденные нами особенности распределения зарядов являются также следствием этого закона.

И наоборот: можно показать, что если бы сила взаимодействия точечных зарядов выражалась законом

$$F \propto \frac{q_1 q_2}{r^{2 \pm \delta}},$$

то при любом  $\delta$ , отличном от нуля, теорема Остроградского-Гаусса не имела бы места и заряды распределялись бы не только на поверхности, но и в объеме проводника (см. Добавление 1). Поэтому, исследуя на опыте, действительно ли в объеме проводника нет зарядов, можно проверить справедливость закона Кулона и притом гораздо более точно, нежели в опытах с крутильными весами.

Такие опыты произвел впервые Кавендиш, который за несколько лет до Кулона установил, что сила взаимодействия зарядов обратно пропорциональна квадрату расстояния. В этих опытах металлический шар 1 (рис. 34) был укреплен на изолирующей подставке 2. Две металлические полусферы 3, изолированные от земли, были укреплены на подвижных подставках (на рисунке не изображены) и могли быть соединены в одну сферу, охватывающую шар 1. В одной из полусфер имелось малое отверстие, в которое можно было вставлять короткий металлический проводник 4, подвешенный на изолирующей нити 5, и соединять шар и сферу, не разряжая прибора.

Сам опыт заключался в следующем. Полусферы 3 складывали вместе, соединяли их проводником 4 с шаром 1 и заряжали. О заряде сферы судили по показаниям электрометра. Затем проводник 4 с помощью нити 5 удаляли, обе полусферы раздвигали и разряжали, соединяя их с землей. После этого электрометр присоединяли к шару 1 и проверяли, имеется ли на нем какой-либо заряд. Опыт всегда показывал, что на шаре нет никаких следов заряда.

Вследствие большого принципиального значения вопроса о законе силового взаимодействия зарядов подобные опыты были повторены позднее Максвеллом в улучшенной форме. Исходя из чувствительности своих опытов, Максвелл рассчитал, что отклонение  $\delta$  от величины 2 в показателе закона Кулона если и существует, то не превышает  $1/21600$ . В настоящее время закон Кулона для макроскопических расстояний проверен гораздо точнее.

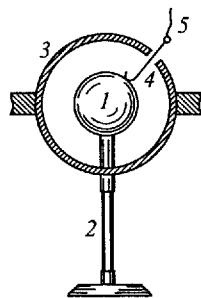


Рис. 34. Опыт Кавендиша

## § 29. Острия

При исследовании распределения зарядов на проводнике сложной формы (рис. 35 *а*) оказывается, что поверхностная плотность заряда различна в разных точках поверхности: она близка к нулю внутри углубления (точка 1), принимает наибольшее значение на заострении (точка 2) и имеет промежуточную величину в точках боковой поверхности (3).

Но напряженность поля  $E$ , согласно (13.7), пропорциональна поверхностной плотности заряда  $\sigma$ . Поэтому и напряженность поля у поверхности проводника сложной формы также весьма неодинакова. Она особенно велика возле участков с малым радиусом кривизны, т.е. у заострений.

Это приводит к своеобразному явлению «стекания» зарядов с металлических острий. Если соединить изолированное металлическое острие с источником высокого напряжения, то находящиеся поблизости изолированные проводники заряжаются. Помещая недалеко от острия электрометр, соединенный с металлической пластиной, можно видеть, что пластина заряжается до значительного напряжения и притом зарядом того же знака, что и на острие. Если, наоборот, предварительно зарядить пластину с электрометром, а острие присоединить к земле, то при поднесении острия к пластине последняя разряжается: индукционные заряды стекают с острия и нейтрализуют заряд пластины.

Причина этого явления заключается в большой напряженности поля возле острия. Когда эта напряженность становится достаточно большой, в окружающем воздухе начинается ионизация (подробнее см. § 166) и появляются положительные и отрицательные ионы (рис. 35 *б*). Ионы с тем же знаком заряда,

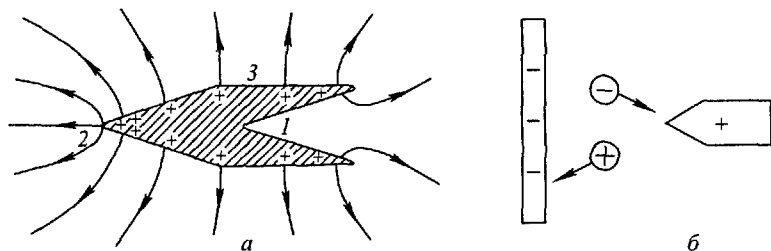


Рис. 35. Напряженность электрического поля и поверхностная плотность у заострения проводника (*а*); причина стекания зарядов (*б*)

что и у острия, движутся от острия; ионы с противоположным знаком заряда движутся к острию и уменьшают его заряд.

Ионы, движущиеся от острия, увлекают в своем движении и нейтральные молекулы, отчего возникает направленное течение



воздуха от острия, или электрический ветер. Его можно обнаружить, поднося к острию зажженную свечу: пламя свечи сильно отклоняется от острия и может быть погашено струей электрического ветра.

Рассмотренное свойство заостренных проводников используют на практике для съема зарядов в различных устройствах.

Для предотвращения стекания зарядов у всех приборов и машин, работающих под высоким электрическим напряжением, металлические части делают хорошо закругленными, а концы металлических стержней снабжают гладкими шариками; наличие заострений вызвало бы стекание зарядов и нарушение изоляции.

### § 30. Электростатический генератор

То обстоятельство, что заряды всегда распределяются только на внешней поверхности проводника, используют для устройства электростатических генераторов, предназначенных для получения весьма высоких напряжений. Принцип их действия разъясняется опытом, изображенным на рис. 36. Соединим изолированный проводник *a* с источником напряжения *B* (удобно воспользоваться заряженным конденсатором

или техническим выпрямителем на 2–3 тысячи вольт) и расположим поблизости полый изолированный проводник *b*, соединенный с электрометром. Соединим на момент проводники *a* и *b* металлическим стержнем (на изолирующей ручке). Проводник *b* зарядится до напряжения проводника *a*, которое и определим по показаниям электрометра. Возьмем

теперь металлический шар *в*, укрепленный на изолирующей ручке, коснемся им проводника *a*, а затем внутренней поверхности проводника *b*. Заряд шара *в* перейдет полностью на проводник *b*, отчего напряжение на *b* увеличится. Повторяя этот процесс многократно, мы сможем сделать напряжение на проводнике *b* намного большим, чем на проводнике *a*; в принципе можно увеличивать его неограниченно.

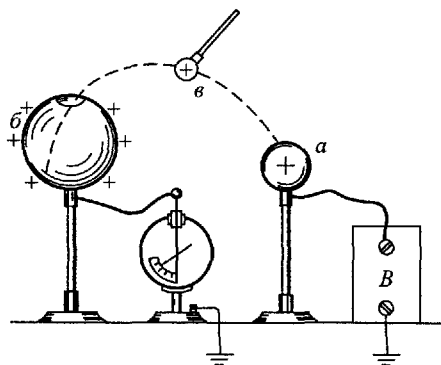


Рис. 36. Принцип действия электростатического генератора

При помощи описанного процесса мы переносим положительные заряды от тела с более низким потенциалом к телу с более высоким потенциалом. На первый взгляд это может показаться удивительным, так как при соединении двух проводников положительные заряды всегда перемещаются от более высокого потенциала к более низкому. На самом же деле здесь никакого противоречия нет, так как при перемещении шара *в* от *а* к *б* мы преодолеваем силу отталкивания и совершаем механическую работу. Поэтому, перемещая *в* по направлению к *б*, мы увеличиваем потенциал шара *в*. Когда *в* окажется внутри полости *б*, его потенциал сравняется с потенциалом *б*. Таким образом, ценой совершения механической работы мы можем, располагая источником небольшого напряжения, зарядить какой-либо проводник до напряжения более высокого.

Это и осуществляется в электростатическом генераторе. Он состоит из большого полого проводника *1* (рис. 37), обычно шарообразной формы, укрепленного на изолирующей колонне *2*. Внутри колонны проходит бесконечная лента *3* из прорезиненной ткани, движущаяся на двух шкивах *4* и играющая роль шара *в* на рис. 36. Лента заряжается при помощи системы острий *5*, соединенных с одним из полюсов источника напряжения, второй полюс которого заземлен.

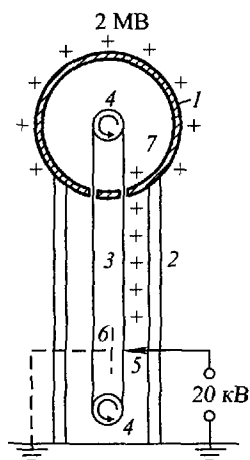


Рис. 37. Электростатический генератор

Против острий, с обратной стороны ленты, помещают заземленную пластину *б*, которая увеличивает заряды, стекающие с острия *5* на ленту. Проходя мимо системы острий *7*, соединенных с шаром *1*, резиновая лента отдает им принесенные заряды, которые полностью переходят на внешнюю поверхность шара независимо от того, какое напряжение имеется между шаром и землей.

Максимальное напряжение, которое практически можно получить на шаре, определяется утечками зарядов с шара (главным образом вследствие ионизации воздуха). Напряжение шара перестает повышаться, когда заряд, приносимый лентой в единицу времени (ток ленты), делается равным заряду, теряемому вследствие утечки (току утечки). Поэтому на практике стремятся по возможности увеличить ток ленты.

Электростатические генераторы применяют в настоящее время для ускорения заряженных частиц (электронов и ионов). С их помощью удается получить напряжения до 3–5 миллионов вольт. Высота таких генераторов достигает 10–15 м, а диаметр шара – нескольких метров. Электростатические генераторы иногда помещают в камеры со сжатым газом, так как ионизация газа при повышении давления наступает при больших напряжениях.

## Г Л А В А IV

## ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

## § 31. Электрическая емкость

Рассмотрим два проводника, между которыми существует электрическое напряжение, и предположим, что все линии смещения, исходящие из одного проводника, заканчиваются на другом. Такую пару проводников мы будем называть *простым конденсатором* или просто *конденсатором*.

Простым конденсатором является шаровой конденсатор, состоящий из двух проводников в виде концентрических сфер (§ 24), так как линии смещения, исходящие из внутренней сферы, обязательно все заканчиваются на внешней сфере. Две параллельные проводящие пластины (плоский конденсатор) можно считать также простым конденсатором, если расстояние между пластинами мало по сравнению с их размерами. Простым конденсатором является и цилиндрический конденсатор (§ 24), если длина цилиндров велика по сравнению с зазором между ними. Оба проводника, образующие конденсатор, называются его *обкладками*.

Так как линии смещения начинаются и заканчиваются на электрических зарядах, то отсюда следует, что заряды, находящиеся на обкладках простого конденсатора, всегда равны по модулю и противоположны по знаку.

Напряженность поля в любой точке между обкладками конденсатора всегда пропорциональна заряду обкладок. Поэтому, согласно (17.1), и напряжение  $U$  между обкладками всегда пропорционально заряду обкладок  $q$ :

$$q = CU. \quad (31.1)$$

Коэффициент  $C$  в этой формуле называют *электрической емкостью* конденсатора или просто его *емкостью*.

Из (31.1) следует, что  $q = C$  при  $U = 1$ . Это значит, что емкость конденсатора измеряется зарядом, находящимся на каждой из обкладок, если напряжение между обкладками равно единице.

Единицей емкости служит фарад ( $\Phi$ ) — емкость такого единичного проводника, потенциал которого повышается на 1 В при сообщении ему заряда 1 Кл:

$$1 \Phi = 1 \text{ Кл} / 1 \text{ В} = 1 \text{ Кл} / \text{В}.$$

На практике применяют также более мелкие единицы емкости: 1 микрофарад ( $\text{мк}\Phi$ ) =  $10^{-6}$   $\Phi$  и 1 пикофарад ( $\text{п}\Phi$ ) =  $10^{-12}$   $\Phi$ .

Емкость конденсатора зависит от его размеров, формы и от свойств среды, находящейся между его обкладками.

Пусть  $C_0$  — емкость любого конденсатора, когда его обкладки находятся в вакууме. Практически мы получим ту же емкость, если между обкладками будет атмосферный воздух. Пусть далее  $C$  — емкость того же конденсатора, если все пространство между его обкладками заполнено каким-либо другим однородным диэлектриком. Отношение

$$C/C_0 = \epsilon \quad (31.2)$$

называют *относительной диэлектрической проницаемостью* или просто *диэлектрической проницаемостью* диэлектрика. Диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  есть величина, характеризующая электрические свойства вещества и зависящая от рода вещества и от его состояния (температуры, давления и т.д.).

Отметим, что величина, определяемая формулой (31.2), есть отношение абсолютной диэлектрической проницаемости данного вещества ( $\epsilon_0\epsilon$ ) и вакуума ( $\epsilon_0$ ). Как видно из (31.2), эта величина безразмерна. Значение абсолютной диэлектрической проницаемости  $\epsilon_0\epsilon$  зависит от того, какую размерность и какое значение приписать  $\epsilon_0$ . В абсолютной электростатической системе единиц полагают  $\epsilon_0 = 1$  и считают величиной безразмерной. Поэтому (31.2) определяет одновременно и абсолютную диэлектрическую проницаемость в системе единиц СГСЭ.

В системе единиц СИ  $\epsilon_0$  есть величина размерная и не равная единице (§ 4). Поэтому абсолютная диэлектрическая проницаемость вещества в системе единиц СИ есть  $\epsilon_0\epsilon$ .

В качестве примера приводим в табл. 1 диэлектрические проницаемости  $\epsilon$  некоторых веществ:

Таблица 1

Вещество	$\epsilon$	Вещество	$\epsilon$
Вакуум	1	Стекло	5-10 **)
Воздух *)	1,000594	Спирт этиловый	27
Эбонит	2,7-2,9	Вода	81

\*) При 0 °С и 760 мм рт. ст.  
 \*\*) В зависимости от сорта.

## § 32. Емкость простых конденсаторов

Емкость конденсаторов простой формы можно вычислить. Для этого предполагают, что на каждой из обкладок находится некоторый заряд  $q$ , и вычисляют потенциал в электрическом

поле рассматриваемого конденсатора  $U(x, y, z)$ . Если удастся решить эту задачу, то отсюда получается и значение напряжения между обкладками конденсатора  $U$ . После этого емкость можно найти по формуле (31.1).

Рассмотрим некоторые примеры.

**П р и м е р 1. Плоский конденсатор.** Будем считать, что зазор между пластинами мал по сравнению с их размерами, так что краевыми эффектами можно пренебречь. Распределение потенциала в поле плоского конденсатора нами уже вычислено в § 24. Если на единице поверхности обкладок имеется заряд  $\sigma$  и диэлектриком является вакуум, то полное напряжение между обкладками равно

$$U = \sigma d / \epsilon_0,$$

где  $d$  — расстояние между пластинами. Если площадь каждой пластины равна  $S$ , то полный заряд пластины есть  $q = \sigma S$ . Поэтому

$$C = q/U = \epsilon_0 S/d. \quad (32.1)$$

Если диэлектриком является не вакуум, а вещество с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ , заполняющее все пространство, где имеется электрическое поле (пространство между обкладками), то емкость будет в  $\epsilon$  раз больше:

$$C = \epsilon \epsilon_0 S/d. \quad (32.1a)$$

При уменьшении расстояния  $d$  между обкладками емкость увеличивается.

**П р и м е р 2. Шаровой конденсатор.** Если на обкладках конденсатора имеется заряд  $q$ , то напряжение между обкладками в вакууме (§ 24)

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right),$$

где  $a$  и  $b$  — радиусы внутренней и внешней обкладок. Поэтому емкость в вакууме

$$C = \frac{q}{U} = \frac{4\pi\epsilon_0}{1/a - 1/b}. \quad (32.2)$$

Если внешний радиус  $b$  гораздо больше внутреннего  $a$ , то формула упрощается:

$$C = 4\pi\epsilon_0 a. \quad (32.3)$$

Этот результат справедлив и в том случае, если внешняя обкладка имеет не сферическую форму, а какую угодно, при условии, что ее размеры намного больше радиуса внутренней сферы. В таком смысле часто говорят о емкости уединенного шара, хотя это выражение всегда обозначает емкость конденсатора, у которого роль внешней обкладки играют удаленные предметы, находящиеся при одинаковом потенциале (стены комнаты и т.п.).

Если, наоборот, зазор между обкладками  $b - a = d$  весьма мал по сравнению со средним радиусом сфер  $r$ , то (32.2) можно представить в виде

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a} \approx 4\pi\epsilon_0 \frac{r^2}{d} = \epsilon_0 \frac{S}{d},$$

где  $S = 4\pi r^2$  есть площадь поверхности обкладок. Мы видим, что при малом зазоре выражения для емкости сферического и плоского конденсаторов совпадают.

**П р и м е р 3. Цилиндрический конденсатор.** Пусть конденсатор состоит из двух коаксиальных цилиндров с радиусами  $a$  (внутренний) и  $b$  (внешний). Длину цилиндров будем считать весьма большой по сравнению с зазором между ними. Напряжение между обкладками (§ 24)

$$U = \frac{q_1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a},$$

где  $q_1$  — заряд на единицу длины цилиндров. Поэтому емкость цилиндрического конденсатора в вакууме на каждую единицу длины равна

$$C_1 = \frac{q_1}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(b/a)}. \quad (32.4)$$

Эта формула выражает, в частности, емкость кабеля, который состоит из металлического провода, окруженного слоем изолятора и металлической броней; выражение (32.4) следует умножить еще на диэлектрическую проницаемость  $\epsilon$  вещества изолятора.

Если расстояние между цилиндрами  $b - a = d$  мало по сравнению с их радиусами, то (32.4) упрощается. В этом случае  $\ln(b/a)$  можно разложить в ряд и ограничиться только членом первого порядка:

$$\ln(b/a) = \ln(1 + d/a) \approx d/a.$$

Поэтому

$$C_1 = \frac{2\pi\epsilon_0}{d/a} = \frac{\epsilon_0 S}{d},$$

где через  $S$  обозначена площадь поверхности обкладок на единицу длины конденсатора:  $S = 2\pi a$ . И в этом случае емкость выражается той же формулой, что и для плоского конденсатора.

Отметим, что этот результат имеет общий характер и справедлив для конденсаторов с обкладками любой формы, если только зазор между обкладками мал по сравнению с радиусом кривизны обкладок. Он является следствием того, что любое неоднородное поле на малых расстояниях можно рассматривать как однородное.

**Пример 4. Двухпроводная линия.** Рассмотрим теперь два параллельных цилиндрических провода с радиусами  $a$  и расстоянием между осями  $d$  (рис. 38). Будем считать, что все остальные тела, включая и землю, находятся на расстояниях, больших по сравнению с  $d$ , и поэтому будем рассматривать оба провода как простой конденсатор.

Если расстояние  $d$  сравнимо с  $a$ , то заряды будут распределены по поверхности проволок неравномерно, и вычисление электрического поля будет сложным. Поэтому мы предположим, что  $d \gg a$ . В этом случае оба цилиндра заряжены равномерно, и напряженность поля, создаваемую ими, можно найти по формуле (13.9). Так как напряжение в электростатическом поле не зависит от формы пути, то для его вычисления мы выберем простейший путь в виде прямой линии, соединяющей оси проводов и перпендикулярной к их поверхности. Напряженность поля  $E$  в какой-либо точке  $x$  на этой линии (рис. 38) равна

$$E = \frac{q_1}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{x} + \frac{q_1}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{d-x},$$

где  $q_1$  — заряд на единицу длины проволок. Поэтому напряжение  $U$  между проводами

$$U = \int_a^{d-a} E dx = \frac{q_1}{2\pi\epsilon_0} \int_a^{d-a} \frac{dx}{x} + \frac{q_1}{2\pi\epsilon_0} \int_a^{d-a} \frac{dx}{d-x} = \frac{q_1}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{d-a}{a} \approx \frac{q_1}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{d}{a}.$$

Емкость двухпроводной линии на каждую единицу длины

$$C_1 = \frac{q_1}{U} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln(d/a)}. \quad (32.5)$$

**Единица электрической постоянной  $\epsilon_0$ .** Понятие электрической емкости используют в системе единиц СИ для определения единицы электрической постоянной  $\epsilon_0$ . Пользуясь, например, формулой (32.1), имеем

$$\epsilon_0 = Cd/S.$$

Подставляя сюда вместо  $C$ ,  $d$  и  $S$  их единицы, находим единицу электрической постоянной:

$$1 \epsilon_0 = 1 \text{ Ф} \cdot 1 \text{ м} / 1 \text{ м}^2 = 1 \text{ Ф} / \text{м};$$

она получила название фарад на метр (Ф/м).

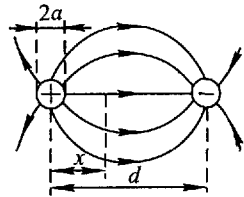


Рис. 38. Электрическое поле двухпроводной линии

### § 33. Метод зеркальных изображений

При расчете электрического поля и вычислении емкости бывает полезен вспомогательный прием, называемый методом зеркальных изображений зарядов. Этот метод основан на следующем очевидном положении: если в электрическом поле заменить какую-либо эквипотенциальную поверхность проводником той же формы и создать на нем потенциал, равный потенциалу рассматриваемой эквипотенциальной поверхности, то электрическое поле не изменится.

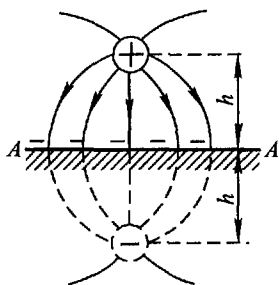


Рис. 39. Электрическое поле между точечным зарядом и проводящей плоскостью

Применим это положение к электрическому полю двух точечных зарядов  $+q$  и  $-q$ , расположенных на расстоянии  $2h$  друг от друга (рис. 39). Рассматриваемое поле можно разделить плоскостью  $AA'$  на две равные части. Эта плоскость будет везде перпендикулярна к линиям напряженности поля, а следовательно, будет эквипотенциальной поверхностью. Поэтому если в  $AA'$  находится неограниченная проводящая плоскость, то поле между этой плоскостью и зарядом  $+q$  не изменится и будет совпадать с полем двух точечных зарядов  $+q$  и  $-q$ . Это позволяет просто учесть действие индуцированных зарядов на проводящей плоскости.

Заряд  $-q$  расположен за плоскостью на том же расстоянии  $h$ , что и заряд  $+q$  над плоскостью, и поэтому является его зеркальным изображением в проводящей плоскости. Поэтому найденный результат можно сформулировать так: электрическое поле между точечным зарядом и бесконечной проводящей плоскостью совпадает с полем, создаваемым рассматриваемым зарядом и его зеркальным изображением в проводящей плоскости. Или, иначе: действие проводящей плоскости с ее индуцированными зарядами можно заменить действием точечного заряда, являющегося зеркальным изображением данного заряда в проводящей плоскости.

Применим рассмотренный метод к вычислению емкости цилиндрического провода с радиусом  $a$ , подвешенного на высоте  $h$  над землей. Такой случай мы имеем в воздушной телеграфной линии. Линии напряженности этого поля (в плоскости, перпендикулярной к проводу) будут изображаться так же, как на рис. 39. Поле в пространстве между проводом и землей будет совпадать с полем провода и его зеркального изображения, и поэтому задача сводится к случаю двух параллельных прово-



дов. Однако напряжение между поверхностью земли и проводом при том же заряде провода будет равно только половине напряжения между двумя проводами, а, значит, емкость будет в два раза больше. Умножая на 2 соотношение (32.5) и полагая в нем  $d = 2h$ , найдем выражение для емкости единицы длины провода над землей в виде

$$C_1 = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(2h/a)}. \quad (33.1)$$

### § 34. Энергия заряженного конденсатора

Если обкладки заряженного конденсатора замкнуть металлическим проводником, то в нем возникнет электрический ток, а конденсатор разрядится. Электрический ток разряда конденсатора выделяет в проводнике определенное количество теплоты, а это значит, что заряженный конденсатор обладает энергией.

Так, если в схеме рис. 40 перевести переключатель  $K$  в положение 1, то конденсатор  $C$  окажется соединенным с батареей элементов  $B$  и зарядится до напряжения батареи. При перебрасывании переключателя в положение 2 конденсатор разряжается через электрическую лампочку, которая дает вспышку.

Вычислим энергию заряженного конденсатора. Для этого представим себе, что конденсатор заряжается, и обозначим через  $u$  мгновенное значение напряжения между его обкладками. Процесс зарядки будем считать бесконечно медленным (квазистатическим), полагая, что напряжение батареи и равно ему напряжение между обкладками бесконечно медленно увеличиваются. В этом случае потенциал каждой из обкладок в любой момент времени будет иметь везде одно и то же значение. Если заряд обкладок увеличивается на малую величину  $dq$ , то совершаемая при этом внешняя работа  $\delta A$  (в данном случае батареи), согласно § 17, равна

$$\delta A = u dq.$$

Выражая в этой формуле заряд обкладок  $q$  через напряжение по формуле (31.1), получим

$$\delta A = C u du.$$

Если емкость не зависит от напряжения (электрического поля), то работа  $\delta A$  идет на увеличение энергии конденсатора  $dW$ . Ин-

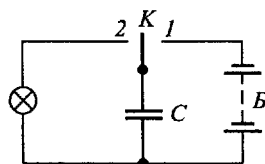


Рис. 40. При разрядке конденсатора через электрическую лампу его энергия превращается в тепло

тегрируя выражение для  $\delta A$  между значениями напряжения 0 (начало зарядки) и  $U$  (конец зарядки), получаем

$$A = W = C \int_0^U u \, du = \frac{1}{2} CU^2. \quad (34.1)$$

Зависимость энергии конденсатора от емкости и напряжения можно также показать в описанном выше опыте (рис. 40). Если увеличить напряжение батареи (увеличивая, например, число последовательно соединенных элементов), то лампочка вспыхивает гораздо ярче. Если, оставляя батарею неизменной, изменять емкость конденсатора, то с увеличением емкости накал лампочки увеличивается.

Пользуясь соотношением (31.1), можно представить выражение для энергии заряженного конденсатора также в любом из следующих видов:

$$W = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2C} q^2 = \frac{1}{2} qU. \quad (34.2)$$

Благодаря способности запастись в себе энергию конденсаторы играют большую роль в электро- и радиотехнике.

### § 35. Соединение конденсаторов

Если напряжение на конденсаторе сделать слишком большим, то конденсатор «пробивается», т. е. между его обкладками возникает искра (внутри диэлектрика или по его поверхности) и конденсатор портится вследствие нарушения изоляции. Поэтому каждый конденсатор характеризуется не только своей емкостью, но еще и максимальным рабочим напряжением.

Для того чтобы, располагая определенными конденсаторами, осуществить желаемую емкость при нужном рабочем напряжении, конденсаторы соединяют в батарее.

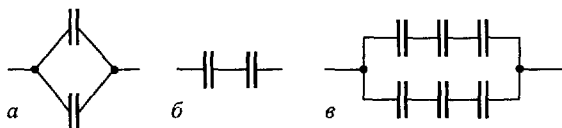


Рис 41 Соединения конденсаторов

На рис. 41 *a* показано параллельное соединение конденсаторов. В этом случае общим для всех конденсаторов является напряжение  $U$ , и мы имеем

$$q_1 = C_1 U, \quad q_2 = C_2 U, \quad \dots$$

Суммарный заряд, находящийся на батарее, равен

$$q = \sum q_i = U \sum C_i,$$

и поэтому емкость батареи

$$C = \frac{q}{U} = \sum C_i. \quad (35.1)$$

Емкость батареи конденсаторов, соединенных параллельно, равна сумме емкостей отдельных конденсаторов. Так как в этом случае напряжение на каждом конденсаторе равно напряжению на батарее, то и допустимое рабочее напряжение батареи будет таким же, как и у одного конденсатора.

На рис. 41 б изображено последовательное соединение конденсаторов. В этом случае одинаков для всех конденсаторов заряд  $q$ , равный полному заряду батареи, и мы можем написать

$$U_1 = q/C_1, \quad U_2 = q/C_2.$$

Напряжение же батареи будет равно сумме напряжений на отдельных конденсаторах, т.е.

$$U = \sum U_i = q \sum \frac{1}{C_i}.$$

Поэтому для емкости  $C$  всей батареи, находим

$$\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_i}. \quad (35.2)$$

При последовательном соединении конденсаторов суммируются обратные значения емкостей. В этом случае напряжение на каждом конденсаторе будет меньше напряжения на батарее, и поэтому допустимое рабочее напряжение будет больше, чем у одного конденсатора.

На рис. 41 в показано смешанное соединение конденсаторов. Емкость такой батареи легко определить, пользуясь формулами (35.1) и (35.2), что предоставляем сделать самим читателям.

Используя на практике соединение конденсаторов, следует всегда иметь в виду, что диэлектрик любого конденсатора не является идеальным изолятором и, хотя бы очень слабо, проводит электричество. Поэтому всякий

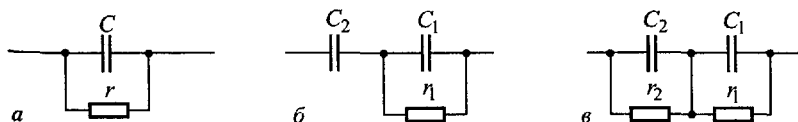


Рис 42 Эквивалентные схемы конденсаторов с утечками

реальный конденсатор имеет некоторую утечку зарядов и может быть изображен эквивалентной схемой (рис 42 а) в виде идеального конденсатора

$C$  (без утечки) и параллельно присоединенного большого сопротивления  $r$ . В случае параллельного соединения конденсаторов утечки не играют особой роли и напряжение на каждом конденсаторе будет равно по-прежнему полному напряжению батареи. Не то, однако, будет при последовательном соединении. Если конденсатор  $C_2$  (рис. 42 б) без утечки соединен последовательно с конденсатором  $C_1$ , обладающим утечкой  $r_1$ , то с течением времени конденсатор  $C_1$  будет разряжаться, и в конце концов на конденсаторе  $C_2$  окажется полное напряжение батареи. В реальном случае обоих конденсаторов с утечками (рис. 42 в) установившиеся напряжения будут зависеть не от емкостей, а от утечек. На конденсаторе с меньшей утечкой будет большее напряжение, и он может быть пробит. Поэтому последовательное соединение конденсаторов не применяют при работе с постоянными напряжениями, а используют его в цепях переменного тока.

### § 36. Сложные конденсаторы

До сих пор мы рассматривали лишь простые конденсаторы, в которых все линии смещения, исходящие из одной обкладки, заканчивались на другой обкладке. Однако могут быть и более сложные случаи, когда линии смещения распределяются между несколькими проводниками (рис. 43). Такую систему проводников мы будем называть *сложным конденсатором*.

В этом случае заряд какого-либо из тел будет зависеть от потенциалов всех проводников, участвующих в образовании электрического поля. Этот заряд можно найти следующим образом. Рассмотрим проводник 1 (рис. 43)

Рис. 43. Поле сложного конденсатора

и выделим на нем часть поверхности  $ab$ , которая соединяется линиями смещения только с проводником 2. Заряд такого участка равен  $q_{ab} = C_{ab}U_{12}$ , где  $C_{ab}$  — емкость участка  $ab$  относительно тела 2, а  $U_{12}$  — напряжение между телами 1 и 2. Аналогично для другого участка поверхности  $bc$  имеем:  $q_{bc} = C_{bc}U_{13}$  и т.д. Поэтому полный заряд тела 1 будет равен

$$q_1 = C_{ab}U_{12} + C_{bc}U_{13} + C_{ca}U_{14}. \quad (36.1)$$

Здесь через  $U_{14}$  обозначено напряжение между проводником 1 и тем телом, на котором заканчиваются линии смещения, идущие с участка  $ca$ .

Вместо напряжений или разностей потенциалов между каждой парой проводников  $U_{12}$ ,  $U_{13}$ , ... мы можем ввести в (36.1) потенциалы  $U_1$ ,  $U_2$ , ... каждого из проводников (например, от-

носителем бесконечности):

$$U_{12} = U_1 - U_2, \quad U_{13} = U_1 - U_3, \quad \dots$$

Подставляя эти выражения в (36.1), получим для заряда  $q_1$  опять линейную функцию потенциалов всех проводников в виде

$$q_1 = C_{11}U_1 + C_{12}U_2 + \dots = \sum_k C_{1k}U_k. \quad (36.2)$$

И аналогично для зарядов других проводников имеем

$$q_i = \sum_k C_{ik}U_k, \quad (36.2a)$$

где  $i$  — номер проводника. Коэффициенты  $C_{ik}$  в этих формулах имеют простой физический смысл. Из (36.2) видно, что  $C_{11}$  равно заряду проводника 1, когда его потенциал равен единице, а потенциалы всех других проводников равны нулю; коэффициент  $C_{12}$  равен заряду на теле 1, когда потенциал тела 2 равен единице, а потенциалы всех остальных тел (включая и тело 1) равны нулю, и т.д.  $C_{ik}$  зависят от формы и размеров рассматриваемых проводников, от их взаимного расположения и от свойств окружающей среды.

Систему уравнений (36.2a) можно разрешить относительно потенциалов  $U_k$  и выразить, наоборот, все потенциалы через полные заряды проводников. Потенциалы проводников будут также линейными функциями зарядов, и мы можем написать:

$$U_k = \sum_i p_{ik}q_i. \quad (36.3)$$

Можно показать, что коэффициенты  $C_{ik}$  и  $p_{ik}$  удовлетворяют условиям симметрии

$$C_{ik} = C_{ki}, \quad p_{ik} = p_{ki},$$

на чем, однако, мы не останавливаемся.

Мы видим, что в случае сложного конденсатора заряд любого из проводников определяется потенциалами всех проводников. Поясним это на простом примере. Рассмотрим цилиндрический конденсатор вблизи поверхности земли (заземленных предметов) (рис. 44). Мы имеем здесь три проводника: внешнюю обкладку, внутреннюю обкладку и землю, и в правой части формулы (36.1) будут два члена. Обозначим через  $C$  емкость обоих

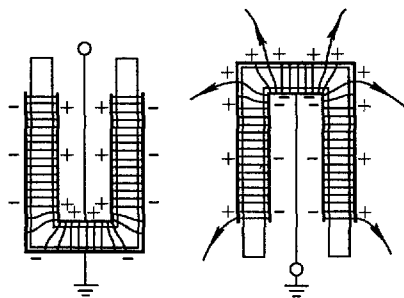


Рис. 44. Пример сложного конденсатора

обкладок, а через  $c$  — емкость внешней обкладки относительно земли (емкостью стержня относительно земли пренебрегаем). Если соединить внешнюю обкладку с землей, то  $U_{13} = 0$ . Поэтому при заряджении конденсатора до напряжения  $U$  он накопит заряд

$$q_1 = CU.$$

Если же соединить с землей внутреннюю обкладку, то  $U_{13}$  не равно нулю и равно напряжению на конденсаторе  $U$ . Поэтому при том же напряжении заряд конденсатора будет больше, чем в первом случае, а именно

$$q_2 = CU + cU.$$

### § 37. Энергия электрического поля

Мы видели, что заряженный конденсатор обладает определенной энергией. Поэтому можно поставить вопрос о том, где именно сосредоточена, локализована эта энергия. Можно, например, предполагать, что энергия сосредоточена на обкладках конденсатора, т.е. на электрических зарядах. Однако можно также допустить, что энергия конденсатора сосредоточена в его электрическом поле, т.е. в пространстве между обкладками. Только опыт, очевидно, может дать решение этого вопроса.

Пока мы рассматриваем постоянные электрические поля, такой опыт невозможен, так как в этом случае мы всегда имеем заряды, окруженные электрическим полем, и, наоборот, — электрические поля совместно с электрическими зарядами. Однако интересующие нас опытные данные можно получить, рассматривая поля, переменные во времени. Ниже мы увидим (гл. XXIII), что существуют электромагнитные волны, представляющие собой электрические и магнитные поля, изменяющиеся во времени и распространяющиеся с определенной скоростью в пространстве. Электрические поля в электромагнитных волнах можно получить без электрических зарядов, первоначально породивших эти поля (так же как и магнитные поля — без электрических токов, их поддерживающих). Опыт показывает, что электромагнитные волны заключают в себе и переносят энергию, и эту энергию мы с успехом используем в радиотехнике для целей связи и в других технических устройствах. Факт существования электромагнитных волн позволяет ответить на поставленный выше вопрос и заключить, что энергия сосредоточена в электрическом поле.

Учитывая этот результат, мы можем преобразовать выражение (34.1) для энергии конденсатора таким образом, чтобы в него входила характеристика поля — его напряженность.

Рассмотрим сначала однородное поле и применим (34.1) к плоскому конденсатору. Мы получим

$$W = \frac{1}{2} \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{d} U^2 = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 \left( \frac{U}{d} \right)^2 Sd.$$

Но  $U/d$  (ср. § 19) есть напряженность поля  $E$ , а  $Sd$  — объем, занимаемый полем. Мы видим, что энергия однородного поля пропорциональна объему, занимаемому полем. Поэтому целесообразно говорить об энергии каждой единицы объема, или об объемной плотности энергии электрического поля. Она равна

$$u = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 E^2. \quad (37.1)$$

При получении формул (34.1) и (37.1) мы предполагали, что емкость конденсатора, а значит, и диэлектрическая проницаемость постоянны. При этом мы считали, что вся внешняя работа (источника тока) превращается в энергию электрического поля. Это совершенно точно для вакуума, и поэтому формула (37.1) при  $\epsilon = 1$  выражает объемную плотность энергии электрического поля в вакууме. В диэлектриках, вообще говоря, это не так. При создании электрического поля диэлектрики могут нагреваться. Их объем и плотность в электрическом поле, даже при неизменной температуре, могут изменяться (вследствие явления электрострикции § 45). Диэлектрическая же проницаемость зависит от температуры и плотности вещества и не остается постоянной. Кроме того, внешняя работа источника тока может не целиком переходить в энергию поля. Поэтому в общем случае формула (37.1) не точна.

В дальнейшем мы будем считать, что объем  $\tau$  среды и ее плотность остаются постоянными (не изменяются в электрическом поле или поддерживаются неизменными).

Формула (34.1) выражает точно внешнюю работу (источника тока)  $A$ , если температуру диэлектрика, а следовательно и  $\epsilon$ , поддерживать постоянной. Эта работа расходуется на увеличение энергии поля  $W$  и на выделение тепла  $Q$ , которое нужно отводить от диэлектрика (или подводить к нему, тогда оно войдет со знаком минус) для поддержания неизменной температуры:

$$A = W + Q. \quad (37.2)$$

Но из термодинамики известно, что работа внешних сил, совершаемая над системой при квазистатическом изотермическом процессе, равна приращению функции состояния системы, называемой *свободной энергией*. Поэтому формула (37.1) выражает не внутреннюю энергию электрического поля в диэлектрике, а слагаемое в свободной энергии диэлектрика, зависящее от электрического поля, являющееся мерой внешней работы при изотермическом изменении электрического поля.

Если диэлектрическую проницаемость при постоянном объеме  $\tau$  можно считать не зависящей от температуры:  $(\partial\epsilon/\partial T) = 0$ , то  $\epsilon = \text{const}$  при  $Q = 0$ , и формула (37.1) опять дает объемную плотность энергии электрического поля. В этом случае электрические части свободной энергии и внутренней энергии диэлектрика совпадают друг с другом.

В дальнейшем мы будем предполагать, что тепло  $Q$  в формуле (37.2) мало по сравнению с энергией поля  $W$  и, если не оговорено обратное, будем считать внешнюю работу при создании электрического поля в диэлектрике равной энергии этого поля.

При выводе формулы (37.1) было сделано также предположение, что электрическое смещение  $\mathbf{D} = \epsilon\epsilon_0\mathbf{E}$  есть линейная функция напряженности поля  $\mathbf{E}$  ( $\epsilon = \text{const}$ ). Между тем для некоторых веществ зависимость  $\mathbf{D}$  от  $\mathbf{E}$ , даже при постоянной температуре, оказывается более сложной. Нетрудно обобщить полученные результаты на случай нелинейной зависимости  $\mathbf{D}$  от  $\mathbf{E}$ . Для этого учтем, что поверхностная плотность заряда  $\sigma$  на проводниках (обкладках) равна нормальной составляющей вектора электрической индукции  $D_n$  (§ 13, пример 2; см. также § 41). Поэтому, рассуждая, как и выше (§ 34) в случае однородного электрического поля, мы получим для приращения внешней работы при зарядке конденсатора

$$\delta A = u dq = u S dD_n.$$

Здесь  $u = Ed$ , а  $Sd = \tau$  есть объем поля. Следовательно,

$$\delta A = Ed \cdot S dD_n = \tau(\mathbf{E} d\mathbf{D}).$$

Полная работа при создании электрического поля в диэлектрике равна

$$A = \tau \int (\mathbf{E} d\mathbf{D}). \quad (37.3)$$

Смещение  $\mathbf{D}$  зависит не только от электрического поля  $\mathbf{E}$ , но еще и от температуры тела и его плотности. Поэтому функция  $\mathbf{D}(\mathbf{E})$ , а значит, и работа  $A$  зависят от условий создания электрического поля и различны для теплоизолированного тела, поддерживаемого при постоянной температуре, и т.д. В случае изотермического процесса формула (37.3) дает общее выражение для приращения свободной энергии тела в электрическом поле.

Если выделяющимся теплом (и внешней работой при изменении объема тела) можно пренебречь по сравнению с энергией поля, то вся внешняя работа  $A$  превращается в энергию поля.

Из формулы (37.3) следует, что в этом случае объемная плотность энергии электрического поля равна

$$u = \int (\mathbf{E} d\mathbf{D}). \quad (37.4)$$



При исчезновении электрического поля (разряде конденсатора) эта энергия выделяется во внешней цепи. Для линейной связи  $\mathbf{D} = \epsilon\epsilon_0\mathbf{E}$  (формула (37.4) переходит в формулу (37.1)).

Если электрическое поле неоднородно, то его можно разбить на элементарные объемы  $d\tau$  и считать, что в пределах бесконечно малого объема это поле однородно. Полная энергия электрического поля равна

$$W = \int_{\tau} u d\tau, \quad (37.5)$$

где  $u$  выражается формулой (37.4), а интегрирование производится по всему объему  $\tau$  электрического поля.

Отметим в заключение, что при наличии диэлектрического гистерезиса (сегнетоэлектрики, см. § 50) внешняя работа при создании электрического поля по-прежнему определяется формулой (37.3). Однако в этом случае внешняя работа уже не равна приращению энергии поля, так как ее заметная часть превращается в тепло (ср. § 111). Поэтому и формула (37.4) уже не выражает объемную плотность энергии поля.

## Г Л А В А V

### ДИЭЛЕКТРИКИ

#### § 38. Поляризация диэлектриков

При внесении в электрическое поле каких-либо диэлектриков электрическое поле изменяется. В настоящей главе мы рассмотрим, как оно изменяется в присутствии диэлектриков и в чем заключается причины его изменения.

Для выяснения этого вопроса обратимся к опытам. Зарядим электрометр и отметим его показание. Приблизим к электрометру какое-либо незаряженное диэлектрическое тело, например толстую стеклянную пластину (рис. 45). Мы увидим, что показания электрометра уменьшаются, когда пластинка находится вблизи электрометра, и вновь восстанавливаются при удалении пластинки.

Если бы вместо диэлектрика мы приближали к электрометру проводник, то мы наблюдали бы подобное же явление. Но мы знаем, что на проводнике возника-

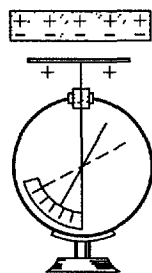


Рис. 45. При поднесении незаряженного диэлектрика показания электрометра уменьшаются

ют индукционные заряды, которые и изменяют электрическое поле. Отсюда можно заключить, что на диэлектрике в электрическом поле также возникают заряды, на ближайшей к телу части диэлектрика появляются заряды, разноименные с зарядом влияющего тела, а на удаленной части диэлектрика — одноименные заряды (рис 45)

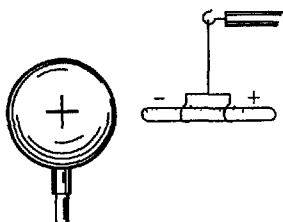


Рис 46 Диэлектрическая палочка в электрическом поле поворачивается и устанавливается вдоль линий напряженности поля

Появление зарядов на диэлектриках ведет к возникновению сил, действующих на диэлектрики, даже если они первоначально были незаряженными. Подвесим на тонкой нити стеклянную или парафиновую палочку (рис 46) и приблизим к ней заряженный шар. Палочка начнет поворачиваться и установится своей осью вдоль линий напряженности поля, т.е. таким образом, что ее ось окажется направленной к центру шара. Это свидетельствует опять о том, что на ближайшей к шару части палочки появляются заряды, разноименные с зарядом шара, а на удаленной части — одноименные.

Подобные силы можно наблюдать и в таком опыте. Укрепим неподвижно две изолированные металлические пластины плоского конденсатора. Подвесим на одном конце коромысла весов стеклянную пластину, поместив ее между обкладками конденсатора без соприкосновения с ними так, чтобы она заполняла только часть пространства конденсатора, и уравновесим весы. Создадим теперь между обкладками конденсатора электрическое поле, соединив их с источником напряжения в несколько тысяч вольт. Мы увидим, что стеклянная пластинка начнет втягиваться в электрическое поле, и равновесие весов нарушится. Причину появления сил, действующих на стеклянную пластинку, разъясняет рис 47. На стеклянной пластине в электрическом поле появляются заряды. В области неоднородного поля (вблизи краев обкладок) напряженность поля конденсатора  $\mathbf{E}$  имеет составляющую  $\mathbf{E}_t$ , параллельную обкладкам  $a$  и  $b$ , и поэтому на стеклянную пластинку действуют силы  $\mathbf{F}$ , втягивающие ее внутрь конденсатора.

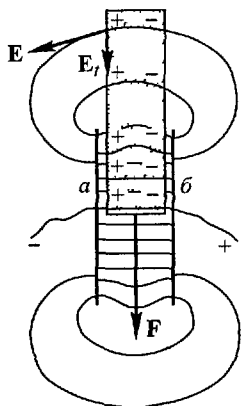


Рис 47 Пластинка диэлектрика втягивается в электрическое поле

Рассмотрим в заключение еще один поучительный опыт. Соединим последовательно плоский конденсатор, источник напряжения  $B$  и чувствительный гальванометр (рис. 48). Если изоляция конденсатора достаточно хороша, то гальванометр не покажет никакого тока. Быстро вдвинем теперь в конденсатор стеклянную пластину. Мы заметим, что при вдвигании диэлектрика гальванометр показывает кратковременный ток, который исчезает, как только пластина перестает перемещаться. При выдвигании пластины в цепи появляется ток обратного направления.

Возникновение тока в этом опыте опять свидетельствует о появлении зарядов на диэлектрике. Эти заряды частично компенсируют действие зарядов на обкладках. Чтобы напряжение между обкладками осталось неизменным (конденсатор подключен к источнику), на пластины должны перейти с источника дополнительные заряды, равные зарядам на диэлектрике, и поэтому в цепи возникает ток. При выдвигании диэлектрика эти дополнительные заряды уходят снова в источник и в цепи появляется ток обратного направления.

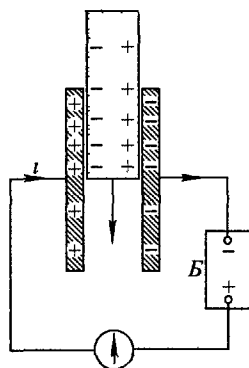


Рис. 48 При вдвигании диэлектрической пластины в конденсатор в цепи возникает электрический ток

Приведенные опыты показывают, что на первоначально незаряженных диэлектриках в электрическом поле возникают электрические заряды. На диэлектрике появляются электрические полюсы, отчего и самое явление получило название *поляризации диэлектриков*. Заряды, возникающие на диэлектриках в электрическом поле, мы будем называть *поляризационными зарядами*.

Явление поляризации диэлектриков имеет сходство с индукцией в проводниках. Однако между обоими явлениями имеется и важное различие. Разъединяя в электрическом поле проводник на части, можно отделить друг от друга индукционные заряды, и поэтому после исчезновения поля разъединенные части проводника остаются заряженными. Разъединяя же в электрическом поле диэлектрики, мы найдем, что после устранения поля каждая часть диэлектрика остается по-прежнему незаряженной. Отделить друг от друга поляризационные заряды невозможно.

Это различие объясняется тем, что в металлах отрицательный заряд существует в подвижном состоянии в виде электронов проводимости, которые могут перемещаться на значительные расстояния. Поэтому индукционные заряды в металлах можно отделить друг от друга. В диэлектриках же заряды обоих знаков связаны друг с другом и могут только смещаться на малые расстояния в пределах одной молекулы.

Неполяризованный диэлектрик (в отсутствие электрического поля) можно схематически изобразить в виде собрания молекул,

в каждой из которых равные положительные и отрицательные заряды распределены равномерно по всему объему молекулы (рис. 49 а). При поляризации диэлектрика заряды в каждой мо-

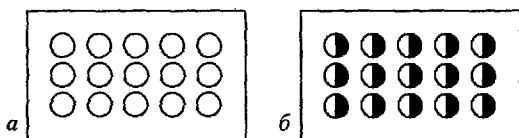


Рис. 49. Модель неполяризованного (а) и поляризованного (б) диэлектрика

лекуле смещаются в противоположные стороны, и на одном конце молекулы появляется положительный заряд, а на другом — отрицательный (рис. 49 б). При этом каждая молекула превращается в электрический диполь.

Смещение зарядов внутри молекул будет проявляться как возникновение некоторых зарядов на диэлектрике. Действительно, неполяризованный диэлектрик можно представить как два

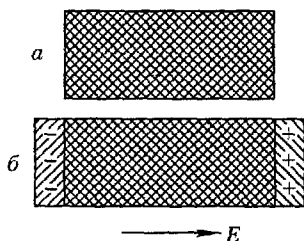


Рис 50 Поляризация диэлектрика как смещение зарядов: а — неполяризованный, б — поляризованный диэлектрик

тождественных объема, совпадающих друг с другом, каждый из которых равномерно заполнен положительным или отрицательным зарядом (рис. 50 а). Поляризацию диэлектрика можно рассматривать как смещение этих объемов на малое расстояние в противоположные стороны (рис. 50 б). При этом внутри диэлектрика по-прежнему будет равно количеству отрицательного, но на одном из концов диэлектрика

возникнет тонкий слой с некомпенсированным положительным зарядом, а на другом появится некомпенсированный отрицательный заряд, т.е. возникнут поляризационные заряды.

### § 39. Поляризованность <sup>1)</sup>

При поляризации диэлектрика каждая его молекула превращается в электрический диполь и, следовательно, приобретает определенный электрический момент (§ 15), равный

$$p = ql.$$

<sup>1)</sup> Прежнее наименование этой физической величины — вектор поляризации (Примеч. ред.)

При этом, как и прежде, вектор смещения  $\mathbf{I}$  считается направленным от отрицательного заряда к положительному.

Для количественной характеристики поляризации диэлектрика служит специальная физическая величина, называемая *поляризованностью*. Поляризованностью диэлектрика называют *электрический момент единицы объема диэлектрика*. Он равен векторной сумме электрических моментов всех молекул, заключенных в единице объема:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\tau} \sum \mathbf{p}_i. \quad (39.1)$$

Если диэлектрик однороден и смещение зарядов  $\mathbf{I}$  одинаково во всех точках, то и вектор  $\mathbf{P}$  будет одинаков по всему диэлектрику. Такую поляризацию называют *однородной*.

Зная поляризованность  $\mathbf{P}$ , можно определить поляризационные заряды, и наоборот. Будем считать поляризацию однородной и рассмотрим в электрическом поле кусок диэлектрика в виде наклонной призмы с основанием  $S$  и ребром  $L$ , параллельным вектору  $\mathbf{P}$  (рис. 51). На одном из оснований призмы появятся отрицательные поляризационные заряды с поверхностной плотностью  $-\sigma'$ , а на другом — положительные заряды с плотностью  $+\sigma'$ , и призма приобретет электрический момент

$$p = \sigma' SL.$$

Если  $\alpha$  — угол между направлением нормали к основанию призмы и вектором  $\mathbf{P}$ , то объем призмы  $\tau$  равен

$$\tau = SL \cos \alpha,$$

и поэтому

$$p = \frac{\sigma' \tau}{\cos \alpha}.$$

Но, с другой стороны, эту же величину можно выразить через электрический момент единицы объема:

$$p = P\tau.$$

Сравнивая оба последних равенства, мы находим соотношение

$$\sigma' = P \cos \alpha = P_n. \quad (39.2)$$

В этой формуле  $P_n$  обозначает проекцию вектора  $\mathbf{P}$  на направление внешней нормали к рассматриваемой поверхности. Для правой грани призмы на рис. 51 угол  $\alpha$  острый ( $\cos \alpha > 0$ ) и  $\sigma'$  положительно. Для левой грани угол  $\alpha$  тупой ( $\cos \alpha < 0$ ) и  $\sigma'$  отрицательно.

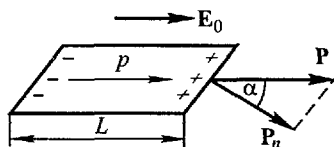
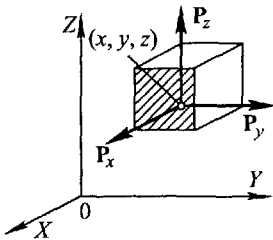


Рис. 51 К определению поляризованности  $\mathbf{P}$

Полученный результат показывает, что поверхностная плотность поляризационных зарядов равна нормальной составляющей поляризованности в данной точке поверхности. Он также означает, что электрический заряд, прошедший через единицу поверхности, перпендикулярной к направлению смещения зарядов, равен модулю поляризованности.

Если вектор  $\mathbf{P}$  различен в разных точках (неоднородная поляризация), то в диэлектрике могут возникнуть еще объемные заряды.

Объемные поляризационные заряды можно найти следующим образом. Рассмотрим внутри поляризованного диэлектрика бесконечно малый параллелепипед с ребрами  $dx$ ,  $dy$  и  $dz$ , параллельными прямоугольным осям координат  $X$ ,  $Y$  и  $Z$ . Пусть, далее, поляризованность имеет в точке  $(x, y, z)$ , где находится одна из вершин параллелепипеда, составляющие по осям  $P_x$ ,  $P_y$ ,  $P_z$  (рис 52). Тогда, согласно (39 2), положительный заряд, выходящий из параллелепипеда через заштрихованную грань, равен



$$\left( P_x + \frac{\partial P_x}{\partial x} dx \right) dy dz.$$

Рис 52 К определению объемных поляризационных зарядов

Положительный заряд, входящий в параллелепипед через другую параллельную грань, есть

$$P_x dy dz$$

Поэтому приращение положительного заряда равно

$$P_x dy dz - \left( P_x + \frac{\partial P_x}{\partial x} dx \right) dy dz = -\frac{\partial P_x}{\partial x} d\tau,$$

где  $d\tau = dx dy dz$  — объем параллелепипеда. Рассматривая подобным образом две другие пары граней, перпендикулярные к осям  $Y$  и  $Z$ , мы найдем, что полный положительный заряд, вошедший внутрь параллелепипеда при поляризации, дается выражением

$$-\left( \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} \right) d\tau$$

С другой стороны, тот же заряд равен  $\rho' d\tau$ , где  $\rho'$  — объемная плотность искомых поляризационных зарядов. Поэтому

$$-\rho' = \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} \quad (39.3)$$

Если поляризация однородна, то  $\mathbf{P} = \text{const}$  и (39 3) дает  $\rho' = 0$ . Заметим, что в некоторых случаях и при неоднородной поляризации выражение (39.3) также может обращаться в нуль (ср. § 44)

## § 40. Напряженность электрического поля внутри диэлектрика

В гл. II мы определили напряженность электрического поля в вакууме как силу, действующую на единичный положительный пробный заряд. При переходе к диэлектрикам это определение требует дополнительного уточнения.

Представим себе, что размеры пробного заряда малы по сравнению с расстояниями между молекулами диэлектрика. Тогда мы найдем, что электрическое поле внутри диэлектрика весьма различно в разных точках и достигает особенно больших значений вблизи заряженных концов молекул — диполей. Эти изменения поля происходят лишь в микроскопических масштабах и недоступны непосредственному наблюдению. Определенное подобным образом поле носит название *микроскопического поля* ( $\mathbf{E}_m$ ).

Однако во всех реальных опытах мы имеем дело с телами (или частями этих тел), размеры которых велики по сравнению с межатомными расстояниями. В таких случаях нас интересует усредненное по объему значение микроскопического поля  $\mathbf{E}_m$ , т.е. макроскопическое поле. Это среднее значение напряженности электрического поля и называют *напряженностью электрического поля внутри диэлектрика*. Таким образом, по определению

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_m = \frac{1}{\tau} \int_{\tau} \mathbf{E}_m d\tau. \quad (40.1)$$

Отметим, что объем  $\tau$  в этой формуле должен быть велик микроскопически, т.е. в нем должно содержаться большое число молекул. Однако он должен быть достаточно мал макроскопически, т.е. на протяжении его размеров макроскопическое значение поля должно оставаться практически неизменным. Подобные малые объемы, удовлетворяющие обоим этим требованиям, называются физически бесконечно малыми (в отличие от математически бесконечно малых).

Совершенно аналогично потенциалом внутри диэлектрика называют макроскопический потенциал, т.е. среднее его значение по некоторому физически малому объему. Макроскопические значения поля  $E$  и потенциала  $U$  связаны теми же соотношениями, что и в вакууме. В случае плоского конденсатора мы имеем

$$E = U/a, \quad (40.2)$$

где  $U$  — разность потенциалов между обкладками,  $a$  — расстояние между ними.

Рассмотрим плоский конденсатор (однородное поле), целиком заполненный однородным диэлектриком. Напряженность

поля  $E$  внутри диэлектрика есть сумма двух полей: поля  $E_0$ , созданного зарядами на металлических обкладках, и поля  $E'$ , вызванного поляризованным диэлектриком (рис. 53). Поле  $E_0$

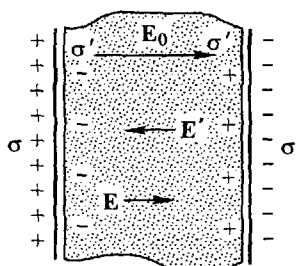


Рис. 53. Напряженность электрического поля  $E$  внутри диэлектрика есть разность между полем  $E_0$  зарядов обкладок и полем  $E'$  поляризационных зарядов

$(\sigma - \sigma')$ . Эту разность между зарядом обкладок и поляризационным зарядом часто называют *свободным зарядом*.

В связи со сказанным выше необходимо особо отметить, что сила, действующая на макроскопическое тело с зарядом  $q$ , погруженное в диэлектрик, в общем случае уже не равна  $qE$ , как это имело место в вакууме.

Действительно, рассмотрим сначала твердый диэлектрик. Чтобы внести в него заряженное тело, мы должны сделать в нем полость. Но на ее поверхности будут возникать поляризационные заряды, и поэтому сила, действующая на тело, будет зависеть от формы полости.

В случае жидких и газообразных диэлектриков это также справедливо, так как при внесении заряженного тела мы вытесняем телом часть среды и создаем в нем тоже «полость», совпадающую по форме с заряженным телом. Однако в случае жидкостей и газов на тело будет действовать еще дополнительная механическая сила, вызванная деформацией диэлектрика в электрическом поле (электрострикция, см. § 45).

Тем не менее напряженность поля внутри диэлектрика можно определить и с помощью силы, действующей на пробный заряд. Для этого представим себе узкую длинную щель, прорезанную внутри диэлектрика параллельно направлению смещения зарядов (рис. 54), и будем считать, что пробный заряд не касается стенок полости. Поляризационные заряды будут возникать только на торцах полости, и если ее диаметр мал по сравнению с длиной, то и поле, создаваемое этими зарядами, будет

равно  $\sigma/\epsilon_0$ , где  $\sigma$  — поверхностная плотность заряда на металлических обкладках. Действие же поляризованного диэлектрика можно выразить через поляризационные заряды (§ 39), возникающие на его поверхности. Поэтому  $E' = -\sigma'/\epsilon_0$ , где  $\sigma'$  — поверхностная плотность поляризационных зарядов. Следовательно,

$$E = (\sigma - \sigma')/\epsilon_0.$$

Напряженность поля внутри диэлектрика совпадает с напряженностью поля в вакууме, когда поверхностная плотность заряда на обкладках конденсатора равна



пренебрежимо мало. Поэтому внутри полости будет напряженность поля, создаваемая только свободными зарядами  $(\sigma - \sigma')$  у внешней поверхности диэлектрика, а это, как мы видели, и есть напряженность поля внутри диэлектрика. Напряженность поля внутри диэлектрика равна напряженности поля внутри узкой полости, вырезанной в диэлектрике параллельно направлению смещения зарядов. Она равна силе, действующей на заряд  $+1$  внутри этой полости.

Для практического определения напряженности поля внутри диэлектрика достаточно измерить напряжение между обкладками конденсатора. Тогда для плоского конденсатора напряженность поля можно найти по формуле (40.2), а для конденсаторов другой формы — по соответствующим формулам, полученным нами ранее для вакуума.

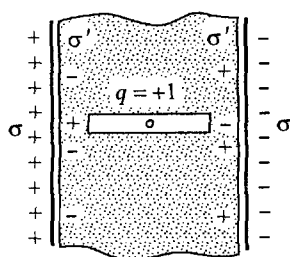


Рис. 54. К определению напряженности электрического поля внутри диэлектрика

## § 41. Электрическое смещение в диэлектрике

Рассмотрим теперь границу двух однородных и однородно поляризованных диэлектриков 1 и 2 (рис. 55). В каждом из диэлектриков вблизи поверхности раздела появятся поляризационные заряды с плотностями  $\sigma'_1$  и  $\sigma'_2$ , которые будут иметь противоположные знаки. Граница раздела окажется заряженной с поверхностной плотностью заряда  $\sigma'_1 - \sigma'_2$ , отчего появится дополнительное электрическое поле  $(\sigma'_1 - \sigma'_2)/2\epsilon_0$ , перпендикулярное к границе раздела и направленное в каждом из диэлектриков в противоположные стороны (рис. 55).

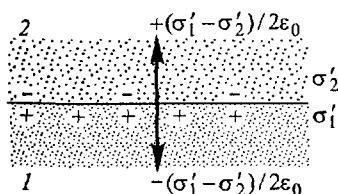


Рис. 55. Поляризационные заряды на границе двух диэлектриков и создаваемое ими электрическое поле

на две составляющие: касательную к границе раздела ( $E_{t1}$  и  $E_{t2}$ ) и нормальную к границе ( $E_{n1}$  и  $E_{n2}$ ). Нормаль будем считать направленной от диэлектрика 1 к диэлектрику 2. Так как электрическое поле зарядов поверхности раздела перпендикулярно к этой поверхности, то касательные составляющие

Обозначим напряженность полного поля в каждом из диэлектриков через  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{E}_2$  и разложим каждое из этих полей

поля не изменятся и их значение в обоих диэлектриках будет одинаково:

$$E_{t1} = E_{t2}. \quad (41.1)$$

Напротив, нормальные составляющие поля будут различны; их разность равна

$$E_{n2} - E_{n1} = (\sigma'_1 - \sigma'_2)/\epsilon_0 = (P_{n1} - P_{n2})/\epsilon_0,$$

где  $P_{n1}$  и  $P_{n2}$  — нормальные составляющие поляризованности в каждом из диэлектриков. Но, согласно § 13, нормальная составляющая напряженности поля есть поток линий напряженности через единицу поверхности. Поэтому число линий напряженности, проходящих через единицу поверхности раздела, в диэлектриках 1 и 2 не равно друг другу, а значит часть линий прерывается на границе раздела

Если на поверхности раздела кроме поляризационных зарядов имеется заряд с поверхностной плотностью  $\sigma$ , то вместо предыдущего соотношения имеем

$$E_{n2} - E_{n1} = (P_{n1} - P_{n2})/\epsilon_0 + \sigma/\epsilon_0.$$

В § 13 мы ввели электрическое смещение в вакууме  $\epsilon_0 \mathbf{E}$ . Обобщим теперь это понятие на случай произвольного диэлектрика и определим электрическое смещение в диэлектрике как

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (41.2)$$

Тогда из сказанного выше следует, что

$$D_{n2} - D_{n1} = \sigma.$$

В случае заряженной поверхности раздела нормальная составляющая электрического смещения испытывает скачок, равный  $\sigma$ .

Если вместо диэлектрика 1 имеется металл, то

$$D_{n1} = 0 \quad \text{и} \quad D_n = \sigma, \quad (41.3)$$

где индекс 2 у  $D_n$  опущен. Нормальная составляющая электрического смещения в диэлектрике у поверхности металла в отсутствие тока равна поверхностной плотности заряда металла. Этот результат мы уже получили в § 13 для поверхности металла в вакууме.

Для незаряженных диэлектриков ( $\sigma = 0$ ) нормальные к границе раздела составляющие электрического смещения непрерывны:

$$D_{n1} = D_{n2}. \quad (41.4)$$

Так как  $D_{n1}$  равно числу линий смещения, пересекающих единицу поверхности раздела в диэлектрике 1, а  $D_{n2}$  — числу линий смещения для той же площадки в диэлектрике 2, то из (41.4) следует, что линии электрического смещения не прерываются на границе раздела диэлектриков. Поэтому для описания электрического поля в неоднородных диэлектриках гораздо удобнее пользоваться электрическим смещением  $\mathbf{D}$  вместо

напряженности поля  $\mathbf{E}$ , и в этом заключается основной смысл введения электрического смещения.

Легко показать, что линии электрического смещения остаются непрерывными и при неоднородной поляризации, когда в диэлектрике возникают объемные поляризационные заряды. Действительно, согласно (39.3), объемная плотность зарядов в диэлектрике равна

$$\rho' = - \left( \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} \right).$$

Поэтому по теореме Остроградского–Гаусса

$$\epsilon_0 \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) = - \left( \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} \right),$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x} (\epsilon_0 E_x + P_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\epsilon_0 E_y + P_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\epsilon_0 E_z + P_z) = 0$$

Но полученный результат показывает, что поток вектора  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$  через замкнутую поверхность равен нулю, а это значит, что линии смещения нигде не возникают и не обрываются внутри диэлектрика.

Рассмотрим опять плоский конденсатор, заполненный однородным диэлектриком (рис. 53). Тогда, согласно § 40, напряженность поля внутри диэлектрика равна

$$E = E_0 - \sigma' / \epsilon_0 = E_0 - P / \epsilon_0.$$

Следовательно,

$$D = \epsilon_0 E + P = \epsilon_0 E_0, \quad (41.5)$$

т.е. в случае однородного диэлектрика электрическое смещение внутри диэлектрика совпадает с электрическим смещением в вакууме, создаваемым одними зарядами обкладок конденсатора. Если  $q$  — заряд обкладок конденсатора,  $S$  — площадь каждой обкладки, то

$$D = \sigma = q/S. \quad (41.6)$$

Из этой формулы вытекает практический способ измерения  $D$ . Чтобы измерить электрическое смещение внутри диэлектрика, достаточно измерить заряд на обкладках, ограничивающих диэлектрик.

Определение электрического смещения можно представить и в другой форме. Рассмотрим в однородном диэлектрике узкую длинную щель, вырезанную перпендикулярно к направлению смещения зарядов (рис. 56). Тогда, согласно формуле (41.4), электрическое смещение внутри щели будет такое же, как и внутри диэлектрика. Поэтому электрическое смещение внутри диэлектрика равно электрическому смещению внутри узкой

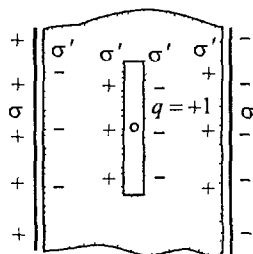


Рис 56 К определению электрического смещения внутри диэлектрика

длинной полости, вырезанной в диэлектрике перпендикулярно к направлению смещения зарядов. Сила, действующая на заряд  $+1$  в этой полости, равна  $D/\epsilon_0$ .

## § 42. Изотропные и анизотропные диэлектрики

Если измерять электрическое смещение в стеклянных пластинках, вырезанных различным образом из массивного куска, то при одинаковом значении поля  $E$  электрическое смещение во всех пластинках оказывается одинаковым. Согласно (41.2) это значит, что и поляризованность  $P$  одна и та же во всех пластинках, а следовательно, поляризация не зависит от направления поля. Такие диэлектрики называются *изотропными*. В изотропных диэлектриках смещение зарядов происходит в направлении электрического поля, и поэтому векторы  $E$  и  $P$  параллельны.

Для многих кристаллов это, однако, не имеет места. Если исследовать электрическое смещение в пластинках, вырезанных различным образом из таких кристаллов, то  $D$  при одном и том же поле  $E$  будет различно. Это показывает, что диэлектрические свойства зависят от направления поля относительно осей кристалла. Подобные диэлектрики называются *анизотропными*. В анизотропных диэлектриках направления  $E$  и  $P$ , вообще говоря, не совпадают, и поэтому направления  $E$  и  $D$  также различны.

Опыт показывает, что в широком интервале изменения электрического поля поляризованность можно считать пропорциональной напряженности поля  $E$  в данной точке. Поэтому для изотропного диэлектрика можно написать

$$P = \alpha \epsilon_0 E, \quad (42.1)$$

где  $\alpha$  — скалярная величина, получившая название *диэлектрической восприимчивости* данного вещества. В эту формулу мы вводим  $\epsilon_0$ , чтобы  $\alpha$  было безразмерным.

Подставляя (42.1) в (41.2), получаем

$$D = \epsilon \epsilon_0 E, \quad (42.2)$$

где через  $\epsilon$  обозначено:

$$\epsilon = 1 + \alpha. \quad (42.3)$$

Легко видеть, что определяемая таким образом величина  $\epsilon$  есть диэлектрическая проницаемость вещества (относительная), которую мы уже ввели в § 31, рассматривая зависимость емкости конденсатора от свойств диэлектрика. Действительно, положим для определенности, что при заполнении конденсатора диэлектриком конденсатор остается присоединенным к источнику напряжения. Это значит, что напряжение между обкладками, а следовательно, и напряженность поля в конденсаторе не изменяются. Тогда из формулы (42.2) следует, что электрическое сме-

щение внутри конденсатора увеличивается в  $\epsilon$  раз. Но, согласно формуле (41.6), это значит, что во столько же раз увеличится и заряд обкладок, а следовательно, и емкость конденсатора

В анизотропных средах (кристаллах) линейная зависимость  $\mathbf{D}$  от  $\mathbf{E}$  имеет вид

$$\begin{aligned} D_x &= \epsilon_{xx}\epsilon_0 E_x + \epsilon_{xy}\epsilon_0 E_y + \epsilon_{xz}\epsilon_0 E_z, \\ D_y &= \epsilon_{yx}\epsilon_0 E_x + \epsilon_{yy}\epsilon_0 E_y + \epsilon_{yz}\epsilon_0 E_z, \\ D_z &= \epsilon_{zx}\epsilon_0 E_x + \epsilon_{zy}\epsilon_0 E_y + \epsilon_{zz}\epsilon_0 E_z, \end{aligned} \quad (42.4)$$

или, в сокращенной записи,

$$D_i = \sum_k \epsilon_{ik}\epsilon_0 E_k, \quad i, k = x, y, z. \quad (42.5)$$

Девять величин  $\epsilon_{ik}$  образуют компоненты тензора диэлектрической проницаемости 2-го ранга. Этот тензор симметричен:  $\epsilon_{ik} = \epsilon_{ki}$ , а поэтому имеется только шесть независимых компонент.

Из математики известно, что для всякого симметричного тензора 2-го ранга можно выбрать такие оси координат (*главные оси* тензора), чтобы недиагональные компоненты со смешанными индексами обратились в нуль. В этом случае остаются только три независимых значения тензора:  $\epsilon_{xx} \equiv \epsilon_1$ ,  $\epsilon_{yy} \equiv \epsilon_2$ ,  $\epsilon_{zz} \equiv \epsilon_3$ , называемые *главными диэлектрическими проницаемостями* кристалла. Если  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3$ , то направления  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  совпадают и кристалл ведет себя как изотропная среда.

В очень сильных электрических полях соотношения (42.4) нарушаются и связи между  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{E}$  и соответственно  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  становятся нелинейными. Такие поля существуют в излучении так называемых *оптических квантовых генераторов*, или *лазеров*. Нелинейная зависимость  $\mathbf{D}$  от  $\mathbf{E}$  существенна для явлений нелинейной оптики. Линейная зависимость  $\mathbf{D}$  от  $\mathbf{E}$  нарушается также в сравнительно слабых электрических полях в веществах с большой поляризуемостью, например в сегнетоэлектриках (§ 50).

### § 43. Преломление линий смещения и напряженности поля

Соотношения (41.1) и (41.4) выполняются всегда на границе раздела двух сред и представляют собой граничные условия для электрического поля. Из них следует, что направления линий смещения и напряженности поля изменяются при переходе через границу раздела.

Пусть  $D_{n1}$  и  $D_{t1}$  — составляющие электрического смещения  $\mathbf{D}_1$  по нормали к поверхности раздела и вдоль нее в диэлектрике 1 (рис. 57), а  $D_{n2}$  и  $D_{t2}$  — составляющие смещения  $\mathbf{D}_2$  в диэлектрике 2. Обозначим через  $\alpha_2$  угол между вектором  $\mathbf{D}_2$  в диэлектрике 2 и нормалью к грани-

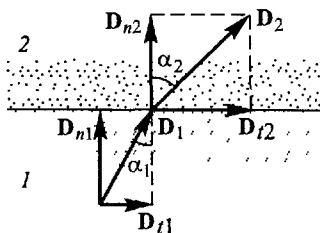


Рис. 57. Преломление линий смещения на границе двух диэлектриков

це раздела, а через  $\alpha_1$  — соответствующий угол для вектора  $\mathbf{D}_1$  в диэлектрике 1. Из рис 57 видно, что

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = D_{t1}/D_{n1}, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = D_{t2}/D_{n2}$$

Но  $D_{n1} = D_{n2}$ , и поэтому

$$\operatorname{tg} \alpha_2 / \operatorname{tg} \alpha_1 = D_{t2}/D_{t1}.$$

Далее, из (42.2) и граничного условия (41.1) имеем

$$D_{t2} = \varepsilon_2 \varepsilon_0 E_{t2}, \quad D_{t1} = \varepsilon_1 \varepsilon_0 E_{t1}, \quad E_{t1} = E_{t2}.$$

Отсюда получаем окончательно

$$\operatorname{tg} \alpha_2 / \operatorname{tg} \alpha_1 = \varepsilon_2 / \varepsilon_1. \quad (43.1)$$

Эта формула выражает закон преломления линий смещения. Она показывает, что, входя в диэлектрик с большей диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ , линии смещения удаляются от нормали

Закон преломления линий напряженности поля в изотропных диэлектриках, очевидно, такой же, как и закон преломления

линий смещения, поскольку в каждом из диэлектриков направления  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  совпадают.

Однако картины линий смещения и линий напряженности будут все же различны. Различие заключается в том, что линии смещения непрерывны, в то время как часть линий напряженности прерывается на границе раздела (§ 41). На рис 58 показаны в качестве примера

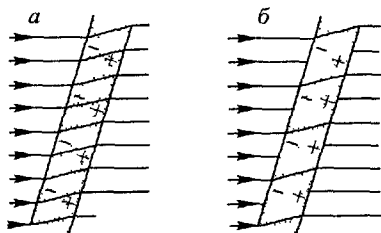


Рис 58 Линии смещения (а) и линии напряженности (б) в пластине диэлектрика

линии смещения и линии напряженности в диэлектрической пластинке

При этом предполагается, что длина и ширина пластинки очень велики, так что искажения поля, вносимые краями пластинки, не сказываются в рассматриваемой части пластинки. В соответствии с (42.2) густота линий напряженности внутри пластинки меньше, чем вне пластинки. Отметим еще, что линии смещения внутри пластинки вследствие преломления сгущаются, что указывает на увеличение смещения  $D$  в пластинке

#### § 44. Законы электрического поля в диэлектриках

Основным законом в электростатике является закон Кулона. Поэтому прежде всего рассмотрим, как изменится этот закон

Пусть в однородном изотропном диэлектрике с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$  находится точечный заряд  $+q$ , который

мы будем представлять себе в виде равномерно заряженного шара (рис 59) Вычислим напряженность поля на расстоянии  $r$  от центра шара На границе диэлектрика, прилегающей к шару, появится отрицательный поляризационный заряд с поверхностной плотностью  $-\sigma'$ , которая, согласно сказанному в § 42, равна

$$\sigma' = \alpha \epsilon_0 E(a) = (\epsilon - 1) \epsilon_0 E(a).$$

Здесь  $E(a)$  — напряженность поля в диэлектрике на расстоянии  $a$  от центра шара,  $a$  — радиус шара. Поэтому полный поляризационный заряд равен

$$q' = 4\pi a^2 \sigma' = 4\pi a^2 \epsilon_0 (\epsilon - 1) E(a).$$

Из симметрии задачи ясно, что линии напряженности могут быть только радиальными прямыми, густота которых обратно пропорциональна квадрату расстояния от заряда, а значит,

$$E(a)/E(r) = r^2/a^2.$$

Поэтому

$$q' = 4\pi r^2 \epsilon_0 (\epsilon - 1) E(r)$$

Напряженность поля в точке  $r$  равна напряженности поля, создаваемого свободным зарядом ( $q - q'$ ) в вакууме Следовательно,

$$E(r) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q - q'}{r^2} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{r^2} - (\epsilon - 1) E(r).$$

Выражая отсюда  $E(r)$ , находим

$$E(r) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 \epsilon} \frac{q}{r^2} = \frac{E_0(r)}{\epsilon}, \quad (44.1)$$

где через  $E_0(r)$  обозначена напряженность поля, создаваемая точечным зарядом в вакууме

Полученная формула выражает закон Кулона для диэлектриков. Она показывает, что напряженность поля точечного заряда в однородном диэлектрике уменьшается в  $\epsilon$  раз по сравнению с его значением в вакууме Мы видим, что физическая причина этого заключается в появлении поляризационных зарядов в диэлектрике, уменьшающих электрическое поле.

Однако если бы мы, желая получить силу взаимодействия двух точечных зарядов, разделили выражение (21) на  $\epsilon$ , то мы получили бы в общем случае неверный результат, так как сила может зависеть от формы полости, где находится пробный заряд (ср. § 40)

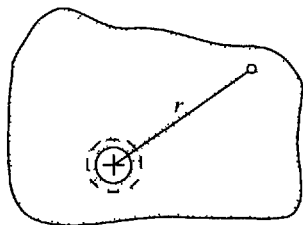


Рис 59 К определению напряженности поля точечного заряда в диэлектрике

При выводе формулы (44.1) мы считали, что объемных поляризационных зарядов нет. Легко убедиться, что в случае радиального поля это действительно так. Мы имеем

$$\mathbf{P} = \alpha \epsilon_0 \mathbf{E} = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \mathbf{D}$$

Так как линии смещения непрерывны всегда, то в силу сферической симметрии задачи

$$D(r) = D(a)a^2/r^2, \quad \mathbf{D} = D(a)a^2 \mathbf{r}/r^3$$

Поэтому, вычисляя по формуле (39.3) объемную плотность поляризационных зарядов  $\rho'$ , имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_x}{\partial x} &= \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} D(a)a^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{r^3} = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} D(a)a^2 \frac{r^3 - 3rx^2}{r^6}, \\ \frac{\partial P_y}{\partial y} &= \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} D(a)a^2 \frac{r^3 - 3ry^2}{r^6}, \\ \frac{\partial P_z}{\partial z} &= \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} D(a)a^2 \frac{r^3 - 3rz^2}{r^6}, \\ \rho' &= -\frac{\partial P_x}{\partial x} - \frac{\partial P_y}{\partial y} - \frac{\partial P_z}{\partial z} = 0 \end{aligned}$$

Из (44.1) следует, что потенциал (относительно бесконечности), создаваемый точечным зарядом в диэлектрике, есть

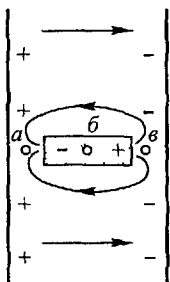
$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{q}{r}. \quad (44.2)$$

Обратимся теперь к теореме Остроградского–Гаусса (§ 13). Из формул (42.2) и (44.1) следует, что электрическое смещение, создаваемое точечным зарядом в диэлектрике, есть

$$\mathbf{D} = q/(4\pi r^2).$$

Оно такое же, как и в отсутствие диэлектрика в вакууме. Поэтому теорема Остроградского–Гаусса для диэлектриков имеет тот же вид (13.5), что и для вакуума, где  $q$  обозначает фактические заряды тел без учета поляризационных зарядов диэлектрика.

Рис 60 Конденсатор с неоднородным диэлектриком



Отсюда, в частности, следует, что при заполнении любого конденсатора (отключенного от источника) однородным диэлектриком электрическое смещение  $\mathbf{D}$  не меняется. Напряженность же поля  $\mathbf{E} = \mathbf{D}/\epsilon_0\epsilon$  в любой точке поля уменьшится в  $\epsilon$  раз. Однако нужно иметь в виду, что поле уменьшается в  $\epsilon$  раз только в том случае, когда диэлектрик заполняет все пространство конденсатора. Если это условие не выполнено, то напряженность поля может быть как меньше, так



и больше его значения в вакууме  $E_0$ . Так, например, в случае, изображенном на рис 60, напряженность поля в точке  $b$  меньше  $E_0$ , но в точках  $a$  и  $c$  — больше  $E_0$

### § 45. Механические силы при наличии диэлектриков

Опыты, описанные в § 38, показывают, что на диэлектрики в электрическом поле действуют механические силы. Они возникают и в том случае, если диэлектрик в целом не заряжен.

Объяснение происхождения этих сил мы уже дали выше. Они возникают потому, что на диэлектриках в электрическом поле появляются поляризационные заряды (как поверхностные, так и объемные), и поэтому на каждый элемент поверхности и объема диэлектрика действует определенная сила.

Если тело находится не в вакууме, а в какой-либо другой среде, то поляризация будет происходить и в окружающей среде, и поэтому силы, действующие на тело, будут зависеть как от поляризационных зарядов тела, так и от поляризационных зарядов окружающей среды.

Хорошей иллюстрацией сказанному служит опыт, изображенный на рис 61. Подвесим на нити парафиновый шарик  $a$  и поместим его вблизи изолированного металлического шарика  $b$ . Когда оба шарика находятся в воздухе, то при заряджении металлического шарика парафиновый шарик притягивается к нему. Если же погрузить оба шарика в ацетон, у которого диэлектрическая проницаемость больше, чем у парафина, то парафиновый шарик отталкивается от металлического шарика.

Объяснение этого опыта заключается в следующем. На поверхности шарика появляются поляризационные заряды с некоторой поверхностной плотностью  $\sigma'_1$ , а на границе среды, прилегающей к шарика, — поляризационные заряды противоположного знака с другой плотностью  $\sigma'_2$ , поэтому сила, действующая на поверхность шарика, зависит от результирующего заряда  $\sigma'_1 - \sigma'_2$ . Если диэлектрическая проницаемость среды  $\epsilon_2 < \epsilon_1$ , то  $\sigma'_2 < \sigma'_1$ . Если  $\epsilon_2 > \epsilon_1$ , то  $\sigma'_2 > \sigma'_1$ , результирующий заряд изменяет знак, и поэтому сила притяжения переходит в силу отталкивания.

Сила, действующая на тело в диэлектрике, зависит, однако, не только от свободных зарядов, находящихся на теле. След-

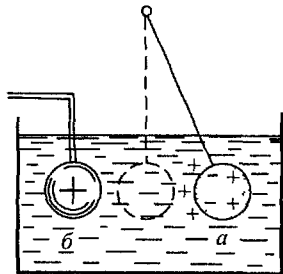


Рис 61 Парафиновый шарик  $a$  притягивается к заряженному металлическому шарика  $b$  в воздухе, но отталкивается от него в ацетоне

ствие поляризации на каждый элемент объема диэлектрика действуют силы, и поэтому диэлектрики в электрическом поле деформируются. Это явление носит название *электрострикции*. Вследствие электрострикции внутри диэлектрика возникают механические силы. Поэтому непосредственное вычисление полной механической силы, действующей на какое-либо тело в диэлектрике, как правило, сложно. Однако во многих случаях механические силы можно просто вычислить без детального разбора их происхождения, с помощью закона сохранения энергии. К этому вопросу мы вернемся в § 72.

## § 46. Электронная теория поляризации диэлектриков

Мы уже говорили, что причина поляризации диэлектриков заключается в том, что атомы и молекулы всех тел содержат элементарные заряженные частицы. В электрическом поле происходит смещение этих частиц, и поэтому возникает электрический момент. Однако в различных диэлектриках эти смещения имеют разный характер.

Молекулы многих веществ построены из незаряженных атомов. Примером может служить молекула водорода (рис. 62 а).

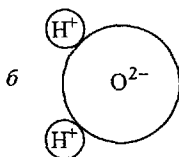
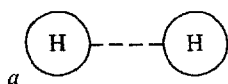


Рис. 62. Грубые модели неполярной молекулы водорода (а) и полярной молекулы воды (б)

Подобные молекулы названы неполярными. Молекулы многих других веществ, напротив, содержат атомы в заряженном состоянии, т.е. ионы (полярные молекулы). Полярной является молекула воды, которая содержит отрицательный ион кислорода и два положительных иона водорода (рис. 62 б).

Неполярную молекулу в отсутствие электрического поля в грубом (но достаточно для наших целей) приближении можно представить в виде двух равномерно заряженных сфер, центры которых совпадают. Так как поле равномерно заряженной сферы во внешнем пространстве равно полю точечного заряда той же величины, помещенного в

центре сферы, то очевидно, что электрический момент такой молекулы равен нулю. В электрическом поле оба заряда смещаются в противоположные стороны, и поэтому молекула будет вызывать электрическое поле, совпадающее (вне молекулы) с полем диполя, у которого каждый из точечных зарядов равен заряду соответствующей сферы, а расстояние между зарядами равно смещению центров сфер (рис. 63).

Смещение зарядов в молекуле при не очень сильных полях можно положить пропорциональным напряженности электрического поля. Поэтому дипольный момент молекулы  $\mathbf{p}$  можно считать пропорциональным напряженности поля:

$$\mathbf{p} = \beta \epsilon_0 \mathbf{E}', \quad (46.1)$$

где  $\mathbf{E}'$  — напряженность поля, действующего на молекулу. Это поле отличается от среднего поля  $\mathbf{E}$  внутри диэлектрика (подробнее см. § 47), поэтому мы и ввели для него специальное обозначение. Коэффициент пропорциональности  $\beta$ , называемый *поляризуемостью молекулы*, зависит от строения молекулы. Описанный тип поляризации называют *электронной поляризацией смещения*.

Рассмотрим теперь диэлектрик с полярными молекулами. В этом случае каждая молекула имеет определенный дипольный момент  $\mathbf{p}_0$  уже в отсутствие поля. Однако, вследствие теплового движения, в отсутствие поля молекулы расположены совершенно хаотично (рис. 64 а), и поэтому векторная сумма всех моментов диполей в среднем близка к нулю. При наложении внешнего электрического поля на каждый диполь действуют силы, стремящиеся ориентировать его параллельно электрическому полю.

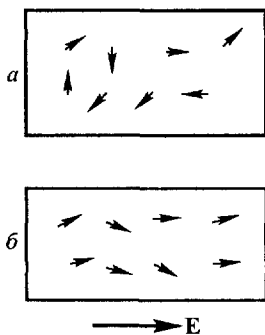


Рис. 64. Схема дипольной поляризации

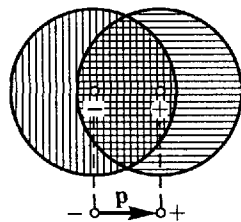


Рис. 63. Схема электронной поляризации

Поэтому возникает частичное упорядочение в расположении диполей (рис. 64 б), тем большее, чем сильнее внешнее поле и чем ниже температура. В этом случае сумма всех дипольных моментов молекулы уже не равна нулю, и диэлектрик приобретает электрический момент. Такой тип поляризации называют *ориентационной* или *дипольной поляризацией*.

В твердых диэлектриках мы находим еще один тип смещения зарядов, приводящий к поляризации. Кристаллические решетки многих веществ построены из положительных и отрицательных ионов. Примером может служить кристалл хлористого цезия. Элементарная ячейка его решетки представляет собой центрированный куб (рис. 65), в вершинах которого находятся положительные ионы  $\text{Cs}^+$ , а в центре — отрицательные ионы  $\text{Cl}^-$ . Рассматривая все ионы  $\text{Cs}^+$  и все ионы  $\text{Cl}^-$  порознь, мы находим, что они образуют две простые кубические решетки, сдвинутые по отношению друг к дру-

гу в направлении диагонали куба на расстояние половины диагонали.

В электрическом поле на каждую из простых решеток действуют различные по модулю и направлению силы и решетки смещаются по отношению друг к другу. Вследствие этого в некоторых кристаллах может возникнуть электрический момент. Этот тип поляризации называют *поляризацией ионного смещения* или просто *ионной поляризацией*.

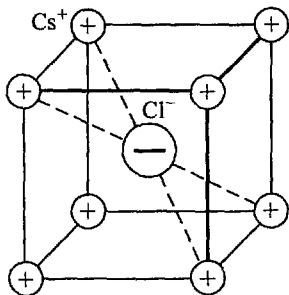


Рис. 65. Элементарная ячейка кристалла хлористого цезия CsCl

Рассмотренные типы поляризации могут сочетаться друг с другом. Так, например, в полярных жидких и газообразных диэлектриках молекулы могут не только ориентироваться под действием поля, но и деформироваться, и поэтому в них может происходить одновременно электронная и дипольная поляризации.

## § 47. Диэлектрическая проницаемость неполярных диэлектриков

Исходя из представлений, изложенных в предыдущем параграфе, можно вычислить диэлектрическую проницаемость и связать ее с атомарными постоянными диэлектрика. Рассмотрим сначала неполярные диэлектрики.

Пусть диэлектрик находится в электрическом поле, и будем считать сначала, что поле  $\mathbf{E}'$ , действующее на молекулу, совпадает со средним полем  $\mathbf{E}$  внутри диэлектрика. Тогда каждая молекула диэлектрика имеет дипольный момент  $\mathbf{p}$ , выражаемый формулой (46.1), где  $\mathbf{E}' = \mathbf{E}$ . Если  $n$  — число молекул в единице объема диэлектрика, то электрический момент единицы объема (поляризованность) равен

$$\mathbf{P} = n\beta\epsilon_0\mathbf{E},$$

а для смещения  $\mathbf{D}$ , согласно (41.2), имеем

$$\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0\mathbf{E}(1 + n\beta).$$

Так как, с другой стороны,  $\mathbf{D} = \epsilon\epsilon_0\mathbf{E}$ , то отсюда

$$\epsilon = 1 + n\beta. \quad (47.1)$$

Полученное соотношение связывает диэлектрическую проницаемость  $\epsilon$  с концентрацией  $n$  молекул внутри диэлектрика и поляризуемостью молекул  $\beta$ .

Формула (47.1) весьма приближенна. При выводе ее мы считали, что электрическое поле  $E'$ , вызывающее смещение зарядов в молекуле, равно среднему электрическому полю  $E$ . Это, однако, неверно. При вычислении поляризации молекулы нас интересует не среднее поле, а поле в точке, где находится данная молекула. Среднее поле  $E$  учитывает действие всех зарядов, т.е. зарядов на обкладках конденсатора и зарядов всех молекул, включая и рассматриваемую. Поле же  $E'$  выражает действие всех зарядов при исключении рассматриваемой молекулы. Хотя заряды одной молекулы и малы по сравнению с зарядами множества других молекул диэлектрика, но эти заряды находятся в непосредственной близости от рассматриваемой точки и поэтому их исключение приводит к поправке конечной величины. Различие полей  $E$  и  $E'$  не существенно только в газах, для которых  $\epsilon$  близко к единице.

Чтобы получить выражение для диэлектрической проницаемости плотных диэлектриков, нужно определить напряженность поля  $E'$ , действующего на молекулу (внутреннее поле). Это является, вообще говоря, сложной задачей, так как внутреннее поле существенно зависит от структуры диэлектрика.

Внутреннее поле можно просто вычислить только для кристаллов с кубической решеткой. Для них

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{P}/3\epsilon_0, \quad (47.2)$$

где  $\mathbf{P}$  — поляризованность кристалла. Эту формулу можно приближенно применять и к неполярным жидкостям и газам, в которых расположение молекул хаотично.

Пользуясь формулой (47.2), можно вычислить электронную поляризованность плотных диэлектриков. Электрический момент единицы объема в этом случае будет равен

$$P = np = n\beta\epsilon_0(E + P/3\epsilon_0).$$

Поэтому для смещения  $D$  получаем

$$\begin{aligned} D &= \epsilon_0 E + P = \\ &= \epsilon_0 E + n\beta \left[ \epsilon_0 E + \frac{1}{3} (D - \epsilon_0 E) \right] = \epsilon_0 E + \frac{1}{3} n\beta (D + 2\epsilon_0 E). \end{aligned}$$

Так как  $D = \epsilon\epsilon_0 E$ , то отсюда следует

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{n\beta}{3} \quad (47.3)$$

(формула Клаузиуса-Моссотти).

Соотношение (47.3) показывает, что для неполярных диэлектриков величина  $(\epsilon - 1)/(\epsilon + 2)$  прямо пропорциональна концентрации молекул, а следовательно, плотности данного диэлектрика. Этот результат хорошо оправдывается на опыте, например для газов в широком интервале изменения давлений. Кроме того, из (47.3) видно, что при неизменной концентрации молекул

(плотности) диэлектрическая проницаемость не зависит от температуры, так как поляризуемость молекул  $\beta$  зависит лишь от их строения, но не от температуры. Этот результат также хорошо подтверждается на опыте, который показывает, что при нагревании или охлаждении неполярных диэлектриков при постоянном объеме их диэлектрическая проницаемость не изменяется.

Формулу (47.3) часто пишут в несколько ином виде. Концентрацию молекул  $n$  можно выразить через молярную массу вещества  $\mu$ , его плотность  $d$  и постоянную Авогадро  $N$ , а именно  $n = Nd/\mu$ . Подставляя это в (47.3), имеем

$$\frac{N\beta}{3} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \frac{\mu}{d} = \text{const.} \quad (47.3a)$$

Величину, стоящую в левой части, называют *молярной поляризованностью* данного вещества. Она зависит только от поляризуемости молекул  $\beta$ , т.е. от рода вещества, но не зависит от температуры и давления, и, следовательно, остается постоянной для данного вещества при изменении его состояния. Измеряя на опыте  $\varepsilon$  при данном  $d$ , можно определить молярную поляризованность и по формуле (47.3a) найти поляризуемость молекул.

## § 48. Диэлектрическая проницаемость полярных диэлектриков

Рассмотрим теперь, от чего зависит диэлектрическая проницаемость газообразных полярных диэлектриков и как именно. Сначала будем считать, что молекулы недеформируемы, т.е. не будем учитывать электронную поляризацию.

Электрический момент единицы объема такого диэлектрика есть

$$P = \frac{1}{\tau} \sum_i p_{Ei},$$

где  $p_{Ei}$  — проекция электрического момента какой-либо  $i$ -й молекулы на направление внешнего поля, а  $\tau$  — объем диэлектрика. Но, по определению среднего значения,

$$\frac{1}{\tau} \sum_i p_{Ei} = n\bar{p}_E,$$

где  $n$  — число молекул в единице объема, а  $\bar{p}_E$  — среднее значение проекции дипольного момента молекул на направление поля. Поэтому вычисление поляризованности сводится к определению  $\bar{p}_E$ .

Расчет, согласно законам статистической физики, дает (см. Добавление 2)

$$\bar{p}_E = \frac{p_0^2}{3kT} E'. \quad (48.1)$$

Здесь  $p_0$  — постоянный дипольный момент одной молекулы,  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К — постоянная Больцмана,  $T$  — термодинамическая температура диэлектрика,  $E'$  — напряженность поля, действующего на диполь. При выводе (48.1) предположено, что поле  $E'$  не очень велико и вызывает только слабую упорядоченность в расположении диполей.

Отметим, что результат, выраженный формулой (48.1), качественно понятен и без расчетов: чем больше поле  $E'$ , тем сильнее ориентация диполей, тем больше будет и проекция дипольного момента на направление поля; напротив, чем выше температура, тем сильнее дезориентирующее влияние теплового движения, тем меньше и проекция дипольного момента. Сравнивая (48.1) с (46.1), мы видим, что при дипольной поляризации величина  $p_0^2/3\epsilon_0 kT$  играет ту же роль, что и поляризуемость молекулы  $\beta$  в неполярных диэлектриках. Подставляя эту величину в (47.3), получим

$$(\epsilon - 1)/(\epsilon + 2) = p_0^2 n / (9\epsilon_0 kT). \quad (48.2)$$

Диэлектрическая проницаемость полярных диэлектриков зависит от температуры и уменьшается при нагревании.

Отметим еще раз, что последняя формула, так же как и формула (47.3), справедлива лишь тогда, когда внутреннее поле можно представить в виде (47.2). В жидкостях с полярными молекулами, в отличие от неполярных жидкостей, формула (47.2) для внутреннего поля, по-видимому, оправдывается плохо.

Положение упрощается для газообразных диэлектриков. Вследствие слабой их поляризуемости в них можно считать внутреннее поле  $E'$  равным среднему полю  $E$ . Это значит, что в левой части формулы (48.2) нужно положить  $\epsilon + 2 \approx 3$ .

Если в газообразном диэлектрике молекулы обладают в отсутствие поля постоянным дипольным моментом и, кроме того, могут деформироваться в электрическом поле, то диэлектрическая проницаемость газа равна

$$\epsilon = 1 + n[\beta + p_0^2 / (3\epsilon_0 kT)]. \quad (48.3)$$

Здесь второе слагаемое описывает электронную поляризацию смещения, а третье — дипольную (ориентационную) поляризацию.

## § 49. Определение дипольных моментов молекул

Рассмотренная выше теория поляризации диэлектриков, принадлежащая в основном Дебаю и Ланжевону, приводит к зависимости диэлектрической проницаемости от температуры, показанной на рис. 66. По оси ординат отложено значение молярной поляризованности, а по оси абсцисс — величина, обрат-

ная термодинамической температуре. Для чисто неполярных диэлектриков ( $p_0 = 0$ ) молярная поляризованность не зависит от температуры и изображается прямой 1, параллельной оси  $1/T$ .

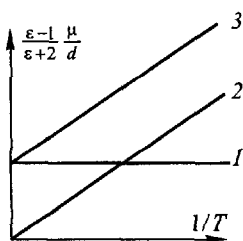


Рис. 66. Теоретическая зависимость молярной поляризованности от температуры

диэлектрике, и выделить электронную поляризацию смещения и ориентационную (дипольную) поляризацию. А отсюда можно найти по формулам (47.3) и (48.2) поляризуемость молекулы  $\beta$  или соответственно ее дипольный момент  $p_0$ . Значения дипольных моментов молекул, полученные таким образом для некоторых веществ, приведены в табл. 2.

Для чисто полярных диэлектриков ( $\beta = 0$ ) эта зависимость, согласно (48.2), выражается прямой 2, проходящей через начало координат. Если молекулы имеют и постоянный дипольный момент  $p_0$ , и заметно деформируются ( $\beta \neq 0$ ), то наблюдаются оба типа поляризации и рассматриваемая зависимость изображается прямой 3, получаемой сложением прямых 1 и 2.

Исследуя на опыте температурную зависимость диэлектрической проницаемости  $\epsilon$ , можно определить, какой тип поляризации имеет место в данном

Таблица 2

Вещество	Химическая формула	Дипольный момент $p_0$ , $10^{-30}$ Кл м
Водород, азот, кислород	$H_2, N_2, O_2$	0
Четыреххлористый углерод	$CCl_4$	0
Хлористый водород	$HCl$	3,4
Бромистый »	$HBr$	2,6
Окись углерода	$CO$	0,40
Этиловый эфир	$(C_2H_5)_2O$	3,8
Вода	$H_2O$	6,2

Зная дипольный момент, можно оценить размеры молекул. Простейший случай представляет молекула из двух ионов, для которой  $p_0 = ql$  ( $q$  — заряд ионов,  $l$  — расстояние между их центрами). Так, например, для молекулы  $HCl$   $q$  равно заряду электрона  $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$  Кл, так как известно, что водород содержит всего один электрон. Поэтому для расстояния между центрами ионов мы находим  $l = (3,4 \cdot 10^{-30}) : (1,60 \cdot 10^{-19}) \approx \approx 2 \cdot 10^{-11}$  м =  $0,2 \cdot 10^{-8}$  см, что по порядку величины хорошо совпадает с размером молекул, определяемым из данных химии и молекулярной физики.



## § 50. Сегнетоэлектрики

Некоторые химические соединения в твердом состоянии имеют весьма необычные и интересные диэлектрические свойства. Первоначально эти свойства были обнаружены в кристаллах сегнетовой соли, и поэтому все подобные диэлектрики получили название *сегнетоэлектриков*. Детальное исследование диэлектрических свойств сегнетовой соли было впервые произведено в 1930–1934 гг. И.В. Курчатовым и П.П. Кобеко, которыми были установлены все основные свойства сегнетоэлектриков.

Сегнетова соль представляет собой двойную натрий-калиевую соль винной кислоты  $\text{NaKC}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ . Ее кристаллы принадлежат к ромбической системе и обычно имеют вид, показанный на рис. 67, где  $a$ ,  $b$ ,  $c$  — кристаллографические оси. Кристаллы сегнетовой соли обнаруживают резкую анизотропию свойств. Сегнетоэлектрические свойства, описываемые ниже, наблюдаются, если электрическое поле конденсатора направлено вдоль кристаллографической оси  $a$  (рис. 67).

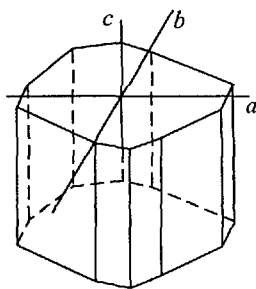


Рис. 67. Кристалл сегнетовой соли

Первая особенность сегнетовой соли заключается в том, что в некотором температурном интервале ее диэлектрическая проницаемость весьма велика и достигает огромного значения: около 10 000.

Второе важное свойство сегнетовой соли обнаруживается при исследовании зависимости электрического смещения от напряженности поля. Смещение оказывается не пропорциональным полю, а значит, диэлектрическая проницаемость зависит от напряженности поля. Эта зависимость для разных сегнетоэлектриков различна.

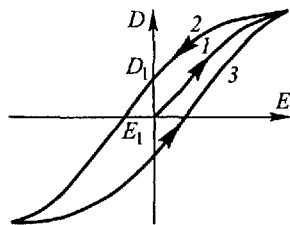


Рис. 68. Диэлектрический гистерезис в сегнетоэлектриках

Третья особенность состоит в том, что значение электрического смещения в сегнетовой соли определяется не только значением напряженности поля, но зависит еще от предшествовавших состояний поляризации. Это явление называется диэлектрическим гистерезисом (ср. § 110). Зависимость смещения  $D$  от напряженности поля  $E$  имеет вид, изображенный на рис. 68. При первоначальном увеличении поля нарастание смещения

описывается ветвью кривой 1, которая не линейна. Если затем уменьшать электрическое поле (напряжение на конденсаторе), то уменьшение смещения будет происходить в соответствии с ветвью 2. Когда поле становится равным нулю, смещение не равно нулю и изображается отрезком  $D_1$ . Это показывает, что в сегнетовой соли имеется остаточная поляризация и сегнетова соль остается поляризованной даже в отсутствие внешнего электрического поля. Чтобы уничтожить остаточную поляризацию, нужно создать электрическое поле  $E_1$  обратного направления. При дальнейшем циклическом изменении электрического поля изменение смещения описывается изображенной петлеобразной кривой — петлей гистерезиса.

Эти свойства присущи не только сегнетовой соли, но и всем сегнетоэлектрикам.

Сегнетоэлектрические свойства сильно зависят от температуры. При температурах, превышающих определенное значение  $T_K$ , различное для разных веществ, сегнетоэлектрические свойства исчезают и сегнетоэлектрик превращается в обычный диэлектрик. Эта температура называется *температурой Кюри* или *точкой Кюри* в честь Кюри, который впервые обнаружил существование подобной критической температуры при исследовании магнитных свойств железа и сходных с ним веществ (ферромагнетиков). В некоторых случаях, как, например, для сегнетовой соли, существуют две температуры Кюри ( $+24^\circ\text{C}$  и  $-18^\circ\text{C}$ ) и сегнетоэлектрические свойства наблюдаются только при температурах, лежащих между обеими точками. Наличие одной или нескольких точек Кюри является четвертым характерным свойством всех сегнетоэлектриков.

Помимо сегнетовой соли сегнетоэлектрическими свойствами обладают и другие соединения, например  $\text{KN}_2\text{PO}_4$  (фосфат калия) и  $\text{KN}_2\text{AsO}_4$ . Практически важным сегнетоэлектриком является титанат бария  $\text{BaTiO}_3$ . Его точка Кюри лежит около  $120^\circ\text{C}$ , а диэлектрическая проницаемость достигает в максимуме 6000–7000.

Сегнетоэлектрики имеют важные практические применения. Приготавливая сложные диэлектрики на основе сегнетоэлектриков и добавляя к ним различные примеси, можно получить конденсаторы большой емкости при малых размерах и придать им высокие качества.

Причиной сегнетоэлектрических свойств является самопроизвольная поляризация сегнетоэлектриков, возникающая в них под действием особенно сильного взаимодействия между частицами. Под влиянием этого взаимодействия сегнетоэлектрик подразделяется на отдельные области — области самопроизвольной (спонтанной) поляризации, или *диэлектрические домены*, в ко-

торых возникает большой электрический момент даже в отсутствие внешнего электрического поля

Спонтанная поляризация в обычных условиях, однако, не проявляется. Если указанные области малы, то поляризованность направлена в разных областях различно и результирующее значение электрического момента всего сегнетоэлектрика близко к нулю (рис 69 а). Такое расположение соответствует минимуму энергии, так как в противном случае вокруг сегнетоэлектрика возникло бы электрическое поле, которое содержало бы в себе дополнительную энергию. Если области

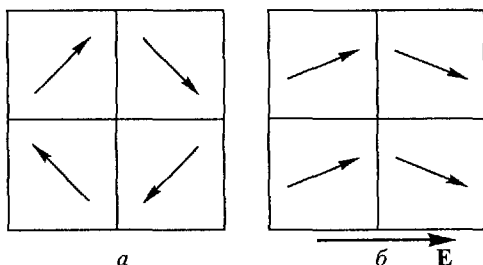


Рис. 69. Области самопроизвольной поляризации в сегнетоэлектриках и направление вектора поляризованности в них (схематически) а) сегнетоэлектрик в целом неполяризован, б) сегнетоэлектрик поляризован

спонтанной поляризации велики или если даже весь кристалл представляет собой одну такую область, то поляризация обычно все же не проявляется, так как на поверхности кристалла возникают поверхностные заряды (вследствие осаждения ионов из воздуха или за счет электропроводности кристалла), компенсирующие поляризационные заряды кристалла. Поэтому в обоих случаях могут наблюдаться только изменения электрического момента сегнетоэлектрика, возникающие по каким-либо причинам.

Во внешнем электрическом поле происходит изменение направления поляризованности в отдельных областях. Это изменение таково, что векторы поляризованности приближаются к положению, параллельному направлению поля, и тем ближе, чем сильнее поле (рис. 69 б). Кроме того, границы между отдельными областями могут смещаться таким образом, чтобы объем энергетически более выгодных областей увеличивался за счет объема энергетически менее выгодных. Поэтому электрический момент всего сегнетоэлектрика изменяется и это изменение воспринимается как его поляризация.

Наличие областей спонтанной поляризации является наиболее общим и точным признаком сегнетоэлектриков.

Кристаллы, в которых возникает спонтанная поляризация без внешнего электрического поля, образуют более широкую группу, нежели сегнетоэлектрики. Они получили название *пироэлектриков*. Помимо упомянутой выше причины, спонтанная поляризация может возникнуть вследствие особенно-

стей структуры кристалла. Так, расположение положительных и отрицательных ионов в элементарной ячейке кристалла может быть таким, что их электрический дипольный момент не равен нулю. Тогда и кристалл в целом приобретает электрический момент, т.е. оказывается поляризованным. Поляризованность при этом направлена вдоль некоторой, характерной для данного кристалла, оси. Для возникновения спонтанной поляризации такого рода необходимо, чтобы у кристалла было выделенное направление и притом единственное. Поэтому спонтанная поляризация имеет место только у кристаллов определенных кристаллографических классов. В отличие от сегнетоэлектриков, рассматриваемая спонтанная поляризация практически не изменяется внешним электрическим полем.

Вследствие компенсации поляризационных зарядов из-за проводимости кристалла, а также в результате оседания ионов из воздуха, постоянная спонтанная поляризация не наблюдается. Однако она проявляется при нагревании кристалла. Вследствие теплового расширения изменяется расположение ионов в элементарной ячейке, а следовательно, изменяются ее дипольный момент и поляризованность кристалла. Это изменение и проявляется как возникновение поляризационных зарядов на гранях кристалла. Электризация при нагревании кристаллов получила название *пироэлектрического* эффекта. Отсюда произошло и название веществ, в которых наблюдается это явление. Классическим примером пироэлектрика являются кристаллы турмалина.

Из 32 кристаллографических классов симметрии только 10 являются пироэлектрическими.

Таким образом, сегнетоэлектрики представляют собой частный случай пироэлектриков, в которых спонтанную поляризацию можно обратимо изменять электрическим полем. По аналогии со свойствами ферромагнитных материалов (§ 112) сегнетоэлектрики можно назвать «мягкими» пироэлектриками. По этой же аналогии их часто называют *ферроэлектриками*.

## § 51. Пьезоэлектрический эффект

До сих пор мы рассматривали поляризацию диэлектриков, вызванную внешним электрическим полем. В некоторых кристаллах поляризация может возникнуть и без внешнего поля, если кристалл подвергается механическим деформациям. Это явление, открытое в 1880 г. Пьером и Жаком Кюри, получило название *пьезоэлектрического эффекта*.

Чтобы обнаружить пьезоэлектрические заряды, на грани кристаллической пластинки накладывают металлические обкладки. При разомкнутых обкладках между ними при деформации появляется разность потенциалов. При замкнутых обкладках на них образуются индуцированные заряды, равные по модулю поляризационным зарядам, но противоположные им по знаку, и в цепи, соединяющей обкладки, в процессе деформации возникает ток.

Рассмотрим основные особенности пьезоэлектрического эффекта на примере кварца. Кристаллы кварца  $\text{SiO}_2$  существуют в различных кристаллографических модификациях. Интересую-

щие нас кристаллы ( $\alpha$ -кварц) принадлежат к так называемой тригональной кристаллографической системе и обычно имеют форму, показанную на рис. 70. Они напоминают шестигранную призму, ограниченную двумя пирамидами, однако имеют еще ряд дополнительных граней. Такие кристаллы характеризуются четырьмя кристаллическими осями, определяющими важные направления внутри кристалла. Одна из этих осей —  $Z$  соединяет вершины пирамид. Три другие  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  перпендикулярны к оси  $Z$  и соединяют противоположные ребра шестигранной призмы. Направление, определяемое осью  $Z$ , пьезоэлектрически неактивно: при сжатии или растяжении по этому направлению никакой поляризации не происходит.

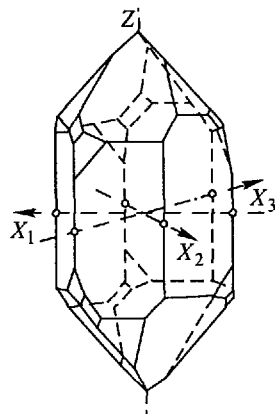


Рис. 70. Кристалл кварца

Напротив, при сжатии или растяжении в любом направлении, перпендикулярном к оси  $Z$ , возникает электрическая поляризация. Ось  $Z$  называется *оптической осью* кристалла, а оси  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  — *электрическими* или *пьезоэлектрическими осями*.

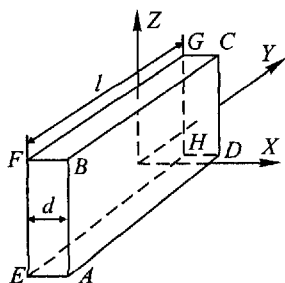


Рис 71. Кварцевая пластинка, вырезанная перпендикулярно к пьезоэлектрической оси

Рассмотрим пластинку кварца, вырезанную перпендикулярно к одной из пьезоэлектрических осей  $X$ . Ось, перпендикулярную к  $Z$  и  $X$ , обозначим через  $Y$  (рис. 71). Тогда оказывается, что при растяжении пластинки вдоль оси  $X$  на перпендикулярных к ней гранях  $ABCD$  и  $EFGH$  появляются разноименные поляризационные заряды. Такой пьезоэлектрический эффект называется *продольным*. Если изменить знак деформации, т.е. перейти от растяжения

к сжатию, то и знаки поляризационных зарядов изменятся на обратные.

Возникновение поляризационных зарядов определенных знаков при данном типе деформации (растяжение или соответственно сжатие) показывает, что концы осей  $X$  неравноправны, и осям  $X$  можно приписать определенные направления (что отмечено на рис. 70 стрелками). Это значит, что при данной деформации знак заряда зависит от того, направлена ли ось  $X$  по внешней нормали к грани или по внутренней. Такие оси с неравноправ-

ными концами получили название *полярных осей*. В отличие от полярных осей  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$ , концы оси  $Z$  совершенно равноправны и она является непольной осью.

Неравноправность концов полярной оси проявляется, конечно, не только в пьезоэлектрическом эффекте, но и в других явлениях. Так, например, скорость химического травления граней, расположенных у разных концов полярной оси, оказывается различной и получающиеся при этом фигуры травления отличаются друг от друга.

Наряду с продольным пьезоэлектрическим эффектом существует также поперечный пьезоэлектрический эффект. Он заключается в том, что при сжатии или растяжении вдоль оси  $Y$  возникает поляризация вдоль оси  $X$  и на тех же гранях  $ABCD$  и  $EFGH$  появляются поляризационные заряды. При этом оказывается, что знаки зарядов на каждой грани при сжатии вдоль  $Y$  (в поперечном эффекте) такие же, как при растяжении вдоль  $X$  (в продольном эффекте).

Пьезоэлектрический эффект объясняется следующим образом. В § 46 мы уже говорили, что в ионных кристаллах вследствие несовпадения центров положительных и отрицательных ионов имеется электрический момент и в отсутствие внешнего электрического поля. Однако эта поляризация обычно не проявляется, так как она компенсируется зарядами на поверхности. При деформации кристалла положительные и отрицательные ионы решетки смещаются друг относительно друга, и поэтому, вообще говоря, изменяется электрический момент кристалла. Это изменение электрического момента и проявляется в пьезоэлектрическом эффекте.

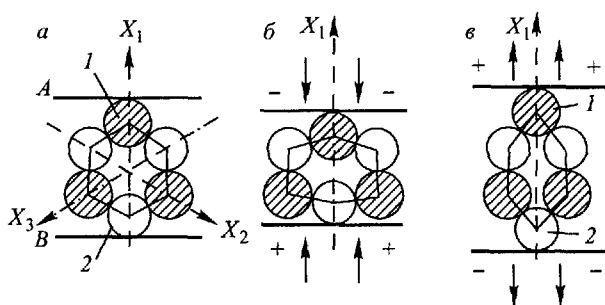


Рис. 72. К объяснению пьезоэлектрического эффекта

Рисунок 72 качественно поясняет возникновение пьезоэлектрического эффекта в кварце. Здесь схематически показаны проекции положительных ионов Si (заштрихованные кружки) и отрицательных ионов O (светлые кружки) в плоскости, перпендикулярной к оптической оси  $Z$ . Этот рисунок не соответствует

фактической конфигурации ионов в элементарной ячейке кварца, в которой ионы не лежат в одной плоскости, а их число больше показанного. Он, однако, правильно передает симметрию взаимного расположения ионов, что уже достаточно для качественного объяснения. Рисунок 72 а соответствует недеформированному кристаллу. На грани  $A$ , перпендикулярной к оси  $X_1$ , имеются выступающие положительные заряды, а на параллельной ей грани  $B$  — выступающие отрицательные заряды. При сжатии вдоль оси  $X_1$  (рис. 72 б) элементарная ячейка деформируется. При этом положительный ион 1 и отрицательный ион 2 «вдавливаются» внутрь ячейки, отчего выступающие заряды (положительный на плоскости  $A$  и отрицательный на плоскости  $B$ ) уменьшаются, что эквивалентно появлению отрицательного заряда на плоскости  $A$  и положительного заряда на плоскости  $B$ . При растяжении вдоль оси  $X_1$  имеет место обратное (рис. 72 в): ионы 1 и 2 «выталкиваются» из ячейки. Поэтому на грани  $A$  возникает дополнительный положительный заряд, а на грани  $B$  — отрицательный заряд.

Анализ симметрии в теории твердого тела в согласии с опытом показывает, что пьезоэлектрический эффект может существовать только в таких кристаллах, в которых элементарная ячейка не имеет центра симметрии. Так, например, элементарная ячейка кристаллов  $CsCl$  (рис. 65) имеет центр симметрии и эти кристаллы не обнаруживают пьезоэлектрических свойств. Расположение же ионов в ячейке кварца таково, что в нем центр симметрии отсутствует, и поэтому в нем возможен пьезоэлектрический эффект.

Из 32 кристаллографических классов симметрии 21 класс не имеет центра симметрии, однако один из них пьезоэлектрически неактивен и пьезоэлектриками являются кристаллы 20 классов.

Отметим, что для существования пьезоэлектрических свойств (§ 50) тоже необходимо отсутствие центра симметрии, но одного этого условия еще недостаточно. Поэтому пьезоэлектричество, как уже отмечалось, наблюдается только у 10 кристаллографических классов, которые относятся к числу 20 пьезоэлектрических. Следовательно, все пьезоэлектрики (включая и сегнетоэлектрики) являются и пьезоэлектриками, но не каждый пьезоэлектрик обладает пьезоэлектрическими свойствами.

Поляризованность  $P$  в широком интервале изменения пропорциональна механическим деформациям. Так, при растяжении вдоль оси  $X$  в продольном эффекте

$$P_X = \beta \frac{\Delta d}{d},$$

где  $d$  — толщина пластинки, а  $\Delta d$  — ее изменение при деформации. При растяжении вдоль оси  $Y$  при поперечном эффекте

$$P_Y = -\beta \frac{\Delta l}{l},$$

где  $l$  — длина пластинки (см. рис. 71) Величина  $\beta$  называется пьезоэлек-

трическим коэффициентом. Знак  $\beta$  может быть как положительным, так и отрицательным. Так как относительная деформация безразмерна, то величина  $\beta$  измеряется в тех же единицах, что и  $P$ , т.е. кулон на квадратный метр (Кл/м<sup>2</sup>). Поверхностная плотность пьезоэлектрических зарядов на гранях, перпендикулярных к оси  $X$ , равна  $\sigma' = P_X$ .

Пьезоэлектрический эффект возникает не только при деформации одностороннего растяжения, но и при деформации сдвига. В общем случае деформация характеризуется симметричным тензором деформации 2-го ранга. Если смещения точки среды с координатами  $x, y, z$  вдоль координатных осей  $X, Y$  и  $Z$  есть  $u, v$  и  $w$ , то компоненты тензора деформации, по определению, равны

$$u_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad u_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad u_{yz} = u_{zy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right),$$

$$u_{zx} = u_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad u_{xy} = u_{yx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Компоненты с одинаковыми индексами дают линейные растяжения вдоль координатных осей, а компоненты со смешанными индексами описывают деформации сдвига. В общем случае каждая составляющая поляризованности  $P_x, P_y$  и  $P_z$  есть линейная функция всех компонент тензора деформации.

В кристаллофизике вместо тензорных соотношений часто употребляются более простую, так называемую матричную форму записи. Для этого вводят сокращенные обозначения:

$$u_{xx} = u_1, \quad u_{yy} = u_2, \quad u_{zz} = u_3,$$

$$2u_{zy} = 2u_{yz} = u_4, \quad 2u_{zx} = 2u_{xz} = u_5, \quad 2u_{xy} = 2u_{yx} = u_6.$$

Тогда общее выражение для поляризованности принимает вид

$$P_x = \beta_{11}u_1 + \beta_{12}u_2 + \beta_{13}u_3 + \beta_{14}u_4 + \beta_{15}u_5 + \beta_{16}u_6,$$

$$P_y = \beta_{21}u_1 + \beta_{22}u_2 + \beta_{23}u_3 + \beta_{24}u_4 + \beta_{25}u_5 + \beta_{26}u_6, \quad (51.1)$$

$$P_z = \beta_{31}u_1 + \beta_{32}u_2 + \beta_{33}u_3 + \beta_{34}u_4 + \beta_{35}u_5 + \beta_{36}u_6$$

Таким образом, в общем случае пьезоэлектрический эффект описывается матрицей из 18 пьезоэлектрических коэффициентов  $\beta_{11}, \dots, \beta_{36}$ . Однако все эти коэффициенты отличны от нуля только для кристаллов наименее симметричной триклинной системы. С повышением степени симметрии кристалла увеличивается число коэффициентов, обращающихся в нуль, а отличные от нуля коэффициенты оказываются связанными друг с другом. Поэтому число независимых пьезоэлектрических коэффициентов уменьшается и тем сильнее, чем выше симметрия кристалла.

Так, например, для кварца

$$\beta_{12} = -\beta_{11}, \quad \beta_{25} = -\beta_{14}, \quad \beta_{26} = -\beta_{11}, \quad (51.2)$$

а остальные коэффициенты равны нулю. Таким образом, остается лишь пять коэффициентов, из которых независимы только два. За них принимают  $\beta_{11}$  и  $\beta_{14}$ . При выборе координатных осей так, как показано на рис 70, эти коэффициенты равны

$$\beta_{11} = +5,2 \cdot 10^4 \text{ СГСЭ} = +0,18 \text{ Кл/м}^2,$$

$$\beta_{14} = +1,2 \cdot 10^4 \text{ СГСЭ} = +0,040 \text{ Кл/м}^2.$$



Следовательно, пьезоэлектрический эффект в кварце описывается уравнениями

$$\begin{aligned} P_x &= \beta_{11}u_1 - \beta_{11}u_2 + \beta_{14}u_4, \\ P_y &= -\beta_{14}u_5 - \beta_{11}u_6, \\ P_z &= 0. \end{aligned} \quad (51.3)$$

Вследствие возникновения поляризации при деформации изменяется и электрическое смещение  $\mathbf{D}$  внутри кристалла. В этом случае в общем определении смещения (41.2) под  $\mathbf{P}$  нужно понимать сумму  $\mathbf{P}_E + \mathbf{P}_u$ , где  $\mathbf{P}_E$  обусловлено электрическим полем, а  $\mathbf{P}_u$  — деформацией:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}_E + \mathbf{P}_u. \quad (51.4)$$

Здесь поляризованность  $\mathbf{P}_u$  в общем случае определяется соотношениями (51.1). Если поляризованность в электрическом поле  $\mathbf{P}_E$  не зависит от направления  $\mathbf{E}$ , то можно ввести скалярную диэлектрическую проницаемость  $\epsilon$  (§ 42) и написать  $\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}_E = \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E}$ . Тогда

$$\mathbf{D} = \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}_u. \quad (51.5)$$

Оценим теперь порядок величины пьезоэлектрического эффекта на примере кварца. Для этого рассмотрим пластинку, вырезанную перпендикулярно к электрической оси  $X$  (см. рис. 71), и положим, что она подвергается одностороннему растяжению вдоль этой оси.

Пусть растягивающее напряжение равно  $s_1 = 10^5$  Па. Возникающая деформация равна  $u_1 = s_1/C$ , где  $C$  — модуль упругости (модуль Юнга), зависящий от направления растяжения и от того, закреплены боковые грани пластинки или свободны (зависит от граничных условий при деформации). Будем считать боковые грани пластинки свободными. Тогда при растяжении вдоль оси  $X$  для кварца  $C = 7,8 \cdot 10^{10}$  Па. Тогда деформация равна

$$u_1 = \frac{\Delta d}{d} = \frac{s_1}{C} = \frac{10^5}{7,8 \cdot 10^{10}} = 1,3 \cdot 10^{-6}.$$

Возникающая вследствие этой деформации поляризованность, согласно первому из уравнений (51.3), равна

$$P_{X1} = \beta_{11}u_1 = 0,23 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}^2.$$

Найдем теперь напряженность электрического поля, вызываемого этой поляризацией. Ее можно определить из выражения для электрического смещения. У кварца  $\epsilon$  слабо зависит от направления и можно воспользоваться формулой (51.5).

Так как объемная плотность заряда  $\rho$  внутри пластинки равна нулю, то, согласно уравнению Пуассона (14.1),  $\text{div } \mathbf{D} = 0$ , а следовательно,  $\mathbf{D} = \text{const}$ . Это значит, что возникновение в каком-либо сечении пластинки  $X = \text{const}$  поляризации  $\mathbf{P}_u$  будет сопровождаться появлением в том же сечении электрического поля  $\mathbf{E}$  противоположного направления и такой величины, чтобы изменения обоих членов в правой части формулы (51.5) компенсировали друг друга. Поэтому найденная выше поляризованность  $P_{X1} = \beta_{11}u_1$  вызовет электрическое поле

$$E_{X1} = -\frac{\beta_{11}}{\epsilon \epsilon_0} u_1. \quad (51.6)$$

Подставляя сюда для кварца  $\epsilon = 4,5$  и используя приведенные выше значения  $\beta_{11}$  и  $u_1$ , находим  $|E| = 5900$  В/м = 59 В/см. При толщине пластинки, скажем,  $d = 0,5$  см напряжение между обкладками будет  $U = Ed \approx 30$  В.

Как уже говорилось, пьезоэлектрические свойства наблюдаются, кроме кварца, у большого числа других кристаллов. Гораздо сильнее, чем у кварца, они выражены у сегнетовой соли. Сильными пьезоэлектриками являются кристаллы соединений элементов II-й и VI-й групп периодической системы (CdS, CdSe, ZnO), а также многих других химических соединений. Применяя вместо кварца более сильные пьезоэлектрики и используя должным образом выбранные типы деформаций, можно получать пьезоэлектрические напряжения, измеряемые многими тысячами вольт.

## § 52. Обратный пьезоэлектрический эффект

Наряду с пьезоэлектрическим эффектом существует и обратное ему явление: в пьезоэлектрических кристаллах возникновение поляризации сопровождается механическими деформациями. Поэтому, если на металлические обкладки, укрепленные на кристалле, подать электрическое напряжение, то кристалл под действием поля поляризуется и деформируется.

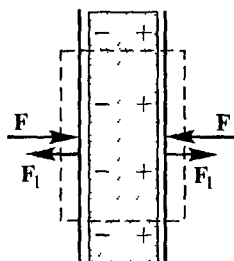


Рис. 73. Связь прямого и обратного пьезоэлектрических эффектов

Легко видеть, что необходимость существования обратного пьезоэффекта следует из закона сохранения энергии и факта существования прямого эффекта. Рассмотрим пьезоэлектрическую пластинку (рис. 73) и предположим, что мы сжимаем ее внешними силами  $F$ . Если бы пьезоэффекта не было, то работа внешних сил равнялась бы потенциальной энергии упруго деформированной

пластинки. При наличии пьезоэффекта на пластинке появляются заряды и возникает электрическое поле, которое заключает в себе дополнительную энергию. По закону сохранения энергии отсюда следует, что при сжатии пьезоэлектрической пластинки совершается большая работа, а значит, в ней возникают дополнительные силы  $F_1$ , противодействующие сжатию. Это и есть силы обратного пьезоэффекта.

Из приведенных рассуждений вытекает связь между знаками обоих эффектов. Если в обоих случаях знаки зарядов на гранях одинаковы, то знаки деформаций различны. Если при сжатии пластинки на гранях появляются заряды, указанные на рис. 73, то при создании такой же поляризации внешним полем пластинка будет растягиваться.

Обратный пьезоэлектрический эффект имеет внешнее сходство с электрострикцией (§ 45). Однако оба эти явления различны. Пьезоэффект линейно зависит от электрического поля и при изменении направления последнего на противоположное

изменяет знак. Электрострикция же пропорциональна и электрическому полю и поляризации, производимой этим же полем, т.е. пропорциональна квадрату напряженности электрического поля и поэтому не зависит от направления поля. Пьезоэффект наблюдается только в кристаллах, и притом только некоторых кристаллографических классов, не обладающих центром симметрии. Электрострикция же имеет место во всех диэлектриках — твердых, жидких и газообразных.

Будем характеризовать обратный пьезоэлектрический эффект механическими напряжениями, соответствующими возникающим деформациям. Как известно из механики, упругие напряжения в твердом теле описываются симметричным тензором 2-го ранга, имеющим шесть независимых компонент:

$$s_{xx}, \quad s_{yy}, \quad s_{zz}, \quad s_{yz} = s_{zy}, \quad s_{zx} = s_{xz}, \quad s_{xy} = s_{yx}.$$

Каждая из этих компонент выражает некоторую силу, действующую на единичную площадку внутри твердого тела. Первый индекс указывает направление внешней нормали к площадке, а второй дает координатную ось, вдоль которой рассматривается составляющая силы, действующей на площадку. Как и в случае упругих деформаций (§ 51), в кристаллофизике обычно используют упрощенную запись, обозначая:

$$\begin{aligned} s_{xx} = s_1, \quad s_{yy} = s_2, \quad s_{zz} = s_3, \\ s_{xy} = s_{yz} = s_4, \quad s_{zx} = s_{xz} = s_5, \quad s_{xy} = s_{yx} = s_6. \end{aligned}$$

Во избежание недоразумений в дальнейшем, необходимо условиться о знаке напряжений. Мы будем понимать под  $s$ , внутренние напряжения в кристалле. *Сжимающие напряжения будем считать положительными, а растягивающие — отрицательными.*

Опыт показывает, что в широком интервале изменения напряжений, компоненты тензора напряжений линейно зависят от составляющих напряженности электрического поля  $E_x$ ,  $E_y$  и  $E_z$ . Поэтому общие уравнения, описывающие линейный обратный пьезоэлектрический эффект, можно записать в виде

$$\begin{aligned} -s_1 &= \beta_{11}E_x + \beta_{21}E_y + \beta_{31}E_z, \\ -s_2 &= \beta_{12}E_x + \beta_{22}E_y + \beta_{32}E_z, \\ -s_3 &= \beta_{13}E_x + \beta_{23}E_y + \beta_{33}E_z, \\ -s_4 &= \beta_{14}E_x + \beta_{24}E_y + \beta_{34}E_z, \\ -s_5 &= \beta_{15}E_x + \beta_{25}E_y + \beta_{35}E_z, \\ -s_6 &= \beta_{16}E_x + \beta_{26}E_y + \beta_{36}E_z, \end{aligned} \tag{52.1}$$

где восемнадцать величин  $\beta_{11}, \dots, \beta_{36}$  есть те же самые пьезоэлектрические коэффициенты, которые входят в уравнения (51.1) для прямого пьезоэлектрического эффекта.

Как уже говорилось в § 51, часть пьезоэлектрических коэффициентов может быть равна нулю, и их число тем больше, чем выше симметрия кристалла. Возвращаясь опять к  $\alpha$ -кварцу, мы находим в нем только пять отличных от нуля коэффициентов, между которыми имеются соотношения (51.2). Поэтому уравнения, описывающие обратный пьезоэффект в кварце,

имеют вид

$$\begin{aligned} s_1 &= -\beta_{11}E_x, & s_2 &= +\beta_{11}E_x, & s_3 &= 0, \\ s_4 &= -\beta_{14}E_x, & s_5 &= +\beta_{14}E_y, & s_6 &= +\beta_{11}E_y. \end{aligned} \quad (52.2)$$

Уравнения (52.1) и (52.2) выражают упругие напряжения, вызываемые электрическим полем. Помимо них, в кристалле могут быть еще и напряжения, не связанные с электрическим полем, а обусловленные упругими деформациями кристалла. Полная величина упругих напряжений есть сумма обоих этих напряжений.

В формулах (51.1) и (52.1) мы выбирали в качестве независимых переменных деформации  $u_i$  и напряженность электрического поля  $E$  и считали поляризованность  $P$  и упругие напряжения  $s_k$  их функциями. Это, конечно, не обязательно, мы могли бы считать независимыми переменными другую пару величин, одна из которых — механическая, а другая — электрическая. Тогда мы получили бы тоже два линейных соотношения между  $u_i$ ,  $s_k$ ,  $E$  и  $P$ , но с другими пьезоэлектрическими коэффициентами. В зависимости от типа рассматриваемых задач удобны различные формы записи основных пьезоэлектрических соотношений.

Оценим теперь порядок величины обратного пьезоэффекта, опять на примере кварца. Положим, что пластинка толщины  $d = 0,5$  см вырезана перпендикулярно к электрической оси  $X$  и что к обкладкам пластинки приложено напряжение  $U = 10^3$  В, вызывающее электрическое поле напряженности  $E = E_X = 2 \cdot 10^5$  В/м. Пусть это поле  $E > 0$ , т.е. направлено вдоль электрической оси  $X$ . Тогда, учитывая значение  $\beta_{11}$  (§ 51), из первого уравнения (52.2), находим, что, например, сила в направлении оси  $X$  на единицу площади равна  $s_1 = -0,18 \cdot 2 \cdot 10^5 = -0,36 \cdot 10^5$  Па. Знак минус обозначает, что механическое напряжение  $s_1$  соответствует растяжению пластинки вдоль оси  $X$ .

Нетрудно видеть, что это соответствует соотношению между знаками прямого и обратного эффектов, о котором говорилось выше. Действительно, из формулы (51.6) видно, что в прямом пьезоэлектрическом эффекте для создания электрического поля  $E_{X1}$ , направленного вдоль оси  $X$ , необходимо  $u_1 < 0$ , т.е. сжатие пластинки. В обратном же эффекте, как мы видели, при том же самом направлении электрического поля пластинка будет растягиваться. Это растяжение можно найти по формуле  $u_1 \equiv \Delta d/d = s_1/C$ , где  $C = 7,8 \cdot 10^{10}$  Па есть модуль Юнга для данного направления деформации. Это дает  $u_1 = 0,46 \cdot 10^{-6}$ .

Уравнения пьезоэлектрического эффекта в некоторых специальных случаях можно представить в простой скалярной форме. А именно, во многих кристаллах можно выбрать такое направление (обычно оно совпадает с одной из осей симметрии высокого порядка), чтобы при простой деформации, скажем одностороннем растяжении  $u$  вдоль этой оси, возникающие поляризованность  $P_u$  и электрическое поле  $E$  были тоже параллельны (или антипараллельны) этой оси. В этом случае  $P_u = \beta u$  и пьезоэлектрический эффект характеризуется только одним коэффициентом  $\beta$ . Если при этом  $P_E$  и  $E$  тоже коллинеарны, то для электрического смещения вместо формулы (51.5) получаем скалярное соотношение

$$D = \epsilon \epsilon_0 E + \beta u, \quad (52.3)$$

где  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость при постоянной деформации  $u$ .

Аналогично, для единственной составляющей механического напряжения имеем

$$s = Cu - \beta E. \quad (52.4)$$

Здесь, как и раньше,  $s$  считается положительным, если оно соответствует сжатию,  $C$  — модуль Юнга для данной деформации, взятый при постоянном поле. Формулы (52.3) и (52.4) широко используются при исследовании распространения упругих волн в пьезоэлектрических кристаллах.

Пьезоэлектрический эффект проявляется и в упругих свойствах кристаллов. Поясним это с помощью простых соотношений (52.3) и (52.4). Для этого рассмотрим пластинку, вырезанную перпендикулярно к соответствующему направлению, и представим, что она испытывает растяжение  $u$  вдоль этого направления. Так как объемных зарядов в кристалле нет, то электрическое смещение при деформации остается постоянным. Поэтому, рассуждая так же, как и при получении формулы (51.6), мы найдем из формулы (52.3), что при деформации  $u$  возникает электрическое поле с напряженностью

$$E = -\frac{\beta}{\epsilon_0 \epsilon} u. \quad (52.5)$$

Подставляя это выражение в формулу (52.4), находим для механического напряжения в пластинке

$$s = Cu - \beta \left( -\frac{\beta}{\epsilon_0 \epsilon} u \right) = C \left( 1 + \frac{\beta^2}{\epsilon_0 \epsilon C} \right) u \quad (52.6)$$

Напряжение, как и в отсутствие пьезоэлектрического эффекта, пропорционально деформации. Однако упругие свойства пластинки теперь характеризуются *эффективным* модулем упругости

$$C' = C \left( 1 + \frac{\beta^2}{\epsilon_0 \epsilon C} \right), \quad (52.7)$$

который больше  $C$ . Увеличение упругой жесткости вызвано появлением добавочного напряжения при обратном пьезоэффекте, препятствующего деформации. Влияние пьезоэлектрических свойств кристалла на его механические свойства характеризуется величиной

$$K^2 = \frac{\beta^2}{\epsilon_0 \epsilon C}. \quad (52.8)$$

Квадратный корень из этой величины ( $K$ ) называется *константой электромеханической связи*. Пользуясь приведенными выше значениями  $\epsilon$ ,  $C$  и  $\beta$ , находим, что для кварца  $K^2 \approx 0,01$ . Для всех других известных пьезоэлектрических кристаллов  $K^2$  оказывается также малым по сравнению с единицей и не превышает 0,1.

Пьезоэлектрический эффект (прямой и обратный) широко применяется для устройства различных электромеханических преобразователей. Для этого иногда используют составные пьезоэлементы, предназначенные для осуществления деформаций разного типа.

На рис. 74 показан двойной пьезоэлемент (составленный из двух пластинок), работающий на сжатие. Пластинки вырезаны из кристалла таким образом, что они одновременно либо сжимаются, либо растягиваются. Если, наоборот, сжимать или растягивать такой пьезоэлемент внешними силами, то между его

обкладками появляется напряжение. Соединение пластинок в этом пьезоэлементе соответствует параллельному соединению конденсаторов.

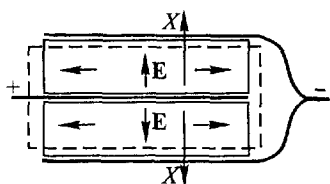


Рис 74. Двойной пьезоэлемент, работающий на сжатие

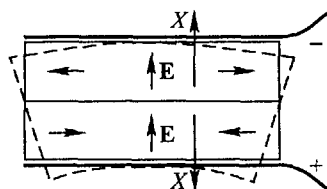


Рис 75. Двойной пьезоэлемент, работающий на изгиб

На рис. 75 показан двойной пьезоэлемент, работающий на изгиб. При появлении напряжения на обкладках одна из пластинок сжимается в поперечном направлении и удлиняется в продольном, а другая — растягивается и укорачивается, отчего и возникает деформация изгиба. Если изгибать такой пьезоэлемент внешними силами, то между его обкладками возникает электрическое напряжение. Соединение пластинок в этом случае соответствует последовательному соединению конденсаторов. Очевидно, что такой пьезоэлемент не отвечает на сжатия и растяжения: в этом случае в каждой из пластинок возникает электрическое поле, но поля направлены противоположно, и поэтому напряжение между обкладками равно нулю.

Электромеханические преобразователи находят многочисленные применения в разнообразной электроакустической и измерительной аппаратуре. Укажем на пьезоэлектрические микрофон и телефон, пьезоэлектрический адаптер (в электрических проигрывателях патефонных пластинок), манометры, измерители вибраций и др. Особенно важные применения имеют пьезоэлектрические колебания кварца. Если поместить кварцевую пластинку между пластинами конденсатора и создать между пластинами переменное напряжение, то при частоте электрических колебаний, совпадающей с одной из собственных механических частот пластинки, наступает механический резонанс и в пластинке возникают очень сильные механические колебания. Такая кварцевая пластинка является мощным излучателем волн сверхзвуковой частоты (кварцевые излучатели), используемых в технике, биологии и медицине, а также в многочисленных физических и физико-химических исследованиях. Пьезоэлектрические колебания применяются также для стабилизации частоты генераторов электрических колебаний в радиотехнике и в других технических устройствах

## Г Л А В А VI

## ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

## § 53. Характеристики электрического тока

Всякое движение электрических зарядов мы называем *электрическим током*.

В металлах могут свободно перемещаться только электроны. Поэтому электрический ток в металлах есть движение электронов проводимости. В гл. XVIII мы увидим, что в проводящих растворах нет свободных электронов, а подвижными заряженными частицами являются ионы. В газах могут существовать в подвижном состоянии и ионы, и электроны (гл. XVI).

Направлением тока условились считать направление движения положительных частиц. Поэтому направление тока в металлах противоположно направлению движения электронов.

Линии, вдоль которых движутся заряженные частицы, названы *линиями тока*. За направление линий тока принимают направление движения положительных зарядов. Прочерчивая линии тока, мы получаем сразу наглядное представление о движении электронов и ионов, образующем ток.

Если внутри проводника с током мысленно выделить трубку, у которой боковая поверхность состоит из линий тока, то заряженные частицы при движении не будут пересекать боковую поверхность трубки и не будут ни выходить из трубки наружу, ни входить извне в трубку. Такая трубка называется *трубкой тока* (рис. 76). Поверхность металлической проволоки, находящейся в изоляторе, есть одна из трубок тока.

Для количественной характеристики электрического тока служат две основные величины: *плотность тока* и *сила тока*.

Плотность тока равна заряду, проходящему в единицу времени через единицу поверхности, перпендикулярной к линиям тока.

Выделим внутри проводника площадку с  $S = 1$ , расположенную перпендикулярно к линиям тока, а значит, и перпендикулярно к направлению скорости  $v$  заряженных частиц (рис. 77). Построим на этой площадке прямоугольный параллелепипед с длиной, равной скорости движения частиц  $v$ . Тогда число частиц, которые пройдут через рассматриваемую площадку

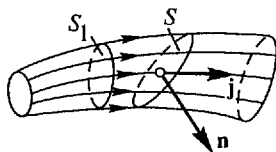


Рис 76. Трубка тока

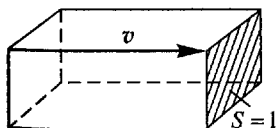


Рис. 77 К определению плотности тока

ку в единицу времени, будет равно числу частиц, заключенных внутри параллелепипеда. Если  $n$  есть концентрация заряженных частиц, то число частиц внутри параллелепипеда равно  $nv$ , а заряд, переносимый ими, есть  $nev$ , где  $e$  — заряд одной частицы (например, электрона). Поэтому плотность тока  $j$  равна

$$j = nev. \quad (53.1)$$

Так как  $n$  и  $e$  суть скалярные величины, а скорость — вектор, то можно ввести вектор плотности тока  $\mathbf{j}$ , определяемый следующим образом:

$$\mathbf{j} = nev. \quad (53.1a)$$

Так как скорость  $\mathbf{v}$  характеризует движение заряженных частиц в данной точке, то и вектор плотности тока  $\mathbf{j}$  определяет электрический ток в данной точке проводника.

Если выделить внутри проводника бесконечно малую площадку  $dS$ , перпендикулярную к вектору плотности тока  $\mathbf{j}$ , то заряд, проходящий через нее за время  $dt$ , равен

$$dq = j dS dt.$$

Если площадка  $dS$  не перпендикулярна к  $\mathbf{j}$ , то в этом выражении вместо  $j$  нужно взять составляющую плотности тока  $j_n$ , перпендикулярную к  $dS$ .

Сила тока  $i$  в каком-либо проводнике равна заряду, проходящему в единицу времени через полное сечение проводника. Если  $dq$  — заряд, прошедший через сечение проводника за время  $dt$ , то

$$i = dq/dt. \quad (53.2)$$

Так как заряд  $dq$  и время  $dt$  суть скаляры, то и сила тока есть скалярная величина.

Зная вектор плотности тока  $\mathbf{j}$  в каждой точке проводника, можно выразить через него и силу тока. Из сказанного выше следует, что

$$i = \int_S j_n dS, \quad (53.3)$$

где интегрирование производится по всей поверхности  $S$  любого сечения проводника (рис. 76).

Единицей силы тока служит ампер (А). Эта единица является одной из основных единиц системы СИ и определяется в § 83. При токе в 1 А через полное сечение проводника протекает заряд 1 Кл за время 1 с. На практике употребляют и более мелкие единицы: 1 миллиампер (мА) =  $10^{-3}$  А и 1 микроампер (мкА) =  $10^{-6}$  А.

Единица плотности тока есть ампер на квадратный метр (А/м<sup>2</sup>).



Если плотность тока и сила тока не меняются во времени, то мы говорим, что в проводнике имеется постоянный, или стационарный, ток. Для постоянного тока сила тока одинакова во всех сечениях проводника. Действительно, если бы сила тока для двух каких-либо сечений  $S$  и  $S_1$  (рис. 76) была различна, то заряд, заключенный между этими сечениями, изменялся бы во времени, так как заряд, входящий через  $S_1$ , был бы не равен заряду, выходящему через  $S$ . Но тогда изменялось бы и электрическое поле внутри проводника и ток не мог бы оставаться постоянным.

### § 54. Уравнение непрерывности

Рассмотрим внутри проводника с током какую-либо замкнутую поверхность  $S$  и будем понимать под  $j_n$  проекцию вектора плотности тока  $\mathbf{j}$  на внешнюю нормаль к элементу поверхности  $dS$ . Тогда из определения плотности тока следует, что положительный заряд, уходящий в единицу времени через всю поверхность  $S$  наружу, есть

$$\oint_S j_n dS,$$

где интегрирование проводится по всей замкнутой поверхности. Вместе с тем, согласно одному из основных законов электричества, электрические заряды сохраняются: они только перераспределяются между телами (или различными частями тела), но полная сумма возникающих положительных и отрицательных зарядов равна нулю (ср. § 6). Поэтому если  $dq/dt$  есть изменение за единицу времени положительного заряда, заключенного внутри замкнутой поверхности  $S$ , то

$$-\frac{dq}{dt} = \oint_S j_n dS. \quad (54.1)$$

Это соотношение называется *уравнением непрерывности*.

Поступая так же, как при преобразовании уравнения Пуассона (§ 14), мы можем записать уравнение (54.1) в дифференциальной форме, связывающей токи и заряды в одной и той же точке среды. Для этого рассмотрим опять бесконечно малый параллелепипед с ребрами, параллельными координатным осям  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  (см. рис. 18), и воспользуемся соотношением (51.1). Тогда, рассуждая как и в § 14, мы найдем, что правая часть формулы (54.1) равна

$$\left( \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} \right) d\tau,$$

где  $d\tau = dx dy dz$  — объем параллелепипеда. С другой стороны,

если  $\rho$  есть объемная плотность заряда, то  $q = \rho d\tau$  и мы получаем уравнение непрерывности в дифференциальной форме:

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}. \quad (54.2)$$

Отметим, что мы употребляем здесь символы частных производных, поскольку  $\rho$  и  $\mathbf{j}$  могут зависеть как от координат, так и от времени.

Пользуясь понятием дивергенции вектора (ср. § 14), уравнение (54.2) можно записать в более компактной форме:

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div} \mathbf{j}. \quad (54.3)$$

Если токи постоянны, то все электрические величины не зависят от времени и в уравнении непрерывности нужно положить  $\partial \rho / \partial t$  равным нулю. Тогда получается, что поток вектора  $\mathbf{j}$  через любую замкнутую поверхность равен нулю, а, значит, для постоянных токов линии тока непрерывны.

## § 55. Действия электрического тока

Движение электронов и ионов непосредственно невидимо. Однако это движение вызывает различные сопутствующие ему явления, по которым мы и судим о наличии тока и его величине.

**Магнитное действие тока.** Еще в 1820 г. копенгагенский профессор физики Эрстед открыл, что проводник с током вызывает появление сил, действующих на магнитную стрелку. Если

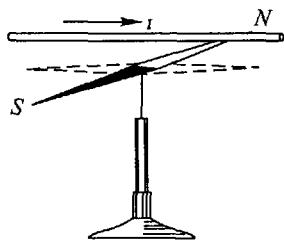


Рис. 78. Магнитное действие провода с током

расположить прямую металлическую проволоку в направлении магнитного меридиана (в направлении север — юг) и поместить под ней магнитную стрелку (рис. 78), то при соединении концов проволоки с электродами гальванического элемента магнитная стрелка отклоняется. Направление отклонения стрелки можно найти при помощи следующего правила: если положить ладонь правой руки на провод сверху и направить средние пальцы в направлении тока, то отогнутый большой палец укажет направление отклонения северного конца стрелки. Помещая магнитную стрелку над проводом, мы найдем, что отклонение стрелки изменилось на обратное.

Если заменить металлическую проволоку стеклянной трубкой, наполненной каким-либо проводящим раствором, например раствором серной кислоты в воде, и присоединить проводящий столб раствора при помощи металлических проводников, опу-

ценных в него, к полюсам батареи, то магнитная стрелка также отклоняется. Отклонение стрелки наблюдается и в том случае, если вместо проволоки использовать газоразрядную трубку (например, неоновую рекламную трубку), питаемую постоянным током. Магнитное действие наблюдается во всех случаях независимо от природы проводника и является самым общим признаком тока.

Магнитное действие тока используют для измерения силы тока с помощью магнитоэлектрических приборов. Они содержат легкую рамку с проволокой, укрепленную на упругой пружине и помещенную между полюсами магнита. В § 85 мы увидим, что в этом случае на рамку с током действует момент силы  $M$ , пропорциональной силе тока:

$$M = aI. \quad (55.1)$$

Коэффициент пропорциональности  $a$  зависит от устройства прибора (от числа витков проволоки, силы магнита и т.п.). Поэтому по отклонению рамки можно судить о силе тока. Приборы, показания которых зависят от силы тока, получили общее название гальванометров.

**Химическое действие тока.** Электрический ток может выделять в некоторых проводниках их составные химические части.

Химическое действие тока можно наблюдать в простых опытах. Опустим в водный раствор медного купороса  $\text{CuSO}_4$  две угольные пластины (рис. 79) и соединим их с полюсами батареи гальванических элементов. Через несколько минут вынем пластины из раствора. Мы обнаружим, что на пластине, соединенной с отрицательным полюсом батареи, выделился блестящий слой меди, хорошо заметный на черном фоне угля. На второй пластине, соединенной с положительным полюсом батареи, выделяется остаток  $\text{SO}_4$ . Однако, соприкасаясь с водой, он вступает во вторичную реакцию, не связанную с наличием тока, по суммарной формуле

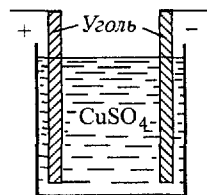
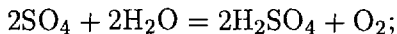
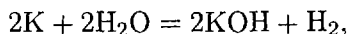


Рис 79. Разложение током медного купороса

в растворе появляется серная кислота и на пластине выделяется газообразный кислород.

В качестве второго примера рассмотрим разложение током водного раствора бромистого калия  $\text{KBr}$ . В этом случае у положительной пластины выделяется  $\text{Br}$ , который хорошо заметен вследствие своей бурой окраски. У отрицательной пластины по-

является К, который вступает во вторичную реакцию с водой



так что у отрицательной пластины выделяется вместо калия водород.

Явление выделения током химических составных частей проводника получило название электролиза (от греческого л и о — разлагаю). Электролиз имеет место не во всех проводниках. Проводники, в которых не наблюдается химическое действие тока, называются проводниками 1-го рода. К их числу принадлежат все металлы, уголь и многие химические соединения. Проводники, в которых происходит электролиз, называются проводниками 2-го рода или *электролитами*. Электролитами являются многие водные растворы кислот и солей и некоторые химические соединения как в жидком, так и в твердом состояниях.

Явление электролиза обычно осложняется вторичными реакциями, примеры которых были рассмотрены выше. Вторичные реакции не связаны с наличием тока и не имеют прямого отношения к электролизу. Если, однако, отделить первичное действие тока от вторичных реакций, то можно обнаружить простое правило на отрицательном полюсе (катоде) всегда выделяются металлы и водород, а на положительном полюсе (аноде) — остаток химического соединения. При этом составные части электролита выделяются только на электродах.

Масса любого вещества, отложившегося на электроде, всегда пропорциональна полному заряду, прошедшему через электролит.

Однако масса вещества, выделяемая единицей заряда, различна для разных веществ. Так, например, при прохождении 1 Кл через водный раствор какой-либо серебряной соли на катоде выделяется 1,1180 мг металлического серебра, а при прохождении 1 Кл через раствор медной соли выделяется 0,3294 мг металлической меди (подробнее см. § 189).

Явление электролиза используют в кулонометрах, представляющих собой электролитические ванны, включаемые последовательно в цепь тока. Одним из точных приборов является серебряный кулонометр, который имеет серебряные электроды и содержит в качестве электролита водный раствор азотнокислого серебра  $AgNO_3$ .

Кулонометры непосредственно измеряют заряд, прошедший через цепь. Если  $m$  — масса выделенного Ag в миллиграммах, а  $t$  — время пропускания тока в секундах, то сила тока в амперах равна

$$i = 1,1180m/t.$$

**Тепловое действие тока.** Электрический ток вызывает нагревание проводников. Если пропускать ток через металличе-

ский проводник, то при достаточной силе тока его можно нагреть до желаемой температуры, довести до плавления и испарить. На тепловом действии тока основано устройство тепловых гальванометров. Они содержат металлический проводник из неокисляемого упругого материала, через который пропускают измеряемый ток  $O$  силе тока судят по удлинению проводника вследствие его нагревания током.

Магнитоэлектрические и тепловые гальванометры не являются абсолютными приборами и требуют градуировки.

## § 56. Баллистический гальванометр

При помощи гальванометров можно измерить не только силу тока, но и заряд, находящийся на каком-либо конденсаторе.

Рассмотрим магнитоэлектрический гальванометр и будем считать, что трение при движении рамки настолько мало, что им можно пренебречь. Рамка является механической колебательной системой. Она имеет определенный момент инерции  $I$  и на нее действует сила упругости подвеса. Момент сил упругости подвеса  $M_{\text{п}}$  можно считать пропорциональным углу поворота рамки:

$$M_{\text{п}} = -f\alpha,$$

где  $f$  зависит от устройства подвеса или спиральных пружин. Поэтому, будучи выведена из положения равновесия, рамка совершает механические крутильные колебания с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{I/f}.$$

Положим теперь, что мы замкнули на гальванометр какой-нибудь заряженный конденсатор. Конденсатор начнет разряжаться и в гальванометре возникнет кратковременный ток (импульс тока). Будем считать, что время импульса  $\tau$  мало по сравнению с периодом колебаний рамки:  $\tau \ll T$  (баллистический режим). Тогда за все время импульса рамка не успеет заметно сместиться и все явление будет подобно явлению удара в механике.

За время  $\tau$  на рамку подействует импульс момента силы, равный, согласно (55.1),

$$\int_{\tau} M dt = a \int_{\tau} i dt = aq,$$

где  $q$  — полный заряд, прошедший через гальванометр. Поэтому рамка приобретает момент импульса

$$I\omega_0 = aq$$

( $\omega_0$  — угловая скорость рамки) и кинетическую энергию

$$W_{\text{к}} = I\omega_0^2/2.$$

После окончания импульса тока рамка начнет поворачиваться и ее кинетическая энергия будет превращаться в потенциальную энергию закрученного подвеса:

$$W_{\text{п}} = f\alpha^2/2.$$

Поэтому, если  $\alpha_m$  есть максимальный отброс, то

$$f\alpha_m^2/2 = I\omega_0^2/2.$$

Из этих уравнений находим

$$q = \frac{I\omega_0}{a} = \frac{1}{a} \sqrt{fI} \alpha_m = b\alpha_m, \quad (56.1)$$

где  $b$  — постоянная для данного прибора, называемая *баллистической постоянной*. Мы видим, что, измеряя первый максимальный отброс гальванометра, можно определить полный заряд, прошедший через гальванометр.

Баллистический метод измерения заряда весьма удобен и широко применяется на практике. Употребляемые для таких измерений гальванометры называют *баллистическими гальванометрами*. В отличие от обычных гальванометров, в которых затухание колебаний рамки должно быть значительным (чтобы время установления рамки было малым), в баллистических гальванометрах затухание делают возможно меньшим. Кроме того, для лучшего выполнения условия баллистического режима увеличивают момент инерции рамки, что обеспечивает большой период ее собственных колебаний (10–20 с).

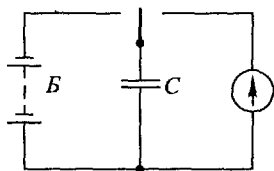


Рис. 80. Принципиальная схема для определения баллистической постоянной и для сравнения емкостей

В предыдущих рассуждениях мы не учитывали затухания колебаний рамки вследствие трения. При учете трения теория получается более сложной. Однако это не имеет особого значения, так как обычно баллистическую постоянную  $b$  определяют не расчетом, а на опыте, т.е. градуируют гальванометр на заряды. Употребляемая для этого принципиальная схема показана на рис. 80. Здесь  $C$  — конденсатор известной емкости, а  $B$  — батарея с известным напряжением  $U$ . В этом случае известен и заряд конденсатора  $q = CU$ , и поэтому, наблюдая отброс гальванометра  $\alpha_m$ , можно по формуле (56.1) найти  $b$ .

Если в схему рис. 80 один раз включить конденсатор с емкостью  $C_1$ , а другой раз — с емкостью  $C_2$ , то отношение отбросов гальванометра в обоих случаях будет равно отношению емкостей:

$$\alpha_1/\alpha_2 = C_1/C_2.$$

Поэтому баллистический гальванометр позволяет просто сравнивать емкости, причем напряжение батареи знать не нужно.

### § 57. Закон Ома

Если в проводнике имеется ток, то потенциал в различных его точках уже не одинаков. Присоединив корпус электрометра к одному из концов  $a$  проволоки  $ab$  с током, а стрелку — к какой-либо другой точке  $b$  (рис. 81), мы обнаружим, что между этими точками имеется напряжение, которое тем больше, чем ближе точка  $b$  ко второму концу проволоки. При наличии тока существует падение напряжения вдоль проводника.

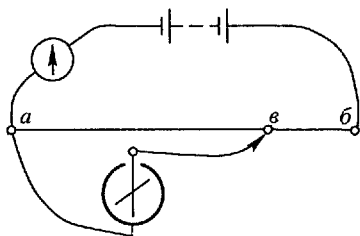


Рис. 81. Падение напряжения вдоль проводника с током

Падение напряжения, согласно § 19, означает, что существует составляющая напряженности поля  $E_t$ , направленная вдоль проводника (рис. 82). Это значит, что напряженность поля у поверхности проводника с током, а следовательно, и линии напряженности уже не перпендикулярны к поверхности проводника. Они наклонены в направлении тока на некоторый угол  $\alpha$ , причем  $\operatorname{tg} \alpha = E_n/E_t$ .

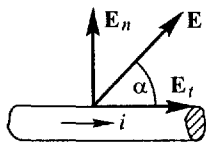


Рис. 82. Электрическое поле проводника с током

Мы видим, что для поддержания постоянного тока, т.е. движения электронов с постоянной скоростью, необходимо непрерывное действие силы (равной  $eE_t$ , где  $e$  — заряд электрона). А это значит, что электроны в проводниках движутся с трением, или, иначе говоря, что проводники обладают электрическим сопротивлением.

Если состояние проводника остается неизменным (не меняется его температура и т.д.), то для каждого проводника существует однозначная зависимость между напряжением  $U$ , приложенным к концам проводника, и силой тока  $i$  в нем:  $i = f(U)$ . Она называется *вольт-амперной характеристикой* данного проводника.

Для многих проводников, в особенности для металлов, эта зависимость особенно проста — сила тока пропорциональна приложенному напряжению, т.е.

$$i = \Lambda U. \quad (57.1)$$

Этот закон носит название *закона Ома*.

Коэффициент пропорциональности  $\Lambda$  называется *электрической проводимостью*, а величина, обратная проводимости, — *электрическим сопротивлением*. Если обозначить сопротивление проводника через  $R$ , то

$$\Lambda = 1/R. \quad (57.2)$$

Электрическая проводимость и сопротивление зависят от рода вещества проводника, от его геометрических размеров и формы, а также от состояния проводника.

Единицей сопротивления служит ом (Ом) сопротивление такого проводника, в котором при напряжении между его концами 1 В течет постоянный ток силой 1 А:

$$1 \text{ Ом} = 1 \text{ В}/1 \text{ А} = 1 \text{ В}/\text{А}.$$

Для измерения больших сопротивлений употребляют более крупные единицы: 1 килоом (кОм) =  $10^3$  Ом и 1 мегаом (МОм) =  $10^6$  Ом. Единицей электрической проводимости является сименс (См). По определению  $1 \text{ См} = 1 \text{ Ом}^{-1}$ .

На использовании закона Ома основано измерение напряжений при помощи вольтметра. Вольтметр представляет собой гальванометр, последовательно с которым со-

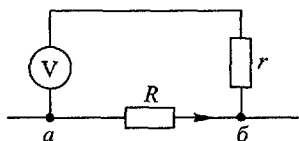


Рис 83 Вольтметр

единено большое сопротивление (рис. 83). При подключении вольтметра к каким-либо точкам  $a$  и  $b$  участка цепи в вольтметр ответвляется часть тока; сила ответвленного тока  $i$  по закону Ома пропорциональна напряжению  $U$  между этими точками:

$$i = U/r.$$

Поэтому, зная чувствительность вольтметра по току и его сопротивление  $r$ , можно определить и напряжение  $U$ . Это напряжение наносят непосредственно на шкалу прибора.

Чтобы подключение вольтметра существенно не изменяло силу тока и распределения напряжения в цепи, ток в вольтметре должен быть мал по сравнению с током в цепи, а для этого сопротивление вольтметра  $r$  должно быть велико по сравнению с сопротивлением  $R$  участка цепи  $ab$ .

## § 58. Измерение сопротивлений

Сопротивление какого-либо проводника можно измерить наиболее просто при помощи амперметра и вольтметра. Если  $i$  — сила тока в амперах, показываемая амперметром, а  $U$  — напряжение в вольтах на концах проводника, измеряемое вольтметром, то сопротивление проводника в омах равно  $R = U/i$ . При



этом предполагается, что ток, ответвляющийся в вольтметр, мал по сравнению с током в проводнике. Если током вольтметра пренебречь нельзя, то в написанной формуле под  $i$  нужно понимать ток в проводнике, равный  $i = i_A - i_V$ , где  $i_A$  — показания амперметра, и  $i_V$  — ток вольтметра. Последний можно найти по закону Ома, зная сопротивление вольтметра. Ток вольтметра можно также определить, зная чувствительность вольтметра по току, т.е. ток, соответствующий отклонению вольтметра на одно деление.

Точность этого метода определяется точностью амперметра и вольтметра и обычно бывает не очень велика ( $\sim 1\%$ ). Поэтому для точного измерения сопротивлений употребляют метод сравнения сопротивлений, не требующий измерения тока и напряжения. Это осуществляют в схеме моста, изображенной на рис. 84. Здесь  $r_1, r_2, r_3$  и  $r_4$  — четыре сопротивления, одно из которых неизвестно. Сопротивления плеч моста изменяют и подбирают их таким образом, чтобы ток гальванометра был равен нулю. В этом случае

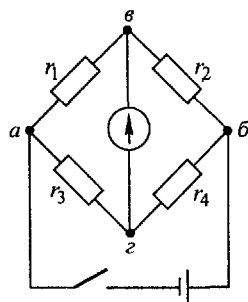


Рис 84 Схема моста сопротивлений

$$r_1/r_2 = r_3/r_4. \quad (58.1)$$

Поэтому, зная сопротивление трех плеч моста, можно определить и неизвестное четвертое сопротивление.

Условие (58.1) можно получить следующим образом. Пусть  $i_1, i_2, i_3$  и  $i_4$  — силы токов в плечах моста  $r_1, r_2, r_3$  и  $r_4$ . Если ток гальванометра равен нулю, то в точках в и г не имеется разветвления токов, и поэтому  $i_1 = i_2, i_3 = i_4$ . Напряжения между концами плеч моста:

$$\begin{aligned} U_{ав} &= i_1 r_1, & U_{вб} &= i_2 r_2 = i_1 r_2, \\ U_{аг} &= i_3 r_3, & U_{гб} &= i_4 r_4 = i_3 r_4. \end{aligned}$$

В отсутствие тока в гальванометре напряжение между точками в и г равно нулю. Это дает

$$\begin{aligned} U_{ав} &= i_1 r_1 = U_{аг} = i_3 r_3, \\ U_{вб} &= i_1 r_2 = U_{гб} = i_3 r_4. \end{aligned}$$

Деля почленно оба равенства, получим соотношение (58.1). В него входят сопротивления плеч моста, включающие в себя и сопротивления соединительных проводов. Поэтому измеряемое сопротивление и сопротивления остальных плеч моста должны быть велики по сравнению с сопротивлением соединительных проводов.

### § 59. Сопротивление проволок

В § 57 мы говорили, что сопротивление проводников зависит от их формы и размеров. Эта зависимость особенно проста, если проводники имеют форму цилиндров постоянного поперечного сечения (провода). Тогда

$$R = \rho l / S, \quad (59.1)$$

где  $l$  — длина проводника, а  $S$  — его поперечное сечение. Коэффициент пропорциональности  $\rho$  зависит от рода вещества и его состояния и называется *удельным электрическим сопротивлением* данного вещества. Величина, обратная удельному сопротивлению,  $\lambda = 1/\rho$ , получила название *удельной электрической проводимости* вещества.

Единица удельного сопротивления есть ом-метр (Ом·м). Если в (59.1) положить  $l = 1$ ,  $S = 1$ , то  $R = \rho$ . Следовательно, удельное сопротивление вещества есть сопротивление куба с ребром 1 м из данного вещества, выраженное в омах, при токе, параллельном одному из ребер куба. В табл. 3 приведены удельные сопротивления некоторых веществ при комнатной температуре.

Таблица 3

Вещество	Удельное сопротивление $\rho$ , Ом м	Вещество	Удельное сопротивление $\rho$ , Ом м
Серебро	$(1,66 - 1,63) \cdot 10^{-8}$	10%-ный водный раствор NaCl	0,0825
Медь тянущая	$1,78 \cdot 10^{-8}$	Химически чистая вода	$\sim 10^6$
Платина	$11,0 \cdot 10^{-8}$	Стекло натровое	$\sim 10^9$
Константан (сплав 60% Cu, 40% Ni)	$49,0 \cdot 10^{-8}$	Фарфор	$\sim 10^{13}$
Нихром (67,5% Ni, 15% Cr, 16% Fe, 1,5% Mn)	$110 \cdot 10^{-8}$	Янтарь, плавленный кварц	$> 10^{18}$
Графит	$\sim 3 \cdot 10^{-5}$		

Простой зависимостью (59.1) пользуются на практике для изготовления различных сопротивлений из проволок. Если сопротивления нужно изменять во время опыта, то употребляют реостаты со скользящим контактом. Они состоят из однослойной обмотки голой проволоки из сплава с высоким удельным сопротивлением (нихром, никелин), намотанной на жаростойкий изолирующий цилиндр (фарфор, стеатит), и скользящего контакта. В цепь тока включают один конец обмотки и скользящий контакт.

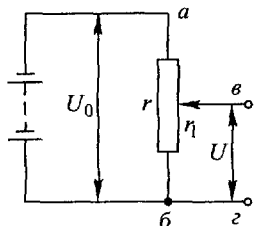


Рис 85 Делитель напряжения

В цепь тока включают один конец обмотки и скользящий контакт

На рис 85 показана схема делителя напряжения. Если  $U_0$  есть напряжение между концами реостата  $a$  и  $b$ , то напряжение  $U$  между точками  $v$  и  $z$  (разомкнутыми) равно

$$U = U_0 r_1 / r,$$

где  $r$  — полное сопротивление реостата, а  $r_1$  — сопротивление его части между зажимом  $b$  и скользящим контактом.

## § 60. Зависимость сопротивления от температуры

Удельное сопротивление зависит не только от рода вещества, но и от его состояния, в частности от температуры. Зависимость удельного сопротивления от температуры можно охарактеризовать *температурным коэффициентом сопротивления* данного вещества:

$$\alpha = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dT}. \quad (60.1)$$

Он дает относительное приращение сопротивления при увеличении температуры на один градус.

Температурный коэффициент сопротивления для данного вещества различен при разных температурах, т.е. удельное сопротивление изменяется с температурой не по линейному закону, а зависит от нее более сложным образом. Однако для многих проводников, к которым относятся все металлы, изменение  $\alpha$  с температурой не очень велико. Если интервал изменения температуры достаточно мал, то приближенно можно считать  $\alpha$  постоянным, равным среднему его значению внутри рассматриваемой области температур. Так, например, если  $\rho_0$  есть удельное сопротивление при  $0^\circ\text{C}$ , а  $\rho$  — его значение при  $t^\circ\text{C}$ , то можно положить

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t). \quad (60.2)$$

Температурный коэффициент сопротивления может быть как положительным, так и отрицательным. У всех металлов сопротивление увеличивается с увеличением температуры, а следовательно, для металлов  $\alpha > 0$ . Для многих других проводников 1-го рода наблюдается обратное и, по крайней мере в некотором температурном интервале, их сопротивление уменьшается с увеличением температуры. Наконец, у всех электролитов (проводники 2-го рода), в отличие от металлов, сопротивление при нагревании всегда уменьшается, и для них также  $\alpha < 0$ .

В табл. 4 приведены средние значения температурного коэффициента сопротивления для некоторых веществ. Для всех чистых металлов температурный коэффициент сопротивления близок к  $1/273 = 0,00367$ , т.е. к температурному коэффициенту расширения газов. Следует также отметить, что некоторые сплавы имеют весьма малое  $\alpha$ , примером чего может служить

константан. Поэтому проволоки из таких сплавов применяют для изготовления точных образцов (эталонов) сопротивлений.

Таблица 4

Вещество	Температура, °C	Температурный коэффициент сопротивления $\alpha$ , K <sup>-1</sup>
Серебро	0-100	$40 \cdot 10^{-4}$
Медь	18	$43 \cdot 10^{-4}$
Платина	0-100	$38 \cdot 10^{-4}$
Константан	18	(от -0,4 до +0,1) · 10 <sup>-4</sup> *)
10 %-ный водный раствор NaCl	18	-0,021
Графит	18	$-5 \cdot 10^{-4}$
Стекло	100	от -0,1 до -0,2

\*) В зависимости от образца.

Зависимость сопротивления металлов от температуры используют в различных измерительных и автоматических устройствах. Наиболее важным из них является термометр сопротивления. Он представляет собой сопротивление из платиновой проволоки, которое включают в схему моста в качестве одного из плеч. Сопротивление платины весьма постоянно во времени и хорошо изучено в широком интервале температур. Поэтому, измеряя сопротивление платиновой проволоки, можно очень точно измерить и температуру. Термометры сопротивления обладают тем важным достоинством, что могут служить как при очень низких, так и при высоких температурах, при которых применение обычных жидкостных термометров невозможно.

При очень низких температурах в некоторых веществах возникает удивительное состояние сверхпроводимости, в котором электрическое сопротивление исчезает вовсе. Однако этот вопрос будет рассмотрен позднее (§ 148).

## § 61. Закон Ома в дифференциальной форме

Закон Ома (57.1) и формула (59.1) позволяют найти силу тока в проволоках и вообще в тех случаях, когда трубки тока являются цилиндрами постоянного сечения. Однако часто приходится вычислять силу тока в проводящих средах, в которых трубки тока не имеют цилиндрической формы. Примерами могут служить сферический и цилиндрический конденсаторы, в которых пространство между обкладками заполнено проводящей средой. В этом случае формула (59.1) уже неприменима, так как расстояние  $l$  различно для разных точек поверхности

обкладок, а площадь  $S$  у каждой обкладки имеет разную величину.

Однако закон Ома можно представить в другой форме, которая пригодна и для решения задач о токах в проводящих средах.

Рассмотрим в однородной и изотропной проводящей среде небольшой отрезок трубки тока длины  $\Delta l$  (рис. 86) и два близких эквипотенциальных ее сечения 1 и 2. Обозначим их потенциалы через  $U_1$  и  $U_2$ , а среднюю площадь сечений — через  $\Delta S$ . Применяя к этому отрезку закон Ома (57.1) и формулу (59.1), получим

$$i = j\Delta S = \frac{U_1 - U_2}{\rho(\Delta l/\Delta S)},$$

или, сокращая на  $\Delta S$  и вводя удельную электрическую проводимость среды  $\lambda = 1/\rho$ , получим

$$j = \lambda \frac{U_1 - U_2}{\Delta l} = -\lambda \frac{U_2 - U_1}{\Delta l} = -\lambda \frac{\Delta U}{\Delta l}.$$

Чтобы последняя формула была совершенно точна, нужно перейти к пределу при  $\Delta l \rightarrow 0$ , так как только в этом случае рассматриваемый отрезок трубки можно считать цилиндрическим и применять к нему формулу (59.1). Но

$$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \left( -\frac{\Delta U}{\Delta l} \right) = -\frac{dU}{dl} = E,$$

где  $E$  — напряженность электрического поля внутри проводника. Учитывая далее, что  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{E}$  суть векторы, и что внутри изотропных сред они направлены одинаково, находим

$$\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}. \quad (61.1)$$

Это соотношение носит название *дифференциальной формы закона Ома*. В отличие от (57.1) (интегральной формы закона Ома), оно содержит величины, характеризующие электрическое состояние среды в одной и той же точке.

В анизотропных средах, каковыми, например, являются многие кристаллы, направления  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{E}$ , вообще говоря, уже не совпадают. В этом случае вместо формулы (61.1) получается более сложное соотношение.

В анизотропных средах в широкой области электрических полей линейная связь между  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{E}$  сохраняется. Поэтому дифференциальный закон Ома в общем виде выражается формулой

$$j_i = \sum \lambda_{ik} E_k,$$

где индексы  $i$  и  $k$  пробегает значения  $x, y, z$ . Девять величин  $\lambda_{ik}$  суть компоненты *тензора удельной электрической проводимости*. Этот тензор 2-го

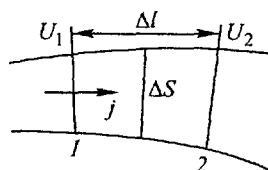


Рис. 86. К закону Ома в дифференциальной форме

ранга симметричен.  $\lambda_{ik} = \lambda_{ki}$ , и поэтому независимыми являются только шесть компонент. Так же как и в случае тензора диэлектрической проницаемости (§ 42), при выборе осей координат, совпадающих с главными осями тензора, отличны от нуля только три диагональных компонента:  $\lambda_{xx} \equiv \lambda_1$ ,  $\lambda_{yy} \equiv \lambda_2$  и  $\lambda_{zz} \equiv \lambda_3$ , которые называются *главными* значениями удельной электрической проводимости.

Поле  $\mathbf{E}$ , входящее в (61.1), есть поле внутри проводящей среды при наличии тока. Можно, однако, показать, что если проводящая среда однородна, то во всех практически интересных случаях это поле совпадает с электростатическим полем  $\mathbf{E}_{\text{ст}}$ , т.е. с полем, которое существовало бы между данными электродами, если бы между ними было то же напряжение, что и при наличии тока, а вместо проводящей среды был бы вакуум. Отсюда следует, что в однородном проводнике линии напряженности электростатического поля совпадают с линиями тока (см. Добавление 3).

Для вычисления силы тока в проводящих средах поступают следующим образом. Сначала находят по заданному напряжению между электродами напряженность поля внутри проводящей среды, т.е. решают задачу электростатики, и потом, пользуясь формулой (61.1), определяют плотность тока  $\mathbf{j}$  в каждой точке среды. Затем мысленно выделяют какую-либо замкнутую поверхность  $S$ , целиком окружающую один из электродов, и находят силу тока  $i$ , согласно (53.3), как поток вектора  $\mathbf{j}$  через эту поверхность. Разумеется, замкнутую поверхность  $S$  следует выбирать, сообразуясь с условиями симметрии задачи, чтобы вычисления были простыми.

**Пример 1. Сферический конденсатор с утечкой.** Пусть имеется сферический конденсатор, у которого пространство между обкладками заполнено веществом с удельной электрической проводимостью  $\lambda$ . Потенциал  $U$  его электрического поля нами уже вычислен, он выражается формулой (24.2). Отсюда находим напряженность поля:

$$E = -\frac{dU}{dr} = \frac{U_0}{1/a - 1/b} \frac{1}{r^2}.$$

Поэтому, согласно (61.1), плотность тока на расстоянии  $r$  от центра равна

$$j = U_0 \frac{\lambda}{1/a - 1/b} \frac{1}{r^2}.$$

В данном случае удобно выбрать в качестве поверхности  $S$  в (53.3) сферу некоторого радиуса  $r$ , проходящую между обкладками. Тогда  $j_n = j$  и, кроме того,  $j$  постоянно во всех точках сферы. Поэтому

$$i = jS = U_0 \frac{\lambda}{1/a - 1/b} \frac{1}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{4\pi\lambda}{1/a - 1/b} U_0.$$

Сила тока через конденсатор, в соответствии с (57.1), пропорциональна напряжению  $U_0$  между обкладками. Проводимость конденсатора  $\Lambda$  оказывается равной

$$\Lambda = \frac{i}{U_0} = \frac{4\pi\lambda}{1/a - 1/b}.$$

По этим формулам можно вычислить ток утечки  $i$  и сопротивление утечки  $R = 1/\Lambda$  сферического конденсатора.

**Пример 2.** *Цилиндрический конденсатор с утечкой.* В этом случае напряженность поля находим из формулы (24.4):

$$E = -\frac{dU}{dr} = -\frac{U_0}{\ln(b/a)} \frac{1}{r}.$$

Плотность тока  $j$  равна

$$j = -U_0 \frac{\lambda}{\ln(b/a)} \frac{1}{r}.$$

Так как нас не интересует направление тока, а лишь его значение, мы опустим в дальнейшем знак минус. В качестве замкнутой поверхности целесообразно выбрать цилиндр радиуса  $r$ , проходящий между обкладками. В этом случае опять  $j_n = j$  и постоянно на поверхности цилиндра. Поэтому сила тока на единицу длины конденсатора получается равной

$$\frac{i}{l} = jS = U_0 \frac{\lambda}{\ln(b/a)} \frac{1}{r} \cdot 2\pi r = \frac{2\pi\lambda}{\ln(b/a)} U_0.$$

И в данном случае, как и во всех подобных задачах, сила тока пропорциональна напряжению между обкладками. Проводимость конденсатора длины  $l$  есть

$$\Lambda = \frac{2\pi\lambda}{\ln(b/a)} l.$$

Этими формулами пользуются для вычисления тока и сопротивления утечки кабеля.

Сравнивая полученные выражения для проводимости  $\Lambda$  сферического и цилиндрического конденсаторов с выражениями для емкости  $C$  (§ 32), мы видим, что отношение этих величин равно

$$C/\Lambda = \epsilon_0 \epsilon / \lambda. \quad (61.2)$$

Оно одинаково для обоих типов конденсаторов и зависит только от свойств среды между электродами. Этот результат справедлив и в общем случае проводников произвольной формы, как угодно расположенных относительно друг друга.

Для правильности полученного результата необходимо, чтобы удельная электрическая проводимость среды была значительно меньше удельной электрической проводимости проводников.

Формула (61.2) оказывается во многих случаях полезной. Так, если нужно определить емкость какой-либо пары проводников, то вместо непосредственного измерения их емкости (что при малой ее величине не очень просто) можно поместить проводники в среду с известной величиной  $\lambda$  и измерить электрическую проводимость, после чего найти их емкость по формуле (61.2). И наоборот, полученное соотношение позволяет свести измерение электрической проводимости к измерению емкости.

## § 62. Электролитическая ванна

В § 61 мы говорили, что в однородной среде линии напряженности электростатического поля совпадают с линиями тока. На этом основан ценный практический метод экспериментального исследования электрических полей.

Если имеется какое-либо двумерное электрическое поле и желают определить на опыте его эквипотенциальные поверхности, то изготавливают металлические модели электродов, создающих поле, и помещают их в слабо проводящую среду. Модели могут и не совпадать по своим размерам с оригиналом, но должны быть им подобны и подобным образом расположены. На электроды подают напряжения, пропорциональные напряжениям на действительных электродах. Тогда распределение потенциала между моделями электродов будет подобно распределению потенциала между действительными электродами. Для измерения потенциала в различных точках среды в них помещают небольшой проводник — зонд, например в виде короткого металлического штифта. В качестве проводящей среды часто употребляют какой-либо электролит, налитый в достаточно большую ванну, отчего указанный метод получил название метода электролитической ванны.

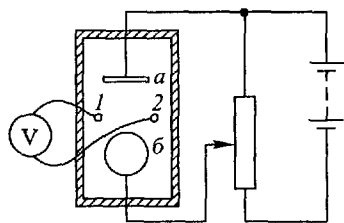


Рис 87. Простая электролитическая ванна

На рис. 87 показана схема одной из простейших электролитических ванн. В деревянный ящик, наполненный влажным песком, погружены исследуемые электроды  $a$  и  $b$ . Размеры ящика должны в несколько раз превышать расстояние между электродами. На электроды подают напряжение от батареи и делителя напряжения. В песок погружают два зонда  $1$  и  $2$ , присоединенных к зажимам вольтметра. Для определения эквипотенциальной линии один из зондов оставляют неподвижным, а другой помещают в разные точки и находят такие, для которых отклонение вольтметра равно нулю. Таким обра-



зом определяют одну из эквипотенциальных линий. Затем первый зонд помещают в другую точку, с другим значением потенциала, и при помощи второго зонда находят точки, лежащие на другой эквипотенциальной линии, и т.д. Поступая подобным образом, можно определить форму и расположение эквипотенциальных линий электрического поля данных электродов. Вместо вольтметра удобнее применять нулевой гальванометр, в котором нулевое деление расположено в центре шкалы.

Отметим, что в § 61, говоря о совпадении поля в проводящей среде с электростатическим полем, мы предполагали, что проводящая среда однородна. В электролитической же ванне мы имеем неоднородную среду, состоящую из электролита и воздуха, имеющую границу раздела между ними. Однако это не изменяет результата. Действительно, в случае цилиндрических электродов с параллельными осями (двумерное поле) все линии тока лежат в плоскостях, перпендикулярных к электродам. Но поверхность электролита есть одна из таких плоскостей. Это значит, что линии тока и напряженности не пересекают эту поверхность, а, значит, ее наличие и не искажает распределения этих линий.

Электролитическая ванна имеет большие преимущества перед электрическим зондом (§ 23). То обстоятельство, что внутри электролита текут токи, делает возможным употребление токопотребляющих вольтметров и гальванометров, которые гораздо удобнее и надежнее электрометров. Кроме того, распределение токов и напряжений в ванне нечувствительно к посторонним электростатическим влияниям. Поэтому электролитическая ванна обеспечивает наиболее простой и удобный метод исследования электрических полей и широко применяется на практике.

Если нужно произвести точные измерения, то ванна, изображенная на рис. 87, малопригодна. Один из ее недостатков заключается в том, что при постоянном токе происходит электролиз и на электродах выделяются составные части электролита (электроды поляризуются, см. § 195). В результате напряжение между электродами в течение опыта несколько изменяется и измерения становятся неточными. Чтобы избавиться от этого неудобства, применяют переменный ток. К электролитической ванне часто присоединяют еще пантограф, состоящий из системы рычагов, на одном конце которой находится зонд, а на другом — пишущее приспособление, отмечающее на листе бумаги положение зонда.

### § 63. Заземление в линиях связи

Результаты § 61 позволяют понять действие заземления в линиях связи. Схема заземления изображена на рис. 88. При сооружении телеграфных и телефонных линий прокладывают всего один провод ( $L$ ). С этим проводом соединяют лишь один полюс источника тока  $B$  отправительной станции, а второй его полюс присоединяют к металлическому листу  $Z$ , который закапывают в землю. Аппарат приемной станции (показанный на

рис. 88 в виде гальванометра) присоединяют к линии и к другому такому же листу. Роль второго провода, замыкающего цепь,

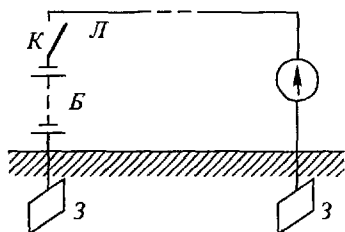


Рис 88 Заземление в линиях связи

играет земля. Существенным является то обстоятельство, что сопротивление заземления практически не зависит от расстояния между станциями. Сопротивление заземления получается сравнительно малым (в хороших заземлениях—десятки омов и омы), хотя среда между его электродами плохо проводит электричество (сухие почвы, граниты и т.п.)

Чтобы понять свойства заземления, рассмотрим электроды простой формы в виде двух одинаковых шаров радиуса  $a$  и будем предполагать, что они погружены в безграничную однородную среду с удельной электрической проводимостью  $\lambda$  (рис. 89). Среду между шарами мы можем разбить на трубки тока и рассматривать их как параллельно соединенные проводники (одна из трубок тока на рис. 89 заштрихована). Увеличивая расстояние между шарами, мы будем удлинять каждую трубку тока, отчего ее сопротивление будет увеличиваться. Однако при этом линии тока в среде будут все больше и больше удаляться от обоих шаров (в предельном случае бесконечно большого расстояния между шарами линии тока направлены вдоль радиусов шаров и уходят в бесконечность). Поэтому и сечения трубок тока, на которые мы разбили среду, будут увеличиваться, что приведет к уменьшению сопротивления каждой трубки. Физическая причина независимости сопротивления от расстояния и заключается в том, что увеличение сечения как раз компенсирует увеличение длины.

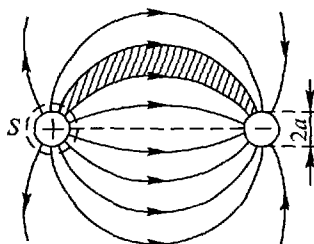


Рис. 89 К объяснению действия заземления

Вычислим сопротивление между шарами, пользуясь методом, изложенным в § 61. Окружим один из шаров замкнутой поверхностью  $S$ , вплотную прилегающей к поверхности шара, и вычислим силу тока через нее. Будем считать, что расстояние между шарами  $r \gg a$ . В этом случае можно пренебречь индукционным влиянием шаров друг на друга и считать, что заряды распределяются на шарах равномерно. Если заряды на шарах равны  $+q$  и  $-q$ , то их потенциалы (относительно бесконечности)

выражаются соотношениями

$$U_{1\infty} = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{q}{a}, \quad U_{2\infty} = -\frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{q}{a}.$$

Разность потенциалов, или напряжение между шарами, есть

$$U = U_{1\infty} - U_{2\infty} = \frac{1}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{q}{a}.$$

Поэтому напряженность поля у поверхности каждого шара, выраженная через напряжение, равна

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{q}{a^2} = \frac{U}{2a}.$$

Отсюда находим силу тока через поверхность шара:

$$i = \int_S j dS = \lambda \int_S E dS = \lambda \frac{U}{2a} \cdot 4\pi a^2 = 2\pi a \lambda U.$$

Следовательно, сопротивление  $R$  среды между шарами равно

$$R = \frac{U}{i} = \frac{1}{2\pi a \lambda}.$$

Мы видим, что сопротивление вовсе не зависит от расстояния между электродами и определяется только радиусами шаров и удельной электрической проводимостью среды.

Полученный результат легко продемонстрировать на опыте. Для этого опустим в какой-либо электролит, налитый в большую ванну, два малых металлических шарика и включим их в цепь тока, содержащую батарею и амперметр. Чтобы с электролитом соприкасалась только поверхность шариков, подводящие провода нужно изолировать стеклянными трубками. Отметим показания амперметра и будем изменять расстояние между шариками. Мы увидим, что пока расстояние между ними превышает несколько радиусов, показания амперметра практически не зависят от расстояния между шариками, а значит, и сопротивление остается постоянным. И только при сближении шариков на расстояние порядка их радиуса амперметр показывает увеличение тока.

Обращаясь вновь к рис. 89, мы видим, что густота линий напряженности велика только в непосредственной близости к шарам. Это значит, что напряженность поля значительна только вблизи шаров и, следовательно, основная часть напряжения приходится на участки среды, непосредственно прилегающие к электродам. Поэтому и сопротивление заземления практически зависит только от удельной электрической проводимости этих участков. Чтобы уменьшить сопротивление заземления, электроды закапывают на глубине подпочвенных вод, где проводимость велика вследствие растворения солей, содержащихся в земле.

## Г Л А В А VII

## ЭЛЕКТРОДВИЖУЩАЯ СИЛА

## § 64. Источники тока

Легко видеть, что нельзя получить в проводнике постоянного ток, если для создания напряжения на концах проводника пользоваться заряженными конденсаторами. Действительно, наличие тока будет всегда сопровождаться переходом зарядов с одной обкладки на другую и притом в таком направлении, что заряды обкладок будут уменьшаться. В результате будет непрерывно уменьшаться напряжение между обкладками и, согласно закону Ома (§ 57), сила тока в проводнике будет падать. Это обстоятельство является общим для любого электростатического поля: такое поле всегда перемещает заряды так, чтобы разности потенциалов уменьшались.

Для получения постоянного тока на заряды в электрической цепи должны действовать какие-либо силы, отличные от сил электростатического поля. Такие силы получили общее название *сторонних сил*. Всякое устройство, в котором возникают сторонние силы, мы называем источником тока. Источниками тока являются, например, гальванические элементы.

Если воспользоваться гидростатической аналогией, то силы электростатического поля можно уподобить силе тяжести, стремящейся выравнять уровни жидкости в сообщающихся сосудах; источник же тока можно сравнить с насосом, работающим против силы тяжести и восстанавливающим разность уровней в сосудах, несмотря на наличие тока жидкости.

Ближайшей нашей задачей будет установление количественных характеристик источников тока и выяснение связи между ними и силой тока в цепи. Мы будем считать, что источник тока есть гальванический элемент, а затем обобщим полученные результаты на случай любого источника. При разборе этих вопросов мы будем исходить из первого начала термодинамики (общего закона сохранения энергии) и рассмотрим, какие превращения энергии происходят в замкнутой цепи тока.

### § 65. Работа и мощность постоянного тока. Закон Джоуля–Ленца

Электрический ток совершает в любом участке цепи определенную работу. Пусть имеется произвольный участок цепи (рис. 90), между концами которого существует напряжение  $U$ . По определению электрического напряжения (§ 17) работа, совершаемая при перемещении единицы заряда между точками  $a$

и  $b$ , равна  $U$ . Если сила тока в участке цепи равна  $i$ , то за время  $t$  пройдет заряд  $it$ , и поэтому работа электрического тока в этом участке будет

$$A = Uit. \quad (65.1)$$

Это выражение справедливо для постоянного тока в любом случае, для какого угодно участка цепи, который может содержать проводники 1-го и 2-го рода, электромоторы и т.д. Мощность тока, т.е. работа в единицу времени, равна

$$P = A/t = Ui. \quad (65.2)$$

Формулу (65.2) используют в системе СИ для определения единицы напряжения. Единица напряжения вольт (В) есть

$$1 \text{ В} = 1 \text{ Вт}/1 \text{ А} = 1 \text{ Вт}/\text{А}.$$

Вольт — электрическое напряжение, вызывающее в электрической цепи постоянный ток силой 1 А при мощности 1 Вт.

Будем теперь считать, что участок цепи представляет собой неподвижный проводник 1-го рода. Тогда вся работа тока превращается в тепло, которое выделяется в проводнике. Если проводник однороден и подчиняется закону Ома (сюда относятся все металлы и электролиты), то  $U = ir$ , где  $r$  — сопротивление проводника. В таком случае

$$A = ri^2t. \quad (65.3)$$

Этот закон был впервые установлен на опыте Э.Х. Ленцем и, независимо от него, Джоулем.

Отметим, что нагревание проводников током находит многочисленные технические применения. Наиболее важное из них — осветительные лампы накаливания.

Современные лампы накаливания являются результатом настойчивых и длительных работ ряда ученых. Большое значение в развитии ламп накаливания имели работы А.Н. Лодыгина, который уже в 1873 г. публично демонстрировал в Петербурге различные типы своих ламп. Первые лампы Лодыгина имели форму стеклянного шара, в котором на двух медных стержнях был укреплен стерженец специального угля. В поисках способов увеличения срока службы ламп им совместно с сотрудниками была введена откатка ламп и найдены более долговечные тела накала в виде различных обугливаемых органических волокон. В 1890 г. Лодыгин ввел лампы накаливания с металлической нитью из тугоплавких металлов: вольфрама, молибдена и др. Работы Эдисона, поставленные в очень широком промышленном масштабе, привели к внедрению ламп накаливания в практику. В последнее время были сделаны только два существенных усовершенствования: тело накала стали изготавливать в виде тонкой спирали, что уменьшило теплоотдачу, и баллоны ламп начали наполнять инертным газом, чтобы иметь возможность повысить температуру нити накала без заметного ее распыления (Лэнгмюр).

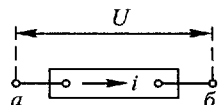


Рис. 90. К вычислению работы электрического тока

### § 66. Энергия, освобождаемая в гальваническом элементе

Когда какой-либо гальванический элемент создает в цепи ток, то внутри элемента происходят химические реакции. В большинстве элементов основная реакция состоит в соединении цинкового электрода, являющегося катодом элемента, с электролитом, и поэтому во время работы элемента расходуется металлический цинк, а в растворе появляются новые вещества — продукты реакций. В простейшем элементе Вольты (см. рис. 2) эта реакция такова:



Но опыт показывает, что при всякой химической реакции либо поглощается, либо выделяется определенное количество энергии. В дальнейшем мы будем предполагать, что химическая реакция происходит при постоянном внешнем давлении. При этом выделяется количество теплоты  $Q_x$ , равное

$$Q_x = pm, \quad (66.1)$$

где  $m$  — масса прореагировавшего вещества. Величина  $p$  определяет тепловой эффект химической реакции и указывает, какое количество теплоты выделяется при вступлении в данную реакцию единицы массы рассматриваемого вещества. Если реакция идет с выделением тепла, то  $p$  положительно, если с поглощением тепла, — отрицательно. Так, например, в указанной реакции образования серноокислого цинка при взаимодействии 1 г цинка с серной кислотой выделяется 6900 Дж, и поэтому тепловой эффект данной реакции, рассчитанный по цинку, есть  $p = 6,9 \cdot 10^6$  Дж/кг.

Энергия химических реакций и есть та энергия, которая освобождается в гальванических элементах. Ее мерой является тепловой эффект реакции.

### § 67. Электродвижущая сила гальванического элемента

Рассмотрим теперь какой-либо гальванический элемент, замкнутый на проводник с сопротивлением  $R$  (рис. 91). Будем считать, что в отсутствие тока в элементе не происходит никаких химических реакций. Это имеет место не для всех комбинаций металлов с электролитами. Так, например, в элементе Вольты цинк растворяется в серной кислоте и при разомкнутой цепи, хотя и в меньшей степени. Если же цинк покрыть слоем амальгамы цинка путем обработки его ртутью и в качестве электролита выбрать раствор хлористого цинка  $\text{ZnCl}_2$  или хлористого аммония  $\text{NH}_4\text{Cl}$ , то цинк в отсутствие тока растворяется очень медленно,

и наше предположение будет ближе к действительности. При наличии тока масса электрода, перешедшая в электролит, равна

$$m = Kq,$$

где  $K$  — электрохимический эквивалент металла электрода (ср. § 189), а  $q$  — полный заряд, прошедший через элемент. Поэтому для энергии, освобождаемой в химических реакциях у обоих электродов, имеем

$$Q_x = (p_1 K_1 + p_2 K_2)q.$$

При замкнутом элементе в цепи будет совершаться еще работа тока, которая будет превращаться в тепло Джоуля—Ленца. При этом мы должны учесть, что электрические заряды нигде не накапливаются в цепи, а, значит, ток существует не только во внешней цепи, но и внутри элемента. Гальванический элемент представляет для тока определенное сопротивление, называемое *внутренним сопротивлением*, которое складывается из

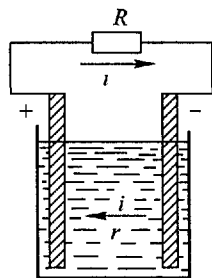


Рис. 91. Электрическая цепь с гальваническим элементом

сопротивлений электролита и электродов. Далее, будем считать, что элемент поддерживается при постоянной температуре и что мы отбираем от него только очень слабый ток (строго говоря — бесконечно слабый). В этом случае внутри элемента не будут возникать ни заметные разности концентраций в электролите, ни заметные разности температур, и состояние элемента в любой момент времени будет лишь бесконечно мало отличаться от состояния равновесия в отсутствие тока. Такой режим работы элемента часто называют *квазистатическим*. Однако если температура элемента поддерживается постоянной, то при наличии тока элемент будет передавать окружающей среде (или, наоборот, заимствовать от нее) некоторое количество теплоты  $Q_T$ , необходимое для поддержания постоянства температуры.

Применим теперь к рассматриваемой замкнутой цепи первое начало термодинамики (общий закон сохранения энергии). Тогда

$$Q_x = A + Q_T, \quad (67.1)$$

где  $A$  — работа тока. Разумеется, все входящие сюда величины должны быть выражены в одинаковых (тепловых или механических) единицах.

Рассуждая совсем точно, мы должны были бы еще учесть, что в контактах двух различных проводников в присутствии тока выделяется или поглощается (в зависимости от направления тока) дополнительное количество теплоты. Однако это так называемое тепло Пельтье (§ 200) обычно мало по сравнению с теплом химических реакций и теплом Джоуля—Ленца, и поэтому им можно пренебречь

Мы видим, что даже в квазистатическом режиме в работу тока превращается не вся энергия химических реакций, а лишь разность

$$A = Q_x - Q_T.$$

Если бы мы отбирали от элемента ток конечной силы, то внутри элемента происходили бы еще дополнительные процессы, обусловленные появлением разностей концентраций и температур, и полезная работа тока была бы еще меньше. Величина  $A$  для квазистатического процесса называется *максимальной работой* химической реакции. Максимальная работа при данной температуре представляет собой определенную долю энергии  $Q_x$  и, подобно  $Q_x$ , пропорциональна заряду, прошедшему по цепи. Поэтому можно положить

$$A = \mathcal{E}q,$$

где  $\mathcal{E}$  — максимальная работа данной химической реакции (или реакций), рассчитанная на единицу заряда. Она получила название *электродвижущей силы* гальванического элемента.

Приравнявая  $A$  полной работе тока (во внешней цепи и внутри источника), имеем

$$\mathcal{E}q = Ri^2t + ri^2t,$$

где  $r$  — внутреннее сопротивление элемента. Деля обе части равенства на заряд  $q = it$ , находим

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R+r}. \quad (67.2)$$

Полученный закон (67.2) называется *законом Ома для замкнутой цепи*. Сумму  $(R+r)$  внешнего и внутреннего сопротивлений называют *полным сопротивлением цепи*. Формула (67.2) показывает, что для всякого гальванического элемента можно ввести характерную для него величину — электродвижущую силу — таким образом, что частное от деления ее на полное сопротивление цепи будет равно силе тока в цепи.

Из (67.2) видно, что размерность  $\mathcal{E}$  совпадает с размерностью напряжения, и поэтому ЭДС выражают в тех же единицах, что и напряжение.

Максимальная работа  $A$ , так же как и энергия химических реакций  $Q_x$ , при известном прошедшем заряде зависит только от природы электродов и электролита. Поэтому и ЭДС гальванического элемента зависит только от рода веществ, входящих в его состав, и не зависит от размеров элемента. Напротив, внутреннее сопротивление элемента, как и всякого проводника, зависит от его размеров и формы.

Выше мы определили ЭДС гальванического элемента через максимальную работу химической реакции. Однако ЭДС можно выразить и непосредственно через тепловой эффект химической реакции. В термодинамике



показывается, что работа  $A$ , совершаемая в любом изотермическом квазистатическом процессе, связана с количеством теплоты  $Q_p$ , отбираемым от источника тепла, соотношением

$$A = Q_p + T \left( \frac{\partial A}{\partial T} \right)_p,$$

где индекс  $p$  указывает, что соответствующие величины измерены при постоянном внешнем давлении (формула Гиббса-Гельмгольца). Подставляя сюда вместо  $Q_p$  выражение  $Q_x$ , приведенное в тексте, и  $A = \mathcal{E}q$ , получаем

$$\mathcal{E} = (p_1 K_1 + p_2 K_2) + T \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T} \right)_p,$$

где первое слагаемое в правой части есть тепловой эффект химических реакций в элементе, рассчитанный на единицу прошедшего заряда. Это соотношение было получено Гельмгольцем и является основным в теории гальванических элементов.

Мы получили закон Ома (67.2), рассматривая источник тока в виде гальванических элементов. Однако этот закон имеет общее значение. Всякий источник тока можно охарактеризовать его электродвижущей силой таким образом, что будет справедлив закон Ома (67.2). Так как ЭДС любого источника легко измерить на опыте (§ 68), то формула (67.2) имеет большое значение и позволяет вычислить силу тока в любой цепи.

Отметим, что закон (67.2) был впервые установлен Омом на опыте совсем другим путем. Ом экспериментировал не с гальваническими элементами, а с термоэлементами, и при теоретическом объяснении закона исходил из аналогии между электрическим током и течением жидкости и тепла.

## § 68. Напряжение на зажимах источника тока

Пусть имеется цепь, содержащая источник тока, переменное внешнее сопротивление  $R$  и амперметр  $A$  (рис. 92), и положим, что мы измеряем напряжение на зажимах источника с помощью вольтметра  $V$ . Сопротивление вольтметра выберем достаточно большим, чтобы подключение вольтметра не изменяло напряжение между точками 1 и 2. Мы найдем, что напряжение, показываемое вольтметром, зависит от силы тока в цепи. Оно наибольшее при разомкнутой цепи ( $i = 0$ ) и стремится к нулю при уменьшении до нуля внешнего сопротивления  $R$  (включая и сопротивление амперметра). Напряжение на зажимах работающего источника есть величина переменная, зависящая от нагрузки источника.

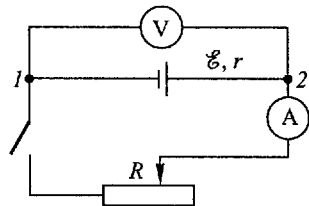


Рис. 92. Измерение напряжения на зажимах работающего источника

Объяснение этого мы находим в законе Ома. Напряжение, показываемое вольтметром, есть напряжение между точками 2 и 1. Применяя к внешней цепи  $\mathcal{E}R1$  (не содержащей ЭДС) закон Ома (57.1), имеем

$$U_{21} = Ri.$$

Но сила тока в цепи выражается законом Ома (67.2), и поэтому

$$U_{21} = R \frac{\mathcal{E}}{R+r} = \mathcal{E} \left(1 - \frac{r}{R+r}\right) = \mathcal{E} - ri. \quad (68.1)$$

Мы видим, что напряжение на зажимах меньше ЭДС на величину  $ri$ , которая есть падение напряжения внутри самого источника.

Полученная формула показывает, что чем больше внешнее сопротивление  $R$  по сравнению с внутренним сопротивлением  $r$ , тем меньше падение напряжения внутри источника и тем ближе напряжение на зажимах к ЭДС. Если  $R \gg r$  (цепь разомкнута), то  $U = \mathcal{E}$ : электродвижущая сила равна напряжению на зажимах разомкнутого источника. Это позволяет весьма просто определить ЭДС любого источника и лежит в основе всех методов измерения ЭДС.

Чтобы пояснить смысл формулы (68.1), рассмотрим распределение потенциала в цепи гальванического элемента. При разомкнутой цепи (нет тока) потенциал внутри металлических электродов, проводов и в толще электролита (где нет сторонних сил) постоянен (рис. 93 а). В тонких же пограничных слоях между

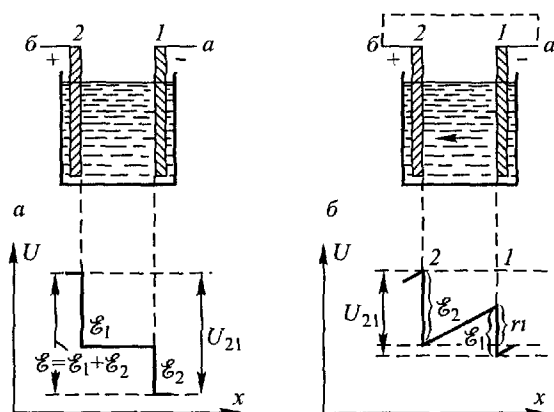


Рис 93. Распределение потенциала в цепи разомкнутого (а) и замкнутого (б) гальванического элемента

электродами и электролитом существуют сторонние силы, вызывающие быстрое изменение (скачки) потенциала  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$ . Сум-

ма этих скачков равна напряжению между электродами и представляет собой полную ЭДС элемента. При замыкании точек  $a$  и  $b$  цепи получается распределение потенциала, показанное на рис. 93 б. Из рисунка видно, что в этом случае напряжение между точками 2 и 1 (между электродами) уже не равно сумме  $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$ , а уменьшается на величину падения напряжения внутри элемента  $ri$ .

Обратим еще внимание на то, что заряды в замкнутой цепи движутся кругообразно: во внешней части цепи положительные заряды перемещаются от положительного электрода к отрицательному, а внутри источника — от отрицательного электрода к положительному. Это и понятно. Из рис. 93 б видно, что в толще электролита это соответствует движению от более высокого потенциала к более низкому, т.е. так же, как и во внешней цепи. В пограничных же слоях, где имеются скачки потенциала, положительные заряды движутся в направлении увеличения потенциала, что осуществляется с помощью сторонних сил.

Если внешнее сопротивление  $R$  намного меньше  $r$ , то из (68.1) следует, что  $U \ll \mathcal{E}$ . Если  $R \rightarrow 0$ , то и  $U \rightarrow 0$ . Случай  $R \ll r$  называют *коротким замыканием* источника. При этом сила тока, согласно (67.2), делается максимальной:

$$i_{\text{макс}} = \mathcal{E}/r \quad (68.2)$$

(ток короткого замыкания).

Мы видим, что качество источника определяется не только его ЭДС, но и внутренним сопротивлением.

Формула (68.1) связывает напряжение на участке цепи с силой тока в нем и поэтому может быть названа *законом Ома для участка с ЭДС* (рис. 94). В дальнейшем мы будем писать ее в виде

$$U_{12} = ri - \mathcal{E}. \quad (68.3)$$

Здесь  $r$  — полное сопротивление участка (сопротивление источника и проводов). При пользовании формулой (68.3) необходимо соблюдать следующее правило знаков: ток считается положительным, если он направлен от точки 1 к точке 2, ЭДС считается положительной, если, перемещаясь от точки 1 к точке 2, мы проходим источник от отрицательного полюса к положительному.

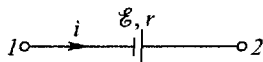


Рис. 94. Участок цепи с ЭДС

## § 69. Электродвижущая сила и работа источника тока

Понятие электродвижущей силы, введенное выше на примере гальванических элементов, можно обобщить так, чтобы оно охватывало любые источники тока. Рассмотрим произвольный

источник тока, который посылает ток во внешнюю цепь, состоящую из неподвижных проводников 1-го рода. Напишем выражение для силы тока в цепи в прежнем виде

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R + r}$$

(закон Ома для замкнутой цепи) и выясним, какой физический смысл имеет  $\mathcal{E}$  в общем случае. Умножим обе части этого равенства на  $it = q$ , где  $t$  — время протекания тока, а  $q$  — полный заряд, прошедший по цепи. Тогда

$$i^2 Rt + i^2 rt = \mathcal{E}it = \mathcal{E}q.$$

Но слева стоит полная работа, совершенная током во всей цепи, т.е. работа источника. Обозначая ее через  $A$ , получаем

$$A = \mathcal{E}it = \mathcal{E}q. \quad (69.1)$$

Следовательно, работа любого источника тока выражается произведением его ЭДС на полный заряд, прошедший по цепи.

Полагая в (69.1)  $q = +1$ , мы получим  $\mathcal{E} = A$ . Это позволяет дать определение ЭДС через работу: электродвижущая сила, действующая в какой-либо цепи, измеряется работой, совершаемой при перемещении заряда  $+1$  по этой цепи.

В § 64 мы говорили, что во всяком источнике тока на заряды обязательно действуют какие-либо силы (сторонние силы), отличные от сил электростатического поля. Работа, которая совершается в цепи с ЭДС, и есть работа сторонних сил, и поэтому ЭДС можно выразить через эти силы. Введем новую величину, которую назовем *напряженностью поля сторонних сил*. Мы определим ее как силу, действующую на заряд  $+1$ , которая обусловлена любыми причинами, кроме электростатического поля. Тогда полная сила, действующая на заряд  $+1$ , будет суммой

$$\mathbf{E} + \mathbf{E}^*,$$

где  $\mathbf{E}$  — напряженность электростатического поля, а  $\mathbf{E}^*$  — напряженность поля сторонних сил.

Рассмотрим теперь замкнутую цепь  $l$  (рис. 95) с ЭДС и предположим, что заряд  $+1$  обходит эту цепь. Тогда совершаемая работа есть

$$\oint_l (\mathbf{E}_l + \mathbf{E}_l^*) dl,$$

где индекс  $l$  обозначает проекцию соответствующей величины на направление перемещения  $dl$ , а интегрирование производится

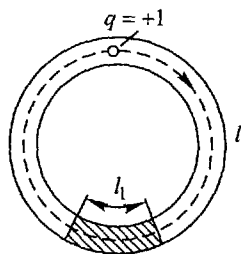


Рис 95 К определению ЭДС

по всей замкнутой цепи  $l$ . Но, согласно § 17, напряжение вдоль замкнутого контура в электростатическом поле равно нулю, т.е.

$$\oint E_l dl = 0.$$

Поэтому

$$\mathcal{E} = \oint E_l^* dl. \quad (69.2)$$

Если  $E^*$  отлично от нуля только в части цепи, например на отрезке  $l_1$  (рис. 95), то для всех других участков подынтегральное выражение в (69.2) будет равно нулю, и поэтому интегрирование можно производить только по участку цепи  $l_1$ .

Формула (69.2) дает самое общее определение ЭДС и пригодна для любых случаев. Если известно, какие именно силы вызывают движение зарядов в данном источнике, то всегда можно найти напряженность поля сторонних сил  $E^*$  и по (69.2) вычислить полную ЭДС источника. Измерить же ЭДС в любом случае можно по напряжению разомкнутого источника.

Физическая природа электродвижущих сил в разных источниках весьма различна. Так, например, в гальванических элементах — это силы молекулярного взаимодействия (§ 195), в термоэлектрических явлениях — силы давления электронного газа (§ 199), в электромагнитной индукции — силы электрического поля (однако не электростатического, а вихревого; см. § 131). Ниже будут рассмотрены подробнее причины возникновения этих сил и будет показано, как в отдельных случаях можно вычислить ЭДС

Сейчас мы ограничимся лишь одним особенно простым примером. Пусть имеется металлический диск радиуса  $a$  (рис. 96), вращающийся с угловой скоростью  $\omega$ . Диск включен в электрическую цепь при помощи скользящих контактов, касающихся оси диска и его окружности. В этом случае на каждый электрон металла действует центробежная сила, которая и является сторонней силой. Поэтому в диске появляется ЭДС и между осью диска и его наружным краем возникает напряжение. Вычислим эту ЭДС. Центробежная сила равна

$$F = mr\omega^2,$$

где  $r$  — расстояние от оси диска, а  $m$  — масса электрона. Эта сила действует на заряд электрона  $e$ , и поэтому

$$E^* = \frac{F}{e} = \frac{mr\omega^2}{e}$$

Возникающая ЭДС равна

$$\mathcal{E} = \int_0^a E^* dr = \frac{m\omega^2}{e} \int_0^a r dr = \frac{m\omega^2 a^2}{2e}$$

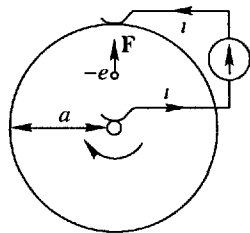


Рис 96. Пример вычисления ЭДС

Полагая  $a = 0,1$  м,  $\omega = 10^3$  рад/с,  $m = 9 \cdot 10^{-31}$  кг и  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл, находим ЭДС:

$$\mathcal{E} = \frac{9 \cdot 10^{-31} \cdot (10^3)^2 \cdot (0,1)^2}{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} \approx 3 \cdot 10^{-8} \text{ В}$$

## § 70. Разветвленные цепи. Правила Кирхгофа

До сих пор мы имели дело с простыми электрическими цепями, представляющими собой один замкнутый контур. Рассмотрим теперь более сложный случай разветвленной цепи, пример которой изображен на рис. 97. Здесь имеются точки разветвления  $A, B, C, D, F$ , где сходятся три и более проводов. Между точками разветвления находятся участки цепи  $1, 2, \dots, 7$ , которые имеют определенные сопротивления  $r_1, r_2, \dots, r_7$  и могут содержать источники с ЭДС  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_7$ . Изображенный контур может в свою очередь входить в состав более сложной цепи. Сопротивления участков и действующих в них ЭДС будем считать заданными. Задача заключается в вычислении силы тока во всех участках цепи.

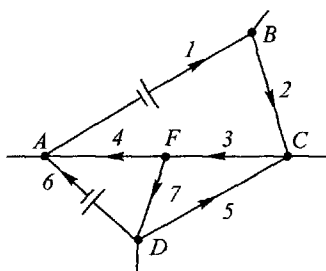


Рис. 97 Разветвленная цепь

Рассмотрим какую-либо точку разветвления, например точку  $F$ . В этой точке сходятся три участка (3, 4 и 7), в которых имеются токи  $i_3, i_4$  и  $i_7$ . Припишем этим токам определенные знаки: будем считать их положительными, если они направлены к точке разветвления ( $i_3$ ), и отрицательными, если они направлены от нее ( $i_4$  и  $i_7$ ). Выбор знаков токов произволен, и мы могли бы считать, наоборот, токи, притекающие к узлу, отрицательными, а токи, уходящие от узла, — положительными.

Алгебраическая сумма токов  $i_3 - i_4 - i_7$  есть заряд, приходящий к точке  $F$  за единицу времени. Если в данной цепи токи постоянны, то эта сумма токов должна равняться нулю, так как в противном случае потенциал рассматриваемой точки изменялся бы со временем, а значит, изменялись бы и токи в цепи. Это справедливо по отношению ко всякой точке разветвления, и поэтому для любой точки разветвления

$$\sum i_k = 0. \quad (70.1)$$

Эта формула выражает *первое правило Кирхгофа*: алгебраическая сумма сил токов в участках цепи, сходящихся в любой точке разветвления, равна нулю.

Выделим теперь в разветвленной цепи какой-либо замкнутый контур, например контур  $ABCF A$  (рис. 97). К отдельным его участкам можно применить закон Ома для участка цепи (68.3). Тогда для разности потенциалов точек  $A$  и  $B$  имеем

$$U_{AB} = U_A - U_B = i_1 r_1 - \mathcal{E}_1.$$

Аналогично для других участков:

$$U_B - U_C = i_2 r_2 - \mathcal{E}_2,$$

$$U_C - U_F = i_3 r_3 - \mathcal{E}_3,$$

$$U_F - U_A = i_4 r_4 - \mathcal{E}_4.$$

Складывая почленно эти равенства, мы найдем, что сумма левых частей равна нулю, откуда

$$i_1 r_1 + i_2 r_2 + i_3 r_3 + i_4 r_4 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_4.$$

Подобное соотношение мы получим для любого замкнутого контура, и поэтому

$$\sum i_n r_n = \sum \mathcal{E}_n. \quad (70.2)$$

Написанное соотношение выражает *второе правило Кирхгофа*. Каждое из произведений  $i r$  определяет разность потенциалов, которая существовала бы между концами соответствующего участка, если бы ЭДС в нем была равна нулю, т.е. это произведение есть падение напряжения, вызываемое током. Поэтому второе правило Кирхгофа можно выразить следующим образом: для любого замкнутого контура сумма всех падений напряжения равна сумме всех электродвижущих сил в этом контуре.

Правила Кирхгофа не выражают новых свойств электрического поля. Выше мы видели, что первое правило обозначает не что иное, как условие стационарности токов. Второе правило вытекает из того, что электрическое напряжение по замкнутому контуру равно нулю, а значит, это правило есть следствие основного свойства электростатического поля, согласно которому работа при движении заряда по замкнутому контуру равна нулю (§ 17).

Однако оба правила Кирхгофа весьма полезны при решении задач на разветвленные цепи. Применяя эти правила к точкам разветвления и к различным замкнутым контурам, входящим в состав сложной цепи, мы получаем уравнения для определения всех неизвестных токов. Можно показать, что получаемое при этом число независимых уравнений всегда равно числу неизвестных токов, и поэтому оба правила Кирхгофа дают общий метод решения задач на разветвленные цепи.

При составлении уравнений с помощью правил Кирхгофа (70.1) и (70.2) следует тщательно соблюдать правило знаков, приведенное в § 68. Так, например, в цепи рис. 97 ЭДС в участ-

ке 1 следует брать со знаком плюс, а ЭДС в участке б — со знаком минус.

В связи с этим правилом знаков может возникнуть кажущееся затруднение при составлении уравнений. Ведь направления отдельных токов заранее неизвестны и должны быть найдены из решения задачи, тогда как само составление уравнений требует знания этих направлений. Однако на самом деле этой трудности не существует. При составлении уравнений можно с самого начала произвольно выбрать для каждого участка некоторые направления токов и считать их положительными. Иными словами, можно сначала произвольно предположить, что токи в участках текут в определенных направлениях, и в соответствии с этим применить правило знаков для ЭДС. Действительное направление токов определится решением задачи: если какой-либо ток окажется положительным, то, значит, его направление совпадает с предположенным; если он окажется отрицательным, то, значит, в действительности он направлен противоположно принятому положительному направлению.

Отметим в заключение, что метод Кирхгофа приводит к необходимости решать систему алгебраических уравнений первого порядка. Для сложных цепей это требует вычисления детерминантов высокого порядка, что весьма кропотливо. Поэтому были предложены различные вспомогательные приемы, позволяющие уменьшить число уравнений системы. Один из них рассмотрен в Добавлении 4.

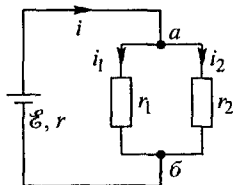


Рис. 98. Параллельное соединение сопротивлений

Вычислим силу тока в цепи. Выберем положительные направления токов так, как показано на рисунке. Тогда первое правило Кирхгофа для точки а дает

$$i - i_1 - i_2 = 0.$$

Применяя второе правило Кирхгофа к контурам  $ar_2бr_1$  и  $ar_1бEa$  и обходя их по часовой стрелке, имеем

$$-r_1 i_1 + r_2 i_2 = 0, \quad r i + r_1 i_1 = E.$$

Мы получили три уравнения для определения трех неизвестных токов, и легко убедиться, что больше независимых уравнений нет.

Исключим из первых двух уравнений ток  $i_1$ . Это дает соотношение

$$i_2/i = r_1/(r_1 + r_2).$$

Исключая из тех же уравнений ток  $i_2$ , найдем аналогично

$$i_1/i = r_2/(r_1 + r_2).$$



Поэтому

$$i_1/i_2 = r_2/r_1.$$

Отношение сил токов в двух проводниках, соединенных параллельно, обратно пропорционально отношению их сопротивлений.

Подставляя выражение для  $i_1$  в третье уравнение системы, находим

$$i[r + r_1 r_2 / (r_1 + r_2)] = \mathcal{E}.$$

Сравнивая полученное выражение с законом Ома (67.2), мы видим, что оба параллельно соединенных проводника имеют сопротивление

$$R = r_1 r_2 / (r_1 + r_2).$$

Полученный результат можно записать в более удобном виде

$$1/R = 1/r_1 + 1/r_2.$$

Если бы мы рассмотрели не два проводника, а какое угодно их количество, то результат был бы аналогичен:

$$\frac{1}{R} = \sum \frac{1}{r_n}. \quad (70.3)$$

Участок цепи, составленный из параллельно соединенных проводников, имеет проводимость, равную сумме проводимостей отдельных проводников.

Параллельное соединение сопротивлений используют при устройстве шунта в измерительных приборах. Пусть требуется измерить силу тока в какой-либо цепи при помощи амперметра, который рассчитан на меньшую силу тока. В этом случае параллельно амперметру включают сопротивление  $r$  (рис. 99), называемое *шунтом*. Тогда, согласно полученным выше результатам, сила тока в цепи  $i$  связана с током амперметра  $i_A$  соотношением

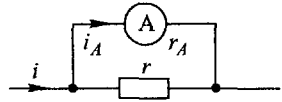


Рис. 99. Шунт

называется *шунтом*. Тогда, согласно полученным выше результатам, сила тока в цепи  $i$  связана с током амперметра  $i_A$  соотношением

$$i = i_A(r + r_A)/r,$$

где  $r_A$  — сопротивление амперметра. Так, например, если при помощи амперметра, рассчитанного на токи до 10 А, нужно измерять токи силой до 100 А, то должно быть  $(r + r_A)/r = 10$ , откуда  $r = r_A/9$ .

**П р и м е р 2.** *Соединение источников тока.* Пусть  $n$  одинаковых источников соединены последовательно и замкнуты на внешнюю цепь (рис. 100). Обозначим ЭДС каждого источника через  $\mathcal{E}_1$ , его внутреннее сопротивление через  $r_1$ , а сопротивление внешней цепи — через  $R$ . Тогда второе правило Кирхгофа дает

$$i(nr_1 + R) = n\mathcal{E}_1.$$

Сравнивая эту формулу с законом Ома (67.2), мы видим, что батарея действует как один источник тока, у которого ЭДС  $\mathcal{E}$  и внутреннее сопротивление  $r$  имеют значения

$$\mathcal{E} = n\mathcal{E}_1, \quad r = nr_1.$$

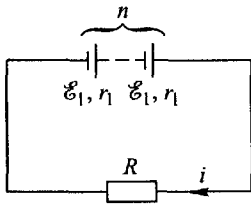


Рис. 100. Батарея из  $n$  последовательно соединенных источников тока, питающих нагрузку  $R$

При последовательном соединении  $n$  одинаковых источников тока ЭДС батареи и ее внутреннее сопротивление в  $n$  раз больше, чем у одного источника.

Рассмотрим теперь параллельное соединение, показанное на рис. 101. В этом случае все положительные полюсы отдельных источников и все отрицательные полюсы соединяются между собой и образуют два полюса  $a$  и  $b$  батареи. Выберем положительные направления токов, как показано на рис. 101, и применим к изображенной цепи оба правила Кирхгофа. Первое правило для точки  $a$  дает

$$i = i_1 + i_2 + \dots + i_m.$$

Применяя второе правило к отдельным простым контурам цепи, получаем

$$r_1 i_1 - r_1 i_2 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_1 = 0,$$

$$r_1 i_2 - r_1 i_3 = 0,$$

$$\dots$$

$$r_1 i_{m-1} - r_1 i_m = 0,$$

$$Ri + r_1 i_m = \mathcal{E}_1.$$

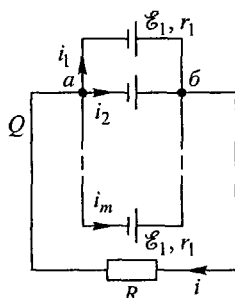


Рис. 101. Батарея из  $m$  параллельно соединенных источников тока, питающих нагрузку  $R$

Из этих уравнений (кроме последнего) находим

$$i_1 = i_2 = i_3 = \dots = i_m = i/m;$$

последнее уравнение дает

$$(R + r_1/m) = \mathcal{E}_1.$$

Отсюда видно, что такая батарея действует как один источник, для которого

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1, \quad r = r_1/m.$$

При параллельном соединении  $m$  одинаковых источников тока ЭДС батареи равна ЭДС одного источника, а внутреннее сопротивление батареи в  $m$  раз меньше, чем у одного источника.

На рис. 102 показано смешанное соединение источников. Такая батарея состоит из  $m$  параллельно соединенных звеньев, в каждом из которых имеется  $n$  последовательно соединенных источников. Легко сообразить, что ЭДС и внутреннее сопротивление этой батареи имеют значения  $\mathcal{E} = n\mathcal{E}_1$ ,  $r = r_1 n/m$ .

Пользуясь соединением источников в батарее, можно изменять ЭДС и внутреннее сопротивление в широких пределах и осуществлять такие их значения, которые необходимы для питания данной внешней цепи.

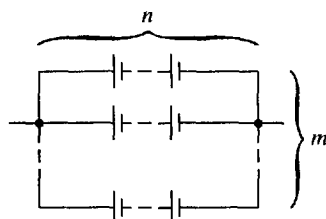


Рис. 102. Смешанное соединение источников тока в батарею

**Пример 3. Компенсационный метод измерения ЭДС.** Рассмотрим важный метод измерения ЭДС при помощи компен-

сации. Схема этого метода показана на рис. 103. Два источника с ЭДС  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{E}'$  включены навстречу друг другу. Сопротивления  $r_1$  и  $r_2$  — переменные, причем все время выполняется условие

$$r_1 + r_2 = R = \text{const.}$$

Если можно ограничиться не очень высокой точностью ( $\sim 1\%$ ), то осуществляют оба сопротивления  $r_1$  и  $r_2$  в виде однородной проволоки, натягиваемой между точками  $a$  и  $b$ , а точка  $v$  определяется скользящим контактом. В точных измерениях сопротивления  $r_1$  и  $r_2$  представляют собой магазины сопротивлений.

Выберем положительные направления токов, как показано на рисунке, и применим к рассматриваемой схеме правила Кирхгофа. Первое правило для точек  $a$  и  $v$  дает

$$i_1 - i - i' = 0.$$

Второе правило для контуров  $a\mathcal{E}bva$  и  $a\mathcal{E}'va$  приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} ir + i(R - r_1) + i_1 r_1 &= \mathcal{E}, \\ i' r' + i_1 r_1 &= \mathcal{E}'. \end{aligned}$$

Эти уравнения вполне определяют все неизвестные токи. Однако мы ограничимся частным случаем и предположим, что сопротивления  $r_1$  и  $r_2$  подобраны таким образом, что ток в цепи гальванометра  $i' = 0$ . В этом случае написанные уравнения дают

$$i_1 = i, \quad i(R + r) = \mathcal{E}, \quad i r_1 = \mathcal{E}'.$$

Из двух последних уравнений находим

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E} \frac{r_1}{R + r}.$$

Предположим теперь, что вместо источника с ЭДС  $\mathcal{E}'$  мы включили в схему другой источник с ЭДС  $\mathcal{E}''$  и изменением переменных сопротивлений вновь добились компенсации. Пусть для этого вместо сопротивления  $r_1$  потребовалось ввести сопротивление  $r_1''$ . Тогда

$$\mathcal{E}'' = \mathcal{E} \frac{r_1''}{R + r}.$$

Деля почленно оба последних равенства друг на друга, находим

$$\frac{\mathcal{E}''}{\mathcal{E}'} = \frac{r_1}{r_1''}.$$

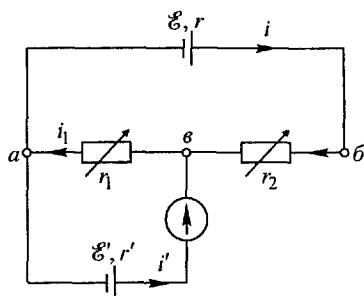


Рис. 103. Принципиальная схема потенциометра

Это равенство и лежит в основе сравнения ЭДС при помощи метода компенсации.

Отметим, что отношение сравниваемых ЭДС не зависит во все от внутренних сопротивлений источников и от других сопротивлений схемы и определяется только сопротивлениями участка цепи, к которому подключаются сравниваемые источники. Не требуется знать и ЭДС вспомогательного источника  $\mathcal{E}$ , которая только должна быть достаточно постоянна во время измерения и должна быть больше обеих сравниваемых ЭДС  $\mathcal{E}'$  и  $\mathcal{E}''$ . Для измерения ЭДС этим методом в качестве одного из сравниваемых источников выбирают нормальный элемент (§ 22), ЭДС которого известна очень точно.

Для практического измерения ЭДС компенсационным методом служат потенциометры, устроенные в принципе по схеме рис. 103. Переменные сопротивления  $r_1$  и  $r_2$  выполняются в них обычно в виде точных магазинов сопротивления с кнопочными контактами и спаренными рукоятками и увеличение одного из сопротивлений автоматически сопровождается соответствующим уменьшением другого.

## § 71. Мощность во внешней цепи и коэффициент полезного действия источника тока

Рассмотрим теперь практически важный вопрос об использовании энергии источника тока.

Пусть какой-либо источник с ЭДС  $\mathcal{E}$  и внутренним сопротивлением  $r$  замкнут на внешнюю цепь с сопротивлением  $R$ . Во внешней цепи будет выделяться мощность  $P_a$ , равная

$$P_a = Ui = Ri^2 = \mathcal{E}^2 \frac{R}{(R+r)^2}.$$

Предположим теперь, что мы желаем получить во внешней цепи максимальную мощность  $(P_a)_{\text{макс}}$ , возможную при данном источнике, и для этого меняем внешнее сопротивление  $R$ . Значение  $R = R_m$ , соответствующее максимальной мощности, мы получим, дифференцируя выражение  $P_a$  по  $R$  и приравнявая первую производную нулю. Это дает

$$\frac{dP_a}{dR} = \mathcal{E}^2 \frac{r^2 - R_m^2}{(r + R_m)^4} = 0,$$

откуда, учитывая, что  $r$  и  $R$  всегда положительны, получаем

$$R_m = r.$$

Мощность, выделяемая во внешней цепи, достигает наибольшего значения, если сопротивление внешней цепи равно внутреннему сопротивлению источника. При этом ток в цепи равен  $\mathcal{E}/2r$ , т. е. половине тока короткого замыкания, а наибольшее возможное значение мощности есть

$$(P_a)_{\text{макс}} = \mathcal{E}^2/4r.$$

Однако при практическом использовании источников тока важна не только мощность, но и их коэффициент полезного действия (КПД). Когда источник работает на внешнюю цепь, то ток протекает также и внутри источника, и поэтому некоторая мощность тратится бесполезно на выделение тепла внутри источника. Эта мощность имеет значение

$$P_i = ri^2,$$

тогда как полная мощность источника

$$P = Ri^2 + ri^2 = \mathcal{E}i.$$

Поэтому КПД источника равен

$$\eta = P_a/P = U/\mathcal{E}.$$

Так как всегда  $U \leq \mathcal{E}$ , то и  $\eta \leq 1$ .

Рассмотрим подробнее, как зависят  $P_a$  и  $\eta$  от силы тока  $i$ , отбираемой от источника. Полезную мощность  $P_a$  можно представить в следующем виде:

$$P_a = P - P_i = \mathcal{E}i - ri^2.$$

Мощность во внешней цепи  $P_a$  меняется с изменением  $i$  по параболическому закону;  $P_a$  обращается в нуль, если

$$i(\mathcal{E} - ri) = 0.$$

Это дает два значения тока:  $i_1 = 0$  и  $i_2 = \mathcal{E}/r$ . Первое решение соответствует разомкнутой цепи ( $R \gg r$ ), а второе — короткому замыканию ( $R \ll r$ ).

Зависимость КПД от силы тока выражается следующей формулой:

$$\eta = P_a/P = (\mathcal{E}i - ri^2)/\mathcal{E}i = 1 - ri/\mathcal{E}.$$

КПД достигает наибольшего значения  $\eta = 1$  в случае разомкнутой цепи и затем уменьшается по линейному закону, обращаясь в нуль при коротком замыкании

Зависимость  $P$ ,  $P_a$  и  $\eta$  от силы тока  $i$  изображена графически на рис. 104. Мы видим, что условия получения наибольшей полезной мощности  $P_a$  и наибольшего КПД  $\eta$  несовместимы. Когда  $P_a$  достигает наибольшего значения, сила тока равна  $\mathcal{E}/2r$  и КПД  $\eta = 1/2$ , или 50%. Когда же КПД  $\eta$  близок к единице, полезная мощность  $P_a$  мала по сравнению с максимальной мощностью  $(P_a)_{\text{макс}}$ , которую мог бы развить данный источник.

В силовых электрических установках важнейшим требованием является получение высокого КПД. А для этого должно быть

$$\frac{ri}{\mathcal{E}} = \frac{ri}{(R+r)i} = \frac{r}{R+r} \ll 1,$$

т.е. внутреннее сопротивление  $r$  источника должно быть мало по сравнению с сопротивлением  $R$  нагрузки (сети). При этом мощность  $P_i$ , выделяемая внутри источника, мала по сравнению с полезной мощностью  $P_a$  в нагрузке.

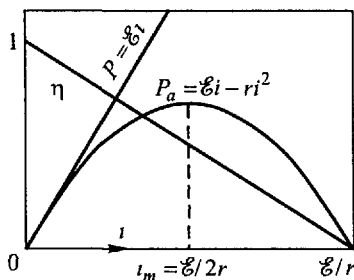


Рис. 104. Зависимость мощности источника  $P$ , мощности во внешней цепи  $P_a$  и КПД источника  $\eta$  от силы тока

В случае короткого замыкания, как мы видели выше,  $R_a = 0$  и вся мощность выделяется внутри источника, что может привести к перегреву внутренних частей источника и выходу его из строя. По этой причине короткие замыкания мощных источников (генераторы постоянного тока, аккумуляторные батареи) недопустимы.

## § 72. Закон сохранения энергии для электрического поля

Закон сохранения энергии есть общий закон природы, и поэтому он применим и к электрическим явлениям. При разборе превращений энергии в электрическом поле удобно различать два случая: 1) заряды проводников не изменяются (т.е. проводники изолированы) и 2) потенциалы проводников не изменяются (проводники присоединены к источникам тока). Рассмотрим сначала второй случай.

Положим, что мы имеем систему тел (проводников и диэлектриков) и даем возможность этим телам совершить бесконечно малые и бесконечно медленные (квазистатические) возможные перемещения. Температуру тел будем поддерживать постоянной, для чего потребуется отводить тепло от тел, если оно выделяется, или сообщать его телам, когда оно поглощается. Диэлектрики будем считать изотропными и слабо сжимаемыми и соответственно плотность их постоянной. При этих условиях доля внутренней энергии тел, не связанная с электрическим полем, не будет изменяться. Кроме того, диэлектрическая проницаемость диэлектриков (которая зависит от плотности и температуры) тоже будет оставаться постоянной. Посмотрим, какие превращения энергии будут происходить в рассматриваемой системе.

На всякое тело, находящееся в электрическом поле, действуют силы. Эти силы называют иногда *пондеромоторными* силами поля, т.е. действующими на тела, в отличие от электродвижущих сил неэлектростатического происхождения, действующих на заряды внутри тел. При бесконечно малом перемещении тел пондеромоторные силы поля произведут бесконечно малую работу, которую мы обозначим через  $\delta A$ .

Далее, в § 37 мы видели, что электрическое поле заключает в себе определенную энергию. Если тела перемещаются, то электрическое поле между ними изменяется, а следовательно, и его энергия также изменяется. Обозначим увеличение энергии поля при бесконечно малом перемещении тел через  $dW$ .

При перемещении проводников изменяется их взаимная емкость, и поэтому, чтобы их потенциалы оставались постоянными, к проводникам нужно либо подводить, либо убирать с них некоторые заряды. Тогда каждый из источников тока совершит работу  $\mathcal{E} dq = \mathcal{E} i dt$ , где  $\mathcal{E}$  — ЭДС источника,  $i$  — сила тока в

нем, а  $dt$  — время перемещения. При этом в рассматриваемой системе тел появятся электрические токи и в каждой ее части будет выделяться соответствующее тепло Джоуля–Ленца  $ri^2 dt$ . Вследствие закона сохранения энергии работа всех источников тока должна быть равна механической работе сил электрического поля + увеличение энергии электрического поля + тепло Джоуля–Ленца:

$$\sum \mathcal{E}_i dt = \delta A + dW + \sum ri^2 dt. \quad (72.1)$$

Если все проводники и диэлектрики неподвижны, то  $\delta A = dW = 0$  и вся работа источников тока превращается в тепло.

Рассмотрим теперь другой случай, когда не изменяются заряды проводников. Здесь источники тока не входят в рассматриваемую систему, и поэтому левая часть в формуле (72.1) равна нулю. Кроме того, тепло Джоуля–Ленца (которое может возникать в результате перераспределения зарядов в телах при их перемещении) обычно пренебрежимо мало по сравнению с другими слагаемыми. Тогда закон сохранения энергии дает

$$\delta A + dW = 0. \quad (72.2)$$

В этом случае механическая работа сил электрического поля равна уменьшению энергии электрического поля.

Пользуясь законом сохранения энергии, во многих случаях можно вычислить механические силы в электрическом поле гораздо проще, чем непосредственно рассматривая действие поля на отдельные части тел. Для этого поступают следующим образом. Если нужно найти силу  $\mathbf{F}$ , действующую на какое-либо тело в поле, то предполагают, что это тело совершает какое-либо малое возможное перемещение  $d\mathbf{r}$ . Тогда работа неизвестной силы будет  $\mathbf{F} d\mathbf{r} = F_r dr$ . Потом вычисляют все остальные изменения энергии, вызванные этим перемещением, и затем из закона сохранения энергии (72.1) или (72.2) находят проекцию неизвестной силы  $F_r$  на направление  $d\mathbf{r}$ . Выбирая рассматриваемые перемещения параллельными координатным осям, можно найти составляющие силы по этим осям, а значит, определить неизвестную силу по модулю и направлению.

**Пример 1.** Вычислим силу притяжения  $\mathbf{F}$  между пластинами плоского конденсатора, находящегося в однородном и изотропном диэлектрике с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Диэлектрик будем представлять себе в виде жидкости, которая при перемещении пластин может входить в конденсатор или выходить из него. Пластины отключены от источника.

Из соображений симметрии ясно, что в данном случае сила может быть только перпендикулярна к поверхности пластин, и поэтому возможное перемещение следует выбирать по нормали к пластинам.

Если расстояние между пластинами уменьшается на  $dx$ , то механическая работа равна

$$\delta A = F dx$$

Изменение энергии поля

$$dW = -(\epsilon\epsilon_0 E^2/2)S dx$$

и уравнение (72.2) дает

$$F = (\epsilon\epsilon_0 E^2/2)S.$$

Таким образом, сила, действующая на единицу поверхности пластины (механическое напряжение), равна

$$f = F/S = \epsilon\epsilon_0 E^2/2, \quad (72.3)$$

т.е. объемной плотности энергии электрического поля.

Если бы между пластинами был вакуум ( $\epsilon = 1$ ), то сила была бы равна

$$F_0 = (\epsilon_0 E^2/2)S.$$

При заполнении конденсатора, отключенного от источника, диэлектриком напряженность поля внутри диэлектрика уменьшается в  $\epsilon$  раз, а, следовательно, сила притяжения изменяется в  $\epsilon(1/\epsilon)^2 = 1/\epsilon$  раз, т.е. становится в  $\epsilon$  раз меньше.

Отметим, что полученный результат на первый взгляд кажется непонятным. Действительно, ведь заряды обкладок находятся вне диэлектрика, где напряженность поля такая же, как и в вакууме, и поэтому неясно, почему же сила взаимодействия уменьшается в  $\epsilon$  раз. Объяснение заключается в том, что в случае жидких и газообразных диэлектриков появляются еще силы электрострикции (§ 45), которые расталкивают пластины конденсатора. Результирующая сила равна разности между силой электростатического притяжения между пластинами (которая не изменяется при введении диэлектрика) и силой электрострикции. Закон сохранения энергии автоматически учитывает все силы, действующие в системе, и показывает, что эта результирующая сила уменьшается в  $\epsilon$  раз. Если бы между диэлектриком и пластинами конденсатора был хотя бы очень тонкий зазор, то силы электрострикции не передавались бы пластинам и сила взаимодействия между ними не менялась бы при введении диэлектрика.

П р и м е р 2. Рассмотрим плоский конденсатор, частично погруженный в жидкий диэлектрик (рис. 105). При зарядке пластин на жидкость в области неоднородного поля действуют силы (§ 38) и жидкость втягивается в конденсатор. Вычислим силу  $f$ , с которой электрическое поле действует на каждую единицу горизонтальной поверхности

Рис. 105. Втягивание жидкого диэлектрика в электрическое поле

жидкости. При расчете будем считать, что пластины присоединены к источнику напряжения, а, следовательно, напряжение  $U$  и напряженность поля  $E = U/d$  между пластинами постоянны.

Если высота жидкости  $h$  увеличится на  $dh$ , то работа искомой силы равна

$$dA = S f dh,$$

где  $S$  — горизонтальное сечение конденсатора. Изменение энергии электрического поля равно

$$dW = (\epsilon\epsilon_0 E^2/2 - \epsilon_0 E^2/2)S dh.$$



На пластины перейдет дополнительный заряд  $dq = (\varepsilon\varepsilon_0 E - \varepsilon_0 E)a dh$  ( $a$  — ширина пластин), и работа источника тока будет

$$\mathcal{E} dq = U dq = U(\varepsilon\varepsilon_0 E - \varepsilon_0 E)a dh = (\varepsilon\varepsilon_0 E^2 - \varepsilon_0 E^2)S dh.$$

Мы предположили, что сопротивление проводов весьма мало, и в соответствии с этим считали  $\mathcal{E} = U$ . Подставляя эти выражения в уравнение (72.1), находим

$$f = \varepsilon\varepsilon_0 E^2/2 - \varepsilon_0 E^2/2. \quad (72.4)$$

Механическое напряжение  $f$  равно разности объемных плотностей энергии электрического поля с обеих сторон границы раздела (ср. § 101).

Отметим, что полученный результат, разумеется, не зависит от сопротивления проводов. Если бы мы положили это сопротивление не малым, то, объединяя в (72.1) два члена:  $\mathcal{E} i dt$  и  $ri^2 dt$ , мы нашли бы, что

$$\mathcal{E} i dt = ri^2 dt = (\mathcal{E} - ri)i dt = U i dt,$$

т.е. то же, что и раньше.

### § 73. Квазистационарные токи

До сих пор мы рассматривали только постоянные токи. Однако полученные законы во многих случаях можно применять и к изменяющимся токам, если только изменение силы тока происходит не слишком быстро.

Действительно, представим себе, что в некотором контуре с постоянным током электродвижущие силы изменились на малую величину. Сила тока в контуре начнет изменяться, но через некоторое время достигнет нового установившегося значения. Изменяя ЭДС небольшими ступенями, мы создадим в контуре ступенчато изменяющийся ток, к отдельным установившимся значениям которого будут применимы все законы постоянного тока.

Представим себе теперь, что мы увеличиваем число ступеней тока, уменьшая одновременно величину каждой ступени. Тогда в пределе мы получим непрерывно изменяющийся ток. Если изменения тока настолько медленны, что за время установления электрического равновесия в цепи относительные изменения токов и ЭДС малы, то мгновенные значения токов и ЭДС будут подчиняться всем законам постоянных токов, как и при ступенчатом изменении тока. Такие токи называют медленно меняющимися или *квазистационарными*.

Отметим, что скорость установления электрического равновесия весьма велика, и поэтому под понятие квазистационарных токов попадают в обычном смысле весьма быстрые процессы. Все технические переменные токи являются квазистационарными. Даже очень быстрые электрические колебания, употребляемые в радиотехнике, с частотами порядка миллиона колебаний в секунду, очень часто можно еще рассматривать как квазистационарные.

Из сказанного следует, что задачи на квазистационарные электрические процессы можно решать при помощи законов постоянных токов, если применять эти законы к мгновенным значениям электрических величин. Однако при этом вместо алгебраических соотношений мы приходим к дифференциальным уравнениям, интегрирование которых и дает зависимость искомых величин от времени.

Чтобы неустановившийся электрический процесс был квазистационарным, необходимо выполнение двух условий. Первое из них относится к процессам внутри проводника. А именно, можно показать (см. Добавление 5), что если внутри проводящей среды возник избыточный объемный заряд с плотностью  $\rho$ , то этот заряд под действием вызванного им самим электростатического поля будет уменьшаться с течением времени по закону

$$\rho = \rho_0 \exp(-t/\tau_M) \quad (73.1)$$

Здесь  $\rho_0$  — объемная плотность заряда в момент времени  $t = 0$ , а

$$\tau_M = \varepsilon_0 \varepsilon / \lambda, \quad (73.2)$$

где  $\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость среды,  $\lambda$  — ее удельная электрическая проводимость. Время  $\tau_M$  называется *временем диэлектрической релаксации* или *временем релаксации Максвелла*. Оно равно времени, в течение которого объемный заряд уменьшается в  $e = 2,71$  раза. Время релаксации Максвелла, следовательно, определяет порядок времени, в течение которого восстанавливается стационарность электрических процессов. Чтобы токи можно было считать квазистационарными, характерное время рассматриваемого неустановившегося процесса  $T$  должно удовлетворять условию

$$\tau_M \ll T \quad (73.3)$$

Если токи изменяются со временем периодически (электрические колебания), то под  $T$  следует понимать период колебаний и сформулированное условие примет вид

$$\omega \tau_M \ll 1,$$

где  $\omega = 2\pi/T$  — круговая частота колебаний.

Однако при рассмотрении электрических контуров (цепей) следует наложить еще одно условие на размеры контура. Дело в том, что при любом изменении электрического состояния в какой-либо части контура электрическое возмущение распространяется вдоль контура с конечной скоростью, равной (гл. XXII)

$$v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$$

Здесь  $c \approx 3 \cdot 10^8$  м/с — скорость света в вакууме, а  $\varepsilon$  и  $\mu$  — диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, окружающей проводники. Если  $l$  — длина контура, то время прохождения возмущения вдоль контура равно

$$\tau = l/v = (l/c)\sqrt{\varepsilon\mu} \quad (73.4)$$

Поэтому второе условие квазистационарности токов есть

$$\tau \ll T \quad (73.5)$$

Для периодически изменяющихся токов оно имеет вид

$$\omega \tau \ll 1 \quad (73.5a)$$

При выполнении этого условия мгновенные значения всех электрических величин в каждой части контура будут такими же, как и в случае постоянного тока. В частности, для простого неразветвленного контура мгновенная сила тока в любом сечении проводника одинакова.

Значение  $\tau_m$  изменяется в широчайших пределах. В плохо проводящих веществах (диэлектриках) оно может измеряться многими минутами. В металлах вследствие их большой электропроводности  $\tau_m$  равно по порядку величины  $10^{-17}$  с.

В зависимости от свойств проводников одно из условий квазистационарности (73.3) и (73.5) обычно гораздо сильнее другого, и поэтому лишь одно из них является определяющим.

## § 74. Конденсатор в цепи с сопротивлением

В качестве примера квазистационарных токов рассмотрим процессы зарядки и разрядки конденсатора. Пусть конденсатор с емкостью  $C$  включен в схему рис. 106. Тогда, ставя переключатель в положение 1, мы будем заряжать конденсатор от источника тока, а перебрасывая переключатель в положение 2, — разряжать конденсатор.

Рассмотрим сначала процесс зарядки конденсатора. Обозначим через  $\mathcal{E}$  ЭДС источника, через  $r$  — сопротивление цепи (включая и внутреннее сопротивление источника) и выберем положительное направление тока, как показано на рисунке. Применяя к контуру  $\mathcal{E}rC\mathcal{E}$  второе правило Кирхгофа, получим

$$ri + U = \mathcal{E};$$

здесь  $i$  — мгновенное значение силы тока,  $U$  — мгновенное значение напряжения на конденсаторе. Но

$$U = q/C, \quad i = dq/dt,$$

где  $q$  — заряд конденсатора. Из написанных трех равенств мы можем исключить две из трех переменных величин  $q$ ,  $i$  и  $U$  и получить уравнение для какой-либо одной из них. Исключая  $q$  и  $i$ , находим

$$\frac{dU}{dt} + \frac{U}{rC} - \frac{\mathcal{E}}{rC} = 0.$$

Мы получили для определения  $U$  дифференциальное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами.

Введем новую переменную  $u = U - \mathcal{E}$ . Тогда

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{rC}u = 0.$$

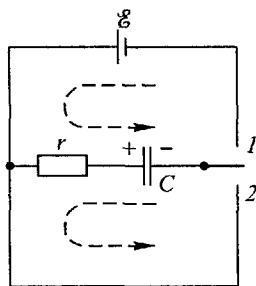


Рис 106 Зарядка и разрядка конденсатора

В этом уравнении переменные разделяются, и в результате интегрирования находим

$$u = A \exp\left(-\frac{t}{rC}\right).$$

Постоянная интегрирования  $A$  зависит от начального условия. Положим, что мы начинаем отсчет времени с момента замыкания переключателя. Тогда начальное условие имеет вид

$$t = 0: \quad U = 0, \quad u = -\mathcal{E}.$$

Это дает

$$A = -\mathcal{E}.$$

Возвращаясь к прежней переменной  $U$ , находим окончательно для напряжения на конденсаторе выражение

$$U = \mathcal{E} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{rC}\right) \right]. \quad (74.1)$$

При  $t = 0$  это выражение дает  $U = 0$  в соответствии с начальным условием задачи. С увеличением времени  $t$  напряжение  $U$  непрерывно увеличивается и асимптотически приближается к ЭДС источника.

Зависимость зарядного тока от времени имеет вид

$$i = \frac{-U + \mathcal{E}}{r} = \frac{\mathcal{E}}{r} \exp\left(-\frac{t}{rC}\right).$$

Сила тока имеет наибольшее значение в начальный момент времени и асимптотически стремится к нулю в процессе зарядки.

В случае разрядки конденсатора исходные уравнения будут

$$ri = U, \quad U = q/C, \quad i = -dq/dt.$$

В отличие от предыдущего, в выражение для тока  $i$  входит знак минус, так как выбранное нами положительное направление тока соответствует уменьшению заряда конденсатора. Исключая из написанных равенств  $q$  и  $i$ , получим

$$\frac{dU}{dt} + \frac{U}{rC} = 0,$$

откуда

$$U = B \exp\left(-\frac{t}{rC}\right).$$

Если начало отсчета времени совпадает с началом процесса разрядки, то начальное условие будет

$$t = 0: \quad U = \mathcal{E}.$$

В этом случае постоянная интегрирования равна  $B = \mathcal{E}$ , и зависимость напряжения конденсатора от времени имеет вид

$$U = \mathcal{E} \exp\left(-\frac{t}{rC}\right). \quad (74.2)$$

Полученные результаты показывают, что процессы заряжения и разряжения (установление электрического равновесия) происходят не мгновенно, а с конечной быстротой. Для рассмотренного контура, содержащего сопротивление и емкость, быстрота установления зависит от произведения

$$T = rC, \quad (74.3)$$

которое имеет размерность времени и называется *постоянной времени* данного контура. Постоянная времени показывает, через какое время после выключения ЭДС напряжение (а значит, и напряженность поля внутри конденсатора) уменьшается в  $e = 2,71$  раза. Если  $r$  и  $C$  выражать в единицах системы СИ (в омах и фарадах), то  $T$  будет выражено в секундах. Мы получим  $T$  в секундах и в том случае, если будем выражать  $r$  и  $C$  в единицах системы СГС, так как в обеих этих системах единицей времени служит секунда.

При решении задачи мы сразу предположили, что процессы являются квазистационарными. Правильность этого можно выяснить а posteriori, проверяя, удовлетворяет ли полученное решение условиям квазистационарности (73.3) и (73.5). Характерным временем рассматриваемых процессов является постоянная времени  $T = rC$ .

Так, например, если емкость конденсатора  $C = 1$  мкФ, а сопротивление контура  $r = 1$  Ом, то  $T = 10^{-6} \cdot 1 = 10^{-6}$  с. Таким образом, условие (73.3) выполняется с большим запасом, так как  $\tau_m$  внутри металлов на много порядков меньше  $T$  (ср. § 73). Если, далее, длина контура  $l = 1$  м, то время распространения возмущения  $\tau = l/v \approx 10^{-8}$  с. Поэтому и условие (73.5) тоже выполняется и, следовательно, наше решение правильно. Однако при уменьшении  $C$  и  $r$  условие (73.5) может оказаться нарушенным. В этом случае мы должны уже рассматривать процессы совсем иначе, а именно, как распространение электромагнитных волн вдоль контура (см. гл. XXII).

# МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

## ГЛАВА VIII

### МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ТОКОВ В ВАКУУМЕ

#### § 75. Магнитное взаимодействие токов

Мы уже говорили, что электрические токи действуют на магниты и, наоборот, магниты действуют на электрические токи (§ 55). Подобным образом взаимодействуют и два проводника с током.

Взаимодействие токов было открыто практически одновременно с действием тока на магнитные стрелки в 1820 г. и подробно изучено Ампером, который исследовал поведение подвижных проволочных контуров различной формы, укрепленных в специальных приспособлениях (станки Ампера)

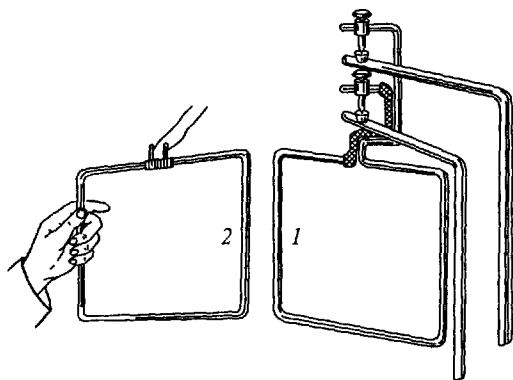


Рис 107 Станок Ампера с прямоугольной рамкой. Взаимодействие двух прямых токов

На рис. 107 изображен станок Ампера с прямоугольным контуром. Он содержит прямоугольную проволочную рамку, укрепленную на двух вертикальных острьях, опирающихся о днища двух чашек с ртутью. Вследствие ничтожного трения в игольчатых подшипниках рамка может свободно поворачиваться вокруг

вертикальной оси, оставаясь все время включенной в цепь тока при помощи ртутных контактов

Если приблизить к подвижной рамке другую (неподвижную) рамку с током, то можно наблюдать взаимодействие токов. При достаточном сближении одного из ребер подвижной рамки с каким-либо из ребер неподвижной рамки можно считать, что практически взаимодействуют только сближенные ребра, и таким образом исследовать взаимодействие двух прямолинейных токов. При этом легко обнаружить, что токи, направленные одинаково (параллельные), притягиваются друг к другу, а токи, направленные противоположно (антипараллельные), отталкиваются друг от друга.

Пользуясь таким станком, можно исследовать взаимодействие тока и магнита и двух токов между собой. Если поднести к одному из вертикальных ребер подвижной рамки с током прямой магнит, то рамка поворачивается. При замене северного полюса магнита на южный направление силы изменяется и рамка начинает поворачиваться в обратную сторону. Направление силы изменяется и в том случае, если изменить направление тока в рамке.

На рис. 108 показан станок Ампера с прямой длинной катушкой (соленоид). Если подносить к концам такого соленоида прямой магнит, то обнаруживается, что один из концов соленоида отталкивается от северного полюса магнита, но притягивается к южному полюсу, в то время как для второго конца соленоида наблюдается обратное. Этот опыт показывает, что соленоид с током ведет себя как прямой магнит. Тот конец соленоида, который обтекается током против часовой стрелки (если смотреть в торец катушки), соответствует северному полюсу магнита (указывающему на север), а конец, обтекаемый током по часовой стрелке, соответствует южному полюсу магнита. Если убрать магнит, то соленоид с током устанавливается так же, как магнитная стрелка компаса, в направлении магнитного меридиана Земли.

Заменяя в предыдущем опыте магнит другим (неподвижным) соленоидом, можно исследовать взаимодействие двух соленоидов. При этом вновь легко убедиться, что каждый из соленоидов по своим действиям подобен прямому магниту.

Описанные опыты и им подобные показывают, что взаимодействие контуров с током подобно действию токов на магниты,

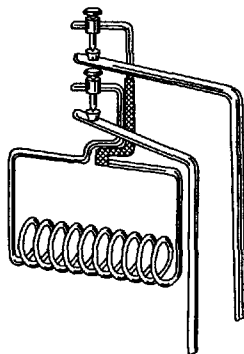


Рис 108 Прибор Ампера, в котором рамка заменена соленоидом

а также действию магнитов на токи. Поэтому рассмотренное взаимодействие проводников с током получило название *магнитного* взаимодействия.

Магнитное взаимодействие проводников отлично от электрического взаимодействия, рассмотренного в гл. I. Электрическое взаимодействие возникает при наличии зарядов на проводниках и зависит от этих зарядов; магнитное же взаимодействие не зависит от зарядов проводников, возникает только при наличии токов в проводниках и зависит от этих токов. Если заряженное тело находится внутри замкнутой металлической оболочки, то действие на него других зарядов, находящихся вне оболочки, не наблюдается. Если же заэкранировать проводящей оболочкой один из контуров с током, то магнитное взаимодействие сохраняется. При истолковании магнитного взаимодействия токов мы встречаемся с теми же вопросами, что и при объяснении электрического взаимодействия зарядов. И здесь можно спросить, почему возникают силы, действующие на контур с током в присутствии другого контура, и как эти силы передаются от одного проводника к другому? Происходят ли какие-либо изменения в пространстве возле провода с током, когда другого провода нет и магнитное взаимодействие не проявляется?

По тем же причинам, которые изложены в § 8, современная физика отвергает возможность дальнего действия в магнитных явлениях, так же как и в электрических. Причину возникновения сил магнитного взаимодействия мы видим в появлении вокруг проводников с током *магнитного поля*. Мы увидим далее, что магнитное поле является носителем ряда физических свойств. Основное свойство магнитного поля заключается в том, что на проводники с током, находящиеся в нем, действуют силы.

Магнитное поле возникает вокруг провода с током всегда, даже в отсутствие других проводников, когда магнитное взаимодействие не наблюдается. И в этом случае в окружающем проводник пространстве происходят определенные физические изменения. Основная задача исследования магнитных явлений заключается в изучении свойств магнитного поля и законов, которым оно подчиняется.

Мы начнем изучение магнитных явлений с исследования взаимодействия между токами. Сначала мы рассмотрим это взаимодействие в вакууме, а затем учтем влияние среды на магнитные явления.

## § 76. Магнитная индукция

В опытах Ампера было прежде всего установлено, что сила взаимодействия двух проводников пропорциональна силе тока в каждом из них. Далее опыты показали, что если провод с то-



ком изогнуть, как показано на рис. 109 а, то он не производит магнитного действия. И, наоборот, такой проводник не испытывает действия силы со стороны других проводников. Магнитное действие не наблюдается и в том случае, если одну часть провода (и притом произвольным образом) обвить вокруг другой (рис. 109 б).

Из этих результатов вытекает заключение, что какие-либо элементы проводника  $dl_1$ ,  $dl_2$  и  $dl_3$  совместно (рис. 110) производят такое же магнитное действие, как один элемент  $dl$ , замыкающий эти отрезки. В частности, действие изогнутых отрезков 12 и 23 проводника на рис. 109 б оказывается таким, как если бы вместо них был прямолинейный отрезок, соединяющий точки 1 и 3, действие 34 и 45 равно действию 35 и т.д., поэтому действие всего этого проводника такое же, как и проводника на рис. 109 а, т.е. равно нулю. Из сказанного следует, что магнитное действие бесконечно малого отрезка провода зависит от произведения  $i dl$ , где  $i$  — сила тока, а  $dl$  — вектор, имеющий длину отрезка  $dl$  и направленный вдоль тока. Это произведение называют *элементом тока*.

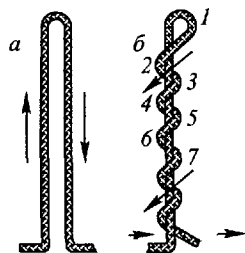


Рис 109 Изогнутые проводники (а, б) не производят магнитного действия

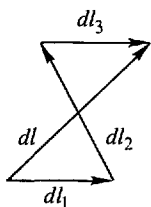


Рис. 110 К понятию элемента тока

Сила взаимодействия контуров конечных размеров складывается из взаимодействия отдельных элементов тока. Она зависит от размеров контуров, их формы и взаимного расположения, и поэтому сформулировать общий закон взаимодействия контуров с током нельзя. Однако такой закон можно дать для элементов тока. Понятие элемента тока в законах магнитного взаимодействия играет ту же роль, что и понятие точечного заряда в законах электрического взаимодействия.

Результаты опытов Ампера и последующих многочисленных исследований можно сформулировать следующим образом. Способность магнитного поля вызывать появление механической силы, действующей на какой-либо элемент тока, можно количественно описать, задавая в каждой точке поля некоторый вектор  $\mathbf{B}$ . При этом сила, действующая на элемент тока  $i dl$ , равна

$$d\mathbf{F} = i[dl \mathbf{B}]. \quad (76.1)$$

Величина  $\mathbf{B}$  называется *магнитной индукцией* и является основной характеристикой магнитного поля. Соотношение же (76.1) есть определение магнитной индукции.

Полную силу, действующую на проводник конечных размеров, можно найти, суммируя силы на отдельных его элементах. Если имеется прямолинейный отрезок провода и магнитная индукция во всех его точках постоянна, то из формулы (76.1) получаем

$$\mathbf{F} = i[\mathbf{lB}]. \quad (76.1a)$$

В соответствии с определением векторного произведения двух векторов (§ 15) эта сила равна

$$F = ilB \sin(\mathbf{l}, \mathbf{B}). \quad (76.16)$$

Направление силы перпендикулярно к  $\mathbf{l}$  и  $\mathbf{B}$  и подчиняется правилу правого буравчика: при движении рукоятки буравчика от вектора  $\mathbf{l}$  к вектору  $\mathbf{B}$  поступательное движение буравчика происходит в направлении силы  $\mathbf{F}$ . Взаимное расположение векторов  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{F}$  показано на рис. 111.

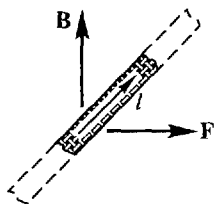


Рис. 111 Действие магнитного поля на ток

Взаимное расположение векторов  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{F}$  показано на рис. 111. Посмотрим теперь, как можно найти магнитную индукцию, входящую в формулу (76.1). Опыт показывает, что для магнитного поля, так же как и для электрического, в широкой области изменения принципа наложения, или суперпозиции: если имеет несколько контуров с током, каждый из которых создает магнитные индукции  $\mathbf{B}_1$ ,  $\mathbf{B}_2$  и т.д., то магнитная индукция результирующего поля равна векторной сумме индукций отдельных контуров:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \dots = \sum \mathbf{B}_k.$$

Отсюда можно заключить, что принцип суперпозиции справедлив и для элементов тока.

Поэтому магнитную индукцию, создаваемую каким-либо контуром с током, можно найти, суммируя магнитные индукции от отдельных элементов тока, на которые можно разбить данный контур. Чему же равна индукция, создаваемая элементом тока?

Опыт дает, что правильные значения сил магнитного взаимодействия мы получим в том случае, если примем, что индукция магнитного поля элемента тока равна

$$d\mathbf{B} = K \frac{i[d\mathbf{l}r]}{r^3}. \quad (76.2)$$

Здесь  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, проведенный из элемента тока в рассматриваемую точку, а  $K$  — коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора единиц.

Из (76.2) следует, что магнитная индукция в точке, удаленной на расстояние  $r$  от элемента тока, равна

$$dB = K \frac{i dl \sin \vartheta}{r^2}, \quad (76.2a)$$

где  $\vartheta$  — угол между  $dl$  и  $r$  (рис. 112). Направление  $d\mathbf{B}$  перпендикулярно к  $dl$  и  $r$ , т.е. перпендикулярно к плоскости, в которой они лежат. Это направление подчиняется правилу правого буравчика; направление магнитной индукции совпадает с направлением движения конца рукоятки буравчика с правой нарезкой, движущегося поступательно в направлении тока. Так, например, если ток течет вертикально сверху вниз (рис. 112), то правый буравчик нужно вращать по часовой стрелке (глядя сверху); поэтому магнитная индукция в точке  $a$  будет направлена от чертежа к читателю, в точке  $b$  она направлена противоположно, от читателя за чертеж. Формула (76.2) носит название *закона Био-Савара-Лапласа*.

Формулы (76.1) и (76.2) совместно вполне определяют закон взаимодействия двух элементов тока.

Рассмотрим в качестве примера два параллельных элемента тока  $i_1 dl_1$  и  $i_2 dl_2$ , показанные на рис. 113. Так как  $\sin(\angle dl_1, r_{12}) = 1$ , то формула (76.2a) дает, что индукция, создаваемая элементом тока  $i_1 dl_1$ , равна  $dB_1 = K i_1 dl_1 / r_{12}^2$ . Она перпендикулярна плоскости чертежа и направлена от читателя за чертеж. Тогда по формуле (76.16) получаем, что сила, действующая на элемент тока  $i_2 dl_2$ , равна

$$dF = K \frac{i_1 dl_1 i_2 dl_2}{r_{12}^2}, \quad (76.3)$$

так как  $\sin(\angle dl_2, \mathbf{B}) = 1$ . Она направлена вдоль линии, соединя-

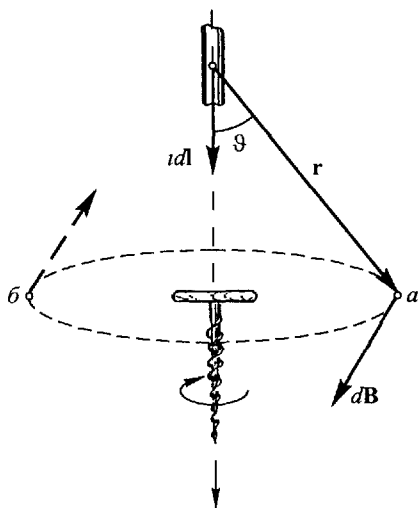


Рис 112 Магнитная индукция элемента тока

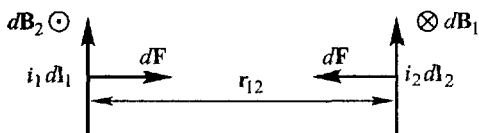


Рис. 113 Два параллельных элемента тока

ющей оба элемента тока, от элемента тока 2 к элементу тока 1. Сила, действующая на второй элемент тока  $i_1 dl_1$ , имеет такую же величину, но направлена противоположно.

Отметим, что закон взаимодействия токов, выражаемый формулами (76.1) и (76.2), на первый взгляд не удовлетворяет третьему закону Ньютона. Так, например, для двух элементов тока 1 и 2, изображенных на рис. 114, индукция, создаваемая током 1 в точке 2, равна нулю, так как

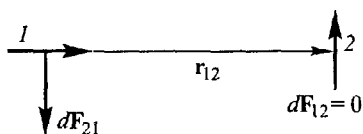


Рис. 114. Два взаимно перпендикулярных элемента тока

$\sin(dl_1, r_{12}) = 0$ . Поэтому и  $dF_{12} = 0$ . Индукция же, создаваемая током 2 в точке 1, отлична от нуля и направлена перпендикулярно току 1, а следовательно,  $dF_{21}$  не равна нулю. Такой результат получился потому, что на опыте можно исследовать только взаимодействие замкнутых контуров конечной величины. Поэтому из опыта можно вывести закон взаимодействия элементов тока только с точностью до

некоторого слагаемого, обращающегося в нуль при суммировании по замкнутому контуру. Такое слагаемое опущено в (76.2), что и является причиной кажущегося нарушения третьего закона Ньютона. Однако это слагаемое не играет никакой роли, так как, применяя формулы (76.1) и (76.2) к замкнутым контурам, мы всегда получаем результаты, согласующихся с третьим законом Ньютона.

## § 77. Абсолютная электромагнитная система единиц

В выражение (76.2) для магнитной индукции входит коэффициент пропорциональности  $K$ , зависящий от выбора единиц. Поэтому для вычисления сил магнитного взаимодействия мы должны остановиться на какой-либо определенной системе единиц и определить, какое значение имеет  $K$  в выбранной системе.

Если пользоваться абсолютной системой единиц СГС, построенной на трех основных механических единицах, то длины  $dl_1$ ,  $dl_2$ ,  $r_{12}$  нужно измерять в сантиметрах, а силу — в динах. Единица силы тока при этом будет производной, и поэтому ее можно выбрать такой, чтобы коэффициент пропорциональности  $K$  обратился в единицу. Такая единица силы тока получила название *абсолютной электромагнитной единицы силы тока* (СГСМ<sub>i</sub>).

Выражая из формулы (76.3) силу тока и заменяя (в соответствии с правилом образования производных единиц) в полученном выражении физические величины их единицами, находим

$$1 \text{ СГСМ}_i = 1 \text{ дин}^{1/2}.$$

Эта единица отличается от единицы силы тока в системе СГСЭ. Учитывая выражение единицы заряда в системе СГСЭ

(§ 3), имеем

$$1 \text{ СГСЭ}_i = 1 \text{ дин}^{1/2} \cdot \text{см/с}.$$

Если  $i_{\text{Э}}$  — сила некоторого тока, измеренная в системе СГСЭ, а  $i_{\text{М}}$  — сила того же тока в системе СГСМ, то можно написать

$$i_{\text{М}} = \frac{1}{c} i_{\text{Э}}, \quad (77.1)$$

где  $c$  — некоторая *размерная* постоянная, называемая *электродинамической постоянной*. Ее размерность совпадает с размерностью скорости.

Значение постоянной  $c$  можно определить только из опытов. Такие опыты были произведены А.Г. Столетовым, Вебером и другими исследователями. Тщательно изготовленный конденсатор, емкость которого была точно определена, заряжался много раз в секунду и разряжался через цепь, содержащую гальванометр. Напряжение, до которого заряжался конденсатор, измерялось электростатическими методами, откуда можно было определить заряд конденсатора и силу тока в электростатических единицах. Измеряя тот же ток гальванометром, основанным на магнитном действии тока, можно было найти его значение в магнитных единицах и отсюда определить  $c$ . Эти опыты привели к заключению, что электродинамическая постоянная равна скорости распространения света в вакууме  $3 \cdot 10^{10}$  см/с.

Такое совпадение не случайно. Еще во второй половине XIX в. Максвелл развил электромагнитную теорию света, согласно которой свет есть электромагнитные волны, и теоретически показал, что в вакууме скорость света, как и скорость распространения любых электромагнитных волн, должна быть равна электродинамической постоянной.

Исходя из закона магнитного взаимодействия токов, можно построить новую систему электрических единиц — *абсолютную электромагнитную систему*. В этой системе все механические единицы остаются такими же, как в системе СГСЭ (сантиметр, грамм, секунда), но в основу определения электрических и магнитных единиц кладется не электростатическая единица заряда (как в системе СГСЭ), а электромагнитная единица силы тока.

Нетрудно найти соотношение между основными электрическими величинами в обеих системах.

Заряд есть произведение силы тока на время:  $q = it$ . Поэтому соотношение зарядов в обеих системах такое же, как и токов. Если  $q_{\text{М}}$  — заряд, измеренный в системе СГСМ, а  $q_{\text{Э}}$  — тот же заряд, измеренный в системе СГСЭ, то

$$q_{\text{М}} = \frac{1}{c} q_{\text{Э}}.$$

Если заряд какого-либо тела равен 1 СГСМ $_q$ , а заряд другого тела есть 1 СГСЭ $_q$ , то, сравнивая оба заряда, мы найдем, что заряд у первого тела в  $3 \cdot 10^{10}$  раз больше, чем у второго тела.

Произведение силы тока на напряжение есть мощность:  $iU = P$ , которая измеряется в одних и тех же единицах в обеих системах (в эрг/с). Поэтому

$$i_{\text{Э}}U_{\text{Э}} = i_{\text{М}}U_{\text{М}},$$

и, следовательно,

$$U_{\text{М}} = U_{\text{Э}} \frac{i_{\text{Э}}}{i_{\text{М}}} = U_{\text{Э}} c.$$

Напряжение, равное единице в системе СГСМ, в  $3 \cdot 10^{10}$  раз меньше, чем напряжение, равное единице в системе СГСЭ

Поступая подобным образом, можно выразить все электрические величины в системе СГСМ.

Однако в физической литературе системы СГСЭ и СГСМ обычно не применяют, а широко используют так называемую абсолютную симметричную систему электрических и магнитных единиц, или, иначе, *систему единиц Гаусса*. Она построена на трех основных единицах: сантиметре, граммe и секунде, но представляет собой сочетание обеих систем СГСЭ и СГСМ. Система единиц Гаусса рассмотрена в Добавлении 13.

## § 78. Магнитная постоянная

В Международной системе СИ единица силы тока является одной из основных единиц, а следовательно, уже установлена. Поэтому коэффициент пропорциональности в ней нельзя сделать безразмерным. Далее выражение для магнитной индукции записывают в рационализованной форме, т.е. добавляют в знаменателе множитель  $4\pi$ , чтобы этот множитель не входил впоследствии в другие, часто встречающиеся формулы. Поэтому магнитная индукция, создаваемая элементом тока, в системе единиц СИ, выражается формулой

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i dl \sin \vartheta}{r^2}. \quad (78.1)$$

Здесь  $\mu_0$  — новая размерная постоянная, которая называется *магнитной постоянной*.

Если в формуле (78.1) все величины измерять в единицах системы СИ, т.е. длину — в метрах, силу тока — в амперах, механическую силу — в ньютонах, то

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ СИ}_{\mu_0}.$$

Это значение  $\mu_0$  непосредственно следует из определения ампера, которое будет дано в § 83. Сама же единица для измерения  $\mu_0$  в системе СИ получила название генри на метр (Гн/м). Смысл этого наименования будет разъяснен в § 94.

Вычисляя магнитную индукцию по формуле (78.1), мы получим ее выраженной в системе СИ; в этой системе единица

магнитной индукции называется тесла (Тл). В однородном магнитном поле с индукцией 1 Тл на 1 м длины перпендикулярного к вектору  $\mathbf{B}$  прямого проводника, по которому течет ток 1 А, действует сила 1 Н:

$$1 \text{ Н} = 1 \text{ А} \cdot 1 \text{ м} \cdot 1 \text{ Тл},$$

отсюда

$$1 \text{ Тл} = 1 \text{ Н}/(1 \text{ А} \cdot 1 \text{ м}) = 1 \text{ Н}/(\text{А} \cdot \text{м}).$$

## § 79. Напряженность магнитного поля

Для описания магнитного поля наряду с магнитной индукцией широко используют еще другую физическую величину — напряженность магнитного поля. Если  $\mathbf{B}$  — магнитная индукция в какой-либо точке поля в вакууме, то напряженностью магнитного поля в той же точке поля называется

$$\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0. \quad (79.1)$$

Так как  $\mu_0$  есть скаляр, то  $\mathbf{H}$ , как и  $\mathbf{B}$ , есть вектор.

В абсолютной системе единиц СГСМ  $\mu_0$  — безразмерная величина, равная единице. Поэтому  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{B}$  в вакууме в этой системе совпадают друг с другом.

В системе единиц СИ  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  даже в вакууме имеют различную размерность и отличаются друг от друга. Из формул (78.1) и (79.1) следует, что напряженность магнитного поля, создаваемого элементом тока  $i d\mathbf{l}$  есть

$$dH = \frac{1}{4\pi} \frac{i d\mathbf{l} \sin \vartheta}{r^2} \quad (79.2)$$

или в векторной форме

$$d\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \frac{i[d\mathbf{l} \mathbf{r}]}{r^3}. \quad (79.2a)$$

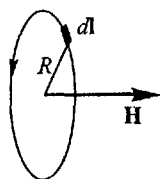
Пока мы рассматриваем магнитные поля в вакууме, нам достаточно знать лишь один из векторов  $\mathbf{B}$  или  $\mathbf{H}$ , безразлично какой, так как, зная  $\mathbf{B}$ , можно по формуле (79.1) найти  $\mathbf{H}$ , и наоборот. Однако внутри намагничивающихся сред это уже не так (гл. XI).

Найдем напряженность магнитного поля в вакууме для некоторых простых контуров с током.

**П р и м е р 1.** *Магнитное поле в центре кругового проводника* (рис. 115). В этом случае все элементы проводника перпендикулярны к радиус-вектору и  $\sin \vartheta = 1$ . Расстояние всех элементов провода до центра круга одинаково и равно радиусу круга  $R$ . Поэтому (79.2) дает

$$dH = \frac{1}{4\pi} \frac{i}{R^2} dl.$$

Все элементы тока создают магнитное поле одинакового направления, перпендикулярное к плоскости витка, и поэтому полная напряженность поля в центре кругового витка равна



$$H = \frac{i}{4\pi R^2} \int dl = \frac{i}{4\pi R^2} \cdot 2\pi R = \frac{i}{2R}. \quad (79.3)$$

Рис. 115. Магнитное поле в центре кругового тока

Направление магнитного поля находим по правилу правого буравчика, который нужно расположить параллельно касательной к кругу (в направлении тока). Если ток обтекает виток против часовой стрелки, то правило правого буравчика дает, что магнитное поле направлено от витка к наблюдателю (рис. 115).

**Пример 2. Магнитное поле прямого тока.** Найдем напряженность поля, создаваемого прямым проводом в точке  $a$  (рис. 116), удаленной на расстояние  $R$  от оси провода. Длину провода будем считать весьма большой по сравнению с  $R$ . И в этом случае направление магнитного поля всех элементов провода одинаково (перпендикулярно к плоскости чертежа, рис. 116), и поэтому можно складывать модули напряженностей. Напряженность поля какого-либо элемента проводника  $dl$  выражается формулой (79.2). Из рис. 116 видно, что

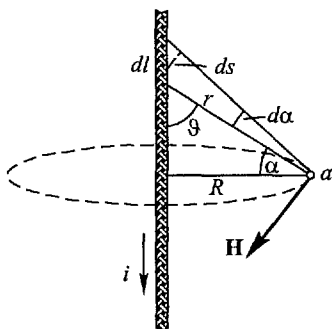


Рис. 116. К вычислению магнитного поля прямого тока

$$\frac{dl \sin \vartheta}{r} = \frac{dl \cos \alpha}{r} = \frac{ds}{r} = d\alpha, \\ r = \frac{R}{\cos \alpha}.$$

Подставляя эти выражения в (79.2), мы находим, что напряженность, создаваемая одним элементом провода, равна

$$dH = \frac{1}{4\pi} \frac{i dl \sin \vartheta}{r^2} = \frac{i}{4\pi R} \cos \alpha d\alpha.$$

Поэтому для полной напряженности поля получаем

$$H = \frac{i}{4\pi R} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \alpha d\alpha = \frac{i}{2\pi R}. \quad (79.4)$$

Это поле направлено перпендикулярно к плоскости, содержащей провод и отрезок  $R$ . Если в формулах (79.3) и (79.4) выражать силу тока в амперах, а длину — в метрах, то напряженность



магнитного поля будет выражена в единицах системы СИ. Эта единица называется ампер на метр (А/м).

### § 80. Линии индукции магнитного поля

Магнитные поля, так же как и электрические, можно изображать графически при помощи линий индукции. *Линиями индукции* (или линиями вектора  $\mathbf{B}$ ) называют линии, касательные к которым направлены так же, как и вектор  $\mathbf{B}$  в данной точке поля.

Очевидно, что через каждую точку магнитного поля можно провести линию индукции. Так как индукция поля в любой точке имеет определенное направление, то и направление линии индукции в каждой точке данного поля может быть только единственным, а значит, линии магнитного поля, так же как и электрического, нигде не пересекаются. Подобно линиям напряженности электрического поля, линии индукции магнитного поля прочерчивают с такой густотой, чтобы число линий, пересекающих единицу поверхности, перпендикулярной к ним, было равно (или пропорционально) индукции магнитного поля в данном месте. Поэтому, изображая линии индукции, можно наглядно представить, как меняется в пространстве индукция, а следовательно, и напряженность магнитного поля по модулю и направлению.

Рассмотрим линии индукции поля прямого тока. В § 79 мы видели, что напряженность  $\mathbf{H}$  (а следовательно, и  $\mathbf{B}$ ) всегда перпендикулярна к плоскости, содержащей проводник и рассматриваемую точку поля. По-

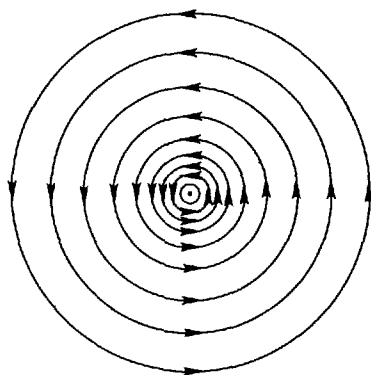


Рис. 117. Линии индукции магнитного поля прямого тока

этому линии индукции в данном случае суть концентрические окружности, центр которых расположен на оси тока (рис. 117).

Представление о виде линий индукции можно получить на опыте. Для этого пользуются тем обстоятельством, что подвижная магнитная стрелка всегда устанавливается своей осью в направлении линий магнитного поля, т.е. линий индукции.

Еще удобнее пользоваться железными опилками. Крупинки железа в магнитном поле намагничиваются и становятся подобными магнитным стрелкам. При практическом осуществлении этих опытов исследуемый провод с током пропускают сквозь

горизонтальную стеклянную пластину (или листок картона), на которую насыпают небольшое количество железных опилок. При легком встряхивании пластинки (постукивании) частицы опилок образуют цепочки, форма которых близко соответствует линиям исследуемого магнитного поля

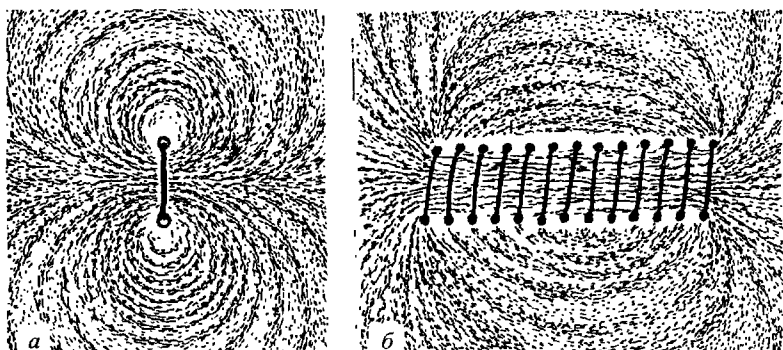


Рис. 118. Линии индукции магнитных полей кругового тока (а) и соленоида (б)

На рис. 118 приведены полученные таким способом картины линий индукции магнитного поля кругового тока и поля соленоида.

Из рисунка видно, что в средней части соленоида линии индукции суть прямые параллельные линии. Это показывает, что здесь индукция одинакова во всех точках, т.е. что в средней части соленоида поле однородно. У концов соленоида линии искривляются и расходятся, а значит, поле становится неоднородным.

### § 81. Вихревой характер магнитного поля

На рис. 118 видно, что линии индукции магнитного поля *непрерывны*: они не имеют ни начала, ни конца. Это имеет место для любого магнитного поля, вызванного какими угодно контурами с током. Векторные поля, обладающие непрерывными линиями, получили название *вихревых полей*. Мы видим, что магнитное поле есть вихревое поле. В этом заключается существенное отличие магнитного поля от электростатического.

В электростатическом поле линии напряженности всегда разомкнуты: они начинаются и заканчиваются на электрических зарядах. Линии же индукции магнитного поля не имеют ни начала, ни конца. Это соответствует тому, что в природе нет магнитных зарядов.

Движение электрических зарядов есть электрический ток. Так как магнитных зарядов нет, то магнитного тока не существует.

В § 17 мы ввели понятие электрического напряжения вдоль заданного контура. В электростатическом поле напряжение не зависит от формы контура и для замкнутого контура всегда равно нулю. Это позволило ввести разность потенциалов двух точек поля, зависящую только от положения этих точек.

Аналогично этому мы введем понятие *магнитного напряжения* вдоль контура  $L$ :

$$U_M = \int_L H_s ds,$$

где  $ds$  — элемент длины контура  $L$ , а  $H_s$  — проекция напряженности магнитного поля на направление  $ds$ . Однако, в отличие от электрического напряжения в поле неподвижных зарядов, магнитное напряжение *зависит от формы контура  $L$*  и не определяется только положением точек начала и конца этого контура.

Поэтому однозначной разности потенциалов в магнитном поле не существует. Магнитное напряжение по замкнутому контуру, вообще говоря, не равно нулю.

Рассмотрим, от чего зависит магнитное напряжение. Наиболее просто это можно сделать на примере поля, создаваемого прямым длинным проводом. Предположим сначала, что контур есть часть окружности между точками 1 и 2

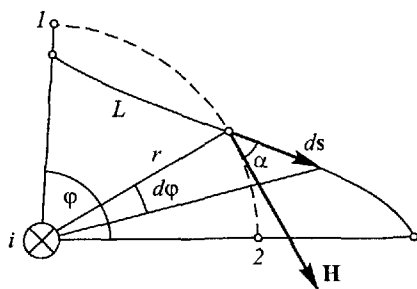


Рис. 119. К вычислению магнитного напряжения

(рис. 119), совпадающая с одной из линий индукции. В этом случае во всех точках контура (окружности) напряженность поля одинакова. Далее, так как контур совпадает с линией индукции, то во всех точках  $H_s = H = \frac{i}{2\pi r}$ , и поэтому

$$U_M = \frac{i}{2\pi r} s,$$

где  $s$  — длина дуги окружности между точками 1 и 2. Но  $s/r$  есть угол  $\varphi$ , составленный радиус-векторами, проведенными в точки начала (1) и конца (2) контура. Поэтому

$$U_M = \int H_s ds = i\varphi/2\pi. \quad (81.1)$$

Рассмотрим теперь произвольный контур  $L$  (рис. 119), однако лежащий в плоскости, перпендикулярной к току. Магнитное напряжение вдоль элемента  $ds$  этого контура есть

$$dU_M = H_s ds = H \cos \alpha ds = \frac{i}{2\pi r} \cos \alpha ds,$$

где  $\alpha$  — угол между  $\mathbf{H}$  и  $ds$ . Но

$$\frac{ds \cos \alpha}{r} = d\varphi,$$

и поэтому, суммируя магнитное напряжение по всему контуру, мы получим опять формулу (81.1).

Если контур  $L$  не лежит в плоскости, перпендикулярной к току, то любой элемент этого контура  $ds$  можно разложить на составляющую  $ds_1$ , перпендикулярную к току, и составляющую  $ds_2$ , параллельную к току (рис. 120). Так как составляющая  $ds_2$  перпендикулярна к  $\mathbf{H}$ , то для нее  $H_s = 0$  и  $dU_M = 0$ . Это значит, что магнитное напряжение вдоль  $ds$  такое же, как вдоль  $ds_1$ . Отсюда следует, что магнитное напряжение вдоль произвольного контура такое же, как

и для проекции этого контура на плоскость, перпендикулярную к току.

Рассмотрим теперь магнитное напряжение вдоль замкнутого контура, охватывающего провод с током (рис. 121 а), или циркуляцию напряженности магнитного поля (ср. § 17). В этом случае  $\varphi = 2\pi$ , и поэтому

$$\oint H_s ds = i. \quad (81.2)$$

Рис 120. Магнитное напряжение вдоль отрезка  $ds$  равно магнитному напряжению вдоль  $ds_1$

Для формулы (81.2) также справедливо правило правого буравчика: положительное направление обхода контура совпадает с направлением вращения правого буравчика, который движется поступательно в направлении тока. Так, например, на рис. 121 ток предполагается текущим от читателя за чертеж, и поэтому контур нужно обходить по часовой стрелке.

Если замкнутый контур не охватывает провод с током (рис. 121 б), то при обходе такого контура, например, начиная от точки 1 по часовой стрелке, радиус-вектор будет занимать последовательно положения  $r_1, r_2, r_3$  и угол  $\varphi$  будет увеличиваться. Если продолжать обход, начиная с точки 2, то последовательные положения радиус-вектора будут  $r_3, r_4, r_5$  и т.д. и угол  $\varphi$  будет уменьшаться; когда мы вернемся в точку 1, угол

$\varphi = 0$ . Поэтому магнитное напряжение для любого замкнутого контура, не охватывающего ток, равно нулю.

В том случае, когда замкнутый контур охватывает ток не один, а  $n$  раз (рис. 121 в,  $n = 2$ ), магнитное напряжение будет в  $n$  раз больше.

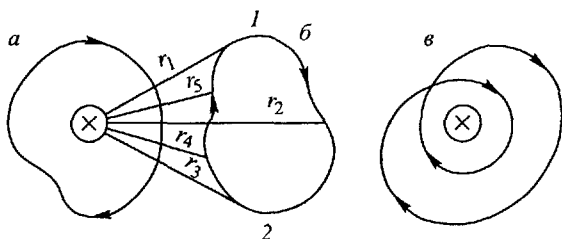


Рис. 121. Контурсы, охватывающие (а и в) и не охватывающие (б) ток

Формула (81.2) выражает важнейшее свойство магнитного поля. Можно показать, что она справедлива не только для поля прямого провода, но и для любого постоянного во времени магнитного поля, вызванного каким угодно распределением токов. Таким образом, *магнитное напряжение вдоль замкнутого контура равно полной силе тока, протекающего сквозь поверхность, ограниченную рассматриваемым контуром.*

Из формулы (81.2) видно, что магнитное напряжение измеряется в тех же единицах, что и сила тока, т.е. в амперах.

Рассмотренная теорема позволяет во многих случаях просто вычислить напряженность магнитного поля. Обратимся к некоторым важным примерам.

**Пример 1. Торoidalная катушка.** Вычислим напряженность поля внутри замкнутой торoidalной катушки (рис. 122). Из соображений симметрии ясно, что напряженность  $H$  одинакова во всех точках окружности, центр которой совпадает с центром тороида. Поэтому магнитное напряжение вдоль этой окружности равно  $H \cdot 2\pi r$ .

Рис 122. Торoidalная катушка

Рассматриваемая окружность охватывает токи всех витков катушки. Если полное число витков катушки есть  $N$ , а сила тока в ней равна  $i$ , то наша окружность охватывает ток силы  $Ni$ . Поэтому по теореме о магнитном напряжении мы имеем  $H \cdot 2\pi r = Ni$ , откуда

$$H = N \frac{i}{2\pi r}. \quad (81.3)$$

Следует иметь в виду, что поле внутри тороида не вполне однородно. Напряженность наибольшая у внутренней стороны катушки ( $H_1 = N \frac{i}{2\pi r_1}$ ) и наименьшая у внешней стороны ( $H_2 = N \frac{i}{2\pi r_2}$ ). Относительная разность обоих полей равна

$$(H_1 - H_2)/H_1 = (r_2 - r_1)/r_2.$$

**Пример 2. Соленоид.** Будем теперь неограниченно увеличивать радиус тороида  $r$ . Тогда отношение  $(r_2 - r_1)/r_2$  будет стремиться к нулю и поле делается однородным. Любой отрезок тороида перейдет при этом в прямую катушку или соленоид. Напряженность поля внутри соленоида можно найти из формулы (81.3). Замечая, что  $\frac{N}{2\pi r} = n$ , где  $n$  — число витков на единицу длины катушки, находим

$$H = ni. \quad (81.4)$$

Мы видим, что напряженность магнитного поля в достаточно длинном соленоиде равна произведению силы тока и числа витков на единицу длины катушки. Это произведение называют числом ампер-витков на метр.

Соленоиды широко используют в технических устройствах и в лабораторной практике, так как с их помощью можно просто создать однородное магнитное поле и притом известной напряженности.

**Пример 3. Прямой длинный провод.** Рассмотрим еще вычисление магнитного поля длинного прямого провода в точке, лежащей вне провода на расстоянии  $R$  от его оси. В этом случае в качестве контура для вычисления магнитного напряжения удобно выбрать окружность радиуса  $R$ , перпендикулярную к току и имеющую центр на оси тока. Теорема о магнитном напряжении дает

$$2\pi R H = i,$$

откуда

$$H = \frac{i}{2\pi R} \quad (\text{вне провода}). \quad (81.5)$$

Этот результат мы получили уже в § 79. Мы видим, что расчет при помощи магнитного напряжения гораздо проще, нежели непосредственное суммирование полей отдельных элементов тока.

Вычислим теперь напряженность поля в какой-либо точке внутри провода, отстоящей на расстоянии  $r$  от оси провода. Замкнутый контур выберем опять в виде окружности, проходящей через эту точку с центром на оси провода (на рис. 123 *a* указана

штриховой линией). Тогда по теореме о магнитном напряжении имеем

$$2\pi r H = \pi r^2 j,$$

где  $j$  — плотность тока (постоянная во всех точках проводника). Отсюда получается

$$H = \frac{1}{2} j r = \frac{i}{2\pi a^2} r \quad (81.6)$$

(внутри провода). Здесь  $i$  — полная сила тока через все сечение провода,  $a$  — радиус провода.

Таким образом, напряженность поля внутри провода увеличивается с расстоянием от оси по линейному закону, а во внешнем пространстве уменьшается по гиперболическому закону. Эта зависимость изображена графически на рис. 123 б.

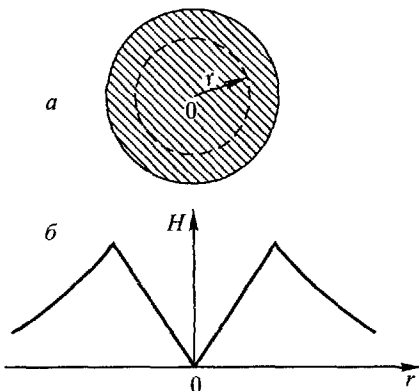


Рис. 123 Магнитное поле прямого провода с током

## § 82. Магнитный момент тока

Во многих случаях нам приходится иметь дело с замкнутыми токами, размеры которых весьма малы по сравнению с расстоянием от них до точки наблюдения. Такие токи мы будем называть элементарными. Пример подобных токов мы имеем во всех атомах, так как в них имеются движущиеся электроны, обра-

щающиеся по замкнутым орбитам (гл. XI). Эти токи вследствие малости атомов можно рассматривать почти во всех задачах как элементарные.

Посмотрим, от чего зависит магнитное поле, создаваемое элементарным током. Положим, что мы имеем круговой ток силы  $i$  с радиусом  $R$ . Вычислим магнитное поле в некоторой точке  $A$ , находящейся на оси тока на расстоянии  $r$  от его центра (рис. 124). В этом случае все

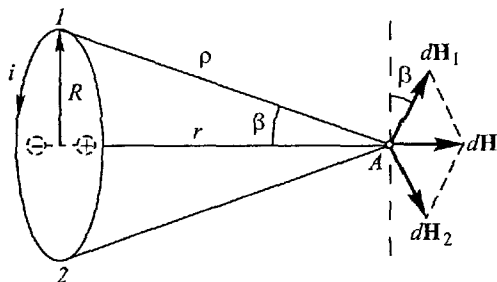


Рис. 124 Магнитное поле кругового витка с током

в этом случае все

элементы тока перпендикулярны к радиус-векторам  $\rho$  и поэтому в формуле (79.2)  $\sin \vartheta = 1$ . Далее, из рис. 124 видно, что магнитные поля  $d\mathbf{H}_1$  и  $d\mathbf{H}_2$ , создаваемые какой-либо парой элементов тока 1 и 2, расположенных на одном диаметре, складываясь, дают поле  $d\mathbf{H}$ , направленное вдоль оси тока. Поэтому и полное поле всего кругового тока направлено по его оси.

Составляющая поля по оси тока, создаваемого одним элементом тока, есть

$$\frac{1}{4\pi} \frac{i dl \sin \beta}{\rho^2} = \frac{1}{4\pi} \frac{i dl R}{\rho^3}.$$

Суммируя это выражение по всем элементам тока, получаем

$$H = \frac{iR}{4\pi\rho^3} \int dl = \frac{iR}{4\pi\rho^3} \cdot 2\pi R = \frac{iS}{2\pi\rho^3},$$

где  $S = \pi R^2$  — площадь, обтекаемая током.

Если ток является элементарным, т.е. если  $\rho \gg R$ , то с точностью до малых второго порядка в полученной формуле можно положить  $\rho \approx r$ . Окончательный результат удобно представить в виде

$$H = \frac{p_m}{2\pi r^3}, \quad p_m = iS. \quad (82.1)$$

Если бы мы имели элементарный электрический диполь, направленный вдоль оси тока (он изображен на рис. 124 штриховой линией), то создаваемое им электрическое поле было бы направлено так же, как и магнитное поле в рассматриваемом примере, т.е. тоже по оси тока. Электрическое смещение  $D = \epsilon_0 E$ , согласно (25.5) (где нужно положить  $\cos \alpha = 1$ ), было бы равно

$$D = \frac{p}{2\pi r^3}, \quad (82.2)$$

где  $p$  — электрический момент диполя. Формула (82.2) имеет тот же вид, что и (82.1). Однако роль электрического момента  $p$  диполя играет произведение  $iS$ ; оно получило название *магнитного момента тока*. Единицей магнитного момента в системе СИ является ампер-квадратный метр ( $\text{А} \cdot \text{м}^2$ ).

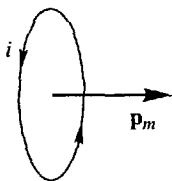


Рис. 125. Магнитный момент тока

Электрический момент диполя есть вектор (§ 15). Аналогично магнитный момент тока есть также вектор. За его направление принимают направление нормали к плоскости витка (рис. 125). Если  $\mathbf{n}$  есть единичный вектор вдоль нормали, то магнитный момент тока  $\mathbf{p}_m$  равен

$$\mathbf{p}_m = iS\mathbf{n}. \quad (82.3)$$

Выше мы ограничились частным случаем кругового тока и считали, что точка наблюдения лежит на оси тока. Однако понятие магнитного момента тока имеет общее значение. Легко показать, что напряженность



магнитного поля элементарного тока любой формы и в произвольной точке наблюдения можно найти по формулам (25.5) и (25.6), если выразить из них  $\varepsilon_0 E_r$  и  $\varepsilon_0 E_\alpha$  и затем заменить электрический момент диполя  $\mathbf{p}$  на магнитный момент тока  $\mathbf{p}_m$ , определяемый формулой (82.3). Мы видим, что магнитное действие элементарного замкнутого тока определяется его магнитным моментом.

### § 83. Два параллельных проводника с током

Зная магнитное поле, создаваемое каким либо проводником с током, можно вычислить и силу, действующую на другой проводник с током в этом поле.

Рассмотрим в качестве примера два бесконечно длинных параллельных проводника 1 и 2 с током (рис. 126) и вычислим силу, действующую на отрезок длины  $l$  проводника 2 со стороны проводника 1. Напряженность магнитного поля, создаваемого проводником 1 в месте нахождения проводника 2, выражается формулой (79.4), а следовательно, магнитная индукция равна

$$B_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi R}.$$

Индукция перпендикулярна к проводнику 2, а следовательно,  $\sin(\mathbf{l}, \mathbf{B}) = 1$ . Поэтому (76.16) дает

$$F = \mu_0 \frac{i_1 i_2}{2\pi R} l. \quad (83.1)$$

Если бы мы вычислили индукцию  $B_2$ , создаваемую током 2, а затем нашли силу, действующую на проводник 1, то получили бы ту же формулу (83.1). Это и понятно, так как при магнитном взаимодействии выполняется закон равенства действия и противодействия.

Применяя правило правого буравчика к рис. 126, легко видеть, что если направления токов в обоих проводниках одинаковы, то возникающие силы стремятся уменьшить расстояние  $R$  между проводниками; если же токи направлены противоположно, то эти силы стремятся увеличить расстояние  $R$ : параллельные токи притягиваются, антипараллельные — отталкиваются.

**Определение ампера.** В § 4 мы уже говорили, что четвертая основная единица системы СИ — ампер — определяется через магнитное взаимодействие токов. Для этого как раз используют закон взаимодействия двух параллельных токов (83.1).

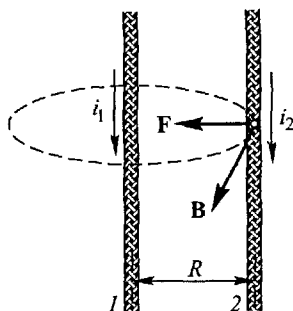


Рис. 126. Взаимодействие двух параллельных проводников с током

Ампер — сила неизменяющегося тока, который, проходя по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малой площади кругового поперечного сечения, расположенным в вакууме на расстоянии 1 м один от другого, вызвал бы на каждом участке проводника длины 1 м силу взаимодействия, равную  $2 \cdot 10^{-7}$  Н.

Отсюда непосредственно получается значение  $\mu_0$ , уже приведенное нами в § 78. Действительно, из формулы (83.1) и определения ампера следует, что

$$2 \cdot 10^{-7} = \mu_0 \frac{1 \cdot 1}{2\pi \cdot 1} 1,$$

откуда

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ СИ}_{\mu_0}.$$

Найдем еще соотношение между ампером, с одной стороны, и единицами силы тока в системах СГСМ и СГСЭ, с другой. В нерационализованной системе СГСМ  $\mu_0 = 1$ . Кроме того, мы во все формулы должны ввести еще множитель  $4\pi$ . Поэтому в системе СГСМ вместо формулы (83.1) имеем

$$F = \frac{2i_{1M}i_{2M}}{R} l, \quad (83.2)$$

где силы тока измеряются в единицах СГСМ, длины — в сантиметрах, а сила — в динах.

Если силы обоих токов равны 1 А, а  $R = l$  ( $l = 1$  м), то сила будет  $2 \cdot 10^{-7}$  Н =  $2 \cdot 10^{-2}$  дин, и мы имеем

$$2 \cdot 10^{-2} = 2i_{1M}i_{2M}.$$

Отсюда видно, что  $i_{1M} = i_{2M} = 0,1$ . Это значит, что сила тока, которая в системе СИ равна 1 А, в системе СГСМ равна 0,1 СГСМ<sub>1</sub>.

Так как, с другой стороны, сила тока, равная 1 СГСМ<sub>1</sub>, в системе СГСЭ равна  $3 \cdot 10^{10}$  СГСЭ<sub>1</sub>, то 1 А соответствует  $3 \cdot 10^9$  СГСЭ<sub>1</sub>.

## § 84. Механическая работа в магнитном поле. Магнитный поток

Так как на провод с током в магнитном поле действуют силы, то при движении провода совершается определенная работа. Найдем эту работу.

Предположим, что прямой проводник длины  $l$ , входящий в цепь тока, перемещается поступательно параллельно самому себе на отрезок  $dx$  и переходит из положения 1 в положение 2 (рис. 127). Направление магнитной индукции  $\mathbf{B}$  будем считать перпендикулярным к  $l$  и к  $dx$ . На проводник действует сила

$$F = ilB,$$

и поэтому механическая работа  $\delta A$  выразится формулой

$$\delta A = ilB dx = iB dS,$$

где  $dS = l dx$  — площадь, описанная проводником с током при движении (на рис. 127 заштрихована).

Если индукция  $\mathbf{B}$  направлена иначе, то ее всегда можно разложить на составляющую  $\mathbf{B}_n$ , перпендикулярную к  $dS$ , и составляющую  $\mathbf{B}_t$ , параллельную  $dS$ . Так как сила  $\mathbf{F}$  всегда перпендикулярна к  $\mathbf{B}$  (§ 76), то составляющая  $\mathbf{B}_t$  вызовет силу, перпендикулярную к  $dx$ , и работа этой силы будет равна нулю. Поэтому

$$\delta A = i B_n dS. \quad (84.1)$$

Рассмотрим теперь вращательное движение проводника. Пусть элемент проводника  $dl$ , входящий в цепь тока, поворачивается в магнитном поле на угол  $d\alpha$  (рис 128). При движении он описывает площадь  $dS = l d\alpha dl$ , где  $l$  — расстояние элемента

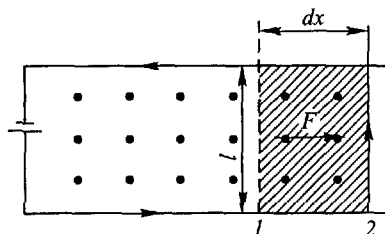


Рис. 127. К вычислению механической работы при поступательном движении проводника

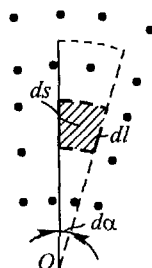


Рис. 128. К вычислению механической работы при вращательном движении проводника

от оси вращения  $O$ . Сила, действующая на элемент  $dl$  в направлении его перемещения, есть  $i dl B_n$ , где  $B_n$  — составляющая напряженности, перпендикулярная к  $dS$ . Поэтому совершаемая работа равна

$$\delta A = i dl B_n l d\alpha = i B_n dS$$

и выражается той же формулой (84.1), что и при поступательном движении.

Но любое движение проводника можно свести к поступательному и вращательному движениям. Это значит, что формула (84.1) определяет механическую работу для произвольного перемещения проводника.

Полученный результат можно представить в более удобном виде, если ввести понятие *магнитного потока*.

Рассмотрим сначала плоскую площадку  $S$  (рис. 129), находящуюся в однородном магнитном поле с индукцией  $\mathbf{B}$ . *Магнитным потоком или потоком вектора магнитной индукции*

сквозь площадку  $S$  называют величиною

$$\Phi = BS \cos \alpha = B_n S. \quad (84.2)$$

Здесь  $\alpha$  — угол между направлением нормали  $\mathbf{n}$  к площадке и направлением индукции  $\mathbf{B}$ , и  $B_n$  — проекция вектора  $\mathbf{B}$  на нормаль  $\mathbf{n}$ . Так как  $B_n$  — скаляр, то и магнитный поток есть скалярная величина. Магнитный поток  $B_n S$  равен полному числу линий магнитной индукции, проходящих через данную поверхность.

Магнитный поток характеризуется не только своей величиной, но и знаком, который зависит от того, какой знак имеет  $\cos \alpha$ . Этот знак зависит от выбора положительного направления нормали  $\mathbf{n}$ . Во всех электромагнитных явлениях всегда приходится рассматривать магнитный поток в связи с током,

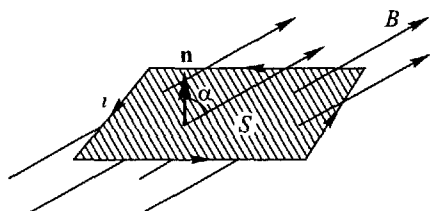


Рис 129 К определению магнитного потока

обтекающим контур, ограничивающий рассматриваемую поверхность. Поэтому положительное направление нормали естественно связать с направлением этого тока. Мы будем везде считать, что положительное направление нормали к площадке совпадает с направлением перемещения

буравчика с правой нарезкой, вращаемого в направлении тока (ср. рис. 129). Отсюда, в частности, следует, что магнитный поток, создаваемый каким-либо проволочным контуром с током, сквозь поверхность, ограниченную им самим, всегда положителен.

Если магнитное поле неоднородно, а рассматриваемая поверхность не плоская, то ее можно разбить на бесконечно малые элементы  $dS$ . Каждый элемент поверхности можно рассматривать как плоскую площадку, а любое поле на протяжении этого элемента — как однородное. Поэтому магнитный поток через элемент поверхности есть

$$d\Phi = B_n dS,$$

а полный магнитный поток через всю поверхность

$$\Phi = \int_S B_n dS. \quad (84.3)$$

Если в (84.2) и (84.3) выразить  $B$  в Тл, а  $S$  — в  $\text{м}^2$ , то магнитный поток окажется также выраженным в единицах системы СИ веберах (Вб) (§ 91)

Пользуясь понятием магнитного потока, мы можем представить (84.1) в следующем виде:

$$\delta A = i d\Phi. \quad (84.4)$$

Здесь  $\delta A$  — работа, совершаемая силами поля, а  $d\Phi$  — увеличение магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную контуром с током

Если проводник совершает конечное перемещение, то

$$A = i(\Phi_2 - \Phi_1), \quad (84.5)$$

где  $\Phi_2$  — магнитный поток сквозь контур в конце перемещения, а  $\Phi_1$  — поток сквозь контур в начале перемещения; при этом мы считаем, что сила тока в контуре при его перемещении поддерживается постоянной.

Выражая в этой формуле магнитный поток в веберах, а силу тока — в амперах, мы получим работу в джоулях.

### § 85. Контур с током в магнитном поле

Найдем теперь механические силы, действующие на замкнутый контур с током в магнитном поле. Положим сначала, что контур имеет форму прямоугольной рамки (рис. 130) и магнитное поле однородно. Согласно формуле (76.1а) силы, действующие на ребра  $a$ , перпендикулярны к ним и к магнитной индукции  $\mathbf{B}$  и поэтому стремятся только растянуть (или сжать) виток. Силы же  $\mathbf{F}$ , действующие на ребра  $b$ , стремятся повернуть виток

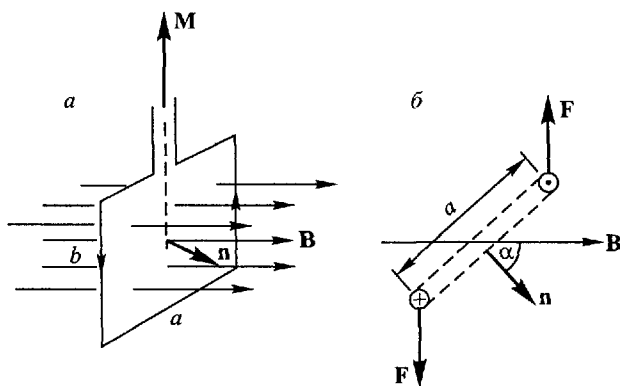


Рис. 130 Прямоугольная рамка с током в магнитном поле:  $a$  — вид сбоку,  $b$  — вид сверху

так, чтобы его плоскость стала перпендикулярна к  $\mathbf{B}$ . Следовательно, на виток действует пара сил с некоторым моментом  $\mathbf{M}$ .

Это справедливо, очевидно, не только для прямоугольной рамки, но и для контура произвольной формы.

Момент пары сил  $M$  (и притом для плоского контура произвольной формы) можно непосредственно найти из формулы (84.4). Для этого представим себе, что мы даем возможность контуру повернуться под действием сил поля на бесконечно малый угол  $d\alpha$ . Силу тока в контуре  $i$  будем считать неизменяющейся, и следовательно, магнитный момент контура  $p_m = iS$  — постоянным. Тогда механическая работа сил поля будет равна  $\delta A = M d\alpha$ . Вместе с тем магнитный поток, пронизывающий контур, есть  $\Phi = SB \cos \alpha$ , а его изменение при уменьшении угла  $\alpha$  на  $d\alpha$  равно  $d\Phi = SB \sin \alpha d\alpha$ . Поэтому из формулы (84.4) имеем

$$M d\alpha = iSB \sin \alpha d\alpha,$$

откуда

$$M = p_m B \sin \alpha. \quad (85.1)$$

Полученные результаты можно выразить векторной формулой, дающей и модуль, и направление момента пары сил:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}_m \mathbf{B}]. \quad (85.2)$$

Эта формула аналогична выражению (15.3) для момента пары сил, действующих на электрический диполь в электрическом поле.

Рассмотрим теперь малый виток с током в неоднородном магнитном поле (рис. 131) и будем считать сначала, что линии индукции симметричны относительно нормали к плоскости витка.

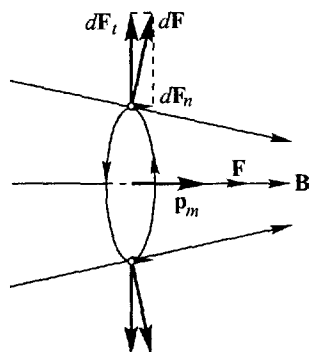


Рис 131 Виток с током в неоднородном поле

Силы  $d\mathbf{F}$ , действующие на отдельные участки витка, будут по-прежнему перпендикулярны к току и к магнитному полю. Однако теперь, так как линии индукции уже не параллельны, эти силы будут составлять некоторый угол с плоскостью витка. Составляющие этих сил  $d\mathbf{F}_t$ , параллельные витку, создадут усилия, растягивающие или сжимающие виток. Составляющие же  $d\mathbf{F}_n$ , перпендикулярные к плоскости витка, складываясь, дадут некоторую силу  $\mathbf{F}$ , стремящуюся перемещать виток в магнитном поле.

Применяя правило правого буравчика, легко видеть, что если момент тока  $\mathbf{p}_m$  параллелен магнитной индукции (как изображено на рисунке), то виток будет втягиваться в область более сильного поля. Если же вектор  $\mathbf{p}_m$  антипараллелен индукции, то виток

будет выталкиваться и перемещаться в область более слабого поля.

Найдем эту силу, пользуясь тем же приемом, что и выше. Положим, что виток смещается в направлении  $\mathbf{p}_m$  на малый отрезок  $dx$ . Тогда механическая работа  $\delta A = F dx$ . Изменение магнитного потока есть  $d\Phi = S(\partial B_n / \partial x) dx$ , где  $B_n$  — составляющая  $\mathbf{B}$ , нормальная к плоскости витка. Поэтому формула (84.4) принимает вид

$$F dx = iS \frac{\partial B_n}{\partial x} dx,$$

а следовательно,

$$F = p_m \frac{\partial B_n}{\partial x}. \quad (85.3)$$

Сила, действующая на малый виток с током в магнитном поле, пропорциональна скорости изменения магнитной индукции в рассматриваемом направлении.

Рассуждая указанным образом, легко найти и общее выражение для силы при произвольной ориентации малого контура с током относительно магнитной индукции. Если  $p_{mx}$ ,  $p_{my}$  и  $p_{mz}$  — составляющие магнитного момента контура с током в прямоугольных осях координат, а  $B_x$ ,  $B_y$  и  $B_z$  — составляющие магнитной индукции, то сила в направлении оси  $X$  выражается формулой, подобной (15.6):

$$F_x = p_{mx} \frac{\partial B_x}{\partial x} + p_{my} \frac{\partial B_x}{\partial y} + p_{mz} \frac{\partial B_x}{\partial z}. \quad (85.4)$$

Для составляющих силы  $F_y$  и  $F_z$  справедливы аналогичные формулы. Эти результаты можно записать в виде векторной формулы

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p}_m \text{ grad})\mathbf{B}, \quad (85.4a)$$

где введен дифференциальный оператор (ср. § 15)

$$(\mathbf{p}_m \text{ grad}) \equiv p_{mx} \frac{\partial}{\partial x} + p_{my} \frac{\partial}{\partial y} + p_{mz} \frac{\partial}{\partial z}.$$

В общем случае неоднородного поля, не перпендикулярного к плоскости витка, будут действовать и пара сил, стремящихся повернуть виток, и сила, вызывающая поступательное перемещение.

Силу, действующую на контур конечных размеров с током, можно найти, разбивая площадь  $S$ , ограниченную этим контуром, на элементы  $dS$ , обтекаемые током той же силы  $i$  и в том же направлении, что и в ограничивающем контуре. Полная сила есть сумма сил, действующих на отдельные элементы с магнитными моментами  $i dS$ .

### § 86. Магнитное поле движущегося заряда

Мы видели выше, что каждый проводник с током создает в окружающем пространстве магнитное поле. Но электрический ток в любом проводнике есть движение заряженных частиц: в металлах — это движение электронов, в электролитах — ионов, в газовом разряде — и ионов, и электронов. Отсюда можно заключить, что всякий движущийся заряд создает вокруг себя магнитное поле. Найдем напряженность этого поля.

Рассмотрим малый отрезок провода длиной  $l$  с током  $i$ . Согласно (79.2) этот отрезок создает в некоторой точке, удаленной на расстояние  $r$ , напряженность поля

$$\frac{1}{4\pi} \frac{il \sin \vartheta}{r^2}.$$

Но силу тока можно выразить через плотность тока  $j$  и сечение провода  $S$  ( $i = jS$ ), а плотность тока — через концентрацию заряженных частиц  $n$  и их скорость  $v$  ( $j = nqv$ , где  $q$  — заряд частицы). Это дает

$$il = jSl = nqvSl = Nqv,$$

где  $N$  — полное число частиц в отрезке провода. Поэтому напряженность поля можно представить в виде

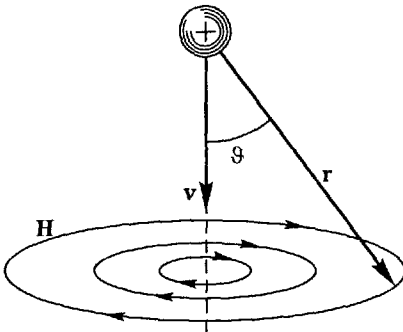
$$\frac{1}{4\pi} \frac{Nqv \sin \vartheta}{r^2}.$$

Отсюда следует, что напряженность поля, вызываемого одной заряженной частицей, имеет значение

$$H = \frac{1}{4\pi} \frac{qv \sin \vartheta}{r^2}. \quad (86.1)$$

Направление этого поля перпендикулярно к скорости  $\mathbf{v}$  частиц и к радиус-вектору  $\mathbf{r}$ , проведенному из заряда в рассматриваемую

Рис 132 Магнитное поле движущегося заряда



точку, и подчиняется, как и прежде, правилу правого буравчика (рис. 132).

Пользуясь обозначениями векторной алгебры, можно выразить модуль и направление поля движущегося заряда одной формулой:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \frac{q[\mathbf{v}\mathbf{r}]}{r^3}. \quad (86.2)$$

Эта формула выражает напряженность поля положительного заряда, движущегося со скоростью  $\mathbf{v}$ . Если движется отрицательный заряд, то в формуле нужно заменить  $q$  на  $-q$ .



Сравнивая (86.2) с (79.2a), мы видим, что движущийся заряд по своим магнитным действиям эквивалентен элементу тока

$$dl = qv. \quad (86.3)$$

Формулы (86.1) и (86.2) мы получили из результатов § 79, которые в свою очередь были установлены в опытах с неподвижными (относительно наблюдателя) проводочными контурами. Поэтому и скорость  $v$ , входящая в эти формулы, есть относительная скорость, т.е. скорость относительно наблюдателя и тех приборов, которые измеряют магнитное поле (ср. § 141).

### § 87. Опыты Роуланда и Эйхенвальда

Результаты, полученные в § 86, должны быть справедливы не только для движущихся электронов или ионов, но и для любого заряженного тела. Если заряженное тело неподвижно относительно наблюдателя, то для него существует только электрическое поле. Если же заряженное тело движется относительно наблюдателя, то для него, помимо электрического поля, существует еще и магнитное поле. Эти выводы были качественно проверены на опыте Роуландом и тщательно изучены А.А. Эйхенвальдом в 1901 г.

Схема одного из опытов Эйхенвальда показана на рис. 133. Два параллельных металлических диска  $D_1$  и  $D_2$  могли вращаться вокруг осей  $O$  и  $O_1$ . Вблизи дисков была подвешена на тонкой нити небольшая магнитная стрелка, ось которой параллельна плоскости дисков. Для наблюдения за поворотом стрелки к ней было прикреплено небольшое зеркальце  $Z$ . Стрелка помещалась внутри проводящего кожуха, предохранявшего ее от действия электрического поля и от токов воздуха при вращении дисков. Оба диска заряжались разноименно и приводились в быстрое вращение. При этом вращался либо один из дисков, либо оба диска вместе, как в одинаковом направлении, так и в противоположном. Опыты показали, что при вращении дисков магнитная стрелка отклоняется, что указывает на появление магнитного поля.

Для количественной проверки формулы (86.3) диски останавливали, по ним пропускали ток от постороннего источника и определяли силу тока, вызывающую то же отклонение стрелки, что и при вращении дисков. Опыты показали, что эта сила тока соответствует формуле (86.3)

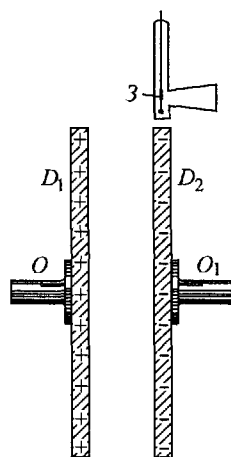


Рис. 133 Опыт Эйхенвальда

Расчет особенно прост, если диск изготовлен из изолирующего материала и имеет металлическую обкладку в виде кольца с разрезом (рис. 134).

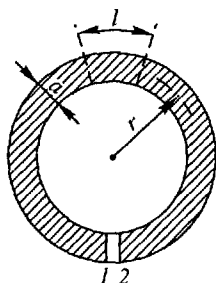


Рис. 134 К опытам Эйхенвальда

Малый отрезок  $l$  такого кольца имеет поверхность  $al$  ( $a$  — ширина кольца, а заряд на нем есть  $al\sigma$  ( $\sigma$  — поверхностная плотность заряда). Если  $v$  — линейная скорость движения кольца, то, согласно (86.3), рассматриваемый отрезок эквивалентен элементу тока:

$$il = al\sigma v,$$

откуда

$$i = a\sigma v.$$

Если средний радиус кольца есть  $r$ , а диск делает в секунду  $n$  оборотов, то  $v = 2\pi rn$ . Учитывая еще, что  $2\pi ra = S$  есть полная поверхность кольца, имеем

$$i = a\sigma \cdot 2\pi rn = qn,$$

где  $q$  — полный заряд кольца.

Рассмотрим численный пример. Пусть площадь кольца  $S = 100 \text{ см}^2 = 10^{-2} \text{ м}^2$ , а расстояние между дисками  $d = 1 \text{ см} = 10^{-2} \text{ м}$ . Тогда емкость дисков

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{d} = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \frac{10^{-2}}{10^{-2}} = \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \text{ Ф.}$$

Если напряжение между дисками  $U = 10^4 \text{ В}$ , то

$$q = CU = \frac{1}{36\pi} 10^{-9} 10^4 = \frac{1}{36\pi} 10^{-5} \text{ Кл}$$

При частоте вращения  $n = 100 \text{ об/с}$  сила тока будет

$$i = \frac{1}{36\pi} 10^{-5} \cdot 10^2 \approx 0,9 \cdot 10^{-5} \text{ А.}$$

Присоединяя концы 1 и 2 кольца (рис. 134) к источнику тока и создавая в кольце ток такой силы, мы получим то же отклонение стрелки, что и при вращающемся диске.

Приведенный пример показывает, что сила тока получается очень малой, и поэтому возникающие в подобных опытах поля очень слабы. Обычно они в десятки тысяч раз меньше магнитного поля Земли, что делает опыты очень трудными.

Если между дисками  $D_1$  и  $D_2$  поместить диэлектрик  $A$  с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  (рис. 135), то заряд на металлических дисках увеличится в  $\epsilon$  раз и будет  $\epsilon q$ . Поэтому при вращающихся металлических дисках и неподвижном диэлектрике магнитное поле увеличится тоже в  $\epsilon$  раз.

На поверхности диэлектрика возникают поляризационные заряды, которые на каждой поверхности диска  $A$  равны  $(\epsilon - 1)q$ . Если оставить диски  $D_1$  и  $D_2$  неподвижными, но вращать диэлектрик  $A$ , то также возникает магнитное поле. Это поле будет,

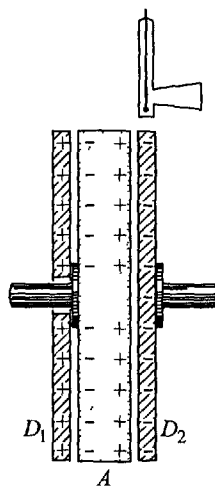


Рис. 135. Опыт Эйхенвальда с движущимся диэлектриком

однако, намного меньше, чем при вращении дисков  $D_1$  или  $D_2$ , так как на диэлектрике  $A$  возникают заряды двух знаков и его действие соответствует двум круговым близким токам, направленным противоположно.

Если, наконец, вращать весь конденсатор с диэлектриком как целое, то на каждом металлическом диске будет движущийся заряд  $\epsilon q$ , а на прилегающей к нему поверхности диэлектрика — заряд противоположного знака  $-(\epsilon - 1)q$ . Поэтому магнитное действие будет пропорционально  $\epsilon q - (\epsilon - 1)q = q$ , т.е. будет таким же, как и в отсутствие диэлектрика.

Все эти случаи были проверены на опыте Эйхенвальдом. Эти опыты, следовательно, показали, что любые движущиеся заряды, независимо от их природы, в том числе и поляризационные заряды, вызывают магнитное поле.

## § 88. Сила Лоренца

Вернемся теперь к действию магнитного поля на ток. Так как всякий ток есть движение заряженных частиц (электронов или ионов), то отсюда следует, что на движущийся заряд в магнитном поле действует сила.

Нетрудно определить эту силу. На проводник длины  $l$  с током  $i$  в магнитном поле действует сила

$$ilB \sin(\mathbf{l}, \mathbf{B}),$$

где  $\mathbf{B}$  — магнитная индукция. С другой стороны,

$$il = Nqv,$$

где  $N$  — полное число движущихся заряженных частиц внутри проводника. Учитывая, что направление  $\mathbf{l}$  совпадает с направлением скорости  $\mathbf{v}$  движения положительных частиц (с направлением тока), мы можем выражение для силы представить в виде

$$NqvB \sin(\mathbf{v}, \mathbf{B}).$$

Сила, действующая на проводник, пропорциональна полному числу движущихся частиц, а значит, сила, действующая на одну частицу, равна

$$F = qvB \sin(\mathbf{v}, \mathbf{B}).$$

Направление этой силы перпендикулярно к направлению скорости  $\mathbf{v}$  и магнитной индукции  $\mathbf{B}$  и подчиняется правилу правого буравчика (рис. 136).

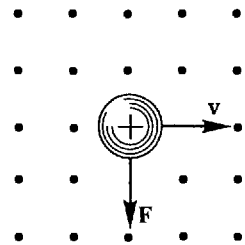


Рис. 136. Направление силы, действующей на движущийся заряд в магнитном поле. Поле направлено к читателю

Полученный результат можно выразить в виде векторной формулы

$$\mathbf{F} = q[\mathbf{v}\mathbf{B}]. \quad (88.1)$$

Если имеется еще электрическое поле, то полная сила равна

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q[\mathbf{v}\mathbf{B}]. \quad (88.2)$$

Выражение (88.2) было впервые получено из опыта Г. Лоренцем, и поэтому силу, действующую на движущийся заряд, называют *силой Лоренца*.

Формулу (88.2), так же как и результаты § 86, мы получили, анализируя опытные данные о взаимодействии неподвижных контуров с током. Поэтому скорость, входящая в (88.2), есть скорость относительно магнитного поля (ср. § 143).

Сила Лоренца проявляется при движении электронов и ионов в магнитных полях. Эти явления будут рассмотрены в гл. XVII.

## ГЛАВА IX

### ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

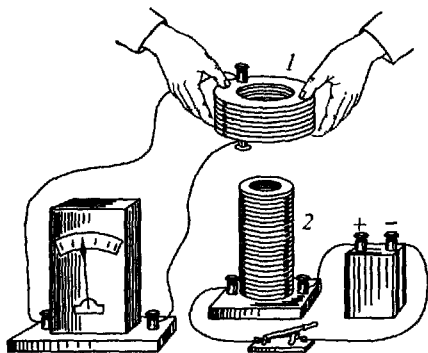
#### § 89. Электромагнитная индукция

В предыдущей главе мы видели, что электрические токи создают вокруг себя магнитное поле. Существует и обратное явление: магнитное поле вызывает появление электрических токов. Это явление было открыто М. Фарадеем в 1831 г. и получило название *электромагнитной индукции*.

Рассмотрим некоторые опыты, иллюстрирующие электромагнитную индукцию. Для этого воспользуемся двумя проволочными катушками 1 и 2 (рис. 137), одну из которых (1) можно надевать на другую (2). Соединим катушку 1 с гальванометром, а катушку 2 с источником тока.

Рис. 137. При движении катушки 1 в магнитном поле катушки 2 в цепи катушки 1 появляется ток

Если катушка 1 неподвижна относительно катушки 2 (т.е. относительно магнитного поля), то в цепи 1 не будет тока, как бы сильно ни было магнитное поле



катушки 2. Начнем теперь перемещать катушку 1. Мы увидим, что гальванометр покажет появление тока. Этот ток существует только при движении катушки, и он тем сильнее, чем быстрее движется катушка. Ток в цепи катушки 1 возникает и при сближении катушек, и при удалении их, однако токи в обоих случаях имеют противоположные направления.

Если оставить катушку 1 неподвижной, а двигать катушку с током 2, то гальванометр также показывает ток при движении катушки.

Мы могли бы оставить обе катушки 1 и 2 неподвижными, но изменять силу тока в катушке 2 при помощи реостата. Тогда при всяком изменении силы тока (т.е. магнитного поля) в цепи катушки 1 возникал бы ток. Направление тока в катушке 1 при усилении магнитного поля противоположно направлению тока при ослаблении поля; ток в катушке 1 не возникает, если магнитное поле остается постоянным.

Эти опыты показывают, что причиной появления индукционного тока является изменение магнитного поля. Каким образом создается это изменение, безразлично. В опыте, изображенном на рис. 138, обе катушки 1 и 2 неподвижны, но в катушку 2 мы вдвигаем или выдвигаем из нее железный сердечник *C*. При вдвигании сердечника он намагничивается, и магнитное поле усиливается; при выдвигании сердечника поле уменьшается. Ток в цепи катушки 1 течет только при движении сердечника.

Изменяющееся магнитное поле мы можем создать и движением постоянного магнита. Если вовсе удалить катушку с током 2 и вдвигать (или выдвигать) в катушку 1 постоянный магнит, то гальванометр также показывает ток. Этот ток возникает и в том случае, если движется катушка, а магнит находится в покое. Наблюдая направления тока при сближении магнита и катушки и при удалении, можно убедиться, что они противоположны, так же как и в предыдущих опытах.

Результаты своих многочисленных опытов Фарадей выразил в следующей наглядной форме. Будем изображать магнитное

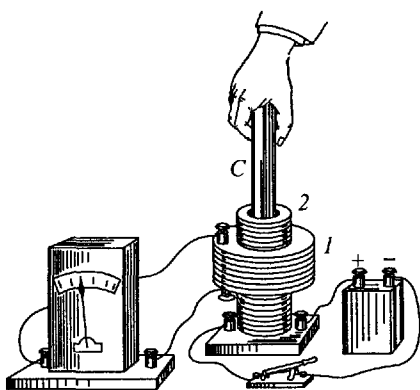


Рис. 138. При движении железного сердечника *C* магнитное поле катушки 2 изменяется и в цепи катушки 1 появляется ток

поле при помощи линий магнитной индукции. Тогда магнитная индукция будет характеризоваться густотой линий индукции. Представим себе теперь, что замкнутый проводник движется в магнитном поле и переходит в область более сильного поля. Тогда число линий индукции, охватываемых проводником, увеличится. Напротив, при движении проводника в область более слабого поля число линий индукции, охватываемых проводником, уменьшится. Но магнитное поле есть поле вихревое (§ 81),

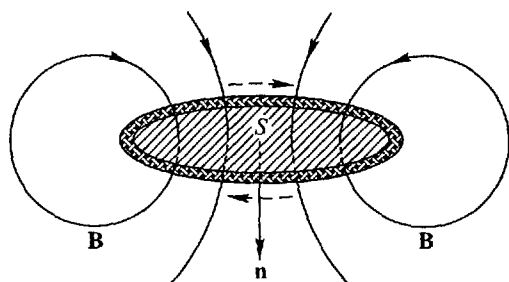


Рис 139 Замкнутый проводник и линии магнитной индукции «сцеплены» между собой

и его линии индукции не имеют концов. Вследствие этого линии индукции поля сцеплены с проводочным контуром на подобие звеньев цепи (рис. 139). Поэтому всякое изменение числа линий индукции, охватываемых контуром, может произойти только в результате пересечения ими проводочного контура. Точно так же, если проводник находится в покое, но изменяется магнитная индукция, то при усилении поля густота линий индукции будет увеличиваться и они будут стягиваться друг к другу, а при ослаблении поля — расходиться друг от друга. И в этом случае произойдет пересечение некоторого числа линий индукции проводником. Поэтому Фарадей заключил, что индукционный ток возникает в проводнике в том случае, если проводник или какая-либо его часть пересекает линии магнитной индукции.

Открытие электромагнитной индукции имело огромное научное и техническое значение. Это явление показало, что можно не только получить магнитное поле при помощи токов, но и, наоборот, получить электрические токи при помощи магнитного поля. Этим была установлена окончательно взаимная связь между электрическими и магнитными явлениями.

## § 90. Закон Ленца

Э.Х. Ленц установил важный закон, позволяющий определить направление индукционного тока. Он сформулировал найденный им закон следующим образом: «Если металлический проводник передвигается вблизи гальванического тока или вблизи магнита, то в нем возбуждается гальванический ток такого направления, которое вызвало бы движение покоящегося прово-

да в направлении, прямо противоположном направлению движения, навязанного здесь проводу извне, в предположении, что находящийся в покое провод может двигаться только в направлении этого последнего движения или в прямо противоположном».

В более сжатой форме закон Ленца можно выразить так: индукционный ток во всех случаях направлен таким образом, что его действие противоположно действию причины, вызвавшей этот ток.

Закон Ленца применим и к случаям, когда проводники неподвижны, а изменяется магнитное поле (сила тока). В таком случае индукционные токи всегда вызывают поле, которое стремится противодействовать изменениям внешнего поля, вызвавшим эти токи. Так, например, если в опыте (см. рис. 137) катушки неподвижны, то при включении тока в катушку 2 (его нарастании) направление тока в катушке 1 будет противоположно (индукционный ток стремится ослабить нарастающее поле катушки 2), а при выключении тока (его убывании) ток в катушке 1 будет направлен так же, как и в катушке 2 (стремится поддержать ослабевающее магнитное поле).

Закон Ленца вытекает из закона сохранения энергии. Действительно, индукционные токи, как и всякие электрические токи, производят определенную работу. Но это значит, что при движении замкнутого проводника в магнитном поле должна быть произведена дополнительная работа внешних сил. Эта работа возникает потому, что индукционные токи, взаимодействуя с магнитным полем, вызывают силы, направленные противоположно движению, т.е. препятствующие движению.

## § 91. Основной закон электромагнитной индукции

В результате многочисленных опытов Фарадей установил основной количественный закон электромагнитной индукции. Однако мы рассмотрим сначала другую формулировку этого закона, данную впоследствии Максвеллом.

Возникновение индукционного тока показывает, что при электромагнитной индукции в проводнике появляется определенная электродвижущая сила. В § 89 мы видели, что индукционный ток, а следовательно, и ЭДС индукции появляются только в том случае, если проводник пересекает линии магнитной индукции, т.е. если полное число линий индукции, проходящих через площадь, ограниченную проволочным контуром, изменяется. Но полное число линий магнитной индукции, проходящих через какую-либо поверхность, есть магнитный поток через эту поверхность. Отсюда можно заключить, что причина появления ЭДС электромагнитной индукции есть изменение магнитно-

го потока. Анализируя результаты опытов Фарадея, Максвелл установил, что во всех случаях ЭДС электромагнитной индукции пропорциональна скорости изменения магнитного потока через площадь, ограниченную контуром, т.е.

$$\mathcal{E} = f \frac{d\Phi}{dt},$$

где  $f$  — множитель пропорциональности, зависящий только от выбора единиц.

В системе единиц СИ ЭДС измеряют в вольтах, а время — в секундах. Закон же электромагнитной индукции используют для определения единицы магнитного потока — вебера, с которой мы уже встречались в § 84. А именно, ее выбирают таким образом, чтобы множитель  $f$  обратился в единицу.

Остановимся теперь на знаке ЭДС электромагнитной индукции. В § 84 мы приписали магнитному потоку определенный знак, который зависит от выбора положительной нормали к плоскости контура. Это направление нормали мы связали при помощи правила правого буравчика с положительным направлением тока в контуре. Поэтому, выбирая (произвольно) определенное положительное направление нормали, мы определяем как знак потока, так и положительное направление тока и ЭДС в контуре. Пользуясь этим, можно выразить ЭДС индукции и по модулю, и по знаку следующей формулой:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (91.1)$$

которая и представляет собой основной закон электромагнитной индукции в форме, данной Максвеллом.

Знак минус в этой формуле соответствует закону Ленца. Поясним это на конкретном примере. Пусть положительное направление нормали совпадает с направлением магнитной индукции (см. рис. 139). Тогда поток сквозь контур будет положительным. Положительное направление тока определяется выбором направления нормали и на рис. 139 показано штриховой линией. Если теперь магнитное поле увеличивается, т.е.  $d\Phi/dt > 0$ , то, согласно (91.1),  $\mathcal{E} < 0$ , а следовательно, и  $i < 0$ . Это значит, что направление индукционного тока противоположно выбранному нами положительному направлению.

Формула (91.1) выражает закон электромагнитной индукции в общей форме. Она применима как к неподвижным контурам, так и к движущимся проводникам в магнитном поле. Входящая в нее производная от магнитного потока по времени в общем случае состоит из двух частей, одна из которых обусловлена изменением магнитной индукции во времени, а другая — движением контура относительно магнитного поля (или его деформацией). Рассмотрим некоторые примеры применения этого закона.



**Пример 1.** Прямолинейный проводник длины  $l$  движется параллельно самому себе в магнитном поле (рис. 140). Этот проводник может входить в состав замкнутой цепи, остальные части которой неподвижны. Найдем ЭДС, возникающую в проводнике.

Если мгновенное значение скорости проводника есть  $v$ , то за малое время  $dt$  он опишет площадь  $dS = lv dt$  и за это время пересечет все линии магнитной индукции, проходящие через  $dS$ . Поэтому изменение магнитного потока через контур, в состав которого входит движущийся проводник, будет  $d\Phi = B_n lv dt$ . Здесь  $B_n$  — составляющая магнитной индукции, перпендикулярная к  $dS$ . Подставляя это в формулу (91.1), получаем ЭДС

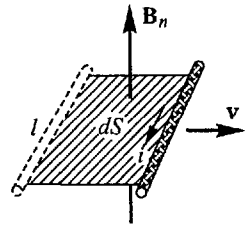


Рис. 140. Движение проводника в магнитном поле

$$\mathcal{E} = B_n lv. \quad (91.2)$$

Направление индукционного тока и знак ЭДС определяются законом Ленца: ток направлен так, что механическая сила, действующая на движущийся проводник, противоположна скорости (тормозит движение).

Рассмотрим численный пример. Вертикальный проводник (автомобильная антенна) длины  $l = 2$  м движется с востока на запад в магнитном поле Земли со скоростью  $v = 60$  км/ч  $= (10^3/60)$  м/с. Вычислим напряжение между концами проводника.

Так как проводник разомкнут, то тока в нем не будет и напряжение на концах будет равно ЭДС индукции. Учитывая, что горизонтальная составляющая магнитной индукции поля Земли (т.е. составляющая, перпендикулярная к направлению движения) для средних широт равна около  $0,2 \cdot 10^{-4}$  Тл, по формуле (91.2), находим  $U = B_n lv = 0,2 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^3/60 = (2/3) \cdot 10^{-3}$  В  $\approx 1$  мВ

Магнитное поле Земли направлено с юга на север. Поэтому мы находим, что ЭДС направлена сверху вниз. Это значит, что нижний конец провода будет иметь более высокий потенциал (зарядится положительно), а верхний — более низкий (зарядится отрицательно).

**Пример 2.** В магнитном поле находится замкнутый проводочный контур, пронизываемый потоком магнитной индукции  $\Phi$ . Положим, что этот поток уменьшается до нуля, и вычислим полный заряд, прошедший по цепи.

Мгновенное значение ЭДС в процессе исчезновения магнитного потока выражается формулой (91.1). Следовательно, согласно закону Ома, мгновенное значение силы тока есть

$$i = -\frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dt},$$

где  $r$  — полное сопротивление цепи. Прошедший заряд равен

$$q = \int i dt = -\frac{1}{r} \int_{\Phi}^0 d\Phi = \frac{\Phi}{r}. \quad (91.3)$$

Полученное соотношение выражает закон электромагнитной индукции в форме, найденной Фарадеем, который из своих опытов заключил, что заряд, прошедший по цепи, пропорционален полному числу линий магнитной индукции, пересеченных проводником, и обратно пропорционален сопротивлению цепи.

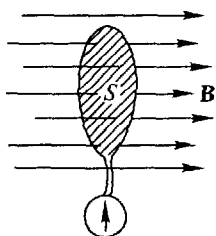
Отметим, что входящий в выражение для  $i$  магнитный поток есть сумма потоков, создаваемых внешними источниками и током (в самом рассматриваемом контуре), возникающим в процессе исчезновения магнитного поля. Однако после интегрирования остаются только значения магнитного потока в начале и конце процесса, когда ток в рассматриваемом контуре равен нулю. Поэтому магнитный поток, создаваемый самим контуром, выпадает из окончательного результата и  $\Phi$  в формуле (91.3) обозначает магнитный поток, создаваемый только внешними источниками.

На соотношении (91.3) основано определение единицы магнитного потока в системе СИ: вебер — магнитный поток, при убывании которого до нуля в сцепленном с ним контуре сопротивлением 1 Ом проходит количество электричества 1 Кл.

Отсюда также следует определение единицы СИ для магнитной индукции: тесла — магнитная индукция, при которой магнитный поток сквозь поперечное сечение площадью 1 м<sup>2</sup> равен 1 Вб.

Формула (91.3) лежит в основе простого и удобного способа измерения магнитной индукции. Для этого служит флюксметр. Он состоит из небольшой плоской проволочной катушки, соединенной с баллистическим гальванометром (рис. 141). Чтобы в случае неоднородного поля по возможности приблизиться к значению индукции в определенной точке поля, размеры катушки делают малыми (диаметр около 1 см).

Рис. 141 Принцип флюксметра



При измерениях катушку флюксметра ориентируют перпендикулярно к направлению магнитной индукции. Тогда магнитный поток через катушку равен  $\Phi = BSn$ , где  $S$  — площадь катушки, а  $n$  — число витков проволоки. Затем магнитный поток через катушку быстро уменьшают до нуля. Это можно осуществить, быстро выдергивая катушку из области магнитного поля или выключая токи, создающие магнитное поле, или, на-

конец, поворачивая катушку на  $90^\circ$ . При этом по цепи пройдет заряд

$$q = \frac{\Phi}{r} = \frac{S n}{r} B = a B.$$

Поэтому, измеряя заряд  $q$  баллистическим гальванометром и зная постоянную прибора  $a$ , можно определить магнитную индукцию  $B$ . Значение постоянной  $a$  обычно не вычисляют, а определяют опытным путем при помощи полей с известной индукцией (длинные соленоиды).

**Пример 3.** Замкнутый виток проволоки движется поступательно в однородном магнитном поле (рис. 142)

В этом случае магнитный поток сквозь площадь витка остается при движении постоянным и, согласно (91 1), ЭДС индукции  $\mathcal{E} = 0$ . Поэтому и тока в витке не будет. В рассматриваемом примере линии магнитной индукции пересекают отдельные части витка и в них имеются ЭДС. Однако полная ЭДС контура, равная сумме ЭДС, возникающих в отдельных его частях, оказывается равной нулю.

Чтобы в замкнутом жестком контуре, движущемся в однородном поле, возникла ЭДС, контур должен поворачиваться (рис. 143)

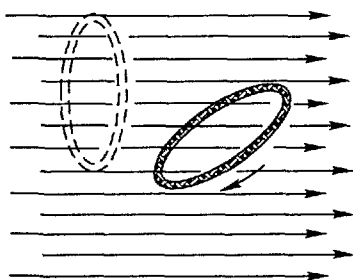


Рис. 143 Вращение витка в магнитном поле

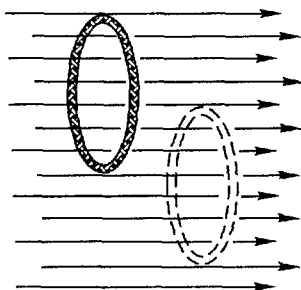


Рис. 142 Движение витка в магнитном поле без изменения магнитного потока

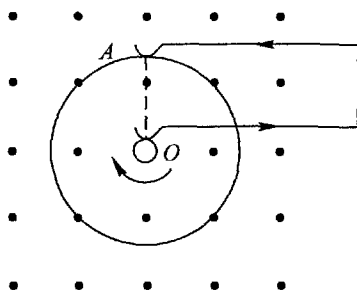


Рис. 144 Вращение диска в магнитном поле

**Пример 4** Рассмотрим металлический диск, вращающийся в магнитном поле. Диск может быть включен в цепь при помощи скользящих контактов, касающихся его оси  $O$  и точки окружности  $A$  (рис. 144). Магнитное поле перпендикулярно к плоскости диска. Найдём ЭДС индукции, возникающую при вращении диска.

В этом примере движущимся проводником, входящим в состав цепи, является радиальная часть диска, замыкающая точки  $O$  и  $A$ . Так как ЭДС индукции не зависит от вещества проводника и его сечения, то она такая же,

как и в примере 1, и равна числу линий магнитной индукции, пересекаемых радиусом диска  $OA$  в 1 с.

## § 92. Измерение магнитного напряжения

Пользуясь электромагнитной индукцией, можно просто измерить и магнитное напряжение, введенное нами в § 81.

Рассмотрим длинную катушку в магнитном поле (рис. 145 а). Ее можно представить как совокупность замкнутых витков и

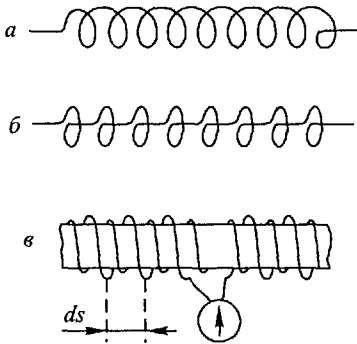


Рис 145. Схема пояса Роговского

прямолинейных отрезков, соединяющих витки (рис. 145 б). Если магнитное поле быстро уменьшается до нуля, то по цепи катушки протечет некоторый заряд, обусловленный кратковременным импульсом напряжения в круговых витках и в прямолинейных отрезках.

Действие прямолинейных отрезков можно исключить, если сделать катушку двухслойной (рис. 145 в), так как в этом случае прямолинейные отрезки внутренней и наружной обмоток вызывают противоположные токи во внешней цепи, и поэтому остается только действие витков катушки.

Вычислим заряд, протекающий в цепи за время исчезновения поля. Если  $n$  — число витков катушки на единице длины (в обоих слоях), то на элементе длины  $ds$  катушки будет  $n ds$  витков, которые, согласно сказанному в § 91, дадут заряд

$$dq = \frac{Sn}{r} B_s ds = \mu_0 \frac{Sn}{r} H_s ds.$$

Здесь  $B_s$  и  $H_s$  — проекции магнитной индукции и соответственно напряженности магнитного поля на направление  $ds$ ,  $\mu_0$  — магнитная постоянная, а остальные обозначения имеют прежние значения. Поэтому полный заряд, прошедший по цепи, будет

$$q = \mu_0 \frac{Sn}{r} \int_l H_s ds = AU_M. \quad (92.1)$$

Здесь интегрирование производится по контуру  $l$ , совпадающему с осью катушки. Заряд оказывается пропорциональным магнитному напряжению  $U_M$ , и поэтому, изгибая катушку должным образом, можно измерить магнитное напряжение по любому контуру.

Для подобных измерений служит пояс Роговского, представляющий собой узкую двухслойную катушку, намотанную на гибкий ремень (рис. 146). Концы обмотки, сходящиеся в середине внешнего слоя, присоединяют к баллистическому гальванометру.

Пользуясь поясом Роговского, можно проверить основную теорему о магнитном напряжении, установленную в § 81. Если изогнуть пояс Роговского таким образом, чтобы образовался замкнутый контур, охватывающий ток (рис. 146), и затем выключить ток, создающий магнитное поле, то отброс баллистического гальванометра укажет магнитное напряжение по замкнутому контуру. При этом легко убедиться, что отброс гальванометра не изменяется при любом изгибании пояса Роговского, пока образованный им контур охватывает ток один раз. Если замкнутый контур охватывает ток два раза, то и отброс гальванометра возрастает вдвое. Если пояс образует замкнутый контур, не охватывающий ток, то гальванометр не дает никакого отброса.

Пользуясь поясом Роговского, можно измерить магнитное напряжение по любому контуру, замкнутому или разомкнутому, и в любом магнитном поле, независимо от того, создано ли это поле контурами с током или магнитами.

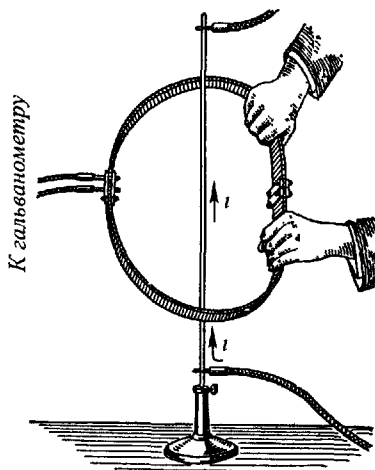


Рис 146 Изменение магнитного напряжения в поле прямого тока Пояс Роговского охватывает ток один раз

### § 93. Самоиндукция

Явление электромагнитной индукции наблюдается во всех случаях, когда изменяется магнитный поток, пронизывающий контур. В частности, этот поток может создаваться током, текущим в самом рассматриваемом контуре. Поэтому при всяком изменении силы тока в каком-либо контуре в нем возникает ЭДС индукции, которая вызывает дополнительный ток в контуре. Это явление называется *самоиндукцией*, а дополнительные токи, вызываемые ЭДС самоиндукции, — *экстратокami* самоиндукции.

На рис. 147 дана схема опыта для наблюдения экстратоков. Катушка  $L$ , имеющая несколько тысяч витков проволоки, включена в цепь, содержащую батарею  $B$ , реостат  $r$  и ключ  $K$ . Параллельно катушке присоединен грубый гальванометр. При замкнутом ключе ток батареи разветвляется: его часть  $i$  проходит через катушку, а часть  $i_1$  — через гальванометр. Если разомкнуть ключ, то магнитный поток в катушке будет исчезать и в ней возникнет экстраток самоиндукции  $I$  (экстраток размыкания).

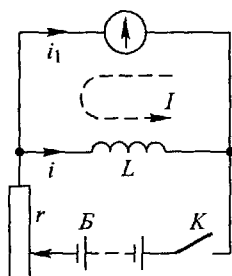


Рис. 147. Наблюдение экстратока самоиндукции

В соответствии с законом Ленца он будет препятствовать убыванию магнитного потока, т.е. будет направлен в катушке так же, как и убывающий ток. Этот экстраток проходит целиком через гальванометр, где его направление противоположно первоначальному току  $i_1$ . Поэтому гальванометр дает отброс в обратную сторону.

При замыкании ключа (установлении тока) в катушке также возникает экстраток (экстраток замыкания). Его направление в катушке противоположно нарастающему току батареи. Однако в случае замыкания экстраток делится между батареей и гальванометром и, кроме того, его направление в гальванометре — такое же, как и нарастающего тока батареи  $i_1$ . Поэтому экстраток замыкания заметен гораздо хуже.

Если поместить в катушку железный сердечник, то экстратоки значительно увеличиваются. В этом случае гальванометр можно заменить небольшой лампой накаливания. При размыкании ключа лампа дает яркую вспышку.

Рассмотрим, от чего зависит ЭДС самоиндукции. Магнитная индукция (плотность магнитного потока) в любой точке поля пропорциональна силе тока  $i$  в катушке. Поэтому и магнитный поток  $\Phi$ , пронизывающий катушку, пропорционален току:

$$\Phi = Li. \quad (93.1)$$

Коэффициент пропорциональности  $L$  называется *индуктивностью контура*. Если  $i = 1$ , то  $\Phi = L$ , т.е. индуктивность контура равна магнитному потоку через этот контур при силе тока в контуре, равной единице.

Единицей индуктивности в системе СИ служит генри (Гн). Это индуктивность такого контура, в котором при силе тока 1 А возникает магнитный поток 1 Вб:

$$1 \text{ Гн} = 1 \text{ Вб}/1 \text{ А} = 1 \text{ Вб}/\text{А}.$$

Применяя к явлению самоиндукции основной закон электромагнитной индукции (§ 91), мы получаем для ЭДС самоиндук-

ции выражение

$$\mathcal{E} = -L \frac{di}{dt}. \quad (93.2)$$

ЭДС самоиндукции пропорциональна производной тока по времени, т.е. скорости изменения тока.

Индуктивность какого-либо контура зависит от его формы и размеров, а также от свойств окружающей среды.

При получении формулы (93.2) мы считали, что  $L$  постоянно. Это справедливо, если контур жесткий и находится в вакууме или в среде, магнитные свойства которой не зависят от магнитного поля. Однако в железе и некоторых других веществах (*ферромагнетиках*, см. § 110) последнее не имеет места, и поэтому индуктивность контура, содержащего такие вещества, зависит от силы тока (магнитного поля) и при меняющемся токе изменяется со временем. В этом случае ЭДС самоиндукции равна

$$\mathcal{E} = - \left( L \frac{di}{dt} + i \frac{dL}{dt} \right). \quad (93.2a)$$

Будем считать сначала, что контур находится в вакууме или, что практически то же, в атмосферном воздухе. Чтобы вычислить индуктивность контура, нужно найти сначала магнитный поток  $\Phi$  через этот контур, создаваемый током некоторой силы  $i$ . После этого индуктивность можно найти по формуле (93.1). Рассмотрим некоторые примеры.

**Пример 1. Индуктивность соленоида.** Длину соленоида будем считать большой по сравнению с его диаметром, и поэтому будем пренебрегать искажением поля вблизи концов соленоида. При этом предположении напряженность поля во всех точках внутри соленоида можно считать одинаковой и, согласно § 81, имеющей величину

$$H = ni = Ni/l.$$

Здесь  $n$  — число витков на единицу длины,  $N$  — полное число витков, а  $l$  — длина соленоида. Если  $S$  — площадь сечения соленоида, то магнитный поток через один виток равен

$$\Phi_1 = \mu_0 \frac{Ni}{l} S,$$

а полный поток через все  $N$  витков

$$\Phi = \mu_0 \frac{N^2 S}{l} i.$$

Поэтому индуктивность длинного соленоида в воздухе равна

$$L = \mu_0 \frac{N^2 S}{l}. \quad (93.3)$$

Эта формула определяет и индуктивность замкнутой тороидальной катушки.

Если длина соленоида невелика по сравнению с его диаметром, то формула (93.3) становится неточной. В этом случае вводят поправочный множитель, значение которого можно найти в справочниках по радиотехнике.

**Пример 2 Индуктивность двухпроводной линии** Пусть имеются два длинных параллельных провода, входящих в цепь тока (рис. 148). Радиус каждого из проводов равен  $a$ , а расстояние между их осями равно  $d$ . Вычислим магнитный поток через площадь, ограниченную осями проводов, для отрезка линии длины  $l$ . Рассмотрим сначала магнитное поле одного левого провода. В области  $0 < x < a$  (внутри провода) напряженность поля равна (§ 81)  $\frac{ix}{2\pi a^2}$ , и поэтому поток через часть рассматриваемой площади, лежащей внутри провода, есть

$$\mu_0 \frac{il}{2\pi a^2} \int_0^a x dx = \frac{\mu_0}{4\pi} il.$$

Напряженность поля в области  $x > a$ , согласно § 81, равна  $\frac{i}{2\pi x}$ , что дает для потока через остальную часть площади

$$\mu_0 \frac{il}{2\pi} \int_a^d \frac{dx}{x} = \mu_0 \frac{il}{2\pi} \ln \frac{d}{a}$$

Так как токи в обоих проводах направлены противоположно, то направления полей, создаваемых обоими проводами между их осями, одинаковы (см рис 148) Поэтому полный поток  $\Phi$ , создаваемый обоими проводами, будет в два раза больше потока от одного провода

$$\Phi = \frac{\mu_0}{\pi} \left( \frac{1}{2} + \ln \frac{d}{a} \right) il$$

Отсюда получаем формулу для индуктивности двухпроводной линии

$$L = \frac{\Phi}{i} = \frac{\mu_0}{\pi} \left( \frac{1}{2} + \ln \frac{d}{a} \right) l \quad (93.4)$$

Рис 148. К вычислению индуктивности двухпроводной линии

Если длина линии  $l$  выражена в метрах, то индуктивность  $L$  будет выражена в генри. Обычно радиус проводов  $a$

очень мал по сравнению с расстоянием  $d$  между ними, и поэтому дробью  $1/2$  в скобках можно пренебречь по сравнению с  $\ln(d/a)$ .

**Единица магнитной постоянной  $\mu_0$ .** Понятие индуктивности используют в системе единиц СИ для обозначения единицы магнитной постоянной  $\mu_0$ . Так, например, если воспользоваться для индуктивности соленоида соотношением (93.3),



выразить из него  $\mu_0$  и затем заменить все другие величины их единицами, то получим единицу магнитной постоянной  $\mu_0$  в системе СИ в виде

$$1\mu_0 = 1 \text{ Гн} \cdot 1 \text{ м/1 м}^2 = 1 \text{ Гн/м.}$$

Как уже говорилось раньше, она получила название генри на метр.

## § 94. Магнитная проницаемость вещества

Опыт показывает, что индуктивность всякого контура зависит еще от свойств среды, в которой он находится. В этом можно убедиться при помощи опыта, описанного в § 93 (см. рис. 147). Если вдвинуть в катушку  $L$  железный сердечник, то при всех прочих одинаковых условиях сила экстратоков возрастает во много раз, а значит, сильно увеличивается и индуктивность катушки.

Будем считать, что окружающая среда однородна и заполняет все пространство, где имеется магнитное поле. Для замкнутой тороидальной катушки это практически значит, что среда находится везде внутри катушки, так как поле вне тороида весьма мало (поле одного замкнутого витка). Это справедливо и для длинного соленоида.

Пусть  $L_0$  есть индуктивность некоторого контура в вакууме, а  $L$  — индуктивность того же контура в однородном веществе, заполняющем все магнитное поле. Отношение

$$L/L_0 = \mu \quad (94.1)$$

называют *относительной магнитной проницаемостью* или просто *магнитной проницаемостью* вещества. Магнитная проницаемость есть величина, характеризующая магнитные свойства вещества, она зависит от рода вещества и его состояния (например, от температуры).

Мы ввели магнитную проницаемость  $\mu$  аналогично диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  (§ 31). И в этом случае величина  $\mu$ , определяемая формулой (94.1), есть отношение абсолютных магнитных проницаемостей рассматриваемого вещества ( $\mu\mu_0$ ) и вакуума ( $\mu_0$ ). Очевидно, что  $\mu$ , как и  $\epsilon$ , есть безразмерная величина. Абсолютная же магнитная проницаемость вещества  $\mu\mu_0$  имеет ту же размерность, что и  $\mu_0$ .

Тот факт, что среда влияет на индуктивность контура, показывает, что с изменением среды меняется и магнитный поток, пронизывающий контур, а следовательно, и индукция в каждой точке поля. В среде с магнитной проницаемостью  $\mu$  при том же токе в контуре индукция в  $\mu$  раз больше, нежели в вакууме:

$$\mathbf{B} = \mu\mu_0 \mathbf{H}. \quad (94.2)$$

Физические причины этого будут рассмотрены в гл. XI

Из формулы (94.2) следует, что единица абсолютной магнитной проницаемости  $1 \text{ Гн/м}$  есть магнитная проницаемость среды, в которой при напряженности магнитного поля  $1 \text{ А/м}$  создается магнитная индукция  $1 \text{ Тл}$ .

### § 95. Исчезновение и установление тока

Экстратоки самоиндукции в соответствии с законом Ленца всегда препятствуют изменениям тока, их вызвавшим. При включении в цепь источника тока экстратоки направлены противоположно току, создаваемому источником. При выключении источника тока экстратоки имеют то же направление, что и ослабевающий ток источника. Поэтому индуктивность цепи проявляется в замедлении процессов исчезновения и установления тока. Рассмотрим это явление подробнее.

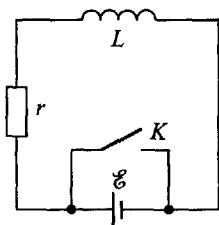


Рис. 149. Цепь с индуктивностью, сопротивлением и источником тока

Пусть имеется цепь, содержащая источник тока с ЭДС  $\mathcal{E}$ , сопротивление  $r$  и индуктивность  $L$  (рис. 149). При разомкнутом ключе  $K$  в цепи будет действовать ЭДС источника и в ней установится ток силы  $i_0 = \mathcal{E}/r$ . Если замкнуть ключ  $K$ , то источник тока будет выключен из цепи и ток начнет исчезать.

Будем считать ток квазистационарным и найдем закон исчезновения тока. Обозначим через  $i$  мгновенную силу тока в момент времени  $t$  и применим к контуру  $LKrL$  второе правило Кирхгофа (§ 70). Учитывая, что в цепи действует ЭДС самоиндукции  $-L di/dt$ , имеем

$$ri = -L \frac{di}{dt}.$$

В этом уравнении переменные разделяются:

$$\frac{di}{i} = -\frac{r}{L} dt,$$

и поэтому интегрированием находим

$$i = C \exp\left(-\frac{r}{L} t\right).$$

Постоянная интегрирования  $C$  может быть определена из начального условия. Положим, что источник был выключен в момент времени  $t = 0$ . Тогда начальное условие есть  $t = 0$ ,  $i = i_0$ , откуда  $C = i_0$ . Поэтому закон убывания тока принимает вид

$$i = i_0 \exp(-t/T), \quad (95.1)$$

где

$$T = L/r. \quad (95.2)$$

Величина  $T$  имеет размерность времени и называется *постоянной времени* цепи с индуктивностью и сопротивлением. Из (95.1) видно, что  $T$  есть время, в течение которого сила тока уменьшается в  $e = 2,71$  раза. Чем больше индуктивность и меньше сопротивление, тем медленнее происходит исчезновение тока.

Отметим, что, согласно (95.1), сила тока асимптотически стремится к нулю, так что полное исчезновение тока ( $i = 0$ ) наступает только через время  $t = \infty$ . Однако практически исчезновение тока обозначает, что его сила сделалась достаточно малой. А такое почти установившееся состояние достигается в конечное время, однако тем большее, чем больше постоянная времени  $T$ .

Рассмотрим численный пример. Пусть  $L = 1$  Гн, а  $r = 100$  Ом. Тогда  $T = 0,01$  с и через это время ток уменьшится в  $e = 2,71$  раза. Ток уменьшится до 0,001 первоначальной величины через время  $t$ , которое можно определить из (95.1):

$$\ln 1000 = t/0,01,$$

откуда  $t = 0,069$  с.

Если в цепи, изображенной на рис. 149, ключ  $K$  сначала был замкнут и затем внезапно разомкнут, то в цепи начнется процесс установления тока. В этом случае в цепи будут действовать ЭДС источника  $\mathcal{E}$  и ЭДС самоиндукции  $-L di/dt$ , и второе правило Кирхгофа дает

$$ri = \mathcal{E} - L di/dt.$$

Здесь  $r$  — полное сопротивление цепи, в которое в данном случае должно быть включено и внутреннее сопротивление источника.

Введя новую переменную

$$u = ri - \mathcal{E},$$

преобразуем это уравнение к тому же виду, что и выше:

$$du/u = -dt/T,$$

где через  $T$  обозначена постоянная времени, выражаемая формулой (95.2). Поэтому

$$u = C \exp(-t/T).$$

Если начало отсчета времени совпадает с моментом включения источника, то начальное условие имеет вид

$$t = 0: \quad i = 0, \quad u = -\mathcal{E}.$$

Это дает  $C = -\mathcal{E}$ , и мы имеем

$$u = ir - \mathcal{E} = -\mathcal{E} \exp(-t/T).$$

Выражая отсюда силу тока  $i$ , находим окончательно

$$i = (\mathcal{E}/r)[1 - \exp(-t/T)]. \quad (95.3)$$

Сила тока возрастает от начального значения  $i = 0$  и асимптотически стремится к установившемуся значению  $\mathcal{E}/r$ . Быстрота установления тока определяется той же постоянной времени  $T$ , что и исчезновение тока.

Влияние индуктивности можно продемонстрировать на опыте, схема которого показана на рис. 150. Здесь имеются две параллельно соединенные ветви, одна из которых содержит большую индуктивность  $L$  в несколько десятков генри (вторичная обмотка высоковольтного трансформатора), а другая — сопротивление  $r$ , равное сопротивлению катушки  $L$ .  $L_1$  и  $L_2$  — одинаковые лампы накаливания, играющие роль демонстрационных амперметров;  $\Pi$  — переключатель, позволяющий изменять направление тока;  $B$  — батарея. При замыкании цепи на батарею лампа  $L_2$  накаливается быстро, практически мгновенно. Лампа же  $L_1$  накаливается с заметным запозданием (порядка 1 с) и ее свечение усиливается постепенно.

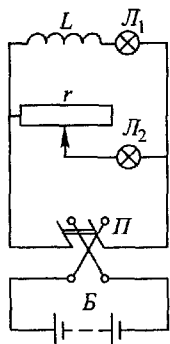


Рис. 150. Демонстрация влияния индуктивности на время установления тока

При быстрых непрерывных переключениях батареи лампа  $L_1$  вообще не успевает накалиться за время между переключениями и остается темной. Этот опыт разъясняет причину так называемого «кажущегося сопротивления» индуктивности в цепи переменного тока, которое мы рассмотрим подробнее в § 219.

Для многих целей, например при измерениях на переменном токе, желательно иметь катушки сопротивлений, индуктивность которых по возможности мала. Для устройства таких безындукционных катушек проволоку сгибают посередине и получившуюся двойную проволоку используют для обмотки. Такие бифилярные (двунитные) катушки можно рассматривать как состоящие из двух катушек, токи в которых направлены противоположно. Магнитное поле таких катушек почти равно нулю, и поэтому их индуктивность ничтожно мала.

## Г Л А В А X

### ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

#### § 96. Собственная энергия тока

Для увеличения тока в электрической цепи необходима некоторая работа. Эту работу производит источник тока, включен-

ный в цепь. Напротив, при всяком уменьшении тока в цепи освобождается некоторая энергия и источник тока совершает меньшую работу, нежели при постоянном токе. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Вернемся к цепи, изображенной на рис. 149, содержащей индуктивность  $L$  и имеющей полное сопротивление  $r$ , и предположим сначала, что в ней имеется установившийся постоянный ток. Сила этого тока определяется ЭДС источника тока  $\mathcal{E}$  и сопротивлением цепи:  $i = \mathcal{E}/r$ . За время  $dt$  в цепи будет выделено тепло Джоуля–Ленца  $ri^2 dt$ . Так как  $ri = \mathcal{E}$ , то

$$ri^2 dt = \mathcal{E}i dt.$$

Но правая часть этого равенства выражает работу источника тока за то же время  $dt$ . Мы видим, что работа источника в точности равна теплу Джоуля–Ленца, а, значит, для поддержания постоянного магнитного поля не требуется никакой работы.

Представим себе теперь, что ток в цепи увеличивается с быстротой  $di/dt$ . В этом случае в цепи появится еще ЭДС самоиндукции  $\mathcal{E}_c$ , которая вызовет экстраток

$$\delta i = \frac{|\mathcal{E}_c|}{r} = \frac{L}{r} \frac{di}{dt}.$$

Он направлен против тока  $i$ , и поэтому полная сила тока в цепи будет  $i - \delta i$ .

В дальнейшем мы будем считать, что процесс увеличения тока происходит весьма медленно ( $\delta i \ll i$ ), и при расчетах будем удерживать только члены первого порядка малости.

В рассматриваемом процессе за время  $dt$  выделится тепло Джоуля–Ленца  $r(i - \delta i)^2 dt$ . Оно меньше по сравнению со случаем постоянного тока на величину

$$ri^2 dt - r(i - \delta i)^2 dt = 2ri \delta i dt = 2Li \frac{di}{dt} dt = 2Li di.$$

Здесь  $di$  — увеличение тока в цепи за время  $dt$ .

За то же время источник тока совершит работу  $\mathcal{E}(i - \delta i) dt$  и поэтому произойдет «разгрузка» батареи на величину работы:

$$\mathcal{E}i dt - \mathcal{E}(i - \delta i) dt = \mathcal{E} \delta i dt = Li di.$$

Следовательно, в случае нарастающего тока работа источника тока больше количества выделившегося тепла. Избыток работы источника

$$dW = Li di$$

и есть та работа, которая необходима для увеличения силы тока в цепи от значения  $i$  до  $i + di$ . Полная работа, необходимая для

установления тока  $i$ , равна

$$W = L \int_0^i i \, di = Li^2/2. \quad (96.1)$$

При выключении источника тока работа  $W$  выделяется в цепи; ее совершают экстратоки размыкания. Поэтому выражение (96.1) дает энергию, запасаемую контуром с током. Она получила название *собственной энергии тока*. Именно эта энергия и проявлялась в опыте (рис. 147) в виде отброса стрелки гальванометра и вспышки лампы от экстраток размыкания.

Полезно сопоставить выражения для собственной энергии контура с током и энергии заряженного конденсатора, равной (§ 34)

$$q^2/2C.$$

Энергия конденсатора пропорциональна квадрату заряда, энергия же тока пропорциональна квадрату силы тока, т.е. зависит от скорости движения зарядов.

В механике мы встречались с двумя видами энергии: потенциальной и кинетической. Потенциальная энергия сжатой пружины равна

$$kx^2/2,$$

где  $x$  — смещение конца пружины, а  $k$  — ее жесткость, а кинетическая энергия движущегося тела есть

$$mv^2/2,$$

где  $m$  — масса тела, а  $v$  — его скорость. Развивая аналогию между электрическими и механическими явлениями, мы видим, что энергия конденсатора соответствует потенциальной энергии в механике, а собственная энергия тока — кинетической энергии. При этом величина  $1/C$ , обратная емкости, аналогична жесткости пружины, а индуктивность  $L$  — массе тела.

## § 97. Энергия магнитного поля

Всякий электрический ток всегда окружен магнитным полем. Поэтому можно спросить, где именно сосредоточена, локализована, собственная энергия тока: внутри проводов, где движутся электрические заряды, или в магнитном поле, т.е. в среде, окружающей токи?

Ответ на вопрос может быть дан только опытом. Однако пока мы имеем дело с постоянными токами, такие опыты невозможны, так как в этом случае токи всегда окружены магнитным полем и, наоборот, магнитное поле всегда сопровождается токами, его поддерживающими, что относится и к постоянным магнитам, которые также содержат замкнутые молекулярные токи (гл. XI).

Ответ на поставленный вопрос можно получить, исследуя переменные магнитные поля или электромагнитные волны (гл. XXIII). В электромагнитных волнах мы имеем магнитные поля, изменяющиеся в пространстве и времени и способные существовать без токов, их поддерживающих. Так как электромагнитные волны заключают в себе и переносят определенную энергию, то отсюда мы делаем вывод, что энергия сосредоточена в магнитном поле.

Найдем энергию, заключающуюся в единице объема магнитного поля. Рассмотрим замкнутую тороидальную катушку. Ее индуктивность (§ 93, 94) есть

$$L = \mu\mu_0 N^2 S/l,$$

где  $\mu$  — магнитная проницаемость среды, а  $\mu_0$  — магнитная постоянная. Подставляя это выражение в (96.1), имеем

$$W = \frac{1}{2} \mu\mu_0 \frac{N^2 S}{l} i^2.$$

Но  $Ni/l = H$  есть напряженность поля внутри катушки (§ 81). Поэтому

$$W = \mu\mu_0 H^2 \tau/2,$$

где  $\tau = Sl$  — объем катушки. Мы видим, что энергия однородного магнитного поля пропорциональна объему  $\tau$ , занятому полем. Поэтому энергия единицы объема поля, или *объемная плотность энергии* магнитного поля, равна

$$w = \mu\mu_0 H^2/2. \quad (97.1)$$

Если магнитное поле неоднородно, то его можно разбить на бесконечно малые элементы объема  $d\tau$ , в каждом из которых поле можно считать однородным. Энергия, заключенная в элементе объема, есть  $w d\tau$ . Полная энергия любого магнитного поля равна

$$W = \int_{\tau} w d\tau, \quad (97.2)$$

где интегрирование распространяется на весь объем  $\tau$ , занятый магнитным полем.

При выводе формул (96.1), а следовательно, и (97.1) мы считали, что индуктивность контура, а значит, и магнитная проницаемость среды остаются постоянными. Мы считали также, что вся работа источника тока превращается в энергию магнитного поля. Это точно выполняется только для вакуума, так что формула (97.1) при  $\mu = 1$  выражает объемную плотность энергии магнитного поля в вакууме. Если же контуры с током находятся в какой-либо среде, то приходится учитывать дополнительные обстоятельства, аналогичные указанным в § 37 для электрического поля, а именно, при намагничивании среды она

может нагреваться. Ее объем и плотность, даже при неизменной температуре, в магнитном поле могут изменяться (явление *магнострикции*). Поэтому магнитная проницаемость, зависящая от температуры и плотности среды, не остается постоянной при намагничивании. Помимо этого, работа источника тока может и не превращаться целиком в энергию магнитного поля. По этим причинам в общем случае формула (97.1) не выражает точно работу при намагничивании и не дает объемную плотность энергии магнитного поля в среде.

В дальнейшем мы будем считать, что влияние изменения объема среды пренебрежимо мало (или что объем поддерживается постоянным).

Однако формула (97.1) дает внешнюю работу  $A$  при намагничивании, если температуру среды поддерживать постоянной. Как и в случае электрического поля, эта работа идет на увеличение энергии магнитного поля  $W$  и на выделение тепла  $Q$ , отводимого от тела (или сообщаемого ему) для поддержания постоянной температуры. В § 37 мы уже говорили, что работа внешних сил (в данном случае источника тока), совершаемая над телом при квазистатическом изотермическом процессе, равна приращению *свободной энергии* тела. Следовательно, формула (97.1) выражает не внутреннюю энергию магнитного поля, а ту часть свободной энергии намагниченной среды, которая зависит от магнитного поля.

Если тепло  $Q$  мало по сравнению с энергией поля  $W$ , то внешняя работа при создании магнитного поля равна энергии этого поля. Это мы и будем предполагать в дальнейшем, если не сказано обратное.

Предположение о постоянстве  $\mu$  обозначает также, что магнитная индукция  $\mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H}$  есть линейная функция магнитного поля  $\mathbf{H}$ . Такая зависимость точно справедлива для вакуума ( $\mu = 1$ ). Ее можно также применять с хорошей точностью для многих веществ (парамагнетиков и диамагнетиков, § 109). Однако в ферромагнетиках (§ 110) зависимость  $\mathbf{B}$  от  $\mathbf{H}$  сильно нелинейна даже при неизменной температуре, и поэтому формула (97.1) к ним неприменима. Более общее выражение для энергии магнитного поля, справедливое при нелинейной, но однозначной зависимости  $\mathbf{B}$  от  $\mathbf{H}$  (отсутствие магнитного гистерезиса), будет дано в § 111.

## § 98. Взаимная индукция

Рассмотрим теперь два контура с током, например два круговых витка 1 и 2 (рис. 151). Часть линий индукции поля, создаваемого контуром 1, будет проходить через контур 2, т.е. будет сцеплена с этим контуром. И, наоборот, определенное число ли-



ний индукции, создаваемых контуром 2, будет сцеплено с контуром 1. В этом случае мы говорим, что между обоими контурами существует магнитная связь.

Индукция поля контура 1 пропорциональна силе тока  $i_1$  в этом контуре. Поэтому магнитный поток  $\Phi_{12}$  через контур 2, создаваемый контуром 1, также пропорционален току  $i_1$ :

$$\Phi_{12} = L_{12}i_1. \quad (98.1)$$

Коэффициент  $L_{12}$  называется *взаимной индуктивностью* контуров 1 и 2. Она, очевидно, равна магнитному потоку через контур 2, создаваемому контуром 1 при силе тока в нем, равной единице.

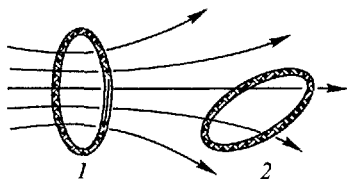


Рис 151. Магнитная связь двух контуров

Из сравнения (98.1) с (93.1) видно, что размерность  $L_{12}$  та же, что и размерность индуктивности, и поэтому взаимная индуктивность измеряется в тех же единицах, что и индуктивность.

Совершенно так же, если в контуре 2 имеется ток некоторой силы  $i_2$ , то он создает магнитный поток  $\Phi_{21}$  через контур 1, причем

$$\Phi_{21} = L_{21}i_2. \quad (98.1a)$$

Здесь  $L_{21}$  есть взаимная индуктивность контуров 2 и 1.

Можно показать (§ 99), что для любых двух контуров взаимные индуктивности всегда равны:

$$L_{12} = L_{21}. \quad (98.2)$$

Наличие магнитной связи между контурами проявляется в том, что при всяком изменении силы тока в одном из контуров в другом контуре появляется ЭДС индукции. Согласно основному закону электромагнитной индукции (§ 91) имеем

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -L_{12}\frac{di_1}{dt}, \quad \mathcal{E}_1 = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -L_{12}\frac{di_2}{dt}, \quad (98.3)$$

где  $\mathcal{E}_2$  — ЭДС индукции, возникающая в контуре 2, а  $\mathcal{E}_1$  — ЭДС индукции в контуре 1.

Взаимная индуктивность зависит от формы и размеров контуров и от их взаимного расположения. Она зависит также от свойств окружающей среды.

Рассмотрим простой пример вычисления взаимной индуктивности. Пусть имеются две тороидальные однослойные катушки 1 и 2, вплотную прилегающие друг к другу (рис. 152). В этом случае все линии индукции, создаваемые одной катушкой, проходят и через вторую катушку. Напряженность магнитного поля катушки 1 равна (§ 81)

$$H_1 = N_1i_1/l.$$

Это поле создает магнитный поток сквозь один виток катушки 2, равный  $\mu_0 H_1 S = \mu_0 N_1 i_1 S/l$ , где  $S$  — площадь сечения катушек.

Полный поток сквозь все  $N_2$  витков катушки 2 есть

$$\Phi_{12} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S}{l} i_1,$$

откуда для взаимной индуктивности получается выражение

$$L_{12} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S}{l}. \quad (98.4)$$

Если вычислить магнитный поток, создаваемый катушкой 2 сквозь катушку 1, то получится

$$H_2 = \frac{N_2 i_2}{l}, \quad \Phi_{21} = \frac{\mu_0 N_2 N_1 S}{l} i_2.$$

Отсюда мы находим для взаимной индуктивности  $L_{21}$  прежнее выражение (98.4) в соответствии с формулой (98.2).

В том случае, когда внутри катушек имеется сердечник из вещества с магнитной проницаемостью  $\mu$ , магнитный поток увеличивается в  $\mu$  раз и коэффициент взаимной индукции будет в  $\mu$  раз больше.

## § 99. Взаимная энергия двух токов

Вычислим энергию магнитного поля, созданного двумя контурами с током. Рассмотрим самый простой случай двух тороидальных катушек (см. рис. 152), находящихся в вакууме, в которых магнитное поле однородно. Напряженность суммарного поля внутри катушек

$$H = H_1 \pm H_2 = (N_1 i_1 \pm N_2 i_2)/l;$$

выбор знака  $+$  или  $-$  зависит от того, одинаковы или противоположны направления токов в обеих катушках. В единице объема этого поля заключена энергия (§ 97)  $\mu_0 H^2/2$ , а полная энергия, находящаяся во всем объеме поля  $\tau = Sl$ , равна

$$W = \frac{\mu_0 H^2 Sl}{2} = \frac{\mu_0 S}{2l} [(N_1 i_1)^2 + (N_2 i_2)^2 \pm 2(N_1 i_1)(N_2 i_2)].$$

Воспользовавшись выражениями для индуктивностей  $L_1$  и  $L_2$  обеих катушек (§ 93) и их взаимной индуктивности  $L_{12}$  (§ 98), полученный результат можно представить в виде

$$W = L_1 i_1^2/2 + L_2 i_2^2/2 \pm L_{12} i_1 i_2. \quad (99.1)$$

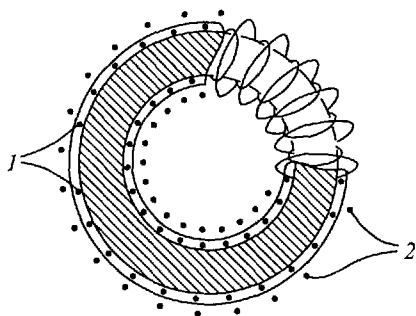


Рис. 152. Две обмотки с магнитной связью

Первый член этой формулы дает собственную энергию тока контура 1 (§ 96), а второе слагаемое выражает собственную энергию тока контура 2. Формула показывает, что энергия двух токов в контурах, обладающих магнитной связью, отличается от суммы собственных энергий токов на величину

$$W_{12} = \pm L_{12}i_1i_2. \quad (99.2)$$

Она получила название *взаимной энергии* двух токов.

Из сказанного видно, что причина возникновения взаимной энергии токов заключается в том, что в поле нескольких контуров с током складываются напряженности поля (принцип наложения или суперпозиции полей, см. § 76), в то время как энергия магнитного поля пропорциональна квадрату напряженности, а квадрат суммы не равен сумме квадратов.

Представим себе, что мы сначала создаем ток  $i_1$  в контуре 1, а ток в контуре 2  $i_2 = 0$ . Для этого потребуется работа  $L_1i_1^2/2$ . Создавая затем ток в контуре 2, мы совершим работу, согласно (99.1) равную  $L_2i_2^2/2 \pm L_{12}i_1i_2$ . Если бы мы сначала создали ток  $i_2$  (а ток  $i_1$  был бы равен нулю), то для этого была бы необходима работа  $L_2i_2^2/2$ . Но тогда последующее создание тока  $i_1$  потребовало бы работы  $L_1i_1^2/2 \pm L_{12}i_1i_2$ . Мы видим, что работа образования тока в контуре в присутствии другого контура с током не равна работе образования того же тока в уединенном контуре; она отличается на величину взаимной энергии обоих токов  $W_{12}$ .

Мы получили формулы (99.1) и (99.2), рассматривая частный случай тороидальных катушек. Легко убедиться, однако, что этот результат справедлив для контуров произвольной формы, находящихся в любой среде (см. Добавление 6).

### § 100. Закон сохранения энергии при наличии магнитного поля

Магнитные явления, как и любые другие процессы в природе, подчиняются закону сохранения энергии. Рассмотрим этот вопрос на примере двух контуров.

Пусть имеются два произвольных контура с токами  $i_1, i_2$ , источниками тока с ЭДС  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$  и полными сопротивлениями  $r_1$  и  $r_2$ . Контуров могут быть как неподвижными, так и движущимися, а токи в них могут изменяться. В каждом из контуров, во-первых, производят определенную работу источники тока. Их работа за бесконечно малое время  $dt$  равна

$$\mathcal{E}_1i_1 dt + \mathcal{E}_2i_2 dt.$$

Если источниками тока являются гальванические элементы, то эта работа совершается за счет химических реакций в элементах.

Далее, в контурах выделяется тепло Джоуля–Ленца:

$$r_1 i_1^2 dt + r_2 i_2^2 dt.$$

На каждый контур действуют силы магнитного взаимодействия. Поэтому при перемещении контуров (или при их деформации) будет совершена определенная механическая работа. Обозначим ее через  $\delta A$ .

Наконец, при движении контуров или при изменении силы токов в них будет изменяться магнитное поле, а следовательно, будет изменяться и его энергия. Согласно § 99 изменение энергии магнитного поля равно

$$dW = d(L_1 i_1^2/2 + L_2 i_2^2/2 \pm L_{12} i_1 i_2).$$

Мы будем считать, что емкость контуров весьма мала, и поэтому энергию электрического поля учитывать не будем. Согласно закону сохранения энергии имеем

$$\begin{aligned} \text{работа источников тока} &= \\ &= \text{тепло Джоуля–Ленца} + \text{механическая работа} + \\ &+ \text{увеличение энергии магнитного поля.} \end{aligned}$$

Или, иначе:

$$\mathcal{E}_1 i_1 dt + \mathcal{E}_2 i_2 dt = (r_1 i_1^2 dt + r_2 i_2^2 dt) + \delta A + dW. \quad (100.1)$$

Если контуров не два, а больше, то закон сохранения энергии имеет вид

$$\sum_k \mathcal{E}_k i_k dt = \sum_k r_k i_k^2 dt + \delta A + d \sum_k \sum_l L_{kl} i_k i_l / 2. \quad (100.1a)$$

В этой формуле последний член выражает изменение энергии магнитного поля,  $L_{kk}$  обозначает коэффициент самоиндукции  $k$ -го контура, а  $L_{kl}$  — коэффициент взаимной индукции контуров  $k$  и  $l$ . При  $k = l$  соответствующий член суммы дает собственную энергию  $k$ -го контура  $L_{kk} i_k^2 / 2$ , а при  $k \neq l$  каждая пара членов суммы  $L_{kl} i_k i_l / 2 + L_{lk} i_l i_k / 2 = L_{kl} i_k i_l$  представляет взаимную энергию  $k$ -го и  $l$ -го контуров.

Поясним сказанное на примерах.

**Пример 1. Один контур с постоянным током.** Так как в данном случае магнитное поле постоянно, то изменение энергии поля равно нулю. Если контур не деформируется, то и механическая работа  $\delta A = 0$ . Поэтому (100.1) дает

$$\mathcal{E} i dt = r i^2 dt.$$

В этом случае работа источника тока целиком превращается в тепло (рис. 153 а)

**Пример 2. Один контур, в котором устанавливается ток.** Зависимость силы тока от времени в процессе его установления выражается, согласно § 95, формулой

$$i = i_0 \left[ 1 - \exp \left( -\frac{r}{L} t \right) \right], \quad i_0 = \frac{\mathcal{E}}{r}.$$

Работа источника тока за время  $dt$  равна  $\mathcal{E}i dt$ . По сравнению со случаем установившегося тока она уменьшается на величину

$$\mathcal{E}i_0 dt - \mathcal{E}i dt = \mathcal{E}i_0 \exp\left(-\frac{r}{L}t\right) dt.$$

Поэтому в течение всего процесса установления тока произойдет «разгрузка» батареи, равная

$$\mathcal{E}i_0 \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{r}{L}t\right) dt = Li_0^2.$$

Уменьшение количества выделенного тепла есть

$$\int_0^{\infty} (ri_0^2 - ri^2) dt = ri_0^2 \int_0^{\infty} \left[ 2 \exp\left(-\frac{r}{L}t\right) - \exp\left(-\frac{2r}{L}t\right) \right] dt = \frac{3}{2} Li_0^2.$$

Поэтому получается «экономия» энергии

$$\frac{3}{2} Li_0^2 - Li_0^2 = \frac{1}{2} Li_0^2.$$

Но это выражение как раз равно энергии возникающего магнитного поля (собственной энергии тока, § 96). Мы видим, что в данном процессе энергия магнитного поля возникает за счет экономии работы, затрачиваемой на тепло Джоуля-Ленца (рис. 153 б).

**Пример 3. Два контура с токами медленно сближаются.** При неподвижных контурах

$$i_1 = \mathcal{E}_1/r_1, \quad i_2 = \mathcal{E}_2/r_2,$$

где  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$  — ЭДС источников тока, а  $r_1$  и  $r_2$  — сопротивления контуров.

При движении контуров магнитный поток, пронизывающий контуры, изменяется, отчего появляется дополнительная ЭДС индукции, и токи в контурах меняются. Сила тока в контуре 1 при движении будет

$$i_1 + \delta i_1, \quad \delta i_1 = -\frac{1}{r_1} \frac{d\Phi_1}{dt},$$

где  $\Phi_1$  — магнитный поток сквозь контур 1, создаваемый контуром 2.

В дальнейшем мы будем считать, что контуры сближаются весьма медленно, так что  $\delta i \ll i$ , и будем удерживать только малые первого порядка.

Уменьшение работы источника за время  $dt$  вследствие движения равно

$$\mathcal{E}_1 i_1 dt - \mathcal{E}_1 (i_1 + \delta i_1) dt = -\mathcal{E}_1 \delta i_1 dt = -r_1 i_1 \delta i_1 dt = i_1 d\Phi_1.$$

Уменьшение тепла Джоуля-Ленца есть

$$r_1 i_1^2 dt - r_1 (i_1 + \delta i_1)^2 dt \approx -2r_1 i_1 \delta i_1 dt = 2i_1 d\Phi_1.$$

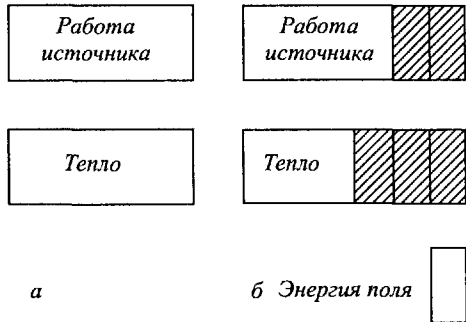


Рис. 153. Превращения энергии в контуре с постоянным током (а) и при установлении тока (б)

Поэтому выигрыш энергии в контуре 1 равен  $2i_1 d\Phi_1 - i_1 d\Phi_1 = i_1 d\Phi_1$ . Аналогично, выигрыш энергии в контуре 2 есть  $i_2 d\Phi_2$ . Поэтому экономия энергии на тепле Джоуля–Ленца в обоих контурах равна

$$i_1 d\Phi_1 + i_2 d\Phi_2.$$

Но, согласно § 98,  $\Phi_1 = L_{12}(i_2 + \delta i_2)$ ,  $\Phi_2 = L_{12}(i_1 + \delta i_1)$ , где  $L_{12}$  — коэффициент взаимной индуктивности обоих контуров. Поэтому, удерживая только малые первого порядка, имеем

$$d\Phi_1 = (i_2 + \delta i_2) \frac{dL_{12}}{dt} dt \approx i_2 dL_{12}, \quad d\Phi_2 \approx i_1 dL_{12},$$

$$i_1 d\Phi_1 + i_2 d\Phi_2 \approx 2i_1 i_2 dL_{12}.$$

Механическая работа при сближении контуров, согласно § 84, равна

$$\delta A = (i_1 + \delta i_1) d\Phi_1 = (i_2 + \delta i_2) d\Phi_2 \approx i_1 i_2 dL_{12}$$

Наконец, изменение энергии поля есть

$$dW = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} L_1 (i_1 + \delta i_1)^2 + \frac{1}{2} L_2 (i_2 + \delta i_2)^2 + L_{12} (i_1 + \delta i_1)(i_2 + \delta i_2) \right] dt,$$

где токи за время  $dt$  нужно считать постоянными. Если контуры не деформируются, то  $dL_1/dt = dL_2/dt = 0$ , и

$$dW = (i_1 + \delta i_1)(i_2 + \delta i_2) \frac{dL_{12}}{dt} dt \approx i_1 i_2 dL_{12}.$$

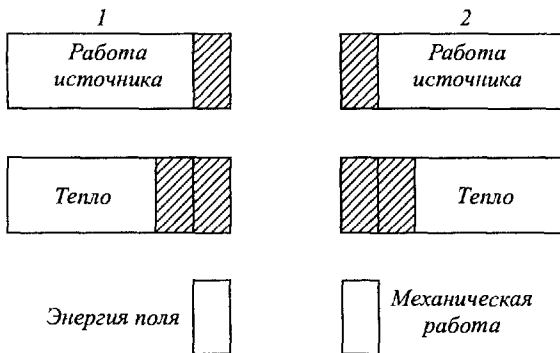


Рис. 154. Превращения энергии в двух медленно сближающихся контурах с током

В рассматриваемом случае половина энергии, сэкономленной на уменьшении тепла, переходит в энергию магнитного поля, а вторая ее половина расходуется на механическую работу (рис. 154).

## § 101. Механические силы в магнитном поле

Мы знаем, что на всякий проводник с током в магнитном поле действуют силы. Эти пондеромоторные (т.е. действующие на

тела) силы магнитного поля во многих случаях можно просто вычислить при помощи закона сохранения энергии. Для этого нужно представить себе, что рассматриваемый проводник совершает бесконечно малое возможное перемещение и, вычислив происходящие при этом превращения энергии, найти из уравнения энергии (100.1) работу  $\delta A$  пондеромоторных сил. Зная же работу и перемещение, можно определить и эти силы.

Вычислим работу пондеромоторных сил, совершаемую при деформации какого-либо контура с током. Рассмотрим уединенный контур, содержащий источник тока с ЭДС  $\mathcal{E}$  и обладающий индуктивностью  $L$  и сопротивлением  $r$ . Сила установившегося тока в контуре равна  $i = \mathcal{E}/r$ . Представим себе далее, что этот контур очень медленно произвольным образом деформируется, так что изменяется его индуктивность  $L$ . В процессе деформации ток в контуре изменяется на величину

$$\delta i = -\frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dt},$$

где  $\Phi$  — магнитный поток, пронизывающий контур. Поэтому уменьшение работы источника тока за время  $dt$  будет

$$\mathcal{E} i dt - \mathcal{E}(i + \delta i) dt = -\mathcal{E} \delta i dt = i d\Phi.$$

Уменьшение тепла Джоуля–Ленца есть

$$r i^2 dt - r(i + \delta i)^2 dt = -2r i \delta i dt = 2i d\Phi.$$

Таким образом, за время  $dt$  получается выигрыш энергии  $i d\Phi$ , а в течение всего процесса деформации

$$i \Delta \Phi = i^2 (L_2 - L_1) = i^2 \Delta L,$$

где  $\Delta L$  — изменение индуктивности контура вследствие деформации. Увеличение энергии магнитного поля есть

$$L_2 i^2 / 2 - L_1 i^2 / 2 = i^2 \Delta L / 2.$$

Поэтому из закона сохранения энергии следует, что искомая механическая работа равна

$$\Delta A = i^2 \delta L - i^2 \Delta L / 2 = i^2 \Delta L / 2.$$

Полученное выражение при  $i = \text{const}$  можно записать и так:

$$\Delta A = \Delta(L i^2 / 2) i = \text{const}, \quad (101.1)$$

т.е. механическая работа равна изменению энергии магнитного поля при неизменной силе тока в контуре.

Применим теперь найденный результат (101.1) к случаю соленоида. Вследствие взаимного притяжения его витков возникают силы  $F_l$ , стягивающие соленоид (рис. 155). Чтобы удержать соленоид в неизменном состоянии, к его концам нужно приложить внешние силы  $-F_l$ . Точно так же, вследствие действия

магнитного поля соленоида на каждый виток, появляются радиальные силы  $F_r$ , стремящиеся разорвать соленоид (рис. 155). Найдем эти силы, пользуясь формулой (101.1).

Индуктивность соленоида выражается формулой (§ 93)

$$L = \mu_0 N^2 S / l.$$

Поэтому при бесконечно малом укорочении соленоида на  $dl$  работа пондеромоторных сил, согласно (101.1), выразится соотношением

$$\delta A = \frac{1}{2} i^2 \frac{\mu_0 N^2 S}{l^2} dl.$$

С другой стороны,

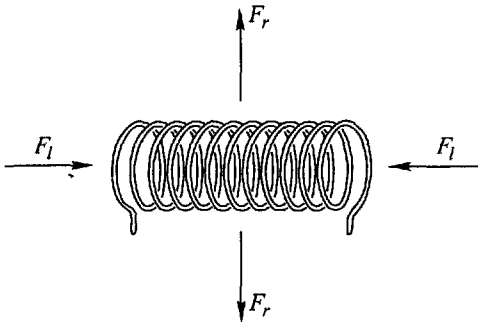
$$\delta A = F_l dl.$$

Приравнявая оба выражения для работы, находим

$$F_l = \frac{\mu_0 N^2 S}{2l^2} i^2.$$

Полученное выражение можно представить в более удобном виде. Вычислим силу

Рис. 155 Силы, действующие на соленоид с током



$f_l$ , действующую на единицу поверхности торца соленоида (сжимающее напряжение), и введем напряженность магнитного поля в соленоиде  $H = Ni/l$ . Тогда

$$f_l = F_l / S = \mu_0 H^2 / 2. \quad (101.2)$$

Сжимающее напряжение равно объемной плотности энергии магнитного поля соленоида.

Посмотрим теперь, чему равны растягивающие поперечные силы. При бесконечно малом увеличении радиуса  $r$  соленоида на  $dr$  пондеромоторные силы, согласно (101.1), совершают работу

$$\delta A = \frac{1}{2} i^2 dL = \frac{1}{2} i^2 d \left( \frac{\mu_0 N^2 \pi r^2}{l} \right) = \frac{\pi \mu_0 N^2 r}{l} i^2 dr.$$

Но ту же работу можно выразить и иначе:

$$\delta A = f_r \cdot 2\pi r l dr,$$

где  $f_r$  — радиальная сила, рассчитанная на единицу боковой поверхности (радиальное напряжение). Отсюда получаем

$$f_r = \mu_0 N^2 i^2 / 2l^2.$$

Вводя в это выражение напряженность магнитного поля  $H$  внутри соленоида, находим окончательно

$$f_r = f_l = \mu_0 H^2 / 2. \quad (101.3)$$



Радиальное напряжение, так же как и сжимающее, равно объемной плотности энергии магнитного поля.

Если бы соленоид находился в среде с магнитной проницаемостью  $\mu$ , то и напряжения были бы в  $\mu$  раз больше.

Рассмотрим численный пример. П. Л. Капица, пропуская через соленоид кратковременные токи короткого замыкания от специального генератора, получал магнитные поля с напряженностью до  $3 \cdot 10^7$  А/м. При этом механические напряжения в катушках достигали огромных значений.

$$f_l = f_r = \frac{1}{2} 4\pi \cdot 10^{-7} (3 \cdot 10^7)^2 \sim 10^9 \text{ Н/м}^2$$

Чтобы катушки выдерживали эти напряжения, они должны были иметь специальную механическую конструкцию.

## § 102. Давления и натяжения Фарадея-Максвелла

Результаты, найденные в предыдущем параграфе, допускают весьма наглядное истолкование. Механические напряжения  $f_l$  и  $f_r$ , действующие на соленоид, оказываются такими, как если бы линии индукции были подобны растянутым упругим нитям, которые стремятся сократиться и развивают продольное натяжение  $\mu\mu_0 H^2/2$  на единицу поверхности и, кроме того, расталкивают друг друга, создавая боковое давление, также равное объемной плотности энергии  $\mu\mu_0 H^2/2$ .

Оказывается, что это справедливо не только для соленоида, но и для всех других случаев ponderomotorных сил в магнитном поле.

Аналогично положение вещей и в электрическом поле. Электрические ponderomotorные силы имеют такую же величину, как если бы линии напряженности имели продольные натяжения и боковые

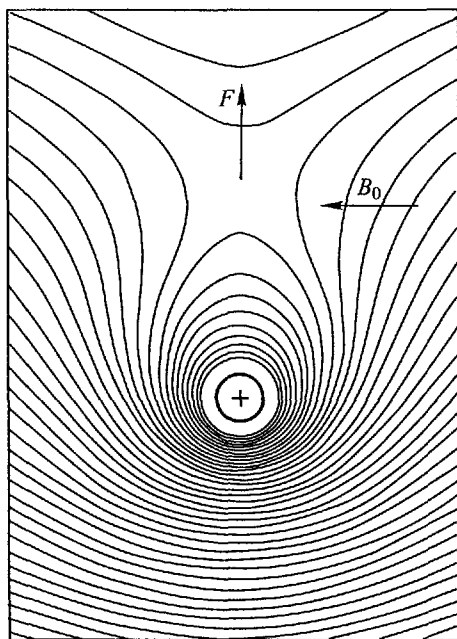


Рис. 156. Сила, действующая на ток в магнитном поле, как результат давлений и натяжений линий индукции

давления, каждое из которых равно объемной плотности энергии поля  $\epsilon\epsilon_0 E^2/2$  (ср. § 72, примеры 1 и 2).

Представление о натяжении и боковом давлении электрических и магнитных линий было введено Фарадеем и Максвеллом. Хотя в действительности никаких физических линий и не существует (линии напряженности и индукции есть геометрический образ, введенный нами для графического изображения полей), тем не менее представления Фарадея и Максвелла в ряде случаев весьма полезны, так как позволяют просто определить характер механических сил в электромагнитном поле.

Рассмотрим в качестве примера прямой ток в однородном магнитном поле (рис. 156). Линии индукции поля  $B$  до внесения тока имеют вид параллельных прямых линий, направленных справа налево. Линии же тока представляют собой концентрические окружности. Складываясь, оба поля дают картину линий, изображенную на рисунке, откуда сразу можно заключить, что на провод действует сила, перпендикулярная к проводу и к первоначальному магнитному полю.

## Г Л А В А XI

### МАГНЕТИКИ

#### § 103. Намагничивание сред

До сих пор мы рассматривали магнитное поле в вакууме. Если проводники с током находятся не в вакууме, а в другой среде, то магнитное поле изменяется. Это показывает, что различные вещества в магнитном поле намагничиваются, т.е. сами становятся источниками магнитного поля. Результирующее магнитное поле в среде является суммой полей, создаваемых проводниками с током и намагниченной средой, и поэтому не равно полю в вакууме. Вещества, способные намагничиваться, называются *магнетиками*.

Причина намагничивания заключается в том, что во всех веществах существуют мельчайшие электрические токи, замыкающиеся в пределах каждого атома (молекулярные токи). В дальнейшем мы рассмотрим опыты, доказывающие существование молекулярных токов внутри магнетиков и позволяющие определить природу этих токов (§ 115, 116). Однако существование молекулярных токов мы учтем с самого начала.

Если магнетик не намагничен, то он не создает магнитного поля. Это значит, что молекулярные токи расположены в нем беспорядочно, так что суммарное их действие равно нулю. При намагничивании магнетика расположение молекулярных токов

становится частично или полностью упорядоченным. Поэтому намагниченный магнетик можно представить как систему мельчайших ориентированных токов (рис. 157).

В § 82 и 85 мы видели, что все магнитные действия замкнутых токов определяются их магнитным моментом:

$$\mathbf{p}_m = iS\mathbf{n},$$

где  $i$  — сила тока,  $S$  — площадь, обтекаемая током,  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали к плоскости витка с током. Каждый молекулярный ток в магнетике обладает определенным магнитным моментом, а значит, и магнетик в целом при намагничивании приобретает магнитный момент, равный векторной сумме моментов всех молекулярных токов. Поэтому магнитное состояние вещества можно вполне охарактеризовать, задавая магнитный момент каждой единицы его объема. Эта величина получила название *намагниченности*.

Обозначая вектор намагниченности через  $\mathbf{I}$ , мы имеем, следовательно, по определению

$$\mathbf{I} = \sum \mathbf{p}_m / \tau, \quad (103.1)$$

где  $\tau$  — физически малый объем (§ 40), а суммирование распространяется на все молекулярные токи в объеме  $\tau$ .

Вектор намагниченности является основной величиной, характеризующей магнитное состояние вещества. Зная его в каждой точке какого-либо тела, можно определить и магнитное поле, создаваемое рассматриваемым намагниченным телом.

Задача сильно упрощается, если вектор намагниченности одинаков во всех точках магнетика (однородное намагничивание). В этом случае при сложении молекулярных токов их прилегающие отрезки, имеющие противоположные направления токов, взаимно компенсируются и остаются только отрезки токов, примыкающие к поверхности магнетика. Поэтому действие всех молекулярных токов будет такое же, как действие некоторого поверхностного тока, обтекающего намагниченный магнетик (рис. 157). В этом смысле можно сказать, что при вдвигании в соленоид железного сердечника на поверхности сердечника как бы появляются дополнительные невидимые ампер-витки, которые добавляются к ампер-виткам намагничивающей катушки (рис. 158).

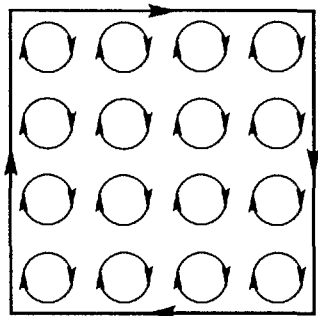


Рис. 157 Модель молекулярных токов в однородно намагниченном магнетике и соответствующий им поверхностный ток

Величина указанного поверхностного тока определяется значением намагниченности  $I$ . Рассмотрим в однородном магнитном поле (длинный соленоид) достаточно длинный цилиндрический стержень (рис. 158) и обозначим через  $j_1$  линейную

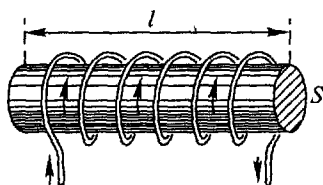


Рис. 158 Поверхностные токи в намагниченном цилиндре

плотность поверхностного тока, т.е. силу тока на единицу длины стержня. Тогда полная сила поверхностного тока стержня есть  $j_1 l$ , где  $l$  — длина стержня. Если  $S$  — площадь сечения стержня, то его магнитный момент равен

$$j_1 l S = j_1 \tau$$

( $\tau$  — объем стержня). С другой стороны, по определению намагниченности  $I$ , этот же момент равен  $I \tau$ . Приравнявая оба выражения, находим

$$I = j_1. \quad (103.2)$$

При однородном намагничивании намагниченность  $I$  равна линейной плотности поверхностного тока магнетика.

Единица намагниченности есть ампер на метр (А/м). Это такая намагниченность, при которой вещество объемом  $1 \text{ м}^3$  имеет магнитный момент  $1 \text{ А} \cdot \text{м}^2$ .

## § 104. Напряженность магнитного поля внутри магнетика

При изучении поляризации диэлектриков мы определили напряженность электрического поля внутри диэлектрика как среднюю напряженность микроскопического поля в объеме диэлектрика. Мы видели также, что эта величина совпадает с напряженностью поля внутри узкой щели, прорезанной в диэлектрике параллельно направлению поляризованности (§ 40).

В начале изучения магнетизма предполагали, что процесс намагничивания вещества совершенно подобен поляризации диэлектриков, и объясняли его существованием внутри веществ мельчайших элементарных магнитов (магнитных диполей). Поэтому и напряженность магнитного поля внутри магнетика определяли так же, как и напряженность электрического поля внутри диэлектрика, т.е. как напряженность поля в узкой щели, прорезанной в магнетике параллельно направлению намагниченности.

Впоследствии, однако, выяснилось, что магнитных зарядов в природе не существует и что намагничивание тел обусловлено существованием в них молекулярных токов. Но магнитное

поле токов есть поле вихревое, в то время как электрическое поле зарядов — безвихревое. Оба эти поля обладают различными свойствами, и поэтому физический смысл напряженности электрического поля в диэлектриках и магнитного поля в магнетиках оказался различным.

Выясним, какой физический смысл имеет определенная выше напряженность поля внутри магнетика. Будем считать, что магнетик заполняет все пространство, где имеется магнитное поле. В случае тороидальной катушки это значит, что магнетик имеет вид замкнутого тороидального сердечника. Если намагничивающей катушкой служит прямой соленоид, то мы будем считать, что магнетик имеет форму очень длинного цилиндра, действием концов которого можно пренебречь.

Напряженность поля внутри щели, параллельной направлению намагниченности (рис. 159), складывается из трех частей: поля  $\mathbf{H}_0$ , создаваемого витками намагничивающей катушки, поля  $\mathbf{H}_1$  токов на внешней поверхности магнетика и поля  $\mathbf{H}_2$  токов на внутренней поверхности полости. Так как линейная плотность поверхностных токов дается выражением (103.2), то напряженность поля  $\mathbf{H}_1$  можно найти по формуле (81.4), положив в ней  $ni \equiv j_1 = I$ . Это дает:  $\mathbf{H}_1 = \mathbf{I}$ . Токи же на внутренней поверхности имеют противоположное направление (рис. 159), и поэтому создаваемое ими поле есть  $\mathbf{H}_2 = -\mathbf{I}$ . Полная напряженность поля в щели

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{I} - \mathbf{I} = \mathbf{H}_0. \quad (104.1)$$

Мы видим, что *напряженность магнитного поля внутри безграничного магнетика равна напряженности магнитного поля намагничивающей катушки.*

Из сказанного вытекает и метод измерения напряженности поля внутри магнетика. Для этого можно измерить (например, при помощи флюксметра, § 91) поле в указанной выше щели или, что гораздо проще, удалить магнетик из катушки и измерить напряженность поля, создаваемого катушкой без магнетика.

## § 105. Магнитная индукция в магнетике

Рассмотрим теперь магнетик, в котором прорезана узкая щель, перпендикулярная к направлению намагниченности (рис. 160). Магнитную индукцию внутри такой щели называ-

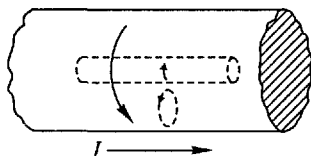


Рис. 159. К определению напряженности магнитного поля внутри магнетика. Схематически изображен один из молекулярных токов

ют магнитной индукцией внутри магнетика. Таким образом, мы определяем магнитную индукцию аналогично электрическому смещению (§ 41). Однако по причинам, указанным в § 104, физический смысл магнитной индукции оказывается совсем другим.

Обозначим через  $\bar{\mathbf{B}}_m$  среднее по объему от полного микроскопического значения магнитной индукции в магнетике (ср. § 40), т.е. индукции (в вакууме) в любой заданной точке внутри магнетика, созданной как намагничивающей обмоткой, так и всеми

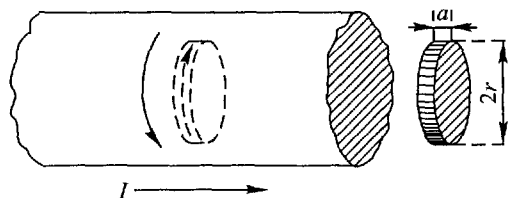


Рис 160. К определению магнитной индукции внутри магнетика

молекулярными токами. Тогда магнитная индукция равна

$$\mathbf{B} = \bar{\mathbf{B}}_m - \mathbf{B}',$$

где через  $\mathbf{B}'$  обозначена магнитная индукция, создаваемая удаленной частью магнетика, заполнявшей ранее полость. Положим, что

полость имеет форму круговой щели (результат расчета не зависит от формы полости). Тогда удаленная часть магнетика будет иметь вид диска (рис. 160). Если намагниченность магнетика есть  $I$ , то сила тока, обтекающего диск, равна  $aI$ , где  $a$  — толщина диска (§ 103). Поэтому, согласно формуле (79.3),

$$B' = \frac{aI}{2r} \mu_0,$$

где  $r$  — радиус диска (полости). Отсюда видно, что если  $a/r \rightarrow 0$  (что требуется по условию), то  $B' \rightarrow 0$ , и поэтому

$$\mathbf{B} = \bar{\mathbf{B}}_m. \quad (105.1)$$

Таким образом, по определению, *магнитная индукция в магнетике равна среднему по объему от микроскопического значения магнитной индукции внутри магнетика.*

Выражение (105.1) для магнитной индукции можно представить и иначе. Среднее значение магнитной индукции  $\bar{\mathbf{B}}_m$  складывается из индукции  $\mu_0 \mathbf{H}$ , создаваемой намагничивающей катушкой (где  $\mathbf{H}$  — поле, создаваемое катушкой, совпадающее с полем внутри магнетика), и индукции, создаваемой поверхностными токами магнетика. Но, согласно сказанному в § 104, напряженность поля поверхностных токов равна  $\mathbf{I}$ , а, следовательно, создаваемая ими индукция есть  $\mu_0 \mathbf{I}$ . Поэтому полная магнитная индукция в магнетике равна

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{I}. \quad (105.2)$$

Эта формула дает другое определение магнитной индукции в магнетике и выражает магнитную индукцию через напряжен-

ность магнитного поля внутри магнетика и его намагниченность. Она аналогична формуле (41.2), определяющей электрическое смещение.

Направления напряженности поля  $\mathbf{H}$  и намагниченности  $\mathbf{I}$  могут не совпадать друг с другом. Это наблюдается для ряда магнитных кристаллов. В таких кристаллах намагниченность зависит еще от направления поля относительно осей кристалла. Подобные вещества называют *анизотропными* магнетиками. Для них направления индукции  $\mathbf{B}$  и напряженности  $\mathbf{H}$ , вообще говоря, различны.

Напротив, для многих веществ направления  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{I}$  всегда совпадают. Намагниченность таких веществ не зависит от направления намагничивающего поля, и поэтому они получили название *изотропных* магнетиков. В них направления  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  также одинаковы.

В изотропных магнетиках связь между индукцией и напряженностью поля значительно упрощается. В этом случае можно положить, что

$$\mathbf{I} = \kappa \mathbf{H}, \quad (105.3)$$

где  $\kappa$  — скалярная величина, зависящая от рода магнетика и его состояния (температуры и т.д.); она называется *магнитной восприимчивостью* данного вещества и аналогична диэлектрической восприимчивости диэлектриков (§ 42). Однако, в отличие от формулы (42.1), в формуле (105.3) мы не пишем  $\mu_0$ , чтобы  $\kappa$  (как и диэлектрическая восприимчивость  $\alpha$ ) была безразмерной величиной. Подставляя (105.3) в (105.2), находим

$$\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}, \quad (105.4)$$

где  $\mu$  — магнитная проницаемость вещества (§ 94), выражаемая соотношением

$$\mu = 1 + \kappa. \quad (105.5)$$

Магнитная проницаемость вещества  $\mu$  показывает, во сколько раз магнитная индукция, т.е. средняя плотность магнитного потока в магнетике, больше плотности магнитного потока, создаваемого одной намагничивающей катушкой. Поэтому при заполнении пространства магнетиком увеличивается в  $\mu$  раз и полный магнитный поток, пронизывающий контур с током, а следовательно, определение магнитной проницаемости, выражаемое формулой (105.5), и определение, данное в § 94, совпадают.

## § 106. Законы магнитного поля в магнетиках

При изучении электрического поля нам оказалось необходимых ввести две основные величины — напряженность электрического поля  $\mathbf{E}$  и электрическое смещение  $\mathbf{D}$ . Аналогично этому для описания магнитного поля тоже необходимы две основные

величины — напряженность магнитного поля  $\mathbf{H}$  и магнитная индукция  $\mathbf{B}$ . Поэтому для лучшего уяснения смысла напряженности  $\mathbf{H}$  и индукции  $\mathbf{B}$  магнитного поля в магнетиках полезно их сопоставить с аналогичными величинами напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  и электрического смещения  $\mathbf{D}$  в диэлектриках.

Мы видели (§ 40), что напряженность электрического поля  $\mathbf{E}$  внутри диэлектрика есть среднее по объему от полной, фактически существующей напряженности  $\mathbf{E}_m$ , созданной как зарядами обкладок конденсатора, так и молекулами-диполями диэлектрика. При этом силы, действующие на заряды, определяются именно напряженностью поля  $\mathbf{E}$  (а не электрическим смещением  $\mathbf{D}$ ). Аналогичное положение мы имеем для магнитной индукции;  $\mathbf{B}$  в магнетиках есть среднее по объему от полной плотности магнитного потока  $\mathbf{B}_m$ , созданного как намагничивающими катушками, так и молекулярными токами самого магнетика (§ 105). Далее мы видели (§ 76), что сила, действующая на токи в магнитном поле, пропорциональна как раз индукции  $\mathbf{B}$  (а не напряженности поля  $\mathbf{H}$ ). Поэтому магнитная индукция  $\mathbf{B}$  в магнетиках соответствует напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  в диэлектриках.

С другой стороны, электрическое смещение  $\mathbf{D}$  совпадает с электрическим смещением в вакууме, создаваемым одними зарядами обкладок конденсатора (без учета поляризационных зарядов диэлектрика). Аналогично этому напряженность магнитного поля в магнетике представляет магнитное поле одних намагничивающих катушек (без учета молекулярных токов магнетика). Следовательно, напряженность магнитного поля  $\mathbf{H}$  в магнетиках соответствует электрическому смещению  $\mathbf{D}$  в диэлектриках. Поэтому было бы правильнее назвать магнитную индукцию напряженностью магнитного поля, а напряженность магнитного поля — индукцией; однако это не сделано до настоящего времени в силу исторических традиций.

Выяснив физический смысл индукции  $\mathbf{B}$  и напряженности поля  $\mathbf{H}$ , мы можем легко понять, каким образом изменяются законы магнитного поля при переходе от вакуума к магнетикам.

Так как напряженность  $\mathbf{H}$  выражает напряженность магнитного поля только намагничивающих катушек, то очевидно, что эта напряженность будет одна и та же в вакууме и в любом магнетике. Поэтому все формулы, выражающие напряженность магнитного поля токов, не изменяются. В частности, выражение для напряженности поля, создаваемого элементом тока (§ 79), будет иметь такой же вид, как и для вакуума, а именно

$$d\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \frac{i[d\mathbf{r}]}{r^3}. \quad (106.1)$$

Это поле не зависит от магнитной проницаемости среды.



По той же причине не изменится и теорема о магнитном напряжении (§ 81):

$$\oint H_s ds = i, \quad (106.2)$$

где в левой части по-прежнему  $H_s$  обозначает напряженность магнитного поля в магнетике, а  $i$  — алгебраическую сумму токов в проводниках (без учета молекулярных токов магнетика).

Напротив, механические действия магнитного поля на электрические токи при переходе от вакуума к магнетикку изменяются. Эти действия определяются суммарной плотностью магнитного потока (намагничивающих катушек и молекулярных токов), т.е. индукцией  $\mathbf{B}$  в магнетике. При заполнении пространства магнетиком с относительной магнитной проницаемостью вещества  $\mu$  (и неизменном токе в намагничивающих катушках) магнитная индукция становится равной  $\mu\mu_0\mathbf{H}$ , т.е. увеличивается в  $\mu$  раз и во столько же раз возрастают механические силы. Поэтому, например, сила, действующая на провод с током в магнитном поле (ср. формулу (76.1a)), внутри магнетика равна

$$\mathbf{F} = i[\mathbf{I}\mathbf{B}] = i\mu\mu_0[\mathbf{I}\mathbf{H}]. \quad (106.3)$$

Вернемся, наконец, к явлению электромагнитной индукции. В § 91 мы видели, что ЭДС индукции зависит от быстроты изменения магнитного потока, пронизывающего рассматриваемый контур. Это справедливо и для магнетиков. Однако в данном случае суммарный магнитный поток складывается из потока, создаваемого намагничивающими катушками, и потока, обусловленного молекулярными токами, и поэтому в основном законе электромагнитной индукции (91.1) под  $\Phi$  следует понимать поток вектора магнитной индукции  $\mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H}$  внутри магнетика. При заполнении пространства магнетиком с магнитной проницаемостью  $\mu$  поток, а следовательно, и ЭДС индукции увеличиваются в  $\mu$  раз.

В § 81 мы видели, что линии магнитного поля токов непрерывны. Это значит, что и линии магнитной индукции  $\mu_0\mathbf{H}$  в вакууме тоже непрерывны. С другой стороны, в § 105 мы говорили, что магнитная индукция внутри магнетика есть суммарная магнитная индукция в вакууме, созданная намагничивающими катушками и элементарными токами магнетика. Отсюда следует, что и линии магнитной индукции внутри магнетика также везде непрерывны. Это значит, что для любой замкнутой поверхности число входящих через нее линий индукции равно числу выходящих, т.е. *полный поток магнитной индукции через замкнутую поверхность всегда равен нулю*:

$$\int B_n dS = 0. \quad (106.4)$$

Эта формула выражает теорему Остроградского–Гаусса для магнитного поля.

### § 107. Влияние формы тела на намагничивание

До сих пор мы рассматривали неограниченные магнетики или, точнее, тела такой формы, при которой линии намагничивающего поля не пересекали поверхность тела (тороидальный замкнутый сердечник, неограниченно длинный прямой цилиндр внутри соленоида). Мы видели, что в этом случае напряженность поля внутри магнетика

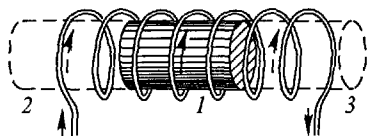


Рис 161 Ограниченный магнетик в магнитном поле

$H = H_0$ , где  $H_0$  — напряженность поля намагничивающей катушки.

Рассмотрим теперь ограниченный магнетик, например имеющий форму короткого цилиндра *1* (рис. 161). В нем отсутствуют боковые части *2* и *3*, которые содержали молекулярные токи и участвовали в образовании магнитного потока. Поэтому плотность магнитного потока, т.е. магнитная индукция  $B$ , в ограниченном магнетике будет меньше, а следовательно, и напряженность поля  $H = B/\mu\mu_0$  также будет меньше  $H_0$  на некоторую величину  $H_\ominus$ :

$$H = H_0 - H_\ominus. \quad (107.1)$$

Поле  $H_\ominus$  называют *размагничивающим полем*. Так как действие частей *2* и *3* магнетика пропорционально намагниченности данного вещества  $I$ , то можно положить

$$H_\ominus = \beta I, \quad (107.2)$$

где  $\beta$  — безразмерный множитель, зависящий от формы и размеров тела; он получил название *размагничивающего фактора*.

Выражая размагничивающее поле формулой (107.2), мы предполагаем намагниченность  $I$  постоянной во всех точках тела. Расчет показывает, что это точно выполняется только для эллипсоида. Указанное предположение справедливо и для шара (частный случай эллипсоида), а также для бесконечно тонких стержня и диска, которые можно рассматривать как предельные случаи эллипсоида. Для тел иной формы формула (107.2) справедлива только приближенно и под  $I$  нужно понимать некоторое среднее значение намагниченности.

Из сказанного ясно, что в действительности никакого «размагничивающего» поля не существует. Этим термином мы выражаем только то, что магнитное поле внутри какого-либо тела зависит от формы тела и что оно меньше, чем внутри замкнутого тороида.

Рассмотрим теперь значения размагничивающего фактора для тел простейшей формы. Для замкнутого тороида  $H = H_0$ ,

$H_0 = 0$ , и поэтому  $\beta = 0$ . Для очень длинного стержня, для которого отношение длины к диаметру весьма велико, размагничивающий фактор  $\beta$  очень мал и практически его можно считать также равным нулю.

Вычислим размагничивающий фактор для тонкого диска, перпендикулярного к направлению намагничивающего поля. В § 105 мы видели, что элементарные токи в диске, складываясь, дают поверхностный круговой ток силой  $aI$  ( $a$  — толщина диска), который создает в центре диска поле

$$H' = aI/2r$$

( $r$  — радиус диска). Поэтому индукция внутри диска равна

$$B = \mu_0 H_0 + \frac{aI}{2r} \mu_0.$$

Для бесконечно тонкого диска  $a/r \rightarrow 0$ , и поэтому

$$B = \mu_0 H_0, \quad H = B/\mu\mu_0 = H_0/\mu.$$

Подставляя этот результат в (107.1), имеем

$$H_0 = H_0 - H = H(\mu - 1) = \kappa H,$$

так как  $\mu = 1 + \kappa$ . Но, согласно (105.3),  $I = \kappa H$ . Поэтому

$$H_0 = I,$$

а следовательно,

$$\beta = 1 \quad (\text{бесконечно тонкий диск}).$$

Можно также легко показать, что для магнетика шарообразной формы

$$\beta = 1/3 \quad (\text{шар}).$$

Полученные результаты разъясняют влияние формы тела на намагничивание. Намагничивание вещества какого-либо тела тем больше, чем больше напряженность поля  $H$  внутри тела. Помещая тела из одинакового вещества, но различной формы, в одно и то же внешнее поле, мы будем иметь различную напряженность поля внутри тел, и поэтому тела разной формы будут намагничиваться по-разному. Сильнее намагнитится то тело, у которого размагничивающий фактор  $\beta$  меньше.

На рис. 162 изображен наглядный опыт, подтверждающий сказанное. Расположим у нижнего конца вертикальной проволочной катушки  $A$  пучок железных проволок, стянутых вместе в виде стержня, и подберем в катушке такую силу тока, чтобы она была лишь немного меньше той, которая необходима для втягивания стержня внутрь катушки. Вынем теперь пучок проволок, удалим проволочные петли, стягивающие проволоки вместе, и поместим опять наши проволоки на прежнее место. Мы

увидим, что при той же силе тока проволоки сильно втягиваются внутрь катушки. Это происходит потому, что во втором случае каждая из проволок намагничивается раздельно, а так как размагничивающий фактор для тонкой проволоки меньше, чем для толстого стержня, то и намагничивание во втором случае оказывается больше.

Сказанное выше применимо и к постоянным магнитам. Они представляют собой магнетики, в которых молекулярные токи находятся в ориентированном состоянии в отсутствие внешнего поля. Замыкая концы магнита железной пластиной, мы уменьшаем размагничивающий фактор, отчего и напряженность поля, и магнитная индукция внутри магнита увеличиваются.

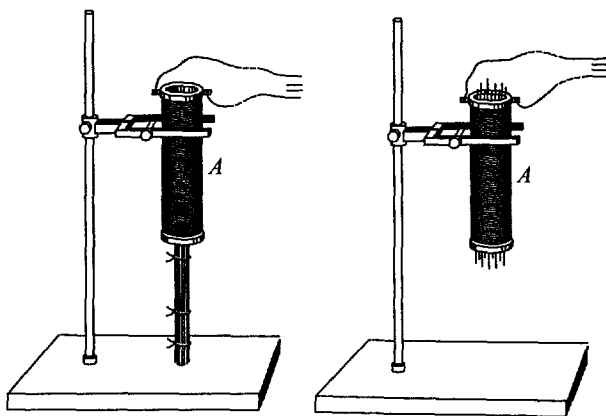


Рис 162. Железные проволоки порознь намагничиваются сильнее, чем толстый стержень, составленный из этих проволок

Чтобы при случайных внешних воздействиях (механические сотрясения, внешние размагничивающие поля) намагниченность постоянных магнитов не уменьшалась, нужно, чтобы напряженность поля внутри магнита была возможно большей. Поэтому при хранении постоянных магнитов их концы (полюсы) всегда замыкают железными пластинами («якорями»).

## § 108. Преломление линий индукции магнитного поля

На границе раздела двух различных сред с разными значениями магнитной проницаемости линии магнитной индукции, подобно линиям электрического смещения (§ 43), изменяют направление, т.е. преломляются.

Для того чтобы выяснить, как преломляются линии индукции, рассмотрим прямоугольный параллелепипед, одно из осно-

ваний которого лежит в среде 1 с магнитной проницаемостью  $\mu_1$ , а другое — в среде 2, магнитная проницаемость которой  $\mu_2$  (рис. 163), и вычислим поток магнитной индукции сквозь его поверхность. Если  $S$  есть площадь основания, а  $B_{n2}$  — нормальная составляющая индукции в среде 2, то поток сквозь верхнюю грань параллелепипеда есть  $B_{n2}S$ . Аналогично поток сквозь нижнюю грань равен  $B_{n1}S$ . Высоту параллелепипеда будем считать бесконечно малой, и поэтому поток через его боковую поверхность учитывать не будем. Согласно (106.4) поток магнитной индукции сквозь замкнутую поверхность всегда равен нулю:

$$B_{n2}S - B_{n1}S = 0,$$

или

$$B_{n1} = B_{n2}. \quad (108.1)$$

*Нормальная составляющая магнитной индукции непрерывна.*

В противоположность этому, нормальные составляющие напряженности магнитного поля в обеих средах будут различны. Так как  $B_{n1} = \mu_1 \mu_0 H_{n1}$  и  $B_{n2} = \mu_2 \mu_0 H_{n2}$ , то

$$H_{n1}/H_{n2} = \mu_2/\mu_1.$$

Рассмотрим теперь прямоугольный контур с бесконечно малой высотой  $h$  (рис. 164), одно ребро которой длиной  $l$  лежит в среде 1, а другое — в среде 2, применим к нему теорему о магнитном напряжении (§ 81). Магнитное напряжение вдоль рассматриваемого контура равно  $lH_{t2} - lH_{t1}$ , где

$H_{t1}$  и  $H_{t2}$  — касательные к поверхности раздела составляющие напряженности магнитного поля в обеих средах. Если  $h \rightarrow 0$ , то и площадь, ограниченная контуром, стремится к нулю, а значит, стремится к нулю и сила тока, проходящего через эту площадь. Поэтому

$$lH_{t2} - lH_{t1} = 0,$$

откуда

$$H_{t1} = H_{t2}. \quad (108.2)$$

*При переходе через границу раздела двух сред касательные составляющие напряженности магнитного поля не изменяются.*

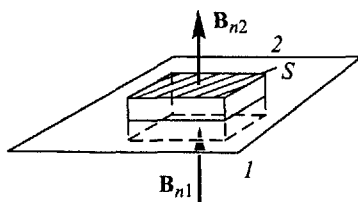


Рис. 163. К выводу граничных условий для магнитного поля

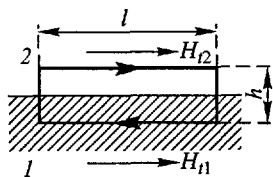


Рис. 164 К выводу граничных условий для магнитного поля

Напротив, касательные составляющие индукции испытывают скачок, причем

$$B_{t1}/B_{t2} = \mu_1/\mu_2.$$

Соотношения (108.1) и (108.2) выполняются во всех случаях и выражают граничные условия для магнитного поля. Они совершенно аналогичны граничным условиям для электрического поля (§ 41).

Из этих формул вытекает закон преломления линий индукции:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 / \operatorname{tg} \alpha_2 = \mu_1 / \mu_2, \quad (108.3)$$

где  $\alpha_1$  — угол между линиями индукции в среде 1 и нормалью к поверхности раздела, а  $\alpha_2$  — соответствующий угол в среде 2.

Так как в изотропных магнетиках направления индукции и напряженности поля совпадают, то (108.3) выражает также и закон преломления линий напряженности поля.

Из (108.3) следует, что линии индукции, вступая в среду с большей магнитной проницаемостью, удаляются от нормали, а следовательно, сгущаются.

Вычисление хода линий индукции довольно сложно даже для тел простой формы, и поэтому мы ограничимся только качественным разбором. Рассмотрим, например, кусок магнетика в виде прямоугольного бруска в магнитном поле, которое до внесения магнетика было однородным (рис. 165). Магнитную проницаемость магнетика будем считать большей, чем у окружающей среды. Рассматриваемый брусок в магнитном поле намагнитит-

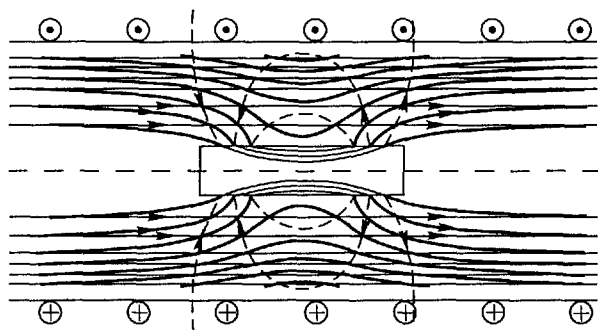


Рис. 165 Сгущение линий индукции внутри магнетика

ся и станет сам источником магнитного поля, линии индукции которого показаны штриховыми линиями. Это поле будет складываться в каждой точке с первоначальным однородным полем по правилу параллелограмма, отчего возникнет результи-

рующее поле, изображенное утолщенными линиями индукции. Из рис. 165 видно, что линии индукции стягиваются к бруску, испытывают на его поверхности преломление и располагаются внутри бруска гораздо гуще.

На рис. 166 показаны линии индукции в теле шаровой формы, помещенном в первоначально однородное магнитное поле. В этом случае оказывается, что линии индукции внутри ша-

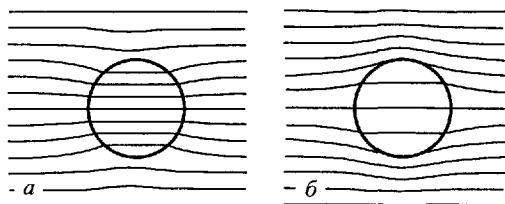


Рис. 166. Магнитная проницаемость вещества шара больше (а) и меньше (б), чем у окружающей среды

ра представляют собой параллельные прямые линии, а следовательно, и значение индукции во всех точках шара одинаково. При этом будут постоянны и напряженность поля  $H$ , и намагниченность  $I$ , т.е. шар будет намагничен однородно.

Если в однородное магнитное поле поместить полое тело, например цилиндр, из вещества с магнитной проницаемостью, большей чем у окружающей среды, то линии индукции будут сгущаться в теле цилиндра (рис. 167). В полости же цилиндра густота линий индукции уменьшится, а следовательно, и магнитное поле внутри цилиндра будет ослаблено (внутри воздушной полости магнитного поля практически нет). Этим обстоятельством пользуются для устройства магнитной защиты. Чтобы предохранить чувствительные измерительные приборы от действия внешних магнитных полей, их заключают в замкнутые оболочки из вещества с большой магнитной проницаемостью (железо). Однако, в отличие от электростатической защиты (§ 27), таким приемом можно только ослабить внешнее поле (в сотни и тысячи раз), но нельзя исключить его вовсе, так как в природе существуют проводники электричества, но нет проводников магнетизма.

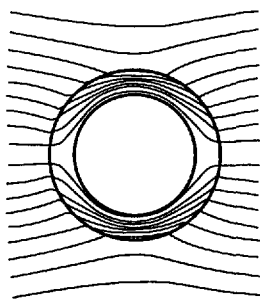


Рис. 167. Линии магнитной индукции внутри железного цилиндра, помещенного в первоначально однородное магнитное поле

Из сказанного ясно, что если конфигурация первоначального поля и форма тела таковы, что линии индукции не пересекают поверхность тела, то не будет и преломления линий индукции и магнитное поле вне тела не будет изменяться при внесении тела. Так, например, если на прямой длинный провод с током надеть длинную железную трубу, коаксиально с проводом, то линии индукции, имеющие в этом случае вид концентрических окружностей, не будут пересекать ни внутреннюю, ни внешнюю поверхности трубы, и магнитное поле во всем пространстве, кроме толщи самой трубы, будет таким же, как и до надевания трубы. В самом же теле трубы магнитная индукция увеличится в  $\mu$  раз.

### § 109. Магнитные свойства веществ. Диамагнетизм и парамагнетизм

Магнитные свойства различных веществ гораздо разнообразнее, нежели электрические свойства. В то время как диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  у всех веществ всегда больше единицы, магнитная проницаемость  $\mu$  может быть как больше, так и меньше единицы. Вещества, для которых  $\mu < 1$ , называются *диамагнитными* или *диамагнетиками*, а вещества с  $\mu > 1$  — *парамагнитными* или *парамагнетиками*. Так как магнитная восприимчивость  $\kappa = \mu - 1$ , то для парамагнетиков  $\kappa$  положительна, а для диамагнетиков — отрицательна.

Намагниченность вещества  $\mathbf{I}$  (магнитный момент единицы объема), как мы видели в § 105, связана с напряженностью магнитного поля соотношением  $\mathbf{I} = \kappa \mathbf{H}$ . Отрицательное значение  $\kappa$  в диамагнетиках обозначает, что в этих веществах намагниченность направлена противоположно намагничивающему полю. Объяснение такого, неожиданного на первый взгляд, характера намагничивания будет рассмотрено ниже.

Наличие диа- и парамагнитных веществ качественно легко обнаружить, наблюдая поведение вещества в сильном магнитном поле. Атмосферный воздух является парамагнетиком, его магнитная восприимчивость  $\kappa$  при 760 мм рт. ст. и комнатной температуре равна  $0,38 \cdot 10^{-6}$ . Поэтому все парамагнетики, у которых  $\kappa > 0,38 \cdot 10^{-6}$ , ведут себя подобно диэлектрикам с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_1$  большей, чем  $\epsilon_2$  окружающей среды, т.е. втягиваются в область сильного поля. Напротив, на диамагнетики действуют силы того же знака, что и на диэлектрики с  $\epsilon_1 < \epsilon_2$ , и они выталкиваются из магнитного поля.

Примером парамагнетика может служить хлористое железо. Стеклообразная ампула с водным раствором этой соли, подвешенная на тонкой нити в магнитном поле, втягивается полем и устанавливается параллельно направлению поля (рис. 168).



Примером диамагнетика является висмут. Висмутовая палочка выталкивается из магнитного поля и устанавливается перпендикулярно к направлению поля (рис. 169).

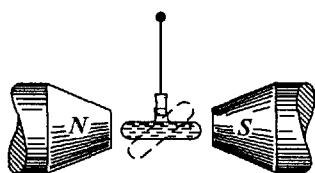


Рис. 168. Ампула с парамагнитным раствором хлористого железа в магнитном поле

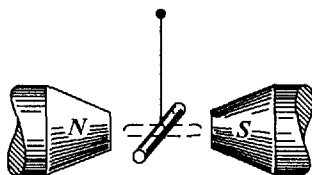


Рис. 169. Диамагнитная палочка висмута в магнитном поле

Если тело находится в среде, которая сама способна намагничиваться, то силы, действующие на него, зависят не только от намагничивания тела, но и от намагничивания окружающей среды. В частности, парамагнетик, помещенный в парамагнитную же среду с большим  $\kappa$ , ведет себя как диамагнетик.

Так, например, если ампулу с парамагнитным раствором хлористого железа погрузить в кювету с более крепким раствором той же соли, то ампула будет выталкиваться из магнитного поля.

В табл. 5 приведены значения магнитной восприимчивости для некоторых веществ. Данные для газов относятся к давлению 760 мм рт. ст. и комнатной температуре. Как видно из таблицы, значения  $\kappa$  весьма малы, и поэтому магнитная проницаемость  $\mu = 1 + \kappa$  близка к единице: все диа- и парамагнетики суть вещества, намагничивающиеся весьма слабо.

Отметим, что для данного вещества  $\kappa$  приблизительно пропорциональна плотности вещества. Поэтому в различных таблицах часто приводят удельную магнитную восприимчивость  $\kappa_1 = \kappa/d$ , где  $d$  — плотность вещества. В отличие от  $\kappa$ , которая есть величина безразмерная,  $\kappa_1$  имеет размерность, обратную размерности плотности.

Таблица 5

Вещество	$\kappa \cdot 10^6$	Тип магнетика	Вещество	$\kappa \cdot 10^6$	Тип магнетика
Азот	-0,0062	Диамагнетик	Кислород	1,8	Парамагнетик
Углекислота	-5,3	»	Алюминий	21	»
Вода	-9,0	»	Платина	300	»
Серебро	-26	»	Хлористое железо (FeCl <sub>3</sub> )	2500	»
Висмут	-170	»			

## § 110. Ферромагнетизм

Наряду с диа- и парамагнетиками имеются вещества, способные намагничиваться весьма сильно. Они получили название *ферромагнетиков*. Магнитная проницаемость большинства ферромагнетиков при обычных температурах измеряется многими сотнями и тысячами единиц, а у некоторых специально приготовленных и обработанных ферромагнетиков она достигает миллиона.

Ферромагнетики, помимо способности сильно намагничиваться, обладают рядом свойств, существенно отличающих их от диа- и парамагнетиков.

**Кривая намагничивания.** Характерной особенностью ферромагнетиков является сложная нелинейная зависимость

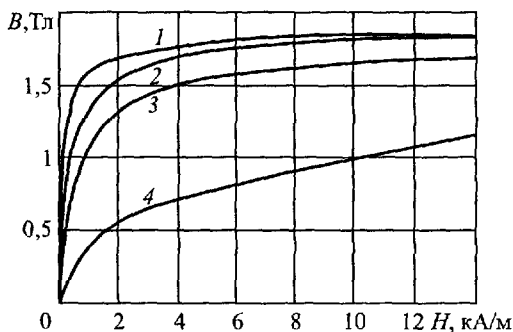


Рис. 170. Зависимость магнитной индукции от напряженности магнитного поля: 1 — электролитическое железо, 2 — малоуглеродистое железо, 3 — литая сталь, 4 — чугун

намагничивания магнетика ее нарастание замедляется.

По значениям индукции  $B$  и поля  $H$  можно определить намагниченность магнетика  $I = B/\mu_0 - H$  (магнитный момент единицы объема).

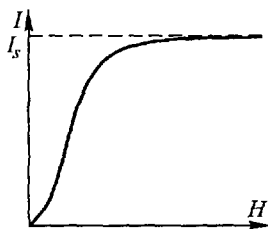


Рис. 171. Кривая намагничивания ферромагнетиков

между индукцией  $B$  и напряженностью поля  $H$ . Эта зависимость была установлена в классических работах А.Г. Столетова на примере мягкого (отожженного) железа. Зависимость индукции  $B$  от напряженности магнитного поля  $H$  в ферромагнетиках имеет вид, показанный на рис. 170. Индукция сначала быстро увеличивается, но по мере

Характер зависимости  $I$  от  $H$  для ферромагнетиков изображен на рис. 171. Намагниченность  $I$ , подобно индукции, сначала быстро возрастает, но затем наступает магнитное насыщение, при котором намагниченность достигает некоторого максимального значения  $I_s$  и практически перестает зависеть от напряженности поля.

Вследствие нелинейной зависимости  $B$  от  $H$  магнитная проницае-

мость  $\mu = B/\mu_0 H$  зависит от напряженности магнитного поля. Кривая зависимости  $\mu$  от  $H$  (рис. 172) возрастает с увеличением поля от начального значения до некоторой максимальной величины  $\mu_{\text{макс}}$ , но затем, после прохождения через максимум,  $\mu$  уменьшается и асимптотически стремится к значению, очень близкому к единице.

Магнитная восприимчивость ферромагнетика  $\chi = I/H$  оказывается также непостоянной и зависящей от напряженности поля. Она имеет максимум и при больших полях асимптотически стремится к значению, близкому к нулю.

Указанные особенности намагничивания ферромагнетиков показывают, что использование ферромагнетиков для получения сильных магнитных полей весьма эффективно в областях намагничивания, далеких от насыщения. В случае же очень сильных полей наступает магнитное насыщение, и применение ферромагнетиков делается практически бесполезным.

**Анизотропия намагничивания.** Все ферромагнетики в магнитном отношении анизотропны. Однако если ферромагнетик имеет мелкокристаллическую структуру и отдельные кристаллики в нем расположены совершенно беспорядочно, то эта анизотропия не проявляется и его намагниченность не зависит от направления поля. Если же ферромагнетик представляет собой единый кристалл, то вид кривой намагничивания оказывается различным и зависит от направления намагничивающего поля относительно осей кристалла. На рис. 173 изображена элементарная ячейка кристалла железа (центрированный куб) и показаны кристаллографические направления, обозначаемые символами  $[100]$  (ребро куба),  $[111]$

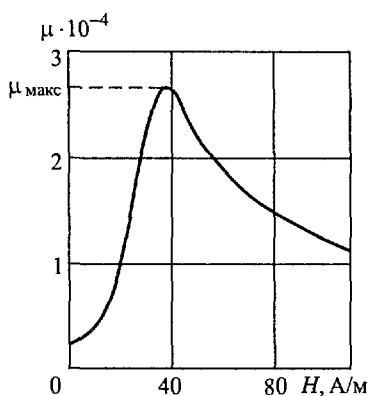


Рис. 172. Зависимость магнитной проницаемости  $\mu$  от напряженности поля для железа «армко»

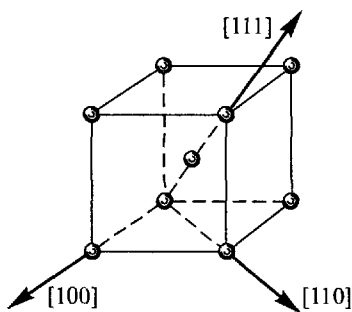


Рис 173. Элементарная кристаллическая ячейка железа и ее основные кристаллографические направления:  $[100]$  — легкого,  $[111]$  — трудного намагничивания

(диагональ грани) и  $[111]$  (пространственная диагональ); на рис. 174 даны кривые намагничивания монокристаллов железа и никеля при трех указанных направлениях магнитного поля. Как видно из рисунка, для каждого ферромагнетика суще-

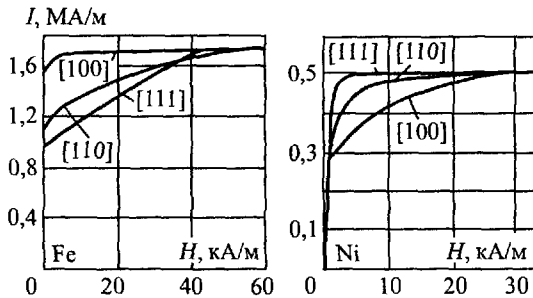


Рис. 174. Кривые намагничивания монокристаллов железа и никеля при различных направлениях намагничивающего поля

ствует направление, в котором намагниченность (при данном поле) наибольшая (направление легкого намагничивания), и направление, в котором намагниченность наименьшая (направление трудного намагничивания).

**Гистерезис.** Положим, что мы намагничиваем первоначально ненамагниченный ферромагнетик и, поместив его внутрь намагничивающей катушки, увеличиваем магнитное поле внутри магнетика от нуля до некоторого значения  $H_1$  (рис. 175). Значение индукции в магнетике будет определяться отрезком  $O1$  кривой индукции  $O1A$  и изобразится отрезком ординаты  $OB_1$ . Если теперь вновь уменьшать магнитное поле, то уменьшение индукции будет изображаться уже не отрезком кривой индукции  $1O$ , но кривой  $1B'$ , и, когда

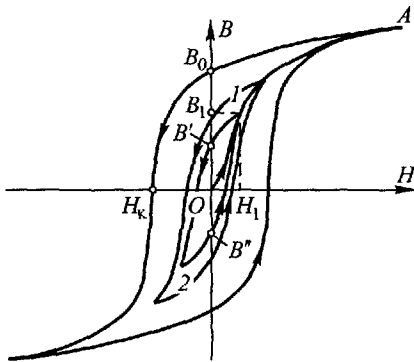


Рис. 175. Магнитный гистерезис

поле делается опять равным нулю, индукция не будет равна нулю, а будет выражаться отрезком  $OB'$ . Ферромагнетик в этом состоянии является постоянным магнитом. Если, далее, изменить направление тока в намагничивающей катушке и переманить образец в обратном направлении, то изменение индукции будет описываться отрезком кривой  $B'2$ .

При последующем изменении поля в обратном направлении индукция будет изменяться в соответствии с кривой  $2B''1$ . При циклическом перемагничивании ферромагнетика изменение индукции в нем будет изображаться петлеобразной замкнутой кривой  $1B'2B''1$ .

Мы видим, что значение индукции в ферромагнетике определяется не только существующим магнитным полем, но еще зависит от предыдущих состояний намагничивания, причем происходит своеобразное отставание изменения индукции от изменений напряженности поля. Это явление получило название магнитного *гистерезиса*, а указанная выше петлеобразная кривая зависимости  $B$  от  $H$  при циклическом перемагничивании называется *петлей гистерезиса*. Магнитный гистерезис подобен диэлектрическому гистерезису в сегнетоэлектриках (§ 50).

Из кривых рис. 175 видно, что при устранении намагничивающего поля ферромагнетик сохраняет остаточную намагниченность, причем внутри магнетика существует некоторая остаточная индукция. При увеличении амплитуды намагничивающего поля она стремится к предельному значению  $B_0$  (рис. 175). Чтобы уничтожить эту остаточную намагниченность внутри ферромагнетика, необходимо создать определенное поле, направленное против первоначального намагничивающего поля, изображаемое отрезком  $OH_K$ . Это поле называют *задерживающей* или *коэрцитивной* силой ферромагнетика.

В связи со сказанным выше находится практический прием, употребляемый для размагничивания ферромагнетиков. Для этого ферромагнетик помещают внутрь катушки, питаемой переменным током, и силу тока постепенно уменьшают до нуля. При этом ферромагнетик подвергается многократным циклическим перемагничиваниям, соответствующим различным петлям гистерезиса, которые, постепенно уменьшаясь, стягиваются к точке  $O$  (рис. 175), где намагниченность равна нулю.

Гистерезис зависит в сильнейшей степени от состава ферромагнетика и от его обработки. Для чистого мягкого железа, т.е. отожженного и затем медленно охлажденного, гистерезис выражен весьма слабо и петля гистерезиса очень узка. Но у закаленной стали гистерезис значителен.

**Температура Кюри.** Способность пара- и ферромагнетиков намагничиваться различна при разных температурах, т.е. их магнитная восприимчивость зависит от температуры. Она уменьшается с увеличением температуры. Напротив, магнитная восприимчивость диамагнетиков практически не зависит от температуры.

Для многих парамагнитных веществ изменение  $\chi$  с температурой подчиняется закону, установленному Кюри:

$$\chi = C/T, \quad (110.1)$$

где  $T$  — термодинамическая температура, а  $C$  — постоянная Кюри, зависящая от рода вещества. Магнитная восприимчивость таких веществ монотонно изменяется с изменением температуры. Подобные вещества называются *нормальными парамагнетиками*.

Зависимость магнитной восприимчивости от температуры для ферромагнетиков имеет более сложный характер. При повышении температуры способность ферромагнетиков намагничиваться уменьшается. При этом падают значения их магнитной восприимчивости и проницаемости при любом значении магнитного поля, ослабляется гистерезис и уменьшается намагниченность насыщения  $I_s$ . При некоторой температуре  $T_K$ , называемой *температурой Кюри*, ферромагнитные свойства исчезают вовсе.

Температура Кюри различна для разных ферромагнетиков; ее значения для некоторых веществ приведены в табл. 6.

Таблица 6

Вещество	$T_K$ , °C	Вещество	$T_K$ , °C
Кобальт	1150	Никель	360
Железо	770	30 %-ный пермаллой	70
78 %-ный пермаллой (сплав 22 % Fe, 78 % Ni)	550	Гадолиний	17

При температурах более высоких, нежели температура Кюри, ферромагнетик превращается в парамагнетик. Зависимость магнитной восприимчивости  $\kappa$  от температуры для таких парамагнетиков подчиняется закону Кюри-Вейсса:

$$\kappa = \frac{C}{T - T_K}. \quad (110.2)$$

Здесь  $C$  — постоянная, зависящая от рода вещества.

### § 111. Работа при намагничивании

При намагничивании любого магнетика совершается определенная работа. Вычислим эту работу, пользуясь законом сохранения энергии (§ 100).

Пусть магнетик имеет форму замкнутого тора и намагничивается равномерно расположенной на нем обмоткой, сила тока в обмотке  $i$ , ЭДС батареи  $\mathcal{E}$ , полное сопротивление цепи  $r$ . Если сила тока постоянна, то будет постоянным и магнитное поле и его энергия не будет изменяться. В этом случае работа источника тока превращается целиком в тепло Джоуля-Ленца, и мы имеем

$$\mathcal{E} i dt = r i^2 dt.$$

Допустим теперь, что сила тока в обмотке очень медленно увеличивается. Тогда при том же значении сопротивления  $r$  сила тока будет меньше на малую величину  $\delta i$ , так как вследствие электромагнитной индукции в цепи будет еще экстраток самоиндукции, направленный противоположно току  $i$ . При этом за время  $dt$  увеличится и магнитное поле, на что затрачивается некоторая работа  $\delta A$ . Согласно закону сохранения энергии должно быть

$$\mathcal{E}(i - \delta i) dt = r(i - \delta i)^2 dt + \delta A.$$

Работа источника уменьшилась на величину  $\mathcal{E} \delta i dt = r i \delta i dt$ , а уменьшение количества теплоты равно  $r i^2 dt - r(i - \delta i)^2 dt \approx 2r i \delta i dt$ . Разность этих работ  $r i \delta i dt$  равна работе намагничивания, и поэтому

$$\delta A = r i \delta i dt.$$

Но, согласно основному закону электромагнитной индукции, ЭДС индукции в обмотке равна  $-S(dB/dt)N$ , где  $B$  — индукция в магнетике,  $S$  — его сечение (равное площади витка),  $N$  — полное число витков обмотки. Отсюда получается

$$\delta i = \frac{S}{r} \frac{dB}{dt} N,$$

а следовательно,

$$\delta A = r i \frac{S}{r} \frac{dB}{dt} N dt = S N i dB.$$

Умножая и деля правую часть этого равенства на длину магнетика (тороида)  $l$  и замечая, что  $Ni/l = H$  есть напряженность поля внутри магнетика, находим

$$\delta A = H dB_n \tau = (\mathbf{H} d\mathbf{B})\tau,$$

где  $\tau = Sl$  — объем магнетика. Мы отметили индексом  $n$  у  $B$  то обстоятельство, что в закон индукции в действительности входит составляющая магнитной индукции, нормальная к плоскости витков, т.е. проекция магнитной индукции на направление магнитного поля. Работа  $dW$ , необходимая для увеличения индукции на  $d\mathbf{B}$  в единице объема магнетика, равна

$$dW = (\mathbf{H} d\mathbf{B}). \quad (111.1)$$

Так как работа намагничивания зависит лишь от процессов внутри магнетика, то выражение (111.1) будет справедливым, очевидно, для магнетика любой формы.

Полная работа намагничивания (на единицу объема) есть

$$w = \int (\mathbf{H} d\mathbf{B}). \quad (111.1a)$$

Полученное общее выражение справедливо при любой зависимости  $\mathbf{B}$  от  $\mathbf{H}$ . В случае линейной связи  $\mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H}$  эта формула переходит в формулу (97.1). При нелинейной зависимости

$B(H)$ , но однозначной (нет гистерезиса) вся работа намагничивания идет на увеличение энергии магнитного поля и поэтому формулы (111.1) и (111.1а) дают также объемную плотность энергии магнитного поля в магнетике. При наличии гистерезиса это уже не так.

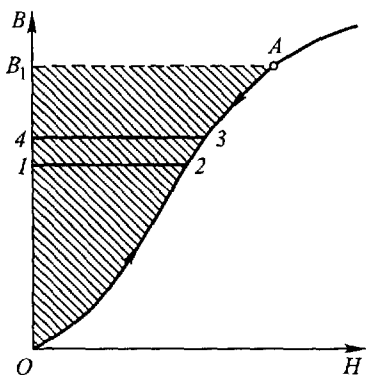


Рис 176 Работа намагничивания магнетика без гистерезиса

индукции от нуля до заданного значения  $B_1$ , будет равна площади  $OAB_1$ , ограниченной кривой намагничивания и отрезком оси  $OB_1$  (заштрихована). Эта работа затрачивается источником при намагничивании магнетика. При размагничивании магнетика в цепь источника возвращается энергия, запасенная в магнитном поле, в виде работы экстратокса самоиндукции. Она по-прежнему выражается величиной площади, ограниченной кривой намагничивания и отрезком ординаты  $OB_1$ . Если гистерезис отсутствует, то обе ветви кривой совпадают, и при размагничивании возвращается та же работа, которая была затрачена при намагничивании.

Иначе будет для магнетика с гистерезисом. В этом случае при увеличении индукции от значения  $B_1$  до некоторого другого значения  $B_2$  (рис. 177) потребуются работа, равная площади, ограниченной ветвью кривой намагничивания 1, т.е. площади  $B_1 a 1 b B_2$ , а при размагничивании до исходного состояния возвращаемая работа будет равна площади  $B_2 b 2 a B_1$ , которая имеет меньшую величину. Поэтому при полном цикле перемагничивания в каждую единицу

Рассмотрим сначала магнетик без гистерезиса, для которого прямая и обратная ветви кривой намагничивания совпадают (рис. 176). Элементарная работа, необходимая для бесконечно малого увеличения намагниченности, на этом графике выражается, согласно (111.1), величиной площади  $1234$ . Полная работа, затрачиваемая при увеличении

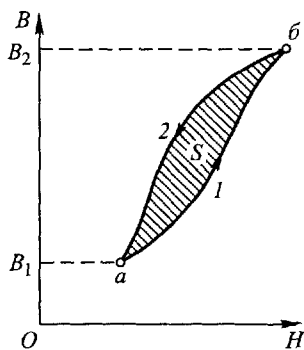


Рис 177 Работа при циклическом перемагничивании пропорциональна площади петли гистерезиса



объема магнетика вводится энергия

$$w = S, \quad (111.2)$$

где  $S$  — площадь петли гистерезиса. Эта энергия расходуется на совершение работы против коэрцитивных сил в магнетике и в конечном счете превращается в тепло. Поэтому ферромагнетики при циклическом перемагничивании нагреваются, и тем больше, чем сильнее выражен гистерезис.

Тепло гистерезиса всегда учитывают при расчете различных электрических устройств переменного тока, содержащих ферромагнетики, подвергающиеся периодическому перемагничиванию. Таковы, например, железные сердечники трансформаторов (§ 133) и вращающиеся железные якоря генераторов постоянного тока. Наличие гистерезиса в них приводит к бесполезной затрате части энергии на тепло гистерезиса и снижает коэффициент полезного действия установок. Поэтому для подобных устройств применяют специальные сорта мягкого железа (трансформаторное железо), в которых гистерезис выражен слабо.

## § 112. Магнитные материалы. Ферриты

В современной электротехнике ферромагнетики играют выдающуюся роль. Используя ферромагнетики, мы заставляем элементарные токи принимать участие в образовании магнитного поля и, можно сказать, «бесплатно» увеличиваем магнитное поле в тысячи раз по сравнению с полем одних намагничивающих катушек.

В зависимости от назначения ферромагнетиков к ним предъявляют различные требования. Так, например, для их применения в трансформаторах важнейшими требованиями являются высокая магнитная проницаемость и слабый гистерезис («магнитно-мягкие» материалы). Для изготовления же постоянных магнитов наиболее важны остаточное намагничивание и большая коэрцитивная сила.

В качестве ферромагнитных материалов в настоящее время широко применяют железо и его сплавы с другими элементами. Подбирая состав сплавов и варьируя их обработку, оказывается возможным получить различные ферромагнитные материалы, отличающиеся чрезвычайно разнообразием магнитных свойств. В таблицах 7 и 8 приведены магнитные характеристики некоторых веществ, применяемых в современной технике.

Приведенные данные показывают, что в изготовлении магнитных материалов достигнуты выдающиеся успехи. Некоторые сплавы (алнико, магнико) отличаются весьма высокими значениями коэрцитивной силы и остаточной индукции и поэтому по-

зволюют изготовлять исключительные по качеству постоянные магниты, широко применяемые в настоящее время в магнито-электрических измерительных приборах и других устройствах, в которых требуется сильное постоянное магнитное поле.

Исследование магнитных сплавов и химических соединений открыло новые технические возможности применения магнитных материалов. Так, например, было обнаружено, что некоторые сплавы из неферромагнитных элементов при определенном соотношении между компонентами обладают сильным ферромагнетизмом. Таковы сплавы марганец-висмут, марганец-сурьма, хром-теллур и др.

Таблица 7

Магнитно-мягкие материалы	Состав	Проницаемость		Индукция при насыщении, Тл	Коэрцитивная сила, А/м
		начальная	максимальная		
Железо	99,9 % Fe	200	5000	2,15	80
Сплав кремний-железо	96,7 % Fe; 3,3 % Si	600	10 000	2,0	16
То же, отожженный в водороде	96,7 % Fe; 3,3 % Si	1500	40 000	2,0	8,0
78%-ный пермаллой	78 % Ni; 22 % Fe	8000	100 000	1,0	4,0
Супермаллой	79 % Ni; 5 % Mo; 16 % Fe	100 000	800 000	0,80	0,32

Таблица 8

Высококоэрцитивные сплавы	Состав	Коэрцитивная сила, А/м	Остаточная индукция, Тл
Вольфрамовая сталь	6 % W; 0,7 % C; 0,3 % Mn; 93 % Fe	5 200	1,0
Сплав алии	25 % Ni; 12 % Al; 63 % Fe	40 000	0,70
Сплав аликко 5	8 % Al; 14 % Ni; 24 % Co; 3 % Cu; 51 % Fe	44 000	1,25
Сплав платина-кобальт	77 % Pt; 23 % Co	210 000	0,45
Сплав магнико	13,5 % Ni; 9 % Al; 24 % Co; 3 % Cu; ~ 50 % Fe	56 000	1,3

Второе важное достижение заключается в получении ферритов (ср. § 119). Они представляют собой ферромагнитные химические соединения типа  $MeO \cdot Fe_2O_3$ , где Me — один из (или смесь) двухвалентных катионов Mn, Co, Ni, Cu, Mg, Zn, Cd, Fe.

В отличие от железа и других ферромагнитных металлов ферриты являются магнитными полупроводниками (§ 151) и имеют большое удельное электрическое сопротивление порядка  $10^2 - 10^6$  Ом·см. Этим и обусловлено большое техническое значение ферритов. Ферромагнитные металлы нельзя использовать в радиотехнике высоких частот вследствие их большой электропроводности и возникающих отсюда больших потерь на вихревые токи (см. § 132). Ферриты же лишены указанного недостатка и позволяют по-новому решать ряд задач радиотехники.

### § 113. Магнитные заряды. Формальная теория магнетизма

На ранней стадии исследований магнетизма предполагали, что причины магнитного взаимодействия токов между собой и причины взаимодействия магнитов различны. Взаимодействие магнитов объясняли существованием в них магнитных зарядов и считали, что в природе существуют два вида «магнитных зарядов», причем одноименные магнитные заряды отталкиваются, а разноименные притягиваются. Заряды, сосредоточенные в том конце магнитной стрелки, которая указывает на север, называли северными, находящиеся на другом конце магнитной стрелки — южными.

Однако сразу же после открытия магнитного взаимодействия токов Ампер высказал предположение, что причина взаимодействия магнитов — та же, что и причина взаимодействия проводников с током, и что внутри магнитов имеются мельчайшие замкнутые электрические токи (молекулярные токи Ампера). Дальнейшие исследования магнетизма подтвердили правильность гипотезы Ампера и показали, что в природе нет «магнитных зарядов». В соответствии с этим мы и начали изучение магнитных явлений с исследования магнитного поля токов. Теория магнетизма, основанная на представлениях о магнитных зарядах и использующая чисто внешнее, формальное сходство взаимодействия магнитов с взаимодействием воображаемых магнитных зарядов, может быть названа формальной теорией магнетизма.

Пользуясь приемом, описанным в § 80, легко получить картины линий поля, создаваемого постоянными магнитами. Пример такой картины приведен на рис. 178. Подобные опыты показывают, что линии поля входят и выходят из магнитов преимущественно вблизи их концов. Это обстоятельство привело к представлению о существовании в магнитах двух полюсов, северного и южного, вокруг которых распределяются магнитные заряды.

Чем больше отношение длины магнита к его диаметру, тем в меньшей части магнита сосредоточены его магнитные заряды.

Поэтому для очень длинных и тонких магнитов можно приближенно говорить о точечных «магнитных зарядах», расположенных на концах магнита.

Взаимодействие полюсов длинных и тонких магнитов было исследовано на опыте Кулоном, который пришел к заключению, что магнитные заряды взаимодействуют по тому же закону, что

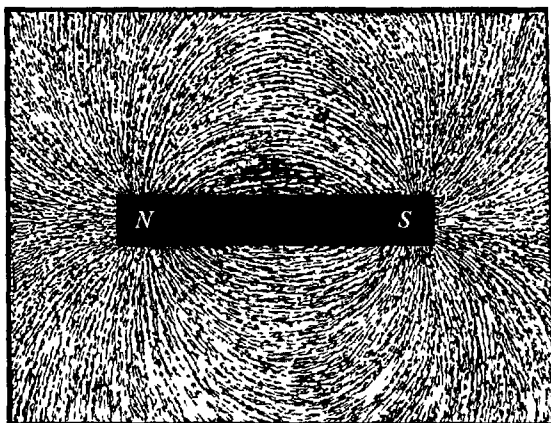


Рис 178 Линии поля прямого магнита

и электрические заряды: сила взаимодействия двух точечных «магнитных зарядов» направлена вдоль линии, соединяющей заряды, и обратно пропорциональна квадрату расстояния между зарядами.

$$\mathbf{F} = f \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r}. \quad (113.1)$$

Здесь  $m_1$  и  $m_2$  — величины обоих «магнитных зарядов» или количества магнетизма, а  $f$  — коэффициент пропорциональности.

Напряженность магнитного поля  $\mathbf{H}$  определяется, аналогично напряженности электрического поля в электростатике, соотношением

$$\mathbf{F} = m\mathbf{H}, \quad (113.2)$$

где  $\mathbf{F}$  — сила, действующая на «магнитный заряд»  $m$

Так как нельзя отделить друг от друга магнитные заряды противоположных знаков, то намагничивание вещества в формальной теории объясняют тем, что атомы и молекулы по своим магнитным свойствам подобны элементарным магнитным диполям, т.е. двум одинаковым по модулю, но разным по знаку магнитным зарядам, смещенным друг относительно друга на малый отрезок  $\mathbf{l}$ . Магнитные свойства таких диполей характеризуют их магнитным моментом  $\mathbf{p}'_m$ , определяемым аналогично моменту

электрических диполей:

$$\mathbf{p}'_m = m\mathbf{l}. \quad (113.3)$$

Магнитный момент считается направленным от отрицательного (южного) магнитного заряда к положительному (северному).

Чтобы установить связь между магнитными действиями диполей и магнитными действиями токов, можно поступать по-разному. Выбранный ниже способ кажется нам наиболее естественным, хотя он и не является единственным.

Коэффициент пропорциональности в формуле (113.1) зависит от выбора единиц. В абсолютной системе СГС полагают  $f = 1$  и таким образом определяют единицу магнитного заряда. Единичный магнитный заряд есть такой заряд, который, будучи точечным, действует на равный ему точечный магнитный заряд, удаленный на расстояние единицы (1 см) с силой, равной единице (1 дин). В системе СИ  $f$  является размерной величиной, не равной единице.

Так как единицы напряженности  $H$  (ампер на метр) и силы  $F$  (ньютон) в системе СИ уже установлены, то из (113.2) получается единица количества магнетизма: ньютон-метр на ампер (Н·м/А). Ее размерность, выраженная через основные единицы, есть  $L^2MT^{-2}I^{-1}$  и совпадает с размерностью потока магнитной индукции (ср. таблицу Приложения 2 в конце книги), измеряемой в веберах (Вб). Поэтому и единица количества магнетизма в системе СИ есть вебер (Вб). Единица магнитного момента диполя есть вебер-метр (Вб·м).

Поскольку теперь единицы для всех величин в формуле (113.1) установлены, коэффициент пропорциональности  $f$  получает вполне определенное значение. Для вакуума оно равно  $f = 1/(4\pi\mu_0)$ , где  $\mu_0$  — введенная ранее магнитная постоянная.

Таким образом, закон Кулона для взаимодействия точечных магнитных зарядов в вакууме в системе СИ имеет вид

$$\mathbf{F} = \frac{m_1 m_2}{4\pi\mu_0 r^3} \mathbf{r}, \quad (113.4)$$

аналогичный закону взаимодействия точечных электрических зарядов (§ 4). Если магнитные заряды находятся не в вакууме, а в однородной среде с магнитной проницаемостью  $\mu$ , то вместо  $\mu_0$  в формулу войдет произведение  $\mu\mu_0$ .

Найдем теперь связь между магнитным моментом элементарного тока (§ 82)  $\mathbf{p}_m = iS\mathbf{n}$  и магнитным моментом  $\mathbf{p}'_m = m\mathbf{l}$  элементарного диполя, эквивалентного по магнитным действиям элементарному току.

В дальнейшем мы будем считать, что диполи и токи находятся в вакууме (или, что практически то же самое, в атмосферном воздухе). О влиянии окружающей среды на магнитные взаимодействия будет кратко сказано в следующем параграфе.

Рассмотрим сначала механические силы в магнитном поле. На элементарный ток действует пара сил (§ 85, формула (85.2))

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}_m \mathbf{B}],$$

пропорциональная *магнитной индукции*  $\mathbf{B}$ . В случае элементарного магнитного диполя из формул (113.2) и (113.3) следует, что пара сил, действующих на магнитный диполь, есть (ср. § 15)

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}'_m \mathbf{H}]. \quad (113.5)$$

Она пропорциональна *напряженности поля*  $\mathbf{H}$ . Так как  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ , то сравнение обеих формул дает

$$\mathbf{p}'_m = \mu_0 \mathbf{p}_m. \quad (113.6)$$

Полученное соотношение выражает условие эквивалентности элементарных токов и элементарных магнитных диполей.

В системе СГС  $\mu_0 = 1$ . Поэтому в вакууме магнитный момент элементарного тока и момент эквивалентного ему магнитного диполя равны друг другу:  $\mathbf{p}'_m = \mathbf{p}_m = iS\mathbf{n}$ .

Такой же результат (113.6) мы получим, рассматривая силы, действующие на элементарный ток и элементарный магнитный диполь в неоднородном магнитном поле. Действительно, согласно § 85, на элементарный ток действует сила

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p}_m \text{ grad})\mathbf{B}. \quad (85.4a)$$

Для магнитного диполя мы должны опять исходить из соотношений (113.2) и (113.3), которые аналогичны формулам (9.2) и (15.1) электростатики. Поэтому, рассуждая так же, как и в § 15, мы получим формулу типа (15.6), с тем отличием, что вместо момента электрического диполя в нее войдет момент магнитного диполя  $\mathbf{p}'_m$ , а вместо напряженности электрического поля — напряженность магнитного поля  $\mathbf{H}$ :

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p}'_m \text{ grad})\mathbf{H}. \quad (113.7)$$

Сравнивая формулы (113.7) и (85.4a), мы видим, что силы в обоих случаях будут одинаковы, если  $\mathbf{p}_m$  и  $\mathbf{p}'_m$  связаны соотношением эквивалентности (113.6).

Элементарные токи и магнитные диполи, моменты которых связаны соотношением (113.6), не только испытывают одинаковые механические силы в магнитных полях, но и сами создают во внешнем пространстве одинаковые магнитные поля. Покажем это на конкретном примере. Рассмотрим элементарный контур с током и точку, лежащую на его оси на расстоянии  $r$  от центра контура (см. рис. 124). Напряженность магнитного поля в этой точке направлена вдоль оси тока и равна (§ 82, формула (82.1))

$$H = \frac{p_m}{2\pi r^3}, \quad p_m = iS.$$

Пусть теперь имеется магнитный диполь, совпадающий с элементарным током, с моментом  $\mathbf{p}'_m$ , параллельным моменту элементарного тока  $\mathbf{p}_m$ . Для вычисления создаваемой им напряженности магнитного поля мы имеем формулы (113.4), (113.2)

и (113.3), которые аналогичны формулам электростатики (4.1), (9.2) и (15.1), лежащим в основе вычисления напряженности поля электрического диполя. Поэтому мы можем сразу воспользоваться формулой (25.5), заменив в ней  $p$  на величину момента магнитного диполя  $p'_m$ ,  $\epsilon_0$  — на  $\mu_0$ , и положив  $\cos \alpha = 1$  (так как мы ищем поле в точке, лежащей на оси диполя). Тогда

$$H' = \frac{p'_m}{2\pi\mu_0 r^3}, \quad p'_m = ml. \quad (113.8)$$

Это поле направлено вдоль оси диполя ( $H_\alpha = 0$ ), т.е. так же, как и поле элементарного тока. Учитывая соотношение (113.6), находим, что оба поля  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{H}'$  равны друг другу. Можно показать, что найденный результат справедлив не только для точек на оси диполя (тока), но и в произвольной точке поля.

Если контур с током имеет конечные размеры, то его всегда можно представить как совокупность элементарных замкнутых токов одинакового направления, текущих на поверхности, ограниченной контуром с током (ср. рис. 157). Так как каждый элементарный ток эквивалентен некоторому элементарному магнитному диполю, то весь контур с током эквивалентен *магнитному листку*, или *магнитному двойному слою*. Обе стороны такого слоя имеют магнитные заряды противоположных знаков, разведенные на малое расстояние. Если контур с током плоский и поверхность, опирающаяся на контур, есть плоскость с площадью  $S$ , то, согласно соотношению эквивалентности (113.6), магнитный момент магнитного листка есть

$$\mathfrak{M} = \mu_0 i S \mathbf{n}. \quad (113.9)$$

Здесь  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали к плоскости листка, направление которого связано с направлением тока в контуре правилом правого буравчика (см. рис. 125).

Если опирающаяся на контур поверхность не есть плоскость, то под  $S\mathbf{n}$  нужно понимать величину

$$S\mathbf{n} = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum \Delta S_i \nu_i = \int_S \nu dS, \quad (113.10)$$

где  $\nu$  — единичная нормаль к элементу поверхности  $dS$ . При этом сама поверхность может быть произвольной, важно только, чтобы она опиралась на данный контур с током. Магнитный момент, отнесенный к единице поверхности магнитного листка, называется *мощностью* магнитного листка. Она равна

$$\mathbf{m} = \mu_0 i \mathbf{n}. \quad (113.11)$$

Единица мощности  $\mathbf{m}$  есть вебер на метр (Вб/м).

Магнитные действия трехмерных тел в формальной теории магнетизма, по аналогии с поляризацией диэлектриков (§ 39),

характеризуют *магнитной поляризованностью*. Она равна магнитному моменту, создаваемому магнитными диполями в единице объема,

$$\mathcal{P}_m = \frac{1}{\tau} \sum p'_m, \quad (113.12)$$

где  $\tau$  — рассматриваемый объем. Так как единица магнитного момента есть Вб·м, а  $\tau$  — м<sup>3</sup>, то единица магнитной поляризованности есть Вб/м<sup>2</sup>. Она совпадает с единицей магнитной индукции — тесла (Тл).

Однако в действительности, как мы знаем, существуют молекулярные токи, и, исходя из этих представлений, мы уже ввели характеристику намагничивания — вектор намагниченности  $\mathbf{I}$  (§ 103), определяемый формулой (103.1). Связь между двумя этими величинами получается непосредственно из соотношения эквивалентности элементарных токов и диполей (113.6). Мы имеем

$$\mathcal{P}_m = \frac{1}{\tau} \sum p'_m = \mu_0 \frac{1}{\tau} \sum p_m = \mu_0 \mathbf{I}. \quad (113.13)$$

В системе СГС магнитная поляризованность и намагниченность совпадают друг с другом.

Развивая внешнюю аналогию между электрическими и магнитными диполями, можно построить полную теорию магнитного поля покоящихся магнитных зарядов, или магнитостатику. При этом магнитные действия контуров с постоянными токами можно описывать с помощью представлений о магнитных диполях или соответственно магнитных листках и магнитно-поляризованных телах.

Формальной теорией магнетизма пользуются иногда и в настоящее время, так как многие результаты в ней можно получить непосредственно из аналогии с электростатикой. Однако при этом всегда нужно помнить, что на самом деле магнитные явления обусловлены взаимодействием токов. Это, в частности, проявляется в том, что эквивалентность между токами и магнитными диполями существует только *во внешнем пространстве* по отношению к контурам с током и намагниченным телам и не имеет места внутри них. Так, например, рассматривая соленоид с током и равновеликий с ним эквивалентный магнит, мы найдем, что создаваемые ими магнитные поля во внешнем пространстве совпадают. Внутри соленоида, вследствие непрерывности линий индукции, магнитное поле направлено от южного конца соленоида к северному. В постоянном же магните с точки зрения формальной теории, вследствие магнитной поляризации, на торцах находятся магнитные заряды. Поэтому магнитное поле внутри магнита будет направлено от северного конца к южному, т.е. противоположно полю в соленоиде



## § 114. Влияние среды на магнитное взаимодействие

Взаимодействие токов и магнитов зависит от свойств окружающей среды. Это происходит потому, что окружающая среда намагничивается полем, создаваемым токами и магнитами, и сама становится источником магнитного потока, вызывающего дополнительные силы.

Если в безграничном магнетике имеются два контура с током, то суммарная плотность магнитного потока, создаваемого каждым из этих токов, как мы видели (§ 105), выражается индукцией  $B = \mu\mu_0 H$ , и поэтому сила взаимодействия двух токов пропорциональна магнитной проницаемости  $\mu$  окружающей среды.

Так как всякий постоянный магнит есть система токов (элементарных токов), то может показаться, что и силы, действующие между магнитами, также пропорциональны  $\mu$ . Однако в действительности эта зависимость сложнее, так как между токами и магнитами существует важное различие: окружающая среда проникает внутрь контуров с током, но не проникает внутрь магнитов. Поэтому внесение любого магнита внутрь магнетика неизбежно нарушает сплошность магнетика и делает его неоднородным. Магнит внутри магнетика есть полость, заполненная веществом, имеющим иную магнитную проницаемость  $\mu'$ , нежели у окружающей среды (рис. 179).

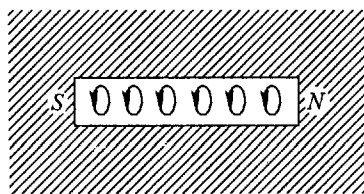


Рис 179 Постоянный магнит есть система молекулярных токов внутри полости, непроницаемой для внешней среды

Вопрос существенно упрощается, если магниты намагничены до насыщения. Тогда  $\mu' \approx 1$  и магнит можно представить в виде полости, внутри которой имеется вакуум. Чтобы лучше выяснить сущность дела, мы в дальнейшем ограничимся только этим случаем.

Рассмотрим сначала взаимодействие тока и магнита. Сила, действующая на магнит (т.е. на молекулярные токи), определяется значением магнитной индукции внутри магнита. Она складывается из индукции  $\mu_0 H$ , создаваемой током в вакууме, и индукции  $B'$ , вызываемой намагниченной средой. Но  $B'$  существенно зависит от формы полости. Поэтому и сила, действующая на магнит, зависит от формы магнита, и никакого общего закона влияния магнитной проницаемости среды на силу, действующую на магниты, дать нельзя.

Рассмотрим частный случай длинного магнита, расположенного параллельно полю (рис. 180). Напряженность поля внутри

магнита  $H_i$  (т.е. в щели, параллельной полю, ср. § 104) есть напряженность поля внутри магнетика, которая совпадает с напряженностью поля  $H_0$  в вакууме. Поэтому индукция внутри магнита равна  $\mu_0 H_0$  и сила  $F$  взаимодействия между током и

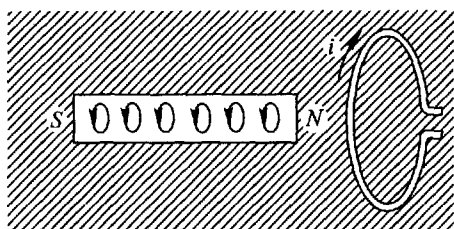


Рис. 180. Контур с током и постоянный магнит в магнетике

по модулю, но противоположная по направлению. Но сила, действующая на ток, определяется индукцией  $\mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H}$ . Отсюда следует, что индукция, создаваемая длинным магнитом, не зависит от  $\mu$ , а, следовательно, напряженность поля магнита уменьшается в  $\mu$  раз:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0/\mu. \quad (114.2)$$

Перейдем теперь к взаимодействию двух магнитов. Рассмотрим два очень длинных магнита, оси которых совпадают (рис. 181). Если бы магнит 2 не было вовсе, то магнит 1 создавал бы во внешнем пространстве напряженность поля  $H_{1a}$ , выражаемую формулой (114.2). Эта напряженность поля будет и внутри магнита 2 (ср. § 104):

$$H_{2i} = H_{1a} = H_0/\mu.$$

Поэтому индукция внутри магнита 2 будет  $\mu_0 H_0/\mu$ , т.е. в  $\mu$  раз меньше, чем в вакууме, а, следовательно, сила взаимодействия полюсов длинных магнитов обратно пропорциональна магнитной проницаемости среды:

$$F = F_0/\mu. \quad (114.3)$$

Если бы магниты имели другую форму, то и результаты получились бы иные.

В случае магнитов, намагниченных не до насыщения, внутри рассмотренных выше полостей имелось бы вещество магнита с  $\mu' \neq 1$  и силы взаимодействия зависели бы еще от  $\mu'$ .

магнитом внутри магнетика будет такая же, как и в вакууме ( $F_0$ ):

$$F = F_0, \quad (114.1)$$

и не будет зависеть от магнитной проницаемости среды.

Согласно третьему закону Ньютона на ток со стороны магнита действует сила  $-F$ , равная

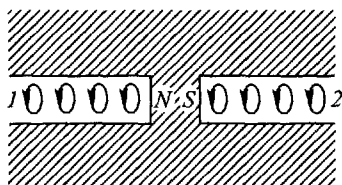


Рис. 181. Два постоянных магнита внутри магнетика

### § 115. Природа молекулярных токов

Для объяснения намагничивания вещества мы положили в основу представление о том, что внутри атомов и молекул существуют замкнутые электрические токи (молекулярные токи). Рассмотрим теперь, какую физическую природу имеют эти токи.

Мы уже говорили (§ 7), что все атомы построены из положительно заряженных ядер, в которых сосредоточена практически вся масса атома, и некоторого количества электронов. Число электронов в атоме таково, что полный их отрицательный заряд равен положительному заряду ядра, так что атом в нормальном состоянии электрически нейтрален.

Заряд ядра, а следовательно, и количество электронов в атоме тесно связаны с положением элемента в периодической системе. Если  $Z$  — порядковый номер элемента, а  $e$  — заряд электрона, то заряд ядра равен  $+Ze$  и атом содержит  $Z$  электронов. Так, например, атом водорода ( $Z = 1$ ) имеет всего один электрон, атом Na ( $Z = 11$ ) — 11 электронов, атом железа ( $Z = 26$ ) — 26 электронов.

Электроны в атоме находятся в состоянии непрерывного движения. Для многих целей, в том числе и для объяснения ряда магнитных явлений, с достаточным приближением можно считать, что электроны обращаются вокруг ядра по круговым или эллиптическим орбитам, подобно планетам Солнечной системы (планетарная модель атома). Каждый из атомных электронов движется по своей собственной орбите, а разные электронные орбиты лежат в различных плоскостях.

Такие электроны, обращающиеся по орбитам, представляют собой замкнутые электрические токи, и потому естественно предположить, что именно они являются молекулярными токами (существование которых предполагал еще Ампер), ответственными за намагничивание вещества. В § 116 мы рассмотрим опыты, доказывающие, что это действительно так.

Так как электронам присущ не только заряд, но еще и масса, то каждый орбитально движущийся электрон обладает не только магнитным моментом (как и всякий замкнутый ток), но еще и определенным механическим моментом или вращательным импульсом, т.е. подобен волчку.

Между магнитным моментом электрона на орбите и его моментом импульса существует простая связь. Выясним ее на примере круговой орбиты (рис. 182). Если электрон совершает  $\nu$  оборотов в секунду, то сила тока равна  $i = e\nu$ .

Орбитальный магнитный момент электрона  $p_m$  есть

$$p_m = e\nu S,$$

где  $S$  — площадь орбиты. Если, как показано на рис. 182, электрон обращается по часовой стрелке, то ток направлен против часовой стрелки (заряд электрона отрицательный) и орбитальный магнитный момент направлен, в соответствии с правилом правого буравчика, перпендикулярно к плоскости орбиты снизу вверх.

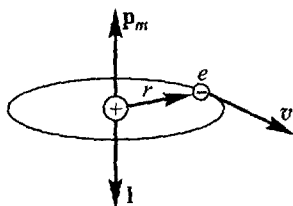


Рис. 182. Магнитный ( $p_m$ ) и механический ( $l$ ) моменты электронной орбиты

Движущийся по орбите электрон обладает орбитальным механическим моментом (или моментом импульса), равным

$$l = m\omega r^2 = 2m\nu S,$$

где  $\omega = 2\pi\nu$  — угловая скорость электрона. Направление вектора  $l$  также подчиняется правилу правого буравчика. Из рис. 182 видно, что направления  $l$  и  $p_m$  противоположны. Из сказанного следует, что отношение магнитного момента орбиты к ее механическому моменту не зависит от  $\nu$  и  $S$  и определяется только универсальными постоянными:

$$\Gamma = p_m/l = -e/2m, \quad (115.1)$$

где  $e/m$  — отношение заряда электрона к его массе, равное  $1,76 \cdot 10^{11}$  Кл/кг. В этой формуле знак минус выражает противоположность направлений  $p_m$  и  $l$ . Отношение  $\Gamma = p_m/l$  называют *гиромангнитным отношением*.

Формула (115.1) выведена нами для круговой орбиты. Однако легко показать, что она справедлива и для эллиптических орбит.

Рассмотрим теперь, что произойдет, если на электрон, вращающийся на орбите, будет действовать внешнее магнитное поле.

На замкнутый ток в магнитном поле действует пара сил (§ 85). Так как электрон на орбите подобен волчку, то под действием этой пары сил он будет совершать, как и всякий волчок, прецессионное движение, т.е. получит дополнительное равномерное вращение, при котором вектор  $l$  будет описывать конус вокруг направления индукции  $B$  с некоторой угловой скоростью  $\Omega$  (рис. 183). Простой расчет показывает (см. Добавление 7), что если вращающаяся частица имеет отрицательный заряд (электрон), то вектор угловой скорости  $\Omega$  направлен параллельно  $B$ , а угловая скорость прецессии равна

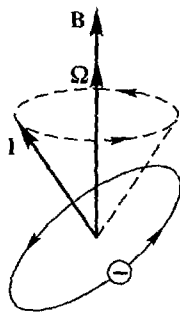


Рис. 183. Ларморова прецессия

$$\Omega = eB/2m. \quad (115.2)$$

Скорость этой прецессии не зависит от ориентировки орбиты, т.е. от угла между векторами  $\mathbf{I}$  и  $\mathbf{B}$ .

Сформулированный нами результат составляет содержание теоремы Лармора: *действие магнитного поля на движущийся электрон заключается в наложении на первоначальное движение равномерного вращения вокруг направления внешнего магнитного поля.*

Таким образом, внешнее магнитное поле не вызывает непосредственно переориентировки электронных орбит, а вызывает только их прецессию. Однако если имеются какие-либо причины, тормозящие прецессию, например соударения с соседними атомами, то электронная орбита будет постепенно изменять свою ориентировку и будет стремиться в конце концов установиться таким образом, чтобы магнитный момент орбиты оказался параллельным магнитному полю.

Атом в целом представляет собой совокупность электронов и поэтому обладает и магнитным, и механическим моментами, которые представляют собой векторные суммы моментов отдельных электронов атома. Во внешнем поле атомы будут сначала прецессировать, но затем, под действием соударений, ориентироваться в направлении поля, отчего вещество приобретет определенный суммарный магнитный момент, т.е. намагнитится.

### § 116. Магнитомеханическое и механомагнитное явления

Рассмотренные выше представления о том, что молекулярными токами являются движущиеся электроны атома, приводят к заключению, что всякое изменение намагниченности вещества должно сопровождаться определенными механическими явлениями. Действительно, механический момент электронной орбиты  $\mathbf{I}$  связан с ее магнитным моментом  $\mathbf{p}_m$  соотношением (115.1). Если  $\mathbf{I}$  — вектор намагниченности, а  $\tau$  — объем тела, то полный магнитный момент тела есть  $\mathbf{I}\tau$ . Он равен векторной сумме моментов всех молекулярных токов:

$$\mathbf{I}\tau = \sum \mathbf{p}_m.$$

Согласно (115.1) этому магнитному моменту соответствует механический момент импульса  $\mathbf{L}$ :

$$\mathbf{L} = \sum \mathbf{l} = \frac{1}{\Gamma} \mathbf{I}\tau. \quad (116.1)$$

Если тело вначале было не намагничено, то  $\mathbf{I} = 0$  и суммарный механический момент всех элементарных токов  $\mathbf{L} = 0$ . При намагничивании элементарные токи приобретают суммарный механический момент  $\mathbf{L}$ , выражаемый формулой (116.1). Но ориен-

тирование элементарных токов происходит под действием соударений, т.е. внутренних сил, и поэтому должен соблюдаться закон сохранения момента импульса. Это значит, что намагничиваемое тело должно приобрести момент импульса  $-L$ , т.е. прийти во вращение вокруг оси, параллельной вектору намагниченности  $I$ .

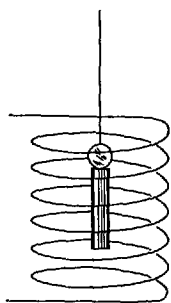


Рис 184 Схема опыта для наблюдения магнитомеханического явления

Возникновение вращения при намагничивании получило название *магнитомеханического* явления. Оно совершенно подобно известному опыту в механике со скамьей Жуковского. Если человек, сидящий на вращающейся скамье, поворачивает раскрученный маховик, то скамья с экспериментатором вследствие сохранения момента импульса системы приходит во вращение.

Магнитомеханическое явление было впервые наблюдеено на опыте Эйнштейном и Гаазом в 1915 г. В этих опытах небольшой железный цилиндр был подвешен на тончайшей нити и помещен внутри соленоида (рис. 184).

При намагничивании цилиндра он начинал поворачиваться, причем направление вращения изменялось при изменении направления магнитного поля. Поворот цилиндра отмечался при помощи небольшого зеркальца, скрепленного с цилиндром.

Возникающие при этом угловые скорости весьма малы. Так, например, для железного цилиндра диаметром несколько миллиметров в поле напряженности  $10^4$  А/м угловая скорость имеет порядок только  $10^{-3}$  рад/с. Поэтому, чтобы усилить наблюдаемый эффект, Эйнштейн и Гааз использовали явление механического резонанса: частоту крутильных колебаний цилиндра делали равной частоте переменного тока.

Наряду с магнитомеханическим явлением существует и ему обратное явление. механическое вращение тела вызывает намагничивание этого тела.

Известно, что если вращающийся волчок заставить участвовать в дополнительном вращении вокруг некоторой оси (вынужденная прецессия), то на волчок начинает действовать пара сил, стремящаяся уменьшить угол между осью волчка и осью вынужденной прецессии и установить волчок таким образом, чтобы обе эти оси были параллельны (рис. 185).

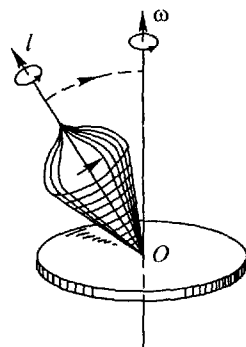


Рис 185 Вынужденная прецессия волчка

Рис 185 Вынужденная прецессия волчка

Так как атомы обладают определенным моментом импульса, то при вращении тела они, подобно волчку, будут ориентироваться, а, следовательно, тело намагнитится.

Намагничивание при вращении (*механомагнитное явление*) действительно наблюдается на опыте и было впервые обнаружено Барнеттом. В этих опытах небольшой железный цилиндр приводился в быстрое вращение вокруг своей оси и затем измерялось намагничивание, вызванное вращением. За количественную меру наблюдаемого эффекта обычно принимают напряженность внешнего магнитного поля  $H$ , вызывающего то же намагничивание, что и вращение (эквивалентное поле). Это эквивалентное поле оказывается весьма малым. Так, например, даже при скорости вращения в 6000 об/мин оно равно приблизительно  $10^{-2}$  А/м, т.е. примерно в тысячу раз меньше магнитного поля Земли.

Механомагнитное явление (так же как и магнитомеханическое) доказывает, что молекулярные токи, обуславливающие намагничивание, обладают механическим моментом. Далее, определяя знак возникающего намагничивания, можно установить и знак заряда движущихся частиц. Так, например, если частицы имеют отрицательный заряд, то магнитный и механический моменты каждого элементарного тока направлены противоположно (§ 115), и поэтому магнитный момент тела и направление эквивалентного поля будут также противоположны угловой скорости вращения (рис. 186 а). Если же заряд частиц положительный, то магнитный момент тела и угловая скорость вращения должны быть направлены одинаково (рис. 186 б). Опыты показывают, что возникающее намагничивание соответствует отрицательному заряду частиц, и поэтому механомагнитное явление, так же как и магнитомеханическое, подтверждает предположение о том, что намагничивание тел обусловлено движущимися электронами.

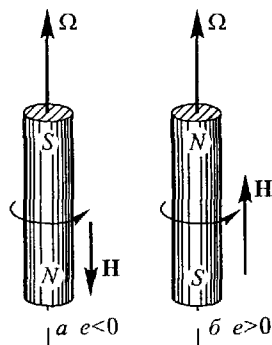


Рис 186 Механомагнитное явление

## § 117. Магнитный и механический моменты электрона

Детальное исследование магнитомеханического и механомагнитного явлений показало, однако, что вопрос о природе элементарных токов более сложен, чем казалось вначале.

Оба эти явления зависят от величины гиромангнитного отношения  $\Gamma$ . Поэтому по данным опыта можно определить гиромангнитное отношение и сравнить его с теоретически ожидаемым значением для электронной орбиты (115.1). Первые же опыты в этом направлении показали, что экспериментальное значение  $\Gamma$  в ферромагнетиках не согласуется с (115.1) и оказывается приблизительно в два раза большим. Последующие многочисленные определения гиромангнитного отношения подтвердили этот результат. Аномальное значение гиромангнитного отношения привело к заключению, что внутри атома, помимо орбитального движения электрона, имеется и другой тип движения, приводящий к возникновению магнитного и механического моментов. Поэтому было сделано предположение, что самому электрону, как таковому, присущи и магнитный, и механический моменты, причем их отношение для электрона  $\Gamma_e$  равно

$$\Gamma_e = -e/m. \quad (117.1)$$

Впоследствии это предположение полностью подтвердилось.

Таким образом, электрон по своим магнитным и механическим свойствам оказывается подобным заряженному телу, вращающемуся вокруг своей оси. Поэтому вначале возникло представление о «вращающемся электроне», и в физической литературе появился термин *спин* электрона, обозначающий собственный механический момент количества движения электрона.

Следует, однако, отметить, что, хотя термин *спин* электрона широко применяется и в настоящее время, с ним уже не связывают представление о механическом вращении электрона. Развитие современной квантовой физики атома показало, что перенесение образов макроскопической механики в область атомного мира невозможно. В настоящее время мы рассматриваем электрон как одну из элементарных частиц, которая характеризуется своим зарядом, массой, магнитным и механическим моментами.

Магнитный и механический моменты электрона проявляются не только в магнитных свойствах вещества, но и в других многочисленных явлениях и, в частности, в особенностях оптических спектров. Поэтому существование этих свойств у электрона в настоящее время установлено с большой надежностью.

Совокупность всех имеющихся опытных данных, в согласии с выводами квантовой механики, приводит к следующим результатам. Направление собственного механического момента электрона  $l_e$  (спина) квантуется. А именно, проекция спина на выделенное направление (например, на направление магнитного поля)  $l_{eH}$  может принимать только два различных значения:

$$l_{eH} = \pm \frac{1}{2} \frac{h}{2\pi}. \quad (117.2)$$

Здесь  $h$  — универсальная постоянная квантовой теории — по-



стоянная Планка, равная

$$h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с} = 6,62 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{с}.$$

Поэтому квантуется и направление собственного магнитного момента электрона  $\mathbf{p}_{me}$ . Его проекция на направление магнитного поля  $p_{eH}$  (где индекс  $m$  для краткости мы опускаем), согласно формулам (117.1) и (117.2), равна

$$p_{eH} = l_{eH} \Gamma_e = \pm \frac{h}{4\pi} \frac{e}{m}, \quad (117.3)$$

и может иметь тоже только два значения. Величина

$$\mu_B = \frac{eh}{4\pi m} \quad (117.4)$$

получила название *магнетона Бора*. Она равна

$$\mu_B = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ А} \cdot \text{м}^2 = 9,27 \cdot 10^{-21} \text{ СГС}_{\mu_B}.$$

Таким образом, проекция собственного магнитного момента электрона на направление магнитного поля может равняться только одному магнетону Бора:  $+\mu_B$  или  $-\mu_B$ .

Понятие магнетона было введено Бором задолго до открытия спина электронов в элементарной квантовой теории, в которой рассматривается движение электронов в атоме по определенным круговым или эллиптическим орбитам вокруг положительного ядра. При этом момент импульса электрона  $l$  на орбите квантуется, т.е. может принимать только дискретные значения  $l = nh/2\pi$ , где  $h$  постоянная Планка, а  $n = 1, 2, 3$ . Наименьший возможный механический момент есть  $h/2\pi$ , и ему, согласно формуле (115.1), соответствует наименьший магнитный момент орбиты  $(e/2m)h/2\pi = he/(4\pi m)$ . А это и есть магнетон Бора  $\mu_B$ . Таким образом, магнетон Бора есть наименьшее возможное значение магнитного момента, которое можно назвать атомом магнитного момента. Квантовая механика отказывается от представления об электронных орбитах. Однако величина магнетона Бора (117.4) в ней сохраняется как наименьшее изменение проекции магнитного момента на направление магнитного поля.

Мы видим, что магнетизм атомов обусловлен двумя причинами: во-первых, движением электронов в атоме и, во-вторых, магнетизмом самих электронов, которые являются источниками магнитного поля независимо от их движения внутри атома.

## § 118. Объяснение пара- и диамагнетизма

Вывяснив основные магнитные свойства атомов, мы можем перейти к объяснению магнитных свойств вещества.

Парамагнитные свойства вещества объясняются наличием у атомов определенного магнитного момента. В отсутствие магнитного поля магнитные моменты атомов в парамагнетике вследствие теплового движения ориентированы совершенно беспорядочно (рис. 187 а). Поэтому магнитный момент тела, равный векторной сумме моментов отдельных атомов, близок к нулю, а, следовательно, тело не намагничено.

Во внешнем магнитном поле на каждый атом действует пара сил, стремящаяся установить магнитные моменты атомов параллельно полю. В результате этого внутри парамагнетика возникает упорядоченное расположение атомов и намагниченность

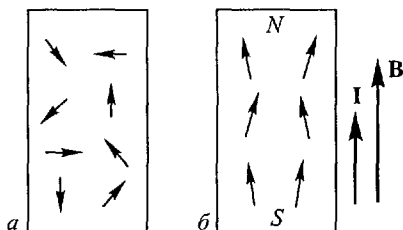


Рис. 187. Объяснение парамагнетизма

становится не равной нулю (рис. 187 б). При этом направление намагниченности  $I$  (от южного полюса к северному) оказывается параллельным направлению индукции  $B$ , что характерно для парамагнетиков.

Чем выше температура парамагнетика, тем сильнее тепловое движение атомов и, следовательно, тем слабее их ориентировка в данном поле, т.е. тем слабее намагничивание.

Этим объясняется уменьшение магнитной восприимчивости парамагнетиков при нагревании.

Из сказанного видно, что объяснение парамагнетизма в точности совпадает с объяснением поляризации диэлектриков с полярными молекулами (§ 48) и единственное различие заключается лишь в том, что для диэлектрической поляризации существен электрический момент атомов, а для намагничивания — их магнитный момент. Отметим, что исторически теория парамагнетизма была развита Ланжевенем раньше, нежели теория диэлектриков, и лишь затем представления этой теории были перенесены Дебаем на диэлектрики.

Остановимся подробнее на некоторых результатах теории парамагнетизма. Пусть  $\overline{p_{mH}}$  есть среднее значение проекции магнитного момента атома  $p_m$  на направление внешнего магнитного поля. Тогда, рассуждая так же, как при выводе формулы (48.1) (Добавление 2), для случая слабой ориентировки атомов получим

$$\overline{p_{mH}} = \frac{p_m^2}{3kT} \mu_0 H'.$$

Здесь  $H'$  — напряженность поля, действующего на атом,  $T$  — термодинамическая температура,  $k$  — постоянная Больцмана. Обозначим далее через  $n$  число атомов в единице объема вещества. Тогда магнитный момент единицы объема (намагниченность) есть

$$I = n\overline{p_{mH}} = \frac{np_m^2}{3kT} \mu_0 H'. \quad (118.1)$$

С другой стороны,  $I = \kappa H$ , где  $\kappa$  — магнитная восприимчивость. Так как, далее, все парамагнетики намагничиваются весь-

ма слабо, то в них различие между  $H$  и  $H'$  невелико, и можно положить  $H' \approx H$ . Поэтому из (118.1) следует, что

$$\chi = I/H = C/T, \quad (118.2)$$

где введено обозначение

$$C = \frac{np_m^2}{3k} \mu_0.$$

Эта формула выражает уже известный нам закон Кюри (§ 110), который получает в теории Ланжевена теоретическое объяснение.

Несколько иной характер имеет парамагнетизм металлов. В металлах, как мы знаем, существуют электроны проводимости, которые не принадлежат отдельным атомам и образуют своеобразный электронный газ. Благодаря наличию у электрона собственного магнитного момента этот электронный газ обладает парамагнетизмом (парамагнетизм свободных электронов). Однако изложенная выше теория Ланжевена неприменима к электронному газу в металлах, так как движение электронов внутри металлов описывается не классическими законами, а законами квантовой теории.

Рассмотрим теперь, каким образом объясняется существование диамагнетиков.

В § 109 мы видели, что характерным для диамагнетиков является то обстоятельство, что вектор намагниченности  $\mathbf{I}$  направлен в них противоположно намагничивающему полю

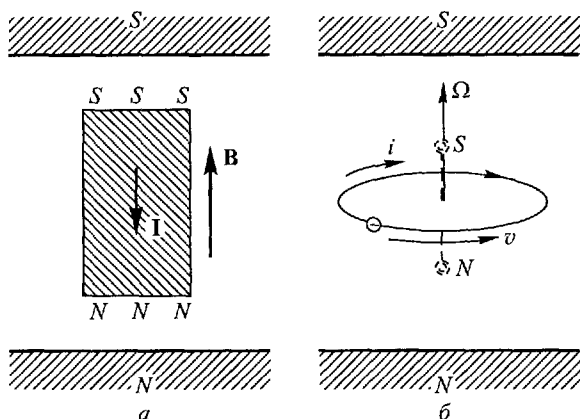


Рис. 188. Объяснение диамагнетизма: *a* — взаимные направления вектора намагниченности и намагничивающего поля в диамагнетиках; *б* — магнитный диполь, соответствующий изменению магнитного момента электронной орбиты вследствие ларморовой прецессии

(рис. 188 *a*). Такое поведение диамагнетиков невозможно объяснить при помощи формальной теории магнетизма, т.е. в предпо-

ложении, что внутри магнетиков существуют магнитные диполи. Действительно, в этом случае нужно было бы допустить, что диполи во внешнем поле устанавливаются так, что северные их концы обращаются к северному же полюсу влияющего магнита, а южные концы — к южному полюсу, или, иначе, что одноименные магнитные полюсы притягиваются, а не отталкиваются. Напротив, существование диамагнетиков естественно объясняется наличием молекулярных токов

Объяснение диамагнетизма было дано впервые также Ланжевенем. Основную идею его теории разъясняет рис. 188 б. Рассмотрим какую-либо электронную орбиту внутри атома и предположим, что в некоторый момент времени мы включили внешнее магнитное поле. Движение электрона изменится, а именно — возникнет ларморова прецессия; причем для случая движения электрона ( $e < 0$ ) вектор угловой скорости прецессии  $\Omega$  будет направлен параллельно направлению поля  $\mathbf{B}$  (§ 115). На рис. 188 это соответствует дополнительному вращению электрона против стрелки часов (если смотреть сверху) Но вращение отрицательной частицы против часовой стрелки есть ток, текущий по часовой стрелке. При этом северная сторона тока будет расположена снизу, а южная — сверху, т.е. возникающий вследствие прецессии дополнительный магнитный момент орбиты будет соответствовать диполю, у которого южный конец обращен к южному полюсу магнита, а северный конец — к северному полюсу (диамагнитный эффект). Таким образом, существование диамагнетизма вполне объясняется ларморовой прецессией. Теория диамагнетизма Ланжевена объясняет диамагнетизм не только качественно, но приводит и к правильному порядку величины магнитной восприимчивости.

Выше мы рассмотрели диамагнетизм, возникающий вследствие ларморовой прецессии электронных орбит внутри атома. Если вещество является металлом, то возникает еще дополнительный диамагнитный эффект, обусловленный электронами проводимости. Этот эффект был открыт теоретически Л. Д. Ландау, который показал, что искривление путей электронов в магнитном поле, вызываемое силой Лоренца, приводит также к появлению диамагнетизма (диамагнетизм свободных электронов). Расчеты, однако, показывают, что этот диамагнетизм в три раза меньше парамагнетизма, обусловленного собственными магнитными моментами электронов. Поэтому диамагнетизм свободных электронов непосредственно на опыте не наблюдается и электронный газ в металлах в результате одновременного наложения обоих эффектов оказывается всегда парамагнитным

Суммируя сказанное выше, мы можем также понять, почему одни вещества являются парамагнетиками, а другие — диамагнетиками. Так как ларморову прецессию в магнитном поле испытывают все электроны любого атома, то атомы всех веществ являются носителями диамагнитных свойств. Однако это еще

не значит, что вещество будет диамагнетиком, так как атомы имеют и постоянный суммарный магнитный момент, который обуславливает их парамагнитные свойства. Если магнитный момент атомов велик, то парамагнитные свойства преобладают над диамагнитными и вещество оказывается парамагнетиком. Если магнитный момент мал, то преобладают диамагнитные свойства и вещество является диамагнетиком. В частности, атомы всех инертных газов имеют полный магнитный момент, равный нулю. Поэтому для них имеется только один диамагнитный эффект и все инертные газы диамагнитны.

### § 119. Объяснение ферромагнетизма

Перейдем теперь к объяснению ферромагнетизма.

Современная теория ферромагнетиков опиралась в своем развитии на следующие основные опытные факты. Во-первых, мы видели в § 110, что у некоторых ферромагнетиков можно изменять намагниченность от начального нулевого значения до огромного значения насыщения под действием ничтожного намагничивающего поля. Это обстоятельство характерно для ферромагнетиков и резко отличает их от парамагнетиков. Укажем для сравнения, что нормальная парамагнитная соль, например  $\text{FeSO}_4$ , при комнатной температуре под действием поля в 10 А/м увеличивает свою намагниченность в сотни миллионов раз меньше, чем некоторые магнитно-мягкие ферромагнитные сплавы.

Вторая особенность касается магнитного момента атомов ферромагнитных веществ. Прямые опыты показывают (опыты Штерна и Герлаха), что магнитные моменты атомов ферромагнитных веществ имеют тот же порядок величины, что и атомы парамагнетиков, и измеряются немногими магнетонами Бора  $\mu_B$ . Отсюда следует, что ферромагнетизм нельзя объяснить при помощи теории, подобной теории парамагнетизма, и что ферромагнитные свойства не обусловлены наличием магнитного момента атома в целом

Третий важный опытный факт связан с величиной гиромагнитного отношения  $G$ . В ферромагнетиках  $G$  оказывается приблизительно в два раза большей, чем ожидаемое теоретически значение для электронных орбит, и соответствует отношению собственных магнитного и механического моментов электрона. Это обстоятельство указывает, что намагничивание ферромагнетиков обуславливается очень сильной ориентировкой собственных магнитных моментов электронов (электронных спинов), но не магнитных моментов атомов в целом.

Согласно современным представлениям, надежно обоснованным на опыте, сущность ферромагнетизма заключается в том, что сильная ориентировка элементарных магнитных моментов

возникает в ферромагнетиках независимо от внешнего магнитного поля, так что ферромагнетик намагничен до насыщения, отвечающего данной температуре, уже без всякого поля (рис. 189 а). Наличие такого самопроизвольного, или спонтанного, намагничивания является наиболее характерным свойством ферромагнетиков.

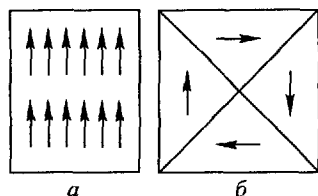


Рис. 189. Схематические изображения расположения электронных спинов при самопроизвольном намагничивании (низкая температура) (а) и направления намагниченности в отдельных доменах (б)

Указанные представления были высказаны в работах Б.Л. Розинга еще в 1892 г. Однако они не получили в то время должного развития и были выдвинуты вновь в 1907 г. Вейссом. Так как опыт показывает, что ферромагнетики в отсутствие внешнего поля могут быть и не намагничены, то для объяснения этого кажущегося противоречия Вейсс выдвинул вторую основную гипотезу, согласно которой ферромагнетик разбивается на большое число малых (но макроскопических) областей, или доменов. Каждая из этих областей при температурах ниже температуры Кюри намагничена весьма сильно, но направления намагничивания в отдельных доменах различны, а именно таковы, что полный магнитный момент ферромагнетика равен нулю (рис. 189 б).

Вопрос о физической причине самопроизвольного намагничивания был принципиально разрешен в 1928 г. Я.И. Френкелем и затем Гейзенбергом, которые показали, что сильная ориентировка электронных спинов вызывается силами обменного взаимодействия. Наличие этого нового класса сил, необъяснимого в классической физике, было выяснено лишь с развитием квантовой физики атома.

Существование доменов в ферромагнетиках в настоящее время доказано различными опытами. Наиболее прямой метод заключается в получении так называемых порошковых фигур. Если на хорошо отполированную поверхность ферромагнетика поместить слой жидкости, в которой взвешены мельчайшие крупинки ферромагнитного порошка (например,  $\text{Fe}_2\text{O}_3$ ), то эти крупинки будут оседать преимущественно на те места, вблизи которых магнитное поле неоднородно. Но как раз вблизи границ доменов и возникают неоднородности поля, и поэтому осевший порошок обрисовывает границы областей самопроизвольного намагничивания. На рис. 190 приведены фотографии порошковых фигур, видимых в микроскоп при небольшом увеличении. Особенно следует отметить, что домены действительно наблюдаются

и в отсутствие внешнего магнитного поля. Порошковые фигуры были использованы в многочисленных исследованиях ферромаг-

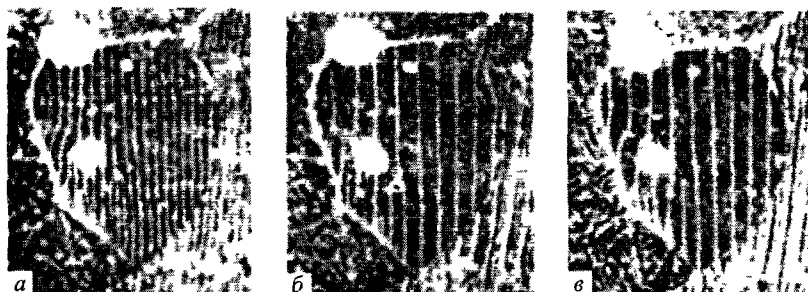


Рис. 190. Домены в деформированной кремнистой стали (увеличение 80): а — без поля; б — магнитное поле перпендикулярно к плоскости чертежа; в — магнитное поле той же напряженности, но противоположного направления

нетиков и позволили определить размеры, форму и расположение доменов, а также изменения доменов во внешнем магнитном поле.

Рассмотрим теперь подробнее, почему в ферромагнетиках обычно возникают многочисленные домены. Будем считать для простоты, что ферромагнетик весьма анизотропен и что его ось легкого намагничивания перпендикулярна к поверхности образ-

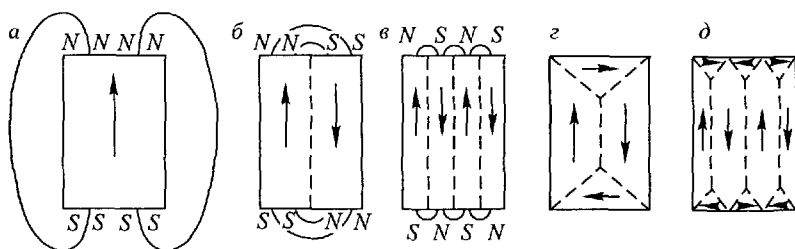


Рис. 191. К объяснению возникновения доменов

ца. На рис. 191 а изображен ферромагнетик, состоящий из одного домена. В этом случае во внешнем пространстве возникает магнитное поле, которое включает в себе определенную энергию. На рис. 191 б имеются два домена с противоположным направлением намагниченности. Внешнее магнитное поле здесь убывает с увеличением расстояния быстрее, чем в случае а, и энергия, заключенная в поле, оказывается меньше. В случае, показанном на рис. 191 в, магнитное поле практически существует только в непосредственной близости от поверхно-

сти магнетика и энергия поля еще уменьшается. На рис. 191 *г* изображен случай, когда во внешнем пространстве магнитного поля вовсе нет. Здесь имеются «замыкающие» домены в форме трехгранных призм, боковые поверхности которых везде составляют угол  $45^\circ$  с вектором намагниченности. Вследствие этого магнитный поток проходит исключительно внутри ферромагнетика, он замыкается граничными доменами, чем и обусловлено их название — *замыкающие* домены. Состояние *г* энергетически более выгодно, нежели предыдущие состояния, и поэтому ферромагнетик, находящийся, например, в состоянии *а*, будет стремиться перейти в состояние *г*. Наконец, на рис. 191 *д* показана целая совокупность доменов совместно с замыкающими их доменами, у которой также нет внешнего поля. Подобная форма доменов действительно наблюдается на опыте. Таким образом, разбиение ферромагнетика на домены происходит потому, что при образовании доменных структур энергия ферромагнетика уменьшается (Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц).

Выше мы рассматривали ферромагнетик в отсутствие внешнего магнитного поля и учитывали только его собственную магнитную энергию. Если бы имелись еще и другие источники энергии, например, механические напряжения или внешнее магнитное поле, то форма доменов определялась бы полной энергией системы. Поэтому при наличии механических напряжений и внешнего поля доменная структура изменяется.

При возникновении самопроизвольного намагничивания (ориентировки электронных спинов) магнетик деформируется. Если при температуре более высокой, чем температура Кюри, вырезать из монокристалла ферромагнетика шар, то при охлаждении ниже температуры Кюри шар превратится в эллипсоид. Форма и размеры доменов изменяются и при перемагничивании. Поэтому ферромагнетик, в целом не намагниченный, при намагничивании деформируется.

Явление деформации при намагничивании было открыто в середине прошлого столетия Джоулем и получило название *магнитострикции*. Возникающие при этом деформации весьма малы: относительные удлинения образца  $\Delta l/l$  в полях порядка  $10^5$  А/м обычно имеют порядок  $10^{-5} - 10^{-6}$ . Магнитострикцию используют, подобно обратному пьезоэлектрическому эффекту (§ 52), для устройства мощных излучателей ультразвуковых волн и для других целей.

Силы обменного взаимодействия вызывают в ферромагнетиках параллельную ориентировку электронных спинов. Однако обменные силы зависят от структуры тела, и поэтому характер вызываемой им ориентировки спинов может быть различен. Оказывается, что существуют вещества, в которых также возникает сильная ориентировка электронных спинов, но, в отли-



чие от ферромагнетиков, электронные спины ориентированы в них попарно антипараллельно. В простейшем случае электронные спины образуют как бы две пространственные подрешетки, вставленные друг в друга и намагниченные в противоположных направлениях (рис. 192).

Вещества, в которых намагниченность обеих подрешеток одинакова по модулю, получили название *антиферромагнетиков*. Их существование было предсказано теоретически Л. Д. Ландау в 1933 г. Антиферромагнетиками являются некоторые соединения марганца ( $MnO$ ,  $MnS$ ), хрома ( $NiCr$ ,  $Cr_2O_3$ ), ванадия ( $VO_2$ ) и др. Подобные вещества при низких температурах имеют ничтожно малую магнитную

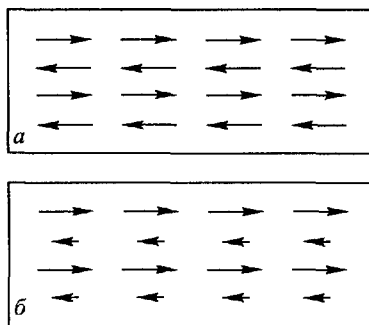


Рис 192 Характер намагничивания в антиферромагнетиках (а) и ферритах (б) (схематически)

восприимчивость. При повышении температуры строгая попарная антипараллельность электронных спинов нарушается и магнитная восприимчивость увеличивается. При некоторой температуре (антиферромагнитная температура Кюри или температура Нееля) области самопроизвольной ориентировки электронных спинов разрушаются и антиферромагнетик превращается в парамагнетик. При дальнейшем повышении температуры магнитная восприимчивость, как у всякого парамагнетика, уменьшается, а следовательно, при антиферромагнитной температуре Кюри магнитная восприимчивость имеет максимум.

Если намагниченность обеих подрешеток неодинакова по модулю, то появляется некомпенсированный антиферромагнетизм и вещество может приобрести значительный магнитный момент. Такой характер намагничивания имеет место в ферритах (ср. § 112).

**Процессы намагничивания ферромагнетика.** Одной из основных задач теории ферромагнетизма является объяснение технической кривой намагничивания, т.е. зависимости намагниченности  $I$  от напряженности намагничивающего поля. В результате многочисленных исследований была установлена следующая общая картина процесса намагничивания ферромагнетиков

В отсутствие внешнего поля ферромагнетик разбивается на домены таким образом, что его результирующий магнитный момент близок к нулю. Это схематически показано на рис. 193 а, где изображены четыре домена одинакового объема, намагни-

ченные до насыщения и обладающие магнитным моментом  $I_s/4$ , равным четверти полного момента всего магнетика в состоянии

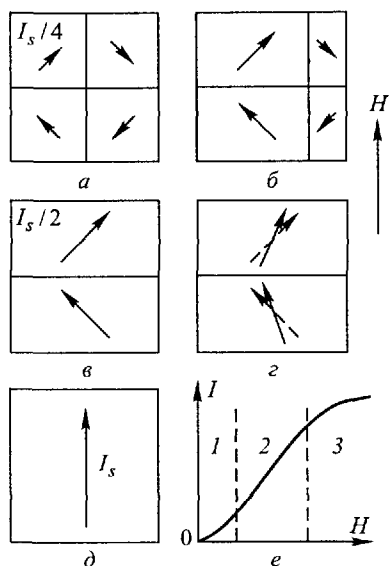


Рис. 193 Различные типы процессов намагничивания ферромагнетика (схематически), *a*–*в* — смещение границ, *г* — намагничивание вращения, *д* — намагничивание насыщения

насыщения. При включении внешнего поля энергии отдельных доменов делаются неодинаковыми: энергия меньше для тех доменов, в которых вектор намагниченности образует с направлением поля острый угол, и больше в том случае, если этот угол тупой. Поэтому возникает процесс смещения границ доменов, при котором объем доменов с меньшей энергией возрастает, а с большей энергией уменьшается (рис. 193 б). Этот процесс можно рассматривать как фазовое превращение, а домены с различным направлением намагниченности — как разные фазы ферромагнетика.

В случае очень слабых полей эти смещения границ обратимы и точно следуют за изменением поля. Начальная восприимчивость ферро-

магнетиков и область 1 кривой намагничивания (рис. 193 е) обусловлены процессами обратимого смещения границ

При увеличении поля смещения границ доменов делаются необратимыми. При достаточной величине намагничивающего поля энергетически невыгодные домены исчезают вовсе (рис. 193 в). Этому соответствует область 2 кривой намагничивания (рис. 193 е).

Если поле увеличивается еще больше, то возникает новый тип процесса намагничивания, при котором изменяется направление магнитного момента внутри домена (намагничивание вращения, рис. 193 г; этому соответствует область 3 на рис. 193 е).

Наконец, в очень сильном поле магнитные моменты всех доменов устанавливаются параллельно полю. В этом состоянии ферромагнетик имеет наибольший, возможный при данной температуре магнитный момент, т.е. намагничен до насыщения (рис. 193 д).

Указанные процессы намагничивания (за исключением смещения границ в слабых полях) происходят с некоторой задержкой, т.е. смещение границ и поворот вектора намагниченности отстают от изменения поля, что приводит к появлению гистерезиса.

Гистерезис может возникнуть и по другой причине. Мы говорили выше, что при наличии поля вследствие смещения границ доменов происходит увеличение объема той магнитной фазы (тех доменов), которая обладает меньшей энергией. Однако может оказаться, что данная фаза при данном состоянии ферромагнетика или данном направлении поля не существует, и поэтому должны возникнуть и вырасти малые области этой фазы или зародыши перемагничивания. Такие зародыши возникают не точно при том значении поля, при котором существование этой фазы делается энергетически выгодным, а происходит задержка роста зародышей перемагничивания, которая также приводит к появлению гистерезиса. Это явление подобно пересыщению пара и переохлаждению жидкости, т.е. существованию неустойчивых фаз вследствие задержки роста зародышей устойчивой фазы. Если ферромагнетик имеет мелкокристаллическую структуру, так что отдельные его кристаллики состоят всего из одного домена, то возможно получение особенно большой коэрцитивной силы.

## Г Л А В А XII

### ТЕХНИЧЕСКОЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАГНИТНОГО ПОТОКА. ГЕНЕРАТОРЫ И ДВИГАТЕЛИ

#### § 120. Магнитные цепи

Магнитные потоки широко используют в современной электротехнике. Действие электромагнитов, мощных генераторов электрического тока, электродвигателей, трансформаторов и многих измерительных приборов основано на существовании в них магнитного потока.

Для усиления магнитного потока почти всегда применяют ферромагнитные материалы. Изготавливая из этих материалов тела различной формы и размеров, оказывается возможным создавать магнитные потоки нужной величины и направлять их в желаемом направлении. Совокупность тел, внутри которых проходят замкнутые линии магнитной индукции, называют *магнитной цепью*.

Общие законы магнитного поля, рассмотренные в главах VIII и XI, позволяют вычислить магнитный поток в любой заданной магнитной цепи. Однако практически удобнее не пользоваться непосредственно этими законами, а сначала вывести из них некоторые общие следствия, или законы магнитной цепи, и затем применять эти более частные законы к решению практических задач.

Рассмотрим сначала простую, или неразветвленную магнитную цепь (рис. 194). Будем считать, что она составлена из двух частей: ярма с сечением  $S$  из материала с магнитной проница-

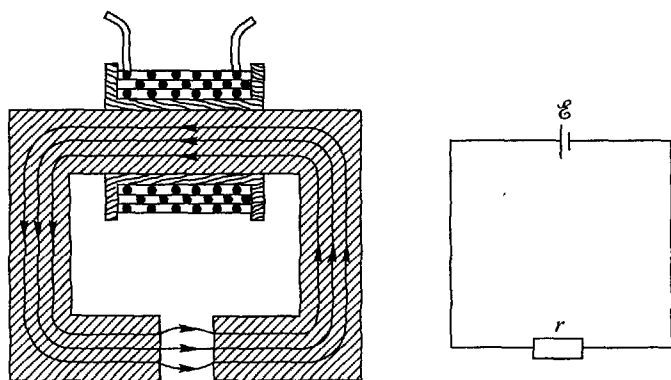


Рис. 194. Неразветвленная магнитная цепь и соответствующая ей электрическая цепь

емостью  $\mu$  и зазора (например, воздушного), имеющего то же сечение и магнитную проницаемость  $\mu_1$ . Выделим далее среднюю линию индукции и применим к ней теорему о магнитном напряжении (§ 81):

$$Hl + H_1l_1 = Ni,$$

где  $H$  — напряженность поля внутри ярма,  $H_1$  — напряженность поля внутри зазора,  $l$  — длина ярма, измеренная вдоль средней линии индукции,  $l_1$  — длина зазора,  $N$  — число витков обмотки, а  $i$  — сила тока в ней.

Так как линии индукции непрерывны, то значения магнитного потока  $\Phi$  внутри ярма и внутри зазора одинаковы. Далее, пользуясь соотношениями  $\Phi = BS$ ,  $B = \mu\mu_0H$ , напряженность поля можно выразить через поток:

$$H = \frac{\Phi}{\mu\mu_0S}, \quad H_1 = \frac{\Phi}{\mu_1\mu_0S}.$$

Подставляя эти выражения в первую формулу, находим из нее

поток  $\Phi$ :

$$\Phi = \frac{Ni}{l/(\mu_0 S) + l_1/(\mu_1 \mu_0 S)}.$$

Полученная формула подобна закону Ома для замкнутой электрической цепи, изображенной на рис. 194. При этом величина

$$\mathcal{E}_m = Ni \quad (120.1)$$

играет роль электродвижущей силы, и поэтому по аналогии она получила название *магнитодвижущей силы*. Единица магнитодвижущей силы в системе СИ есть ампер. Сумма

$$R_m = \frac{l}{\mu_0 S} + \frac{l_1}{\mu_1 \mu_0 S} \quad (120.2)$$

входит в формулу так же, как и полное сопротивление электрической цепи в закон Ома, и поэтому ее называют *полным магнитным сопротивлением цепи*. Величины

$$r_m = l/\mu_0 S, \quad r_{m1} = l_1/\mu_1 \mu_0 S \quad (120.3)$$

дают магнитные сопротивления участков цепи. Магнитное сопротивление зависит от длины магнитопровода  $l$  и его сечения  $S$ , так же как и электрическое сопротивление, но роль удельной электрической проводимости  $\lambda$  играет магнитная проницаемость  $\mu_0$ .

Пользуясь этими понятиями, мы можем представить полученные результаты следующим образом:

$$\Phi = \mathcal{E}_m/R_m. \quad (120.4)$$

Иными словами, в неразветвленной магнитной цепи магнитный поток равен частному от деления магнитодвижущей силы на полное магнитное сопротивление.

Из формулы (120.4) видно, что магнитное сопротивление в системе единиц СИ измеряется в амперах на вебер (А/Вб).

Сравнивая (120.2) и (120.3), мы также видим, что полное сопротивление нашей цепи равно сумме сопротивлений ее частей:

$$R_m = r_m + r_{m1}.$$

Этот результат, очевидно, справедлив и в том случае, если цепь составлена из какого угодно числа частей, если только магнитный поток проходит целиком последовательно через эти части: при последовательном соединении магнитопроводов их магнитные сопротивления складываются.

На рис. 195 изображена схема опыта, показывающего влияние магнитного сопротивления. П-образный железный сердечник намагничивается обмоткой 1, включенной последовательно с амперметром А и реостатом в цепь переменного тока. В обмотке 2 наводится ЭДС индукции, и показания вольтметра V пропорциональны магнитному потоку в сердечнике. Если,

сохраняя неизменной силу тока в обмотке  $I$ , замкнуть сердечник железной пластиной, то магнитное сопротивление цепи уменьшается и показание вольтметра увеличивается.

Следует отметить, что введенные термины и понятия имеют лишь формальный характер. В магнитном потоке не движутся никакие частицы, и поэтому нет основания говорить ни о «магнитодвижущей силе», ни о «магнитном сопротивлении».

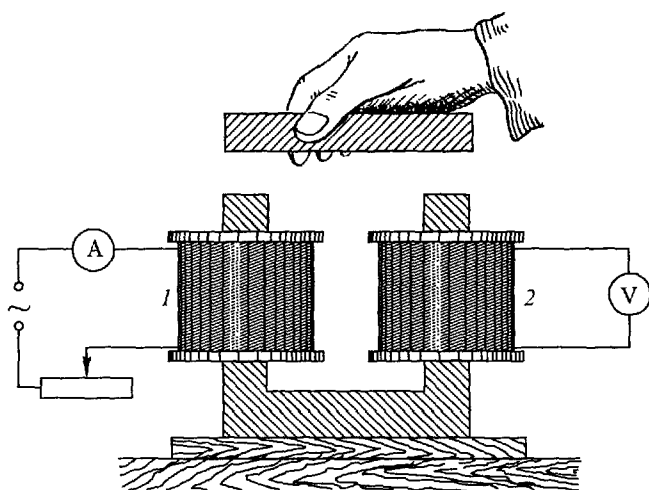


Рис. 195. При замыкании железного сердечника его магнитное сопротивление уменьшается и магнитный поток внутри него становится больше

Как разъяснялось в гл. XI, физический смысл описанного опыта и ему подобных заключается в том, что, вводя в магнитную цепь намагничивающиеся тела, мы вводим в действие молекулярные токи магнетиков, которые и создают добавочные магнитные потоки. Однако указанное выше формальное описание удобно для решения практических задач и поэтому применяется в электротехнике.

## § 121. Электромагниты

Пример неразветвленной магнитной цепи мы имеем в простом электромагните (рис. 196).

Подъемная сила электромагнита (или максимальная масса, удерживаемая электромагнитом) приближенно выражается формулой

$$F = \frac{1}{2\mu_0} B^2 S. \quad (121.1)$$

Здесь  $B$  — индукция внутри сердечника,  $S$  — площадь соприкосновения сердечника и якоря. Если в формуле (121.1)  $B$  выражено в Тл, а  $S$  — в  $\text{м}^2$ , то  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м и сила  $F$  получится выраженной в ньютонах.

Формулу (121.1) можно получить следующим образом. Предположим, что между якорем и сердечником имеется малый зазор  $x$  (рис. 196) и якорь удаляется от сердечника на отрезок  $dx$ . Поток через намагничивающую обмотку изменяется при этом на некоторую величину  $d\Psi$  и в цепи возникает дополнительный ток

$$\delta i = -\frac{1}{r} \frac{d\Psi}{dt}.$$

Здесь  $r$  обозначает полное сопротивление цепи, включая и сопротивление источника тока. Далее, мы будем считать, что якорь движется бесконечно медленно, так что  $\delta i$  есть бесконечно малая величина.

Согласно закону сохранения энергии (§ 100) при таком перемещении изменение работы источника тока =

$$= \text{изменение количества теплоты Джоуля-Ленца} + \\ + \text{механическая работа} + \text{изменение энергии магнитного поля.}$$

Изменение работы источника тока:

$$\mathcal{E}(i + \delta i) dt - \mathcal{E}i dt = -\frac{\mathcal{E}}{r} \frac{d\Psi}{dt} dt = -i d\Psi.$$

Изменение количества теплоты:

$$r(i + \delta i)^2 dt - ri^2 dt = 2ri \delta i dt = -2ri \frac{1}{r} \frac{d\Psi}{dt} dt = -2i d\Psi.$$

Изменение энергии поля есть разность энергий в конце и в начале перемещения:

$$dW = \left( \frac{1}{2} Li^2 \right)_{x+dx} - \left( \frac{1}{2} Li^2 \right)_x = \frac{1}{2} i^2 dL,$$

где  $dL$  — увеличение индуктивности электромагнита при увеличении зазора на  $dx$ . Но  $\Psi = Li$ , и поэтому

$$dW = \frac{1}{2} i d\Psi.$$

Наконец, механическая работа  $\delta A = F dx$ . Поэтому

$$-i d\Psi = -2i d\Psi + F dx + \frac{1}{2} i d\Psi, \quad \text{или} \quad F = \frac{1}{2} i \frac{d\Psi}{dx}.$$

В этих формулах  $\Psi$  есть поток, пронизывающий обмотку. Если  $\Phi$  — поток в сердечнике, а обмотка имеет  $N$  витков, то  $\Psi = N\Phi$ .

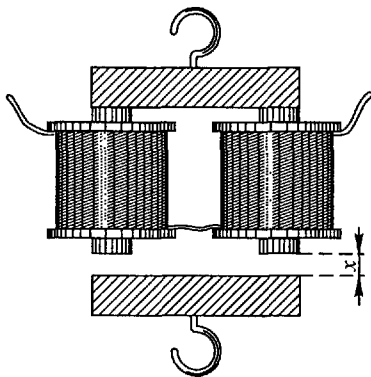


Рис. 196. Электромагнит

Но, согласно § 120, поток в сердечнике можно выразить следующим образом ( $\mu_1 = 1$ ,  $l_1 = 2x$ ):

$$\Phi = \frac{Ni}{l/(\mu\mu_0 S) + 2x/(\mu_0 S)} = \mu\mu_0 S \frac{Ni}{l + 2\mu x},$$

где  $l$  — длина линии индукции в сердечнике и в якоре, а  $S$  — сечение сердечника. Поэтому

$$\frac{d\Psi}{dx} = N \frac{d\Phi}{dx} = - \frac{2\mu_0 \mu^2 S N^2 i}{(l + 2\mu x)^2}.$$

Подставляя это выражение в формулу для подъемной силы, имеем

$$F = \frac{1}{2} i \frac{d\Psi}{dx} = - \frac{S}{\mu_0} \left( \frac{\mu\mu_0 Ni}{l + 2\mu x} \right)^2.$$

Знак минус показывает, что сила, действующая на якорь, стремится уменьшить зазор  $x$ . Выражение, стоящее в скобках, есть индукция  $B$  в сердечнике электромагнита, а  $2S$  — площадь соприкосновения сердечника и якоря. Обозначая эту площадь через  $S$ , получим формулу (121.1).

Формула (121.1) показывает, что подъемная сила электромагнита пропорциональна квадрату индукции. Поэтому для получения большой подъемной силы нужно применять материалы с высокой магнитной проницаемостью и обеспечить хорошее замыкание сердечника и якоря.

## § 122. Разветвление магнитного потока

Наряду с простой магнитной цепью на практике приходится встречаться с более сложными цепями, в которых происходит разветвление магнитного потока. Пример такой магнитной цепи показан на рис. 197. Пользуясь теоремой о магнитном на-

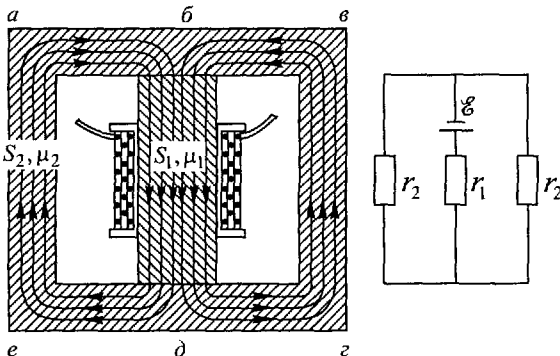


Рис 197. Магнитная цепь с разветвлением магнитного потока

пряжении, можно и в этом случае дать простые правила для вычисления магнитного потока.



Рассмотрим замкнутый контур  $abdea$  (рис. 197), входящий в состав нашей цепи, и обозначим длину участка  $bd$  через  $l_1$ , его сечение — через  $S_1$  и напряженность поля в нем — через  $H_1$ , а соответствующие величины для участка  $dea$  — через  $l_2$ ,  $S_2$  и  $H_2$ . Так же, как и раньше,  $H_1$  и  $H_2$  можно выразить через потоки  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  в рассматриваемых участках:

$$H_1 = \frac{\Phi_1}{\mu_1 \mu_0 S_1}, \quad H_2 = \frac{\Phi_2}{\mu_2 \mu_0 S_2},$$

где  $\mu_1$  и  $\mu_2$  — магнитные проницаемости материала на участках  $bd$  и  $dea$ . Поэтому

$$\Phi_1 \frac{l_1}{\mu_1 \mu_0 S_1} + \Phi_2 \frac{l_2}{\mu_2 \mu_0 S_2} = N_1 i_1.$$

Но

$$\frac{l_1}{\mu_1 \mu_0 S_1} = r_{m1}, \quad \frac{l_2}{\mu_2 \mu_0 S_2} = r_{m2}$$

— магнитные сопротивления участков цепи  $bd$  и  $dea$ , а

$$N_1 i_1 = \mathcal{E}_{m1}$$

— магнитодвижущая сила этой цепи, и предыдущая формула принимает простой вид

$$\Phi_1 r_{m1} + \Phi_2 r_{m2} = \mathcal{E}_{m1}.$$

В выделенный замкнутый контур могут входить не два участка с различными потоками, а какое угодно их число, и в каждом из этих участков может быть своя намагничивающая обмотка. Поэтому в общем случае

$$\sum \Phi_k r_{mk} = \sum \mathcal{E}_{mk}. \quad (122.1)$$

Эта формула имеет тот же вид, что и второе правило Кирхгофа для разветвляющихся токов (§ 70), причем вместо силы тока  $i$  входит магнитный поток  $\Phi$ , а роль электрического сопротивления  $r$  и ЭДС  $\mathcal{E}$  играют магнитное сопротивление  $r_m$  и магнитодвижущая сила  $\mathcal{E}_m$ .

При пользовании формулой (122.1) нужно, очевидно, учитывать правило знаков для  $\mathcal{E}_m$  и  $\Phi$ . Магнитодвижущая сила считается положительной, если соответствующая обмотка создает поток, направление которого совпадает с выбранным направлением обхода контура. Положительное значение потока  $\Phi$  означает, что направление потока совпадает с выбранным направлением обхода.

Рассмотрим теперь какой-либо узел разветвления магнитной цепи (рис. 198), в котором сходятся три или более магнитопровода. Так как линии индукции непрерывны, то общее число этих линий, идущих к узлу разветвления, равно числу линий, уходящих от узла разветвления. Или: сумма всех потоков, направленных

ных к месту разветвления, равняется сумме всех потоков, уходящих от него. Приписывая этим потокам разные знаки, имеем для каждого узла разветвления:

$$\sum \Phi_k = 0. \quad (122.2)$$

Эта формула имеет тот же вид, что и первое правило Кирхгофа (§ 70).

Таким образом, задача вычисления потоков в любой магнитной цепи оказывается аналогичной задаче вычисления токов в электрической цепи, причем каждой магнитной цепи можно сопоставить соответствующую ей электрическую цепь (рис. 197).

Применяя эту аналогию, можно в ряде случаев не решать задачу вовсе, а воспользоваться уже известным решением электрической задачи. Так, например, мы знаем, что при параллельном соединении проводников токи в них обратно пропорциональны сопротивлениям. Поэтому можно утверждать, что и при параллельном соединении магнитопроводов магнитные потоки в них будут обратно пропорциональны магнитным сопротивлениям.

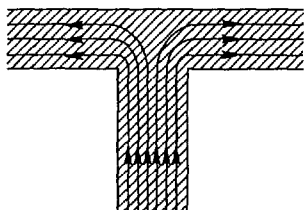


Рис 198 Разветвление магнитного потока

При пользовании аналогией между магнитными и электрическими цепями следует иметь в виду, что здесь имеется и существенное различие. Удельная электрическая проводимость металлов практически не зависит от плотности тока, и поэтому сопротивления участков электрической цепи можно считать постоянными. Магнитная же проницаемость  $\mu$  зависит от напряженности магнитного поля, а следовательно, и магнитные сопротивления в формуле (122.1) являются переменными величинами, зависящими от значения потока  $\Phi$ .

### § 123. Генераторы переменного тока

Наиболее важно применение магнитного потока в электрических машинах, предназначенных для превращения механической энергии в электрическую (генераторы) или электрической энергии в механическую (электродвигатели).

В настоящее время имеется много типов генераторов и двигателей. Их конструкция доведена до высокой степени совершенства, что потребовало разрешения ряда важных вспомогательных технических задач. Мы, однако, не будем вовсе касаться деталей конструкции электрических машин (это относится к

специальному курсу электротехники) и ограничимся только принципами их устройства.

Все современные мощные генераторы электрического тока основаны на явлении электромагнитной индукции при движении проводников в магнитном поле. Остановимся сначала на генераторах переменного тока.

Рисунок 199 разъясняет принцип получения технического переменного тока. Электродвижущая сила возникает вследствие вращения проволоочной обмотки. Концы обмотки подведены к двум изолированным медным кольцам (контактные кольца), укрепленным на оси машины, и при помощи прижимных проводников из меди или графита (щетки) могут быть включены в замкнутую цепь тока без нарушения вращения обмотки.

Если  $\alpha$  — угол, составленный нормалью  $\mathbf{n}$  к плоскости витка и индукцией поля  $\mathbf{B}$ , то поток сквозь виток равен

$$\Phi = BS \cos \alpha = \Phi_0 \cos \alpha,$$

где  $S$  — площадь витка, а  $\Phi_0$  — максимальное значение потока при  $\alpha = 0$ . При равномерном вращении витка с угловой скоростью  $\omega$  угол  $\alpha = \omega t + \alpha_0$ , и поэтому ЭДС одного витка

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = \Phi_0 \omega \sin(\omega t + \alpha_0) = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t + \alpha_0). \quad (123.1)$$

Если имеется не один, а  $N$  витков проволоки, то амплитуда ЭДС  $\mathcal{E}_0$  будет в  $N$  раз больше. Если  $\Phi_0$  выражено в Вб, а  $\omega$  — в рад/с, то  $\mathcal{E}_0$  выражено в вольтах.

Из (123.1) видно, что для повышения ЭДС необходимо увеличивать магнитный поток  $\Phi_0$ , а для этого сопротивление магнитной цепи машины выгодно сделать возможно меньшим. Поэтому магнитную систему генераторов делают из двух железных сердечников: наружного кольцеобразного неподвижного сердечника и внутреннего вращающегося цилиндрического сердечника, а воздушный зазор между ними доводят до минимальных размеров. Машина имеет, как правило, две обмотки, одна из которых размещается в пазах неподвижного сердечника (статора) с внутренней его стороны, а другая расположена в пазах вращающегося сердечника (ротора). Одна обмотка используется для создания магнитного потока, а другая служит рабочей обмоткой, в которой индуцируется переменная ЭДС.

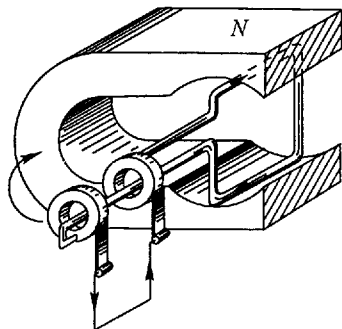


Рис. 199 Принцип получения переменного тока

## § 124. Генераторы постоянного тока

В генераторах постоянного или прямого тока переменная ЭДС, возникающая во вращающейся обмотке, выпрямляется при помощи коллектора, который представляет собой вращающийся переключатель.

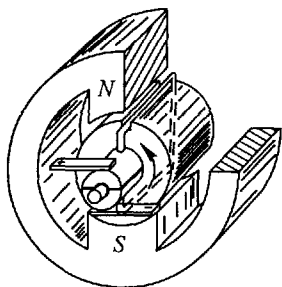


Рис. 200. Простейший генератор прямого тока

Простейший генератор прямого тока изображен на рис. 200. Он имеет обмотку из одного витка, а его коллектор состоит из двух медных изолированных полуцилиндров, насаженных на ось машины, к которым присоединены концы обмотки. К пластинам коллектора прижимаются две щетки, осуществляющие включение обмотки в цепь тока. Рисунком 201 поясняет действие коллектора. Кривая *a* представляет напряжение между концами обмотки, которое изменяется в соответствии с (123.1) по закону синуса. Через каждую половину оборота коллектор переключает (коммутирует) концы обмотки, и поэтому на щетках получается напряжение, изображаемое кривой *б*. Такой простейший генератор, следовательно, дает пульсирующий ток, направление которого хотя и остается постоянным, но сила изменяется.

Так как коллектор вращается, то и рабочую обмотку, соединенную с ним, делают всегда вращающейся. Ее располагают на внутреннем железном сердечнике, насаженном на ось машины. Для получения постоянного тока без пульсаций обмотку разделяют на много секций и применяют коллекторы из многих пластин.

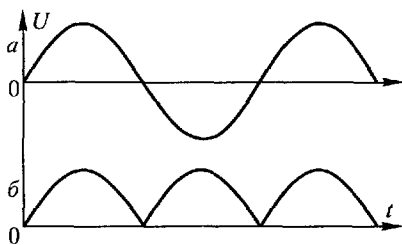


Рис. 201. Действие коллектора

Для получения магнитного потока в современных мощных генераторах применяют исключительно электромагниты. Для питания обмотки электромагнита в некоторых специальных случаях пользуются вспомогательным источником (генератором с внешним возбуждением). Однако гораздо чаще строят генераторы с самовозбуждением, в которых для создания тока в электромагните (обмотке возбуждения) используют напряжение, развиваемое самим генератором.

Свойства генераторов постоянного тока существенно зависят от способа соединения обмотки возбуждения с якорем. По этому принципу разделяют

генераторы на следующие типы: с параллельным возбуждением (шунтовые генераторы), с последовательным возбуждением (серийные генераторы) и со смешанным возбуждением (компаундные генераторы).

В шунтовых генераторах обмотка возбуждения присоединяется параллельно якору. Ток, ответвляемый в электромагнит, составляет обычно от 1% (большие генераторы) до 5% (малые генераторы) тока якоря. Поэтому сопротивление обмотки возбуждения  $r_v$  значительно больше сопротивления якоря  $r_a$ .

Рассмотрим, как зависит напряжение на зажимах шунтового генератора от тока нагрузки. Напряжение на зажимах равно

$$U = \mathcal{E} - r_a(i_v + i),$$

где  $\mathcal{E}$  — ЭДС якоря,  $i_v$  — ток возбуждения,  $i$  — ток нагрузки. При разомкнутой машине (холостой ход)  $i = 0$  и  $U$  имеет максимальное значение.

При увеличении тока  $i$  напряжение  $U$  уменьшается и притом по двум причинам. Во-первых, потому, что увеличивается падение напряжения внутри якоря, равное  $r_a(i_v + i)$ . Во-вторых, это уменьшение  $U$  ведет к ослаблению тока возбуждения, что в свою очередь вызывает понижение ЭДС  $\mathcal{E}$  и еще больше уменьшает напряжение машины. Поэтому зависимость  $U = f(i)$  изображается кривой, показанной на рис. 202. В серийных генераторах обмотка возбуждения соединяется с якорем последовательно. В этом случае полный ток машины проходит через обмотку возбуждения, и поэтому, чтобы потеря напряжения в ней была малой, должно быть  $r_v \ll r_a$ .

Напряжение на зажимах серийного генератора, как и всякого источника тока, равно разности между ЭДС якоря  $\mathcal{E}$  и падением напряжения внутри машины:

$$U = \mathcal{E} - i(r_a + r_v).$$

При холостом ходе ( $i = 0$ ) внутреннее падение напряжения равно нулю. Но в этом случае нет тока и в обмотке возбуждения, и поэтому напряжение  $U$  близко к нулю. При увеличении тока нагрузки  $i$  магнитный поток увеличивается, отчего и ЭДС  $\mathcal{E}$ , и напряжение  $U$  возрастают. Однако это возрастание происходит лишь до известного предела, пока в сердечнике электромагнита не наступает насыщение. При дальнейшем увеличении  $i$  ЭДС практически не увеличивается, в то время как внутреннее падение напряжения  $i(r_a + r_v)$  продолжает нарастать, и поэтому напряжение  $U$  начинает уменьшаться. Характеристика серийного генератора показана на рис. 203.

Таким образом, шунтовые генераторы имеют падающую характеристику, а серийные — возрастающую. Эти особенности сочетают в компаунд-

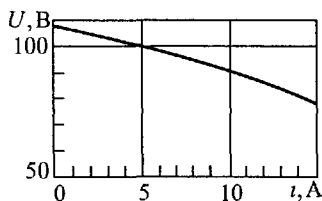


Рис. 202. Характеристика машины с параллельным возбуждением

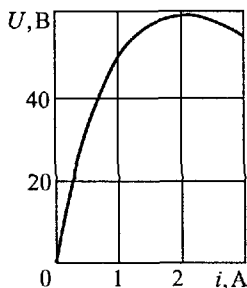


Рис. 203. Характеристика машины с последовательным возбуждением

ных генераторах, электромагниты которых имеют две обмотки — одна из них присоединяется параллельно якору, а другая — последовательно. Подбирая должным образом обмотки, можно добиться, чтобы в известном интервале изменения токов нагрузки напряжение оставалось приблизительно постоянным.

## § 125. Электродвигатель постоянного тока

Если в машине постоянного тока, рассмотренной в предыдущем параграфе, создать ток от внешнего источника, то ее якорь приходит во вращение. Поэтому коллекторные машины могут служить как генераторами, так и двигателями, т.е. они обратимы.

Для лучшего уяснения превращения энергии в генераторах и двигателях, рассмотрим силы, действующие на якорь. На рис. 204 схематически изображена машина постоянного тока, работающая в качестве генератора (а) и в качестве двигателя (б). В случае генератора направление

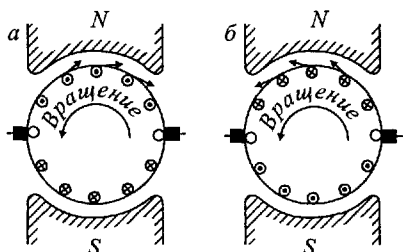


Рис 204. Электродинамические силы, действующие на якорь генератора (а) и двигателя (б) постоянного тока

тока индукции в якоре определяется законом Ленца (§ 91): у северного полюса ток направлен от чертежа к читателю, а у южного полюса — от читателя за чертеж. На проволоки якоря действуют электродинамические силы, которые пропорциональны току якоря. Они стремятся вызвать вращение якоря по часовой стрелке, т.е. в сторону, противоположную вращению генератора. Для поддержания вращения якоря необходимо действие внешних сил, равных по модулю и противоположных по направлению, которые создаются двигателем, вращающим генератор. Поэтому двигатель непрерывно производит механическую работу против электродинамических сил, которая тем больше, чем сильнее ток, отбираемый от генератора, и мы имеем, следовательно, превращение механической работы двигателя в электрическую энергию.

При работе машины в качестве электродвигателя внешнего двигателя нет и на обмотку якоря действуют только электродинамические силы, под действием которых якорь приходит во вращение. В этом случае работу совершают электродинамические силы, и мы имеем превращение электрической энергии источника, питающего двигатель, в механическую работу. Из рис. 204 видно, что при одинаковом направлении вращения ге-

нератора и электродвигателя направления токов в якоре противоположны.

При вращении якоря двигателя его обмотка пересекает линии индукции магнитного поля, и поэтому в ней возникает ЭДС индукции  $\mathcal{E}$ . Эта ЭДС, как разъяснялось выше, стремится создать ток, противоположный току якоря, и поэтому она получила название *противоэлектродвижущей* силы. Сила тока в якоре зависит как от напряжения  $U$  на якоре, так и от противоэлектродвижущей силы (закон Ома для участка цепи с ЭДС):

$$i_{\text{я}} = \frac{U - \mathcal{E}}{r_{\text{я}}},$$

где  $r_{\text{я}}$  — сопротивление якоря.

Противоэлектродвижущая сила уменьшает ток якоря. При работе двигателя без нагрузки (холостой ход) скорость вращения якоря велика и противоэлектродвижущая сила лишь немного меньше напряжения  $U$ . Поэтому ток холостого хода мал. При увеличении нагрузки скорость якоря уменьшается и противоэлектродвижущая сила падает. В соответствии с этим ток, потребляемый двигателем, увеличивается, и тем больше, чем сильнее нагрузка.

Это обстоятельство приходится учитывать при пуске двигателя. В момент пуска якорь не вращается вовсе и противоэлектродвижущая сила равна нулю. Поэтому в первые моменты после пуска ток якоря может оказаться настолько большим, что вызовет порчу обмотки и пластин коллектора. Для устранения этого явления при пуске мощных двигателей всегда употребляют так называемые пусковые реостаты, которые включают последовательно с двигателем и выводят постепенно, по мере роста числа оборотов двигателя.

## § 126. Синхронные двигатели

Генераторы переменного тока могут быть использованы и в качестве электродвигателей, т. е. они, так же как и машины постоянного тока, обладают обратимостью.

Для разъяснения способа действия таких двигателей обратимся к рис. 205, на котором показана часть машины с внешними полюсами Ее электромагниты  $S$ ,  $N$ ,  $S$ , ... питаются, как в генераторе, от внешнего источника постоянного тока, например от вспомогательного генератора, насаженного на общую ось машины, а ротор присоединяется к сети переменного тока. Пусть один из полюсов ротора находится в положении 1 и ток в обмотке ротора создает на этом полюсе южное намагничивание. Полюс ротора будет отталкиваться от южного полюса  $S$  и притягиваться к северному полюсу  $N$ , и ротор начнет поворачиваться по часовой стрелке. Допустим теперь, что в положении

ротора 2 (рис. 205) сила тока обращается в нуль, а в более позднем положении 3 ток в обмотке ротора изменяет направление. Тогда рассматриваемый полюс ротора в положении 3 перемагнитится и будет уже отталкиваться от северного полюса  $N$  и притягиваться к южному полюсу  $S$ . Поэтому ротор будет продолжать вращаться по часовой стрелке до тех пор, пока в его обмотке существует переменный ток.

Из сказанного ясно, что вращение ротора будет происходить только при строго определенной скорости вращения. Эта скорость должна быть такой, чтобы время, необходимое для прохождения каждым полюсом ротора расстояния между двумя соседними одноименными полюсами статора, точно равнялось

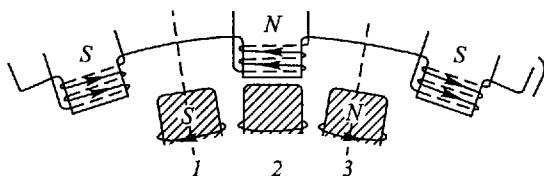


Рис 205 Принцип синхронного двигателя переменного тока

периоду переменного тока. Или, как принято говорить, ротор должен вращаться синхронно с изменением переменного тока. Поэтому и двигатели такого типа получили название синхронных двигателей.

Синхронные двигатели обладают тем неудобством, что они не запускаются сами; для их пуска необходимо раскрутить ротор до синхронной скорости с помощью постороннего двигателя или какого-нибудь иного приема. Точно так же, если вследствие значительной перегрузки скорость ротора уменьшится (двигатель выйдет из синхронизма), то двигатель остановится. Тем не менее синхронные двигатели находят себе применение, в особенности в тех случаях, когда необходимо иметь строго постоянное число оборотов.

Наряду с синхронными двигателями имеются и другие типы электродвигателей переменного тока. Однако широкое внедрение в технику двигателей переменного тока сделалось возможным лишь после того, как М.О. Доливо-Добровольским были разработаны так называемые системы многофазных токов, к рассмотрению которых мы и обратимся.

## § 127. Двухфазный ток

Рассмотрим генератор (рис. 206), подобный обычному генератору переменного тока, но содержащий две независимые обмотки: одну состоящую из катушек 1 и 3, и другую — из катушек



2 и 4, повернутую относительно первой на угол  $\pi/2$ . При вращении ротора в каждой из обмоток будет наводиться переменная ЭДС, но максимум ЭДС  $\mathcal{E}_2$  в обмотке 2-4 будет достигаться позднее, чем максимум ЭДС  $\mathcal{E}_1$  в обмотке 1-3, на время в четверть периода обращения ротора, и ЭДС  $\mathcal{E}_2$  будет обращаться в нуль с таким же опозданием. Иными словами, между колебаниями ЭДС в обеих обмотках будет существовать разность фаз в  $90^\circ$ , или  $\pi/2$ . Если обозначить максимальное значение ЭДС в каждой обмотке через  $\mathcal{E}_0$  (амплитуда ЭДС), а угловую скорость вращения ротора — через  $\omega$ , то закон изменения ЭДС в обеих катушках будет иметь вид

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1 &= \mathcal{E}_0 \sin \omega t, \\ \mathcal{E}_2 &= \mathcal{E}_0 \sin (\omega t - 90^\circ).\end{aligned}\quad (127.1)$$

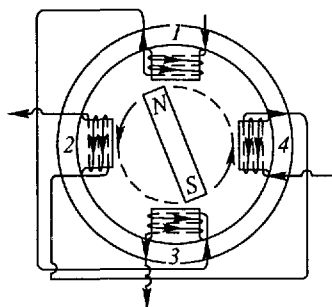


Рис. 206 Получение двухфазного тока

Каждую из двух обмоток генератора, которые мы будем обозначать в дальнейшем через  $O_1$  и  $O_2$ , мы можем соединить с нагрузочными сопротивлениями  $r_1$  и  $r_2$  (рис. 207), и тогда получатся две цепи, в каждой из которых будет переменный ток. Однако оба эти тока будут согласованы, между ними также будет существовать определенная разность фаз. Два таких тока называются *двухфазной системой токов* или просто *двухфазным током*.

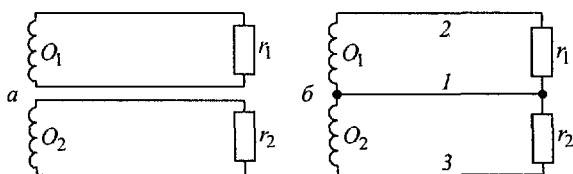


Рис 207. Схема двухфазной системы токов

На рис. 207 а показаны четыре провода, соединяющие генератор с нагрузкой. Однако число проводов можно уменьшить. Так как для электрических явлений важны только разности потенциалов, то один провод каждой цепи можно сделать общим, и тогда мы получим трехпроводную цепь двухфазного тока, показанную на рис. 207 б.

Напряжения между концами обмоток  $O_1$  и  $O_2$  называют *фазными напряжениями*, токи в  $O_1$  и  $O_2$  — *фазными токами*. Этими же названиями обозначают напряжения и токи в нагрузоч-

ных сопротивлениях  $r_1$  и  $r_2$ . Напряжения же между проводами линии 1, 2 и 3 называют *линейными напряжениями*, а токи в этих проводах — *линейными токами*. Если генератор разомкнут ( $r_1 = r_2 = \infty$ ), то фазные напряжения равны ЭДС в каждой обмотке. Если принять потенциал провода 1 за нуль, то потенциал провода 2, или линейное напряжение между проводами 1 и 2, равен

$$U_{12} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t,$$

а линейное напряжение между 1 и 3 равно

$$U_{13} = \mathcal{E}_0 \sin (\omega t - 90^\circ).$$

Линейное же напряжение между проводами 2 и 3 есть разность потенциалов проводов 2 и 3:

$$\begin{aligned} U_{23} &= \mathcal{E}_0 \sin \omega t - \mathcal{E}_0 \sin (\omega t - 90^\circ) = 2\mathcal{E}_0 \sin 45^\circ \cos (\omega t - 45^\circ) = \\ &= \sqrt{2} \mathcal{E}_0 \sin (\omega t + 45^\circ). \end{aligned} \quad (127.2)$$

Таким образом, в трехпроводной системе двухфазного тока мы можем получить три обычных (однофазных) тока одинаковой частоты  $\omega$ , но с разностью фаз  $90$  и  $45^\circ$  и с двумя разными амплитудами ЭДС,  $\mathcal{E}_0$  и  $\mathcal{E}_0\sqrt{2}$ .

Подобным образом мы можем себе представить не два, а три, четыре и вообще  $n$  переменных согласованных токов, получаемых в одном генераторе с  $n$  обмотками, обладающих определенной разностью фаз, или систему многофазных токов. Однако широкое практическое применение получил только трехфазный ток.

## § 128. Трехфазный ток

Схема устройства генератора трехфазного тока показана на рис. 208. Генератор имеет три обмотки, смещенные друг относительно друга на  $1/3$  окружности. При вращении ротора мы получим в каждой из обмоток, обозначаемых в дальнейшем через  $O_1$ ,  $O_2$  и  $O_3$ , переменные ЭДС  $\mathcal{E}_1$ ,  $\mathcal{E}_2$  и  $\mathcal{E}_3$ , между которыми будет разность фаз  $120$  и  $240^\circ$ . Поэтому, если колебания ЭДС в обмотке  $O_1$  выражаются формулой

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_0 \sin \omega t,$$

то для ЭДС в других обмотках мы имеем

$$\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_0 \sin (\omega t - 120^\circ),$$

$$\mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_0 \sin (\omega t - 240^\circ).$$

Изменение во времени ЭДС в трех обмотках графически представлено на рис. 209.

Каждую из обмоток мы можем замкнуть на нагрузочные сопротивления  $r_1$ ,  $r_2$  и  $r_3$  (рис. 210) и получить три однофаз-

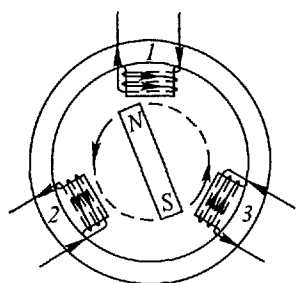


Рис. 208. Получение трехфазного тока

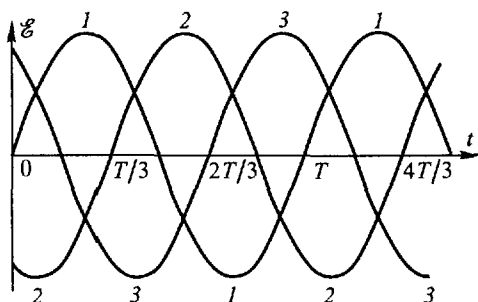


Рис. 209. ЭДС генератора трехфазного тока

ных переменных тока, между которыми будет строго постоянная разность фаз, равная соответственно  $120^\circ$  и  $240^\circ$ . Такие три согласованных переменных тока и называются системой трехфазных токов или, коротко, *трехфазным током*.

Число проводов, соединяющих генератор с нагрузкой, так же как и при двухфазном токе, можно уменьшить, если объединить по одному проводу в каждой цепи. Тогда мы получим соединение генератора, показанное на рис. 211, называемое соединением звездой. Оно подоб-

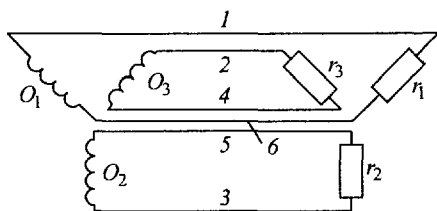


Рис. 210. Трехфазная система токов

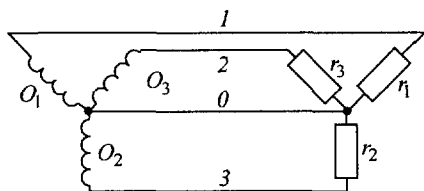


Рис. 211. Соединение звездой

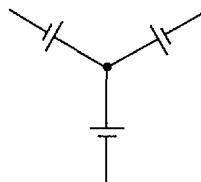


Рис. 212. Соединение трех источников тока звездой

но соединению трех одинаковых источников тока, показанному на рис. 212.

Предположим, что генератор разомкнут ( $r_1 = r_2 = r_3 = \infty$ ), и найдем связь между фазным напряжением (существующим в каждой из обмоток  $O_1, O_2, O_3$ ) и линейными напряжениями (между проводами  $0, 1, 2, 3$ ). Очевидно, что линейное напряжение между проводом  $0$  и любым из других проводов равно фазному напряжению и его амплитуда есть  $\mathcal{E}_0$ . Линейное напряжение между любой парой проводов  $1, 2$  и  $3$  будет другим. Вычислим, например, напряжение между проводами  $1$  и  $3$ . Оно равно разности потенциалов между свободными концами обмоток  $O_1$  и  $O_2$ :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t - \mathcal{E}_0 \sin (\omega t - 120^\circ) = 2\mathcal{E}_0 \sin 60^\circ \cos (\omega t - 60^\circ).$$

Но  $\sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$ ,  $\cos (\omega t - 60^\circ) = \sin (\omega t + 30^\circ)$ , и поэтому

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sqrt{3} \sin (\omega t + 30^\circ).$$

Мы имеем, следовательно, линейное напряжение, изменяющееся с той же частотой  $\omega$ , что и фазное, но с амплитудой в  $\sqrt{3}$  раз больше фазного. Таким образом, при соединении генератора звездой мы можем получить в линии два напряжения, а именно фазное  $\mathcal{E}_0$  и  $\mathcal{E}_0 \sqrt{3}$ .

Допустим теперь, что генератор нагружен на сопротивления, также соединенные звездой (рис. 211), причем  $r_1 = r_2 = r_3$  (симметричная нагрузка). В этом случае в каждом из проводов  $1, 2$  и  $3$  амплитуда токов  $i_0$  будет одинакова и токи в них будут изменяться по закону  $i_1 = i_0 \sin \omega t$ ,  $i_2 = i_0 \sin (\omega t - 120^\circ)$ ,  $i_3 = i_0 \sin (\omega t - 240^\circ)$ . В проводе  $0$ , являющемся общим, сила тока  $i$  будет равна сумме всех линейных токов:

$$i = i_1 + i_2 + i_3 = i_0 \sin \omega t + i_0 \sin (\omega t - 120^\circ) + i_0 \sin (\omega t - 240^\circ).$$

Но  $\sin (\omega t - 120^\circ) + \sin (\omega t - 240^\circ) = 2 \sin (\omega t - 180^\circ) \cos 60^\circ = -\sin (\omega t - 180^\circ) = \sin \omega t$ . Поэтому

$$i = i_1 + i_2 + i_3 = 0.$$

Таким образом, при симметричной нагрузке сила тока в проводе  $0$  равна нулю, отчего этот провод называют *нулевым*. В случае симметричной нагрузки (или даже приблизительно симметричной) нулевой провод можно удалить вовсе и линия будет работать исправно.

Возможно и другое соединение обмоток генератора, показанное на рис. 213 (соединение треугольником). Ему соответствует соединение трех источников тока, изображенное на рис. 214.

На первый взгляд может показаться, что в этом случае обмотки замкнуты сами на себя (накоротко). Это действительно так и было бы, если бы мы имели три источника постоянного тока. На самом же деле мы имеем переменные ЭДС, обладающие разностью фаз, что существенно изменяет дело. Действительно,

полная ЭДС треугольника равна

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_0 \sin \omega t + \mathcal{E}_0 \sin (\omega t - 120^\circ) + \mathcal{E}_0 \sin (\omega t - 240^\circ).$$

Но мы уже вычислили выше эту сумму и видели, что она равна нулю. Таким образом, полная ЭДС треугольника равна нулю, и

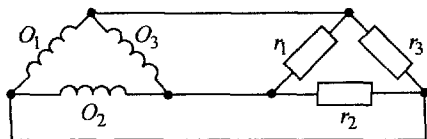


Рис. 213. Соединение треугольником

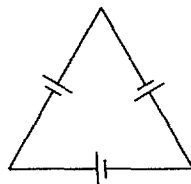


Рис. 214. Последовательное соединение трех источников тока

если генератор не нагружен, то не только не получается короткого замыкания, но в его обмотках вовсе нет тока.

Из рис. 213 ясно без расчетов, что при соединении треугольником линейные напряжения равны фазным напряжениям; при разомкнутом генераторе амплитуда линейных напряжений равна амплитуде ЭДС в одной обмотке  $\mathcal{E}_0$ .

Отметим в заключение, что на рисунках 211 и 213 мы предполагали, что и генератор и нагрузки соединены одинаково — либо звездой, либо треугольником. Разумеется, можно употреблять и комбинированные схемы, соединяя, например, генератор звездой, а потребителей энергии — треугольником, или, наоборот, генератор — треугольником, а потребителей — звездой.

Попутно отметим одно существенное обстоятельство. Вернемся к схеме рис. 211 и предположим, что один из проводов, например провод 1, оборвался или перегорел. Это приведет к выключению нагрузки  $r_1$ , но не нарушит нормальной работы нагрузок  $r_2$  и  $r_3$ , на которых по-прежнему будет фазное напряжение. Не то, однако, произойдет при обрыве нулевого провода. В этом случае каждая пара сопротивлений, например  $r_1$  и  $r_2$ , окажется соединенной последовательно и включенной под напряжение в  $\sqrt{3}$  раз больше фазного. Это напряжение распределится, как при всяком последовательном соединении, неравномерно, пропорционально сопротивлениям  $r_1$  и  $r_2$ . Так, если сопротивление  $r_1$  есть одна лампочка, а сопротивление  $r_2$  — девять лампочек (соединенных параллельно), то на ветви  $r_2$  окажется лишь  $1/10$  полного напряжения, а на ветви  $r_1$  —  $9/10$  напряжения. Если напряжение сети (фазное) было 220 В, то на обеих ветвях окажется  $220\sqrt{3} = 380$  В, из которых  $380 \cdot 1/10 = 38$  В придется на лампочки ветви  $r_2$ , а  $380 \cdot 9/10 = 342$  В — на лампочку ветви  $r_1$ . Поэтому лампочка перегорит и ток в обеих ветвях прервется. По этой причине на нулевой провод никогда не ставят плавкие предохранители, чтобы случайное короткое замыкание не привело к отключению этого провода, а защищают сеть предохранителями, поставленными на остальные провода.

### § 129. Векторные диаграммы

Выше мы рассматривали переменные токи, которые изменяются по закону синуса или косинуса, т.е. по тому же закону, что и гармонические колебания в механике. Такие гармонические изменяющиеся токи и напряжения нам приходилось складывать, что мы и делали аналитически, складывая соот-

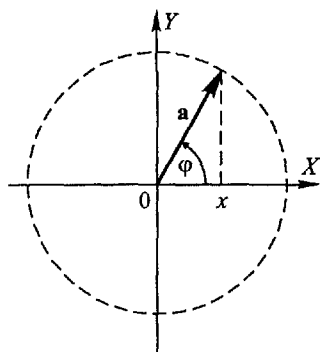


Рис. 215. Гармоническое колебание как проекция равномерно вращающегося вектора

ответствующие тригонометрические функции. Однако гармонические колебания можно изображать графически и производить их сложные графическим методом, который во многих случаях гораздо проще, нежели метод аналитический. Для этой цели служат векторные диаграммы колебаний.

Как известно из механики, гармоническое колебание точки можно представить как проекцию равномерно вращающегося вектора. Действительно, рассмотрим произвольную прямую  $X$  (рис. 215) и вектор, имеющий длину  $a$  и составляющий с прямой  $X$  угол  $\varphi$ . Предположим

далее, что этот вектор равномерно вращается против часовой стрелки с угловой скоростью  $\omega$ , так что

$$\varphi = \omega t + \alpha,$$

где  $\alpha$  — значение угла  $\varphi$  в момент времени  $t = 0$ . Тогда проекция рассматриваемого вектора на ось  $X$  выразится формулой

$$x = a \cos(\omega t + \alpha),$$

а проекция на перпендикулярную к ней ось  $Y$  — формулой

$$y = a \sin(\omega t + \alpha).$$

Поэтому при известной и постоянной частоте колебаний  $\omega$  мы вполне определим гармоническое колебание, если изобразим вектор с длиной  $a$ , составляющий с выбранным направлением  $X$  угол  $\alpha$  (рис. 216).

Рассмотрим теперь сложение двух гармонических колебаний одинаковой частоты. Построим вектор, изображающий первое колебание. Его длина  $a_1$  (рис. 217) равна амплитуде колебаний, а угол  $\alpha_1$ , составляемый с осью диаграммы, дает начальную фазу. Из конца этого вектора построим второй вектор, изображающий второе колебание, имеющее амплитуду  $a_2$  и начальную фазу  $\alpha_2$ . Угол  $\beta = \alpha_2 - \alpha_1$  есть разность фаз колебаний. Проекция  $x_1$  вектора  $\mathbf{a}_1$  дает одно из колебаний  $x_1 = a_1 \cos(\omega t + \alpha_1)$ , а проекция  $x_2$  второго вектора дает второе колебание  $x_2 = a_2 \cos(\omega t + \alpha_2)$ .

Сумма  $x_1 + x_2$  есть сумма обоих колебаний. Но сумма проекций двух векторов равна проекции суммы обоих векторов. Поэтому вектор  $\mathbf{a}$ , являющийся суммой векторов  $\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{a}_2$ , представляет результирующее колебание.

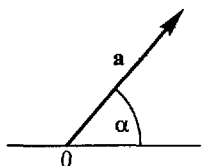


Рис. 216. Изображение гармонического колебания при помощи вектора

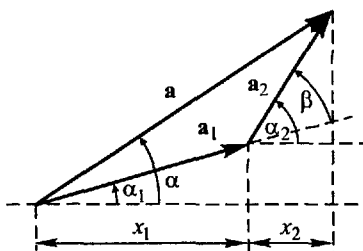


Рис. 217. Векторная диаграмма суммы двух гармонических колебаний

Из сказанного ясно, что при помощи такого приема можно складывать не только два, но и какое угодно число колебаний. Для этого нужно из конца второго вектора построить третий вектор, представляющий третье колебание, затем из конца последнего построить следующий вектор, изображающий четвертое колебание, и т.д., и найти суммарный вектор, замыкающий полученную ломаную линию.

В предыдущих рассуждениях мы считали, что  $y$  (или  $x$ ) обозначает смещение движущейся точки. Однако наши выводы сохраняют силу и в том случае, если  $y$  обозначает любую физическую величину, изменяющуюся по закону синуса или косинуса, и поэтому метод векторных диаграмм пригоден для изображения и суммирования любых гармонических колебаний.

Применим теперь этот метод к трехфазному току и представим геометрически результаты, полученные в § 128.

Мы видели, что в трех обмотках генератора трехфазного тока возникают три ЭДС, изменяющиеся по гармоническому закону, имеющие одинаковые амплитуды  $\mathcal{E}_0$ , но обладающие друг относительно друга разностью фаз  $120^\circ$ . Поэтому векторная диаграмма ЭДС трехфазного генератора имеет вид равносторонней звезды, изображенной на рис. 218.

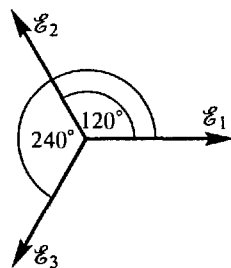


Рис. 218. Векторная диаграмма ЭДС трехфазного генератора

Далее мы установили связь между фазным напряжением разомкнутого генератора  $\mathcal{E}_0$  и линейным напряжением  $\mathcal{E}$  и на-

шли, что при соединении звездой  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0\sqrt{3}$ . Поясним это соотношение при помощи векторной диаграммы (рис. 219). Линейное напряжение  $\mathcal{E}$  есть разность ЭДС  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$  в двух соседних обмотках и изображается, следовательно, суммой векторов  $\mathcal{E}_1$  и  $-\mathcal{E}_2$ . Из рисунка видно, что  $\mathcal{E}$  является основанием равнобедренного треугольника с углом при основании в  $30^\circ$ , а следовательно,

$$\mathcal{E} = 2\mathcal{E}_0 \cos 30^\circ = 2\mathcal{E}_0 \sqrt{3}/2 = \mathcal{E}_0\sqrt{3},$$

что мы и получили раньше, складывая колебания аналитически.

Наконец, рассматривая четырехпроводную линию трехфазного тока, мы видели, что ток в нулевом проводе есть сумма трех токов, сдвинутых по фазе на  $120^\circ$ . При симметричной нагрузке амплитуды этих токов одинаковы и векторная

Рис. 219. Векторная диаграмма фазного и линейного напряжений; соединение звездой

диаграмма токов имеет вид равностороннего замкнутого треугольника (рис. 220) Длина замыкающей этих трех векторов равна нулю, и поэтому результирующая сила тока в любой момент времени также равна нулю.

Если нагрузка несимметрична, то длины векторов, изображающих токи  $i_1$ ,  $i_2$  и  $i_3$ , неодинаковы, и мы получим векторную диаграмму рис. 221. В этом случае в нулевом проводе будет существовать переменный ток, амплитуда и фаза которого изображаются вектором  $i$ .

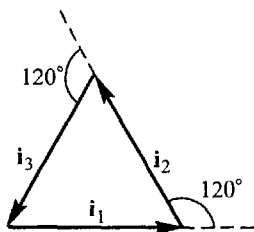


Рис. 220. Векторная диаграмма токов в нулевом проводе. Симметричная нагрузка

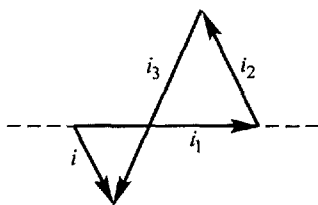


Рис. 221. Векторная диаграмма токов в нулевом проводе. Несимметричная нагрузка

Приведенные примеры показывают, что векторные диаграммы позволяют весьма наглядно изображать колебания токов и напряжений и легко производить их суммирование. Поэтому ме-



тод векторных диаграмм получил широкое распространение в электротехнике.

### § 130. Вращающееся магнитное поле

Представим себе вращающийся постоянный магнит. Вместе с магнитом будет перемещаться и создаваемое им магнитное поле, и мы получим *вращающееся магнитное поле*.

Если в такое поле поместить магнитную стрелку, то она будет стремиться установиться вдоль линий поля и поэтому придет во вращение в ту же сторону, в которую вращается поле.

Подобно магнитной стрелке будет вести себя замкнутый виток проволоки. Вследствие движения поля относительно витка в проволоке возникнет индукционный ток, который будет направлен так, как показано на рис. 222. На этот ток со стороны магнитного поля будут действовать силы, стремящиеся вращать виток вместе с полем, и виток придет во вращение.

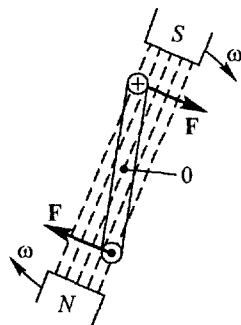


Рис 222. Действие вращающегося магнитного поля на замкнутый виток проволоки

Таким же образом будут вести себя массивные металлические диск или цилиндр, так как в них также будут наводиться индукционные токи, которые будут замыкаться в толще металла диска или цилиндра (так называемые вихревые токи; см. § 132), однако, так же как и токи в проволоках, они будут взаимодействовать с магнитным полем. Возникающие при этом силы, согласно закону Ленца, будут направлены так, чтобы уменьшить скорость вращения диска относительно поля, отчего диск (или цилиндр) придет во вращение в том же направлении, как и поле.

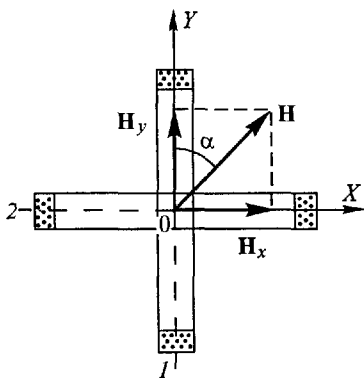


Рис. 223. Возникновение вращающегося магнитного поля двухфазного тока

Вращающееся магнитное поле можно получить и с помощью переменных токов. Рассмотрим сначала получение вращающегося поля при помощи двухфазного тока. Пусть имеются две катушки 1 и 2 (рис. 223), повернутые

друг относительно друга на угол  $90^\circ$ , питаемые двухфазным током. Это значит, что если ток в катушке 1 меняется по закону  $i_1 = i_0 \sin \omega t$ , то ток в катушке 2 будет:  $i_2 = i_0 \sin (\omega t - 90^\circ)$ . Катушка 1 создает переменное магнитное поле  $H_x$ , изменяющееся по закону

$$H_x = H_0 \sin \omega t.$$

Катушка 2 создает магнитное поле  $H_y$ , направленное перпендикулярно к полю  $H_x$  и отстающее от него по фазе на  $90^\circ$ .

$$H_y = H_0 \sin (\omega t - 90^\circ) = -H_0 \cos \omega t.$$

Напряженность результирующего поля

$$H = \sqrt{H_x^2 + H_y^2} = H_0 \quad (130.1)$$

остаётся постоянной во времени. Направление же этого поля изменяется. Будем характеризовать это направление углом  $\alpha$  (рис 223), составленным вектором  $\mathbf{H}$  и осью  $Y$ . Тогда

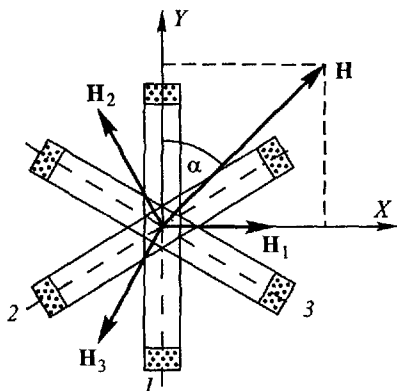
$$\operatorname{tg} \alpha = H_x / H_y = -\operatorname{tg} \omega t, \quad \alpha = -\omega t. \quad (130.2)$$

Мы видим, что вектор  $\mathbf{H}$  результирующего поля равномерно поворачивается против часовой стрелки с угловой скоростью  $\omega$ , т.е. мы имеем вращающееся магнитное поле, подобное полю вращающегося постоянно магнита.

В рассмотренном примере мы получили поле, вращающееся против часовой стрелки. Легко видеть, что если бы мы пересоединили концы одной из катушек 1 или 2, то мы изменили бы знак одного из полей  $H_x$  или  $H_y$  и при этом получили бы  $\alpha = +\omega t$ , т.е. вращение по часовой стрелке.

Для получения вращающегося магнитного поля с помощью трехфазного тока нужны три катушки (или их число, кратное трем) соответ-

Рис 224 Возникновение вращающегося магнитного поля трехфазного тока



ственно трем переменным токам в системе трехфазных токов. Катушки 1, 2 и 3 должны быть повернуты друг относительно друга на углы  $120^\circ$ , как показано на рис 224. В этом случае мы имеем три переменных магнитных поля  $\mathbf{H}_1$ ,  $\mathbf{H}_2$  и  $\mathbf{H}_3$ , которые составляют друг с другом, так же как и катушки, углы в  $120^\circ$

Колебания этих полей выражаются формулами

$$\begin{aligned} H_1 &= H_0 \sin \omega t, \\ H_2 &= H_0 \sin (\omega t - 120^\circ), \\ H_3 &= H_0 \sin (\omega t - 240^\circ). \end{aligned} \quad (130.3)$$

Нетрудно показать, что эти три поля, складываясь, дают результирующее поле, вращающееся с угловой скоростью  $\omega$ . Напряженность результирующего поля остается постоянной и равной  $(3/2)H_0$ .

Если поменять местами концы любой пары проводов, соединенных к катушкам поля (или к зажимам генератора), то направление вращения поля изменится на обратное.

Введем две взаимно перпендикулярные координатные оси  $X$  и  $Y$  и направим ось  $X$  параллельно полю  $H_1$ . Тогда составляющие полей по оси  $X$  будут

$$\begin{aligned} H_{1x} &= H_1 = H_0 \sin \omega t, \\ H_{2x} &= H_2 \cos 120^\circ = -(1/2)H_0 \sin (\omega t - 120^\circ), \\ H_{3x} &= H_3 \cos 240^\circ = -(1/2)H_0 \sin (\omega t - 240^\circ) \end{aligned}$$

Сложим сначала два последних поля

$$\begin{aligned} H_{2x} + H_{3x} &= -(1/2)H_0 [\sin (\omega t - 120^\circ) + \sin (\omega t - 240^\circ)] = \\ &= -(1/2)H_0 \cdot 2 \sin (\omega t - 180^\circ) \cos 60^\circ = (1/2)H_0 \sin \omega t \end{aligned}$$

Поэтому полная составляющая результирующего поля по оси  $X$  равна

$$H_x = H_{1x} + H_{2x} + H_{3x} = (3/2)H_0 \sin \omega t$$

Найдем теперь составляющую поля по оси  $Y$

$$\begin{aligned} H_{1y} &= 0, \\ H_{2y} &= H_2 \cos 30^\circ = (\sqrt{3}/2)H_0 \sin (\omega t - 120^\circ), \\ H_{3y} &= H_3 \cos 150^\circ = -(\sqrt{3}/2)H_0 \sin (\omega t - 240^\circ) \end{aligned}$$

Поэтому

$$H_y = H_{2y} + H_{3y} = (\sqrt{3}/2)H_0 \cdot 2 \sin 60^\circ \cos (\omega t - 180^\circ) = -(3/2)H_0 \cos \omega t$$

Поступая, как и раньше, находим модуль результирующего поля

$$H = \sqrt{H_x^2 + H_y^2} = (3/2)H_0,$$

угол  $\alpha$ , образованный вектором  $\mathbf{H}$  и осью  $Y$ , определяется из соотношения

$$\operatorname{tg} \alpha = H_x / H_y = -\operatorname{tg} \omega t, \quad \alpha = -\omega t$$

Таким образом, и здесь мы получаем магнитное поле, вращающееся с угловой скоростью  $\omega$ .

Вращающееся магнитное поле используют в асинхронных двигателях переменного тока. В двигателях трехфазного тока три обмотки, создающие вращающееся магнитное поле, размещены в пазах статора. Они соединяются либо по схеме треугольника, либо по схеме звезды и включаются в сеть трехфазного тока.

Ротор двигателя представляет собой железный сердечник, в пазах которого помещается обмотка. В двигателях небольшой мощности эта обмотка замыкается сама на себя накоротко. Обмотка ротора часто выполняется в виде толстых стержней, замкнутых на концах медными кольцами, так что вся обмотка имеет вид «беличьего колеса»

Вследствие возникновения вращающегося поля в обмотке ротора возникает индукционный ток, взаимодействие которого с магнитным полем статора приводит к силам, поворачивающим ротор.

Сила тока ротора зависит от относительной скорости вращения поля и ротора. Эту скорость принято характеризовать коэффициентом скольжения ротора

$$K = (\nu_{\text{п}} - \nu_{\text{р}}) / \nu_{\text{п}},$$

где  $\nu_{\text{п}}$  — число оборотов поля, а  $\nu_{\text{р}}$  — число оборотов ротора в секунду. Если ротор вращается со скоростью поля (относительная скорость равна нулю), то  $K = 0$ . Если ротор неподвижен (момент пуска), то  $K = 1$ . Чем больше нагрузка двигателя, тем сильнее должен быть ток в роторе, тем больше будет коэффициент скольжения и тем меньше будет число оборотов ротора. Поэтому число оборотов двигателя не остается постоянным, а несколько изменяется с изменением нагрузки, отчего этот двигатель, в отличие от синхронного двигателя, рассмотренного в § 126, получил название асинхронного двигателя.

В момент пуска  $K = 1$  и относительная скорость вращения наибольшая. В это время сила тока в роторе наибольшая и в роторах мощных двигателей, сопротивление обмотки которых ничтожно мало, может достигать опасных значений. Чтобы уменьшить эту начальную силу тока, роторы больших двигателей не делают короткозамкнутыми, а снабжают контактными кольцами. С помощью колец и щеток обмотку ротора замыкают на пусковой реостат, который постепенно выводят по мере увеличения числа оборотов двигателя.

Асинхронный двигатель трехфазного тока отличается большой простотой устройства. Он обладает также хорошими механическими характеристиками. Поэтому этот двигатель получил весьма широкое распространение.

## Г Л А В А XIII

### ВЗАИМНЫЕ ПРЕВРАЩЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ. ТЕОРИЯ МАКСВЕЛЛА

Между электрическими и магнитными полями существует глубокая внутренняя связь, проявляющаяся в том, что эти поля могут превращаться друг в друга. Всякое изменение магнитного поля всегда сопровождается появлением электрического поля и, наоборот, всякое изменение электрического поля приво-

дит к появлению магнитного поля. Это взаимное превращение электрического и магнитного полей было открыто в начале второй половины прошлого века Максвеллом, который развил общую теорию электромагнитного поля в покоящихся средах. Теория Максвелла позволяет с единой точки зрения охватить всю совокупность рассмотренных выше фактов, касающихся свойств электрических и магнитных полей, а также новые важные явления. В настоящей главе мы рассмотрим основные идеи этой теории.

### § 131. Вихревое электрическое поле

Вернемся к явлению электромагнитной индукции и рассмотрим неподвижный замкнутый проводник в магнитном поле. В гл. IX мы видели, что при всяком изменении магнитного поля в таком проводнике возникает электродвижущая сила и вследствие этого появляется индукционный ток.

С другой стороны, из сказанного в гл. VII мы знаем, что электродвижущая сила в любой цепи возникает только в том случае, если в ней на заряды действуют какие-либо сторонние силы, т.е. силы неэлектростатического происхождения. Поэтому возникает вопрос, какова физическая природа сторонних сил в этом случае?

Опыт показывает, что ЭДС индукции не зависит вовсе от рода вещества проводника, который может быть как однородным, так и неоднородным, как проводником 1-го рода, так и проводником 2-го рода (электролит). Она не зависит также от состояния проводника и, в частности, от его температуры, которая может быть и одинаковой, и неодинаковой вдоль проводника. Это показывает, что в данном случае сторонние силы не связаны с изменением свойств проводника в магнитном поле, а обусловлены самим магнитным полем.

Анализируя явление электромагнитной индукции, Максвелл заключил, что причина появления ЭДС индукции заключается в возникновении электрического поля (рис. 225), а проводники играют второстепенную роль и являются только своего рода прибором, обнаруживающим это поле. Под действием поля электроны прово-

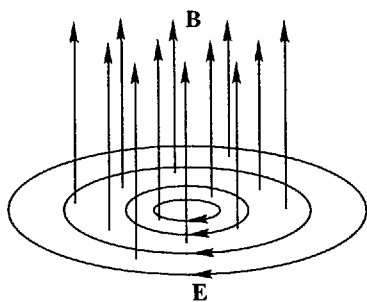


Рис 225 При изменении магнитного поля появляется вихревое электрическое поле. Показанное на чертеже направление  $E$  соответствует возрастанию  $B$

димости в проволоке приходят в движение и, если проволока замкнута, в ней возникает индукционный ток.

Существенная особенность рассматриваемого явления заключается в том, что возникающее электрическое поле не является электростатическим. Линии напряженности электростатического поля всегда разомкнуты; они начинаются и заканчиваются на электрических зарядах, в соответствии с чем напряжение по замкнутому контуру в электростатическом поле всегда равно нулю. По этой причине электростатическое поле не может поддерживать замкнутое движение зарядов и, следовательно, не может привести к возникновению электродвижущей силы. Напротив, электрическое поле, возникающее при электромагнитной индукции, имеет непрерывные линии напряженности, т.е. представляет собой вихревое поле. Такое поле вызывает в проволоке движение электронов по замкнутым траекториям и приводит к возникновению электродвижущей силы — сторонними силами являются силы вихревого электрического поля. Электрическое напряжение по замкнутому контуру в таком поле не равно нулю; его значение между двумя какими-либо точками уже не определяется только положением этих точек, как было в случае электростатического поля, но зависит еще от *формы* контура (проводника), соединяющего данные точки (ср. § 133).

Таким образом, углубленное истолкование явления электромагнитной индукции приводит к следующему выводу, выражающему первое основное положение теории Максвелла: *всякое изменение магнитного поля вызывает появление вихревого электрического поля.*

Полученный результат можно выразить в количественной форме. Согласно основному закону электромагнитной индукции (§ 91) ЭДС индукции равна скорости изменения магнитного потока

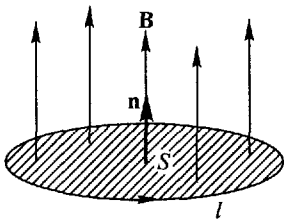


Рис 226 К формулировке уравнения Максвелла

$$\mathcal{E} = -d\Phi/dt, \quad (131.1)$$

где  $\Phi$  — поток магнитной индукции  $B$  через площадь  $S$ , ограниченную рассматриваемым контуром  $l$  (рис. 226).

$$\Phi = \int_S B_n dS. \quad (131.2)$$

С другой стороны, согласно § 69, электродвижущая сила, действующая в каком-либо контуре  $l$ , равна

$$\mathcal{E} = \int_l E_l^* dl, \quad (131.3)$$

где  $E^*$  — напряженность поля сторонних сил. В данном случае  $E^*$  есть напряженность вихревого электрического поля  $E$ . Поэтому, подставляя (131.3) с  $E^* = E$  в (131.1), находим

$$\frac{d\Phi}{dt} = - \oint_l E_l dt. \quad (131.4)$$

Это соотношение выражает количественную связь между изменяющимся магнитным полем ( $\mathbf{B}$ ) и вихревым электрическим полем ( $\mathbf{E}$ ) и является одним из основных уравнений в теории Максвелла.

Напомним, что в формуле (131.1) мы приписываем магнитному потоку определенный знак, зависящий от выбора положительного направления нормали  $\mathbf{n}$  к площадке  $S$ . Это направление нормали определяет и знак ЭДС, который связан с направлением  $\mathbf{n}$  правилом правого буравчика (§ 91). Поэтому и в уравнении Максвелла (131.4) направление нормали  $\mathbf{n}$  и направление обхода по контуру  $l$  связаны также правилом правого буравчика.

Поясним сказанное на примере. На рис. 226 указано выбранное направление нормали  $\mathbf{n}$  и соответствующее ему направление обхода контура  $l$ . Если вектор  $\mathbf{B}$  направлен параллельно  $\mathbf{n}$  (или составляет с  $\mathbf{n}$  острый угол), то поток  $\Phi$  будет положительным. Если при этом магнитное поле увеличивается, то  $d\Phi/dt > 0$  и из (131.4) следует, что  $\oint_l E_l dl < 0$ . Это значит, что вихревое электрическое поле направлено против отмеченного направления обхода контура.

## § 132. Вихревые токи

Если в переменном магнитном поле находится какой-либо массивный проводник, то вихревое электрическое поле вызывает в нем индукционный ток. Плотность этого тока в какой-либо точке проводника по закону Ома равна  $\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}$ . Так как линии напряженности  $\mathbf{E}$  замкнуты, то и линии тока также замыкаются внутри проводника, отчего такие токи получили название *вихревых токов*.

Вихревые токи вызывают нагревание проводников. Если внутри катушки с переменным током поместить проводящее тело, например, металлический диск, ориентированный перпендикулярно к оси катушки, то диск можно раскалить до высокой температуры и расплавить.

Нагревание проводников вихревыми токами применяют в индукционных металлургических печах для плавления металлов и приготовления их сплавов. Небольшие индукционные печи ши-

роко используются в лабораторной и заводской практике для прокаливания металлов в вакууме и для других целей.

Вихревые токи возникают также при движении массивных проводников в магнитном поле. Взаимодействуя с магнитным полем, вихревые токи вызывают появление сил, действующих на движущееся проводящее тело, которые, согласно закону Ленца, всегда противодействуют движению. Это тормозящее действие позволяет также легко обнаружить вихревые токи. На рис. 227 показан маятник в форме массивной чечевицы из красной меди, которая при колебаниях маятника проходит между полюсами электромагнита. При выключенном электромагните маятник колеблется вследствие большой массы с очень малым затуханием, но при включении электромагнита резко останавливается.

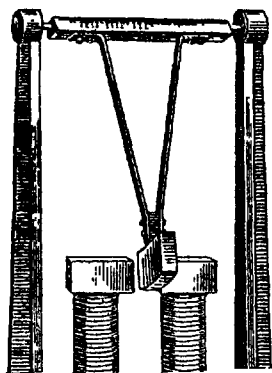


Рис 227 Металлический маятник тормозится в магнитном поле вследствие образования вихревых потоков

Если медной монете предоставить возможность свободно падать без начальной скорости между полюсами сильного электромагнита, то она движется почти равномерно с ничтожной скоростью порядка 1 см/с, как если бы движение происходило в очень вязкой среде.

Если расположить медный диск вблизи постоянного магнита и привести магнит во вращение, то диск начинает вращаться в ту же сторону, что и магнит (рис. 228).

Взаимодействие вихревых токов с магнитным полем подчиняется третьему закону Ньютона. Поэтому, если в последнем опыте вращать вместо магнита диск, то магнит приходит также во вращение.

Силы, вызываемые вихревыми токами и действующие на движущиеся проводники в магнитном поле, используются во многих измерительных приборах (электрические счетчики, электромагнитное успокоение измерительных приборов, тахометры и др.).

В некоторых технических устройствах вихревые токи играют вредную роль. Так, например, в железных сердечниках трансформаторов и вращающихся частях электрических генераторов возникающие вихре-

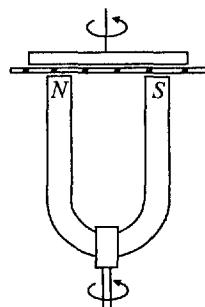


Рис 228 Медный диск, подвешенный вблизи вращающегося магнита, приходит во вращение



вые токи вызывают бесполезное нагревание и снижают КПД этих устройств. Для ослабления вихревых токов такие детали изготавливают из тонких листов, разделенных тончайшими слоями изолятора таким образом, чтобы изолирующие прослойки пересекали возможные линии вихревых токов. Сущность этого приема разъясняется опы-

том, изображенным на рис. 229. Подвесим кубик, набранный из тонких металлических пластинок, на нити, поместим его между полюсами электромагнита и, закрутив предварительно нить, будем наблюдать вращение кубика при раскручивании нити. Если подвесить

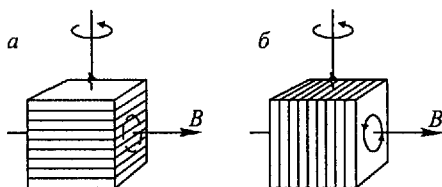


Рис 229 Ослабление вихревых токов в случае *a* вихревые токи значительно слабее, чем в случае *б*

кубик в положение *a*, то изолирующие прослойки будут пересекать линии вихревых токов (одна из них показана штриховой линией). В этом случае вихревые токи возникают только в пределах каждой из пластинок; их действие очень слабо, и кубик свободно вращается с большой угловой скоростью. Если же подвесить кубик в положение *б*, то прослойки будут параллельны линиям вихревых токов и не будут мешать образованию токов. Кубик будет вести себя так, как если бы прослоек не было, и будет поворачиваться очень медленно из-за тормозящего действия вихревых токов.

### § 133. Трансформатор

Трансформатор представляет собой устройство, предназначенное для преобразования напряжения и силы переменного тока. Он имеет сердечник (обычно замкнутой формы) из мягкого железа или иного магнитно-мягкого ферромагнетика, который несет на себе две обмотки — первичную и вторичную (рис. 230). Концы первичной обмотки (вход трансформатора) подключены к сети питающего переменного тока, а концы вторичной обмотки (выход) — к потребителям электрической энергии.

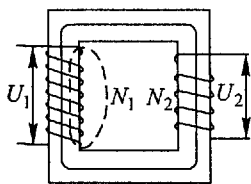


Рис 230 Трансформатор

ЭДС электромагнитной индукции, возникающая во вторичной обмотке, пропорциональна числу витков в ней, и поэтому, изменяя это число витков, можно изменять в широких пределах напряжение на выходе трансформатора

Трансформаторы играют огромную роль в современной электротехнике. В мощных линиях электропередачи в настоящее время почти исключительно применяют высокие напряжения (тысячи и десятки тысяч вольт). Это позволяет уменьшить силу тока в линии, а значит, и сечение проводов, что приводит к сильному снижению стоимости сооружения линий электропередачи. Однако конструировать генераторы (так же как и различные приборы, потребляющие электрическую энергию), рассчитанные на высокие напряжения, весьма трудно, так как необходимо обеспечить хорошую изоляцию обмоток. Поэтому электрические генераторы строят на низкое напряжение и затем это напряжение увеличивают при помощи повышающих трансформаторов. В местах же потребления электроэнергии ток высокого напряжения преобразуют при помощи понижающих трансформаторов в ток низкого напряжения (110, 220 В и др.).

Трансформаторы имеют высокий коэффициент полезного действия, доходящий до 99 %, и не содержат никаких движущихся частей, поэтому они являются весьма удобными техническими устройствами.

Трансформатор является хорошим примером технического использования вихревого электрического поля. Именно это поле приводит в движение электроны во вторичной обмотке и служит причиной возникновения в ней ЭДС. Отметим, что магнитный поток, создаваемый первичной обмоткой, практически сосредоточен внутри сердечника трансформатора, в то время как вихревое электрическое поле существует как внутри сердечника, так и снаружи. Поэтому ЭДС во вторичной обмотке возникает и при наличии зазора между сердечником и обмоткой.

Пользуясь трансформатором, легко проверить на опыте, что в вихревом электрическом поле напряжение между двумя точками зависит от формы соединяющего их контура (ср. § 131). Для этого нужно сделать

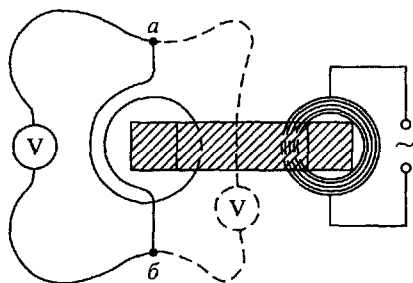


Рис 231 В вихревом электрическом поле трансформатора напряжение зависит от формы контура

вторичную обмотку с малым числом витков (один-два) и присоединить к ее концам *a* и *б* (рис. 231) вольтметр один раз так, чтобы провода вольтметра располагались вне трансформатора (сплошные линии), а в другой раз — проходили внутри трансформатора, охватывая его сердечник (штриховая линия). Показания вольтметра в обоих случаях будут разные (во втором

случае больше), хотя в обоих случаях вольтметр и подключен к одним и тем же точкам *a* и *б*.

В технических трансформаторах это не проявляется, так как, во-первых, в них обычно число витков вторичной обмотки велико, и поэтому различие во включении вольтметра, сводящееся к добавлению одного лишнего витка, мало сказывается. Во-вторых, наличие металлического кожуха вообще не позволяет осуществить включение, показанное штриховой линией. Тем не менее указанный факт имеет принципиальное значение.

Рассмотрим теперь, как связаны между собой входное напряжение  $U_1$  и выходное напряжение  $U_2$ . Пусть  $\Phi$  — магнитный поток в сердечнике. В случае технического переменного тока, изменяющегося по закону синуса, и намагничивания сердечника, далекого от насыщения, этот магнитный поток будет также изменяться приблизительно по синусоидальному закону:  $\Phi = \Phi_0 \sin \omega t$  где  $\omega$  — угловая частота переменного тока (число периодов в  $2\pi$  секунд), а  $\Phi_0$  — максимальное значение потока (его амплитуда). В реальных трансформаторах часть линий индукции, создаваемых первичной обмоткой, выходит из сердечника и замыкается вне вторичной обмотки (штриховая линия на рис. 230), образуя так называемый поток рассеяния. Однако в хороших трансформаторах поток рассеяния мал по сравнению с потоком внутри сердечника, и поэтому мы будем считать, что один и тот же поток  $\Phi$  пронизывает обе обмотки. ЭДС, возникающая в первичной обмотке (ЭДС самоиндукции), равна

$$\mathcal{E}_1 = -N_1 d\Phi/dt,$$

а ЭДС во вторичной обмотке

$$\mathcal{E}_2 = -N_2 d\Phi/dt,$$

где  $N_1$  и  $N_2$  — число витков в первичной и во вторичной обмотках. Применяя к обмоткам трансформатора закон Ома для участка с ЭДС (§ 68), находим напряжение на входе трансформатора

$$U_1 = r_1 i_1 - \mathcal{E}_1 = r_1 i_1 + N_1 d\Phi/dt$$

и напряжение на выходе

$$U_2 = r_2 i_2 - \mathcal{E}_2 = r_2 i_2 + N_2 d\Phi/dt.$$

Здесь  $r_1$  и  $r_2$  — сопротивления первичной и вторичной обмоток, а  $i_1$  и  $i_2$  — силы тока в них.

Мы ограничимся только случаем разомкнутой вторичной обмотки и поэтому положим  $i_2 = 0$ . Далее, мы будем считать (что обычно выполняется для всех технических трансформаторов), что  $r_1 i_1 \ll \mathcal{E}_1$ . Тогда, деля почленно два последних уравнения, находим

$$U_2/U_1 = N_2/N_1. \quad (133.1)$$

Отношение  $K = N_2/N_1$  называют *коэффициентом трансформации*. Он показывает, во сколько раз вторичное напряжение больше первичного напряжения в режиме холостого хода.

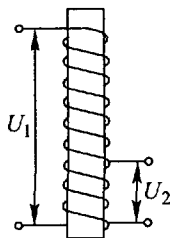


Рис. 232. Авто-трансформатор

Если трансформатор нагружен (вторичная обмотка замкнута), то падением напряжения  $r_i$  нельзя пренебрегать по сравнению с ЭДС индукции, и вместо формулы (133.1) получается более сложное соотношение.

Иногда вторичной обмоткой трансформатора служит часть первичной обмотки или, наоборот, часть вторичной обмотки — первичной. В этом случае трансформатор называют *автотрансформатором* (рис. 232). Один из контактов автотрансформатора часто делают передвижным, что позволяет плавно изменять выходное напряжение.

### § 134. Вытеснение переменного тока (скин-эффект)

Если в однородном проводнике с постоянным поперечным сечением имеется постоянный ток, то плотность тока одинакова в разных точках сечения проводника. Иное наблюдается при переменном токе. В этом случае плотность тока оказывается не одинаковой по сечению: она наибольшая на поверхности и наименьшая на оси проводника. Ее неравномерность тем больше, чем толще проводник и чем больше частота переменного тока, а при очень больших частотах ток практически существует только в тонком поверхностном слое. Это явление получило название *скин-эффекта*.

Указанное любопытное явление также объясняется возникновением вихревого электрического поля электромагнитной индукции. Рассмотрим проводник с переменным током, и пусть в данный момент времени ток  $i$  имеет направление, указанное на рис. 233. Этот ток создает внутри проводника магнитное поле, линии индукции которого лежат в плоскости, перпендикулярной к оси проводника. Предположим, что ток  $i$  усиливается.

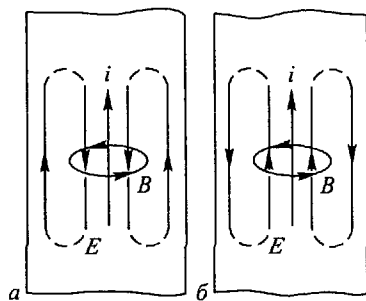


Рис. 233. Объяснение вытеснения переменного тока на поверхность проводника: а — ток нарастает; б — ток убывает

Тогда возрастающая индукция  $B$  вызовет появление вихревого электрического поля  $E$  (рис. 233 а), которое у поверхности проводника направлено так же, как и ток  $i$ , а на оси проводника — противоположно току. Это поле, следовательно, будет усиливать ток на поверхности и ослаблять его на оси.

Допустим теперь, что ток  $i$  уменьшается. В этом случае ослабевающая индукция  $B$  вызовет электрическое поле  $E$ , которое будет направлено противоположно по сравнению с первым случаем (рис. 233 б), т.е. будет у поверхности противоположно току, а на оси — совпадать с током. В обоих случаях и при усилении, и при ослаблении тока, вихревое электрическое поле на оси проводника препятствует, а на поверхности способствует изменениям тока, а значит, на оси проводника переменный ток слабее, а на поверхности сильнее.

Закон распределения плотности тока по сечению проводника особенно прост, если проводник имеет форму плоского слоя, толщина которого  $2D$  значительно меньше ширины (пластина). Расчет показывает, что это распределение зависит от величины

$$d = \frac{1}{\sqrt{\omega \mu \mu_0 \lambda / 2}}, \quad (134.1)$$

которая получила название глубины проникновения тока. Здесь  $\mu$  — магнитная проницаемость вещества проводника,  $\mu_0$  — магнитная постоянная,  $\lambda$  — удельная электрическая проводимость,  $\omega = 2\pi\nu$  — круговая частота переменного тока. Выражая эти величины в единицах системы СИ, мы получим  $d$  в метрах.

Если  $d \gg D$ , то плотность тока практически постоянна по сечению проводника. Если  $d \ll D$  (сильный скин-эффект), то закон распределения приблизительно имеет вид

$$j(y) = j_{\text{пов}} \exp\left(-\frac{y}{d}\right), \quad (134.2)$$

где  $j(y)$  — плотность тока на расстоянии  $y$  от поверхности проводника,  $j_{\text{пов}}$  — плотность тока у поверхности. Из (134.2) видно, что глубина проникновения  $d$  есть такое расстояние от поверхности проводника, на котором плотность тока уменьшается в  $e = 2,71$  раза.

Вследствие скин-эффекта электрический ток при больших частотах течет преимущественно сквозь поверхностный слой проводника. Это приводит к уменьшению действующего сечения проводника и, как следствие, к увеличению сопротивления проводника. При больших частотах или толстых проводах это увеличение сопротивления может быть значительным.

Благодаря неравномерному распределению тока в проводнике изменяется не только его сопротивление, но и индуктивность. Действительно, при постоянном токе магнитное поле возникает как во внешнем пространстве, так и внутри проводника. При наличии сильного скин-эффекта ток существует практически

только в поверхностном слое, и магнитного поля внутри проводника нет. Магнитная энергия становится меньше на величину энергии поля внутри проводника, а следовательно, индуктивность проводника уменьшается.

Существование скин-эффекта всегда учитывают в технике быстропеременных токов. Так как такие токи практически не идут в глубине проводника, то линии для них собирают из полых труб. В современной радиотехнике сверхвысоких частот многие детали (волноводы, коаксиальные линии) покрывают тонким, хорошо проводящим слоем серебра, так как их сопротивление практически обусловлено только поверхностным слоем.

### § 135. Индукционный ускоритель

Вихревое электрическое поле получило замечательное применение в индукционных ускорителях, или бетатронах, предназначенных для получения пучков электронов большой скорости.

Схема устройства индукционного ускорителя изображена на рис. 234. Основной его частью является мощный электромагнит  $MM$ . Создаваемое им в зазоре магнитное поле симметрично относительно оси  $OO$ . Это поле имеет также плоскость симметрии  $AA$ , проходящую в середине зазора. Обмотка электромагнита питается переменным током, частота которого имеет порядок сотен герц. Для усиления тока в обмотке электромагнита параллельно ей присоединяют большую батарею конденсаторов и используют явление электрического резонанса (см. гл. XXI). Между полюсами электромагнита находится камера  $K$  в форме тороида (рис. 234), откачиваемая до высокого вакуума. В определенные промежутки времени, когда  $B \approx 0$ , в камеру попадает пучок электронов, получаемых при помощи термоэлектронной эмиссии в специальном источнике, расположенном внутри камеры.

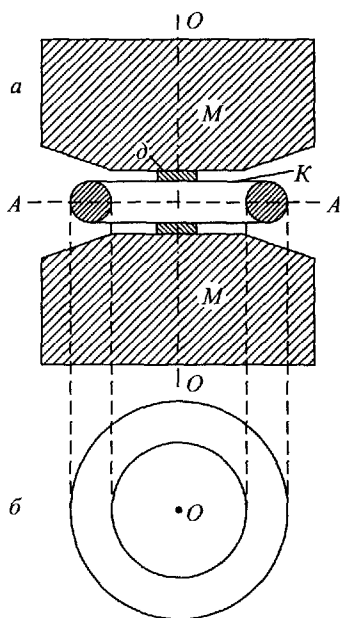


Рис 234 Схема устройства индукционного ускорителя: а — полюсы электромагнита и ускорительная камера, б — ускорительная камера в плане

чаемых при помощи термоэлектронной эмиссии в специальном источнике, расположенном внутри камеры.

При изменении магнитного потока в соответствии с основным положением теории Максвелла появляется вихревое электрическое поле  $E$  и на каждый из электронов в камере ускорения действует сила  $eE$ . Так как линии напряженности электрического поля замкнуты, то направление силы будет все время совпадать с направлением движения, и электроны, обращаясь в магнитном поле, будут непрерывно увеличивать свою энергию.

Таким образом, индукционный ускоритель подобен трансформатору, у которого роль вторичной обмотки из одного витка играет камера. Различие заключается в том, что в проводах обмотки обычного трансформатора электроны движутся с трением, и поэтому накапливаемая ими энергия непрерывно расходуется на выделение тепла; в индукционном же ускорителе электроны движутся в вакууме практически без сопротивления, и работа сил электрического поля превращается в кинетическую энергию электронов.

На протяжении первой четверти периода магнитное поле нарастает и вызывает появление электрического поля определенного направления. В это время и происходит ускорение электронов. Во второй четверти периода магнитное поле убывает, и направление электрического поля изменяется на обратное. Для ускорения может быть использована лишь одна четверть периода, начинающаяся при  $B \approx 0$ , т.е. либо первая, либо третья.

Когда энергия электронов становится близкой к максимальной (к концу периода ускорения), электроны выводят с орбиты ускорения и бомбардируют ими мишень, укрепленную внутри камеры. Это осуществляют разными способами.

Один из них заключается в том, что в центре полюсных наконечников электромагнита укрепляют диски  $d$  (рис. 234), изготовленные из магнитного материала, в котором при  $B = B_{\text{макс}}$  уже достигается насыщение. Поэтому к концу периода ускорения изменяются пространственное распределение магнитного поля и радиус электронной орбиты, а электронный пучок попадает на мишень или в специальное окошко, через которое он выходит из камеры наружу.

Индукционные ускорители применяются главным образом в исследованиях по ядерной физике. Они позволяют получить потоки быстрых электронов, т.е. искусственное  $\beta$ -излучение. При бомбардировке различных мишеней этими электронами возникает электромагнитное излучение (искусственные  $\gamma$ -лучи), гораздо более проникающее, чем  $\gamma$ -излучение естественных радиоактивных препаратов. Небольшие ускорители начинают применять для получения жестких рентгеновских лучей (возникающих при бомбардировке мишеней электронами), используемых для рентгеновской дефектоскопии в промышленности и для других целей.

### § 136. Ток смещения

В предыдущих параграфах мы видели, что всякое переменное магнитное поле вызывает вихревое электрическое поле. Анализируя различные электромагнитные процессы, Максвелл пришел к заключению, что должно существовать и обратное явление: *всякое изменение электрического поля вызывает появление вихревого магнитного поля*. Это утверждение выражает важнейшее свойство электромагнитного поля (второе основное положение теории Максвелла).

Так как магнитное поле есть основной, обязательный признак всякого тока, то Максвелл назвал переменное электрическое поле *током смещения*, в отличие от тока проводимости, обусловленного движением заряженных частиц (электронов и ионов).

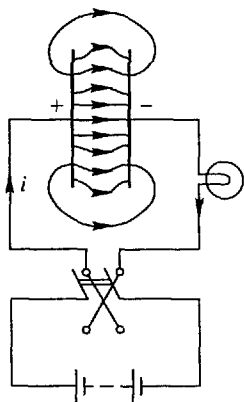


Рис. 235. Изменяющийся во времени ток проводимости  $i$  в металлическом проводе замыкается в диэлектрике током смещения

Следует отметить, что этот термин не является удачным. Он имеет некоторое основание в случае диэлектриков, так как в них действительно смещаются заряды в атомах и молекулах. Однако понятие тока смещения мы применяем и к вакууму, где никаких зарядов, а следовательно, и никакого их «смещения» нет. Тем не менее этот термин сохранился в силу исторических традиций.

Понятие тока смещения можно пояснить при помощи опыта, изображенного на рис. 235. Составим контур, содержащий металлический проводник, конденсатор, батарею и переключатель. Для суждения о токе в контуре включим в него небольшую лампочку накаливания, играющую роль демонстрационного амперметра. Мы имеем здесь разомкнутый контур, который разрывается конденсатором. Как мы знаем, через такой разомкнутый контур постоянный ток не проходит и при длительном включении батареи лампочка не обнаруживает никакого накала.

Иное будет в первые моменты после включения батареи. Конденсатор будет заряжаться, и в металлическом проводе возникнет кратковременный зарядный ток. Если после окончания зарядки переключить батарею при помощи переключателя, то конденсатор перезарядится, и в процессе перезарядки в проводе опять возникнет ток, но теперь обратного направления. При каждом переключении батареи в проводе будет возникать импульс тока и лампочка будет давать кратковременную вспышку.



Если концы провода, присоединенные к переключателю, подключить в осветительную цепь переменного тока, то перезарядки конденсатора будут следовать непрерывно друг за другом с частотой 100 раз в секунду и в контуре длительно будет существовать переменный ток. В этом случае отдельные вспышки лампочки уже не будут заметны и она будет накаливаться равномерно.

Мы видим, что, в отличие от постоянного тока, изменяющиеся или переменные токи могут существовать и в разомкнутых контурах. При этом всякий раз, когда в разомкнутом контуре имеется ток, между его концами (обкладками конденсатора) имеется изменяющееся во времени электрическое поле или ток смещения. Таким образом, токи проводимости в металлическом проводнике замыкаются токами смещения в диэлектрике.

Согласно Максвеллу электрическое поле в конденсаторе в любой момент времени создает такое же магнитное поле, как если бы между обкладками существовал ток проводимости с силой, равной силе тока в металлических проводах. Или, иными словами, магнитное поле нашего разомкнутого контура оказывается таким же, как если бы контур был замкнут.

Это позволяет найти количественную связь между изменяющимся электрическим полем и вызываемым им магнитным полем. Действительно, если электрическое смещение в конденсаторе есть  $D$ , то, согласно § 41, поверхностная плотность заряда на обкладках

$$\sigma = D.$$

Поэтому полный заряд  $q$  на каждой из обкладок равен

$$q = SD,$$

где  $S$  — площадь обкладок. Если за время  $dt$  заряд конденсатора изменяется на  $dq$ , то сила тока в проводе

$$i = dq/dt = S dD/dt.$$

Она однозначно связана с быстротой изменения индукции электрического поля. Отсюда следует, что меняющееся поле конденсатора вызывает такое же магнитное поле, как ток, имеющий силу  $S dD/dt$  или плотность

$$\mathbf{j}_c = d\mathbf{D}/dt. \quad (136.1)$$

Эта величина получила название *плотности тока смещения*.

Пользуясь этим понятием, можно выразить второе положение теории Максвелла в следующей количественной форме: *переменное во времени электрическое поле вызывает такое же магнитное поле, как и ток проводимости с плотностью  $\mathbf{j}_c$ , определяемой формулой (136.1)*.

В общем случае электрическое поле может быть неоднородным и может зависеть не только от времени, но и от координат.

В этом случае выражение для плотности тока смещения будет

$$\mathbf{j}_c = \partial \mathbf{D} / \partial t, \quad (136.2)$$

где знак частной производной указывает на то, что магнитное поле зависит от быстроты изменения индукции во времени в каждой точке поля.

Следует подчеркнуть, что ток смещения определяется производной вектора  $\mathbf{D}$ , но не самим этим вектором. Так, например, в поле плоского конденсатора вектор  $\mathbf{D}$  направлен от положительной пластины к отрицательной. Если электрическое поле увеличивается, то  $\partial \mathbf{D} / \partial t$ , а следовательно, и ток смещения направлены так, как показано на рис. 236 а. Если же электрическое поле убывает, то  $\partial \mathbf{D} / \partial t$  направлено от отрицательной пластины

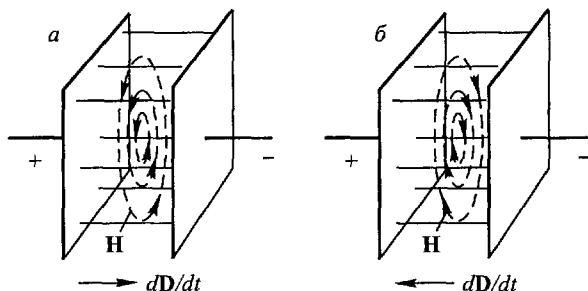


Рис. 236. Изменяющееся во времени электрическое поле вызывает появление (вихревого) магнитного поля

к положительной, и магнитное поле противоположно по сравнению с первым случаем (рис. 236 б).

Если в каком-либо проводнике имеется переменный ток, то внутри проводника существует переменное электрическое поле. Поэтому внутри проводника имеются и ток проводимости, и ток смещения и магнитное поле проводника определяется их суммой, т.е. полным током. Плотность полного тока

$$\mathbf{j}_{\text{полн}} = \mathbf{j} + \partial \mathbf{D} / \partial t. \quad (136.3)$$

В зависимости от электропроводности среды и быстроты изменения поля (частоты переменного тока) оба слагаемых в (136.3) играют разную роль. В хорошо проводящих веществах (металлах) и при низких частотах плотность тока смещения мала и им можно пренебречь по сравнению с током проводимости. Поэтому, например, в явлении вытеснения переменного тока в металлах (§ 134) ток смещения не играет заметной роли. Напротив, в плохо проводящих средах (изоляторах) и при высоких частотах ток смещения играет основную роль.

Оба члена в формуле (136.3) могут иметь и одинаковые знаки, и противоположные. Поэтому полный ток может быть как больше, так и меньше тока проводимости и в частном случае может обращаться в нуль.

Такой пример приведен на рис. 237, где изображен сферический конденсатор, заполненный проводящей средой. Если заряд обкладок есть  $q$ , то электрическое смещение  $D$  на расстоянии  $r$  от центра равно

$$D = \frac{q}{4\pi r^2}.$$

Плотность тока смещения

$$j_c = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dq}{dt},$$

а сила тока смещения

$$i_c = 4\pi r^2 j_c = dq/dt.$$

При разряде конденсатора этот ток направлен от внутренней обкладки к наружной. Ток же проводимости направлен противоположно (от плюса к минусу) и его сила есть

$$i = -\frac{dq}{dt}.$$

Поэтому полный ток

$$i_{\text{полн}} = i + i_c = 0$$

и, несмотря на движение зарядов между обкладками, магнитное поле равно нулю.

Таким образом, в общем случае меняющихся токов магнитное поле определяется не током проводимости, а полным током. Если мы имеем разомкнутый контур, то на концах проводника обрывается лишь ток проводимости. В диэлектрике же между концами проводника имеется ток смещения, который замыкает ток проводимости. Поэтому, если под электрическим током понимать полный ток, определяемый формулой (136.3), то окажется, что в природе все электрические токи замкнуты. Этот важный вывод также был получен Максвеллом.

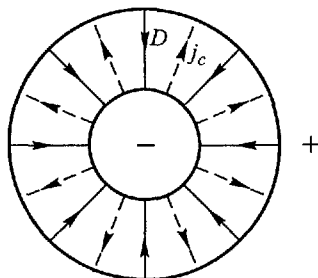


Рис. 237. Движение зарядов, не сопровождающееся магнитным полем

## § 137. Уравнения Максвелла

Полученный в предыдущем параграфе вывод о магнитном поле тока смещения можно выразить в виде уравнения. Рассмотрим проводник, в котором имеется изменяющийся ток, и выделим внутри него произвольную площадку  $S$ , ограниченную контуром  $l$  (рис. 238). Применим к этому контуру теорему о магнитном напряжении (§ 81), учитывая, однако, что в общем случае изменяющегося тока магнитное поле определяется

ПОЛНЫМ ТОКОМ:

$$\oint_l H_l dl = i_{\text{полн}},$$

где  $i_{\text{полн}}$  — сила полного тока через площадку  $S$ .

Вычислим теперь  $i_{\text{полн}}$ . На основании формулы (136.3) имеем

$$i_{\text{полн}} = \int_S j_n dS + \int_S \frac{\partial D_n}{\partial t} dS.$$

Но первое слагаемое есть сила тока проводимости  $\mathbf{i}$ . Во втором слагаемом можно изменить последовательность интегрирования и дифференцирования. Это дает

$$\int_S \frac{\partial D_n}{\partial t} dS = \frac{\partial}{\partial t} \int_S D_n dS = \frac{\partial N}{\partial t},$$

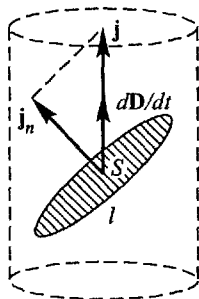
где  $N$  — поток вектора электрического смещения сквозь площадку  $S$ . Поэтому

$$i_{\text{полн}} = i + \frac{\partial N}{\partial t},$$

и окончательно получаем следующее соотношение:

$$\oint_l H_l dl = i + \frac{\partial N}{\partial t}. \quad (137.1)$$

Рис. 238 В общем случае внутри проводника имеются и ток проводимости, и ток смещения



Оно является вторым основным уравнением теории Максвелла и выражает в математической форме положение Максвелла о магнитном поле тока смещения.

Выпишем теперь основные уравнения, определяющие электрическое и магнитное поля. В § 131 мы установили одно из уравнений Максвелла:

$$\oint_l E_l dl = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (137.2)$$

Здесь  $\Phi$  — поток магнитной индукции через площадку  $S$ , ограниченную контуром  $l$ , причем, так же как и в (137.1), мы пользуемся символом частной производной по времени, так как  $\mathbf{B}$ , а следовательно, и  $\Phi$  могут еще зависеть от координат (от положения площадки  $S$ ).

К этим уравнениям нужно добавить еще два уравнения, выражающие теорему Остроградского–Гаусса для электрического (§ 44) и магнитного полей (§ 106):

$$\int D_n dS = q, \quad (137.3)$$

$$\int B_n dS = 0. \quad (137.4)$$

Наконец, следует напомнить, что различные величины, входящие в эти уравнения, не независимы и между ними существуют следующие связи:

$$\mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H}, \quad \mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}, \tag{137.5}$$

где  $\mu$  и  $\varepsilon$  — магнитная и диэлектрическая проницаемости вещества. Сила же тока проводимости  $i$  в (137.1) определяется плотностью тока  $\mathbf{j}$ , которая связана с напряженностью  $\mathbf{E}$  законом Ома

$$\mathbf{j} = \lambda\mathbf{E}, \tag{137.6}$$

где  $\lambda$  — удельная электрическая проводимость вещества.

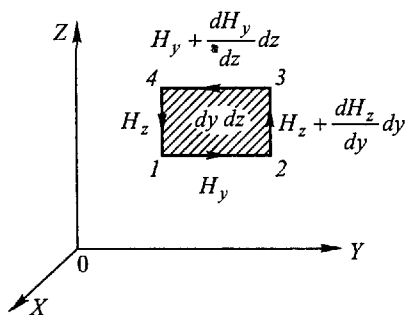
Уравнения (137.1)–(137.6) составляют систему уравнений Максвелла. Они являются наиболее общими уравнениями для электрических и магнитных полей в покоящихся средах.

Отметим, что величины  $\varepsilon$ ,  $\mu$  и  $\lambda$  входят в уравнения Максвелла как материальные постоянные, т.е. как заданные величины, характеризующие свойства среды.

### § 138. Уравнения Максвелла в дифференциальной форме

Уравнения Максвелла (137.1)–(137.4) применимы к поверхности любого размера, и поэтому входящие в них величины относятся к разным точкам поля. Так, например, в левой части уравнения (137.1)  $H$  есть напряженность магнитного поля в точках контура, ограничивающего рассматриваемую площадку, в то время как поток  $N$  в правой части зависит от значений  $D$  в точках самой площадки.

Можно, однако, преобразовать эти уравнения в такую форму, чтобы все величины относились к одной и той же точке поля. Для этого уравнения Максвелла нужно применить к площадкам бесконечно малого размера.



Обратимся сначала к уравнению Максвелла (137.1). Введем правовинтовую прямоугольную систему координат  $XYZ$  и рассмотрим прямоугольную площадку 1–2–3–4 (рис. 239) со сторонами  $dy$  и  $dz$ , параллельными осям  $Y$  и  $Z$ . Вершину площадки 1 поместим в произвольную точ-

Рис 239. Бесконечно малая площадка  $dydz$  и значения составляющих магнитного поля на ограничивающем ее контуре

ку поля  $(x, y, z)$  и обозначим составляющие напряженности магнитного поля в этой точке через  $H_x$ ,  $H_y$  и  $H_z$ . В соответствии с правовинтовым характером координатной системы выберем, далее, положительное направление обхода по контуру 1-2-3-4 против часовой стрелки и вычислим магнитное напряжение по этому контуру. Оно распадается на четыре слагаемых, соответствующих четырем отрезкам контура. Магнитное напряжение на отрезке 1-2 равно  $H_y dy$ . На отрезке 3-4 составляющая напряженности поля вдоль отрезка равна  $(H_y + \frac{\partial H_y}{\partial z} dz)$ . Направление обхода здесь противоположно положительному направлению  $H_y$  (оси  $Y$ ), и поэтому магнитное напряжение равно  $-(H_y + \frac{\partial H_y}{\partial z} dz) dy$ . Аналогично напряжение на отрезке 2-3 есть  $(H_z + \frac{\partial H_z}{\partial y} dy) dz$ , а на отрезке 4-1 равно  $-H_z dz$ . Поэтому

$$\oint H_s ds = H_y dy + (H_z + \frac{\partial H_z}{\partial y} dy) dz - (H_y + \frac{\partial H_y}{\partial z} dz) dy - H_z dz = (\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}) dy dz.$$

Вычислим теперь слагаемые в правой части уравнения (137.1). Для потока  $N$  существенна лишь нормальная к площадке составляющая электрического смещения  $D_x$ . Поэтому поток через  $dy dz$  равен  $D_x dy dz$  и, следовательно,

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial D_x}{\partial t} dy dz.$$

Точно так же ток проводимости через площадку определяется лишь нормальной составляющей плотности тока  $j_x$  и равен

$$j_x dy dz.$$

Подставляя все эти величины в формулу (137.1) и сокращая обе части равенства на  $dy dz$ , находим

$$\frac{\partial D_x}{\partial t} + j_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}.$$

Приведенные рассуждения можно применить к двум другим площадкам  $dz dx$  и  $dx dy$ , перпендикулярным соответственно к осям  $Y$  и  $Z$ . Поэтому вместо уравнения (137.1) мы получим три уравнения, образующие первую группу уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_x}{\partial t} + j_x &= \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}, & \frac{\partial D_y}{\partial t} + j_y &= \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}, \\ \frac{\partial D_z}{\partial t} + j_z &= \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}. \end{aligned} \quad (138.1)$$

Подобным образом мы можем применить к указанным трем площадкам второе уравнение Максвелла (137.2). Это приведет нас ко второй группе уравнений Максвелла:

$$-\frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, \quad -\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad -\frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}. \quad (138.2)$$

Выражение потока вектора через замкнутую поверхность мы уже преобразовали в дифференциальную форму в § 14. Пользуясь полученным там результатом, можно записать уравнения (137.3) и (137.4) в виде

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho, \quad (138.3)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0. \quad (138.4)$$

Уравнения (138.1)–(138.4) совместно с уравнениями (137.5), (137.6) и представляют собой полную систему уравнений Максвелла в дифференциальной форме, в которых все входящие величины относятся к одной и той же точке поля.

Уравнения Максвелла можно записать в компактной векторной форме, не зависящей от выбора системы координат, если воспользоваться понятием *вихря* вектора. Рассмотрим в поле какого-либо вектора  $\mathbf{A}$  малую площадку  $\Delta S$ , ограниченную контуром  $l$ , и составим отношение циркуляции вектора  $\mathbf{A}$  вдоль контура  $l$  к  $\Delta S$ . Из векторного анализа известно, что предел этого отношения при  $\Delta S \rightarrow 0$  (если этот предел существует) есть проекция нового вектора на направление нормали  $\mathbf{n}$  к площадке. Этот вектор называется вихрем вектора  $\mathbf{A}$  и обозначается символом  $\text{rot } \mathbf{A}$  (сокращение от французского *rotation* — вращение) или  $\text{curl } \mathbf{A}$  (от английского *curl*, что соответствует русскому «вихрь»).

Таким образом, по определению

$$\text{rot } \mathbf{n} \mathbf{A} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_l A_l dl.$$

Но эти величины (для трех направлений  $\mathbf{n}$ , параллельных осям  $X, Y, Z$ ) мы как раз и вычисляли выше (для  $\mathbf{A} = \mathbf{H}$  и  $\mathbf{A} = \mathbf{E}$ ); они равны правым частям уравнений (138.1) и (138.2). Отсюда видно, что составляющие  $\text{rot } \mathbf{H}$  в прямоугольных осях координат равны

$$\text{rot }_x \mathbf{H} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}, \quad \text{rot }_y \mathbf{H} = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}, \quad \text{rot }_z \mathbf{H} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}.$$

Такие же формулы справедливы и для  $\text{rot } \mathbf{E}$ .

Из сказанного следует, что уравнения Максвелла (138.1) и (138.2) в векторной форме имеют вид

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{H}, \quad (138.1a)$$

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot } \mathbf{E}. \quad (138.2a)$$

Если среда является диэлектриком, то в первой группе уравнений Максвелла нужно положить  $j_x = j_y = j_z = 0$ .

### § 139. Значение теории Максвелла

Теория Максвелла сыграла выдающуюся роль в развитии наших знаний об электричестве. Для того чтобы лучше понять значение этой теории, необходимо вспомнить историческую последовательность основных открытий в области электричества до работ Максвелла.

Как уже упоминалось, количественное изучение электрических явлений началось с работ Кулона (1785 г.), установившего сначала закон взаимодействия электрических зарядов и распространившего его позднее на взаимодействие «магнитных зарядов». Однако вплоть до 1820 г. электрические и магнитные явления рассматривали как различные явления, не связанные между собой.

Открытие Эрстедом в 1820 г. магнитного действия тока показало, что между магнитными и электрическими явлениями существует связь и что магнитные действия можно получить при помощи электрических токов. Магнитное действие токов было детально изучено Ампером, который пришел к заключению, что все магнитные явления в природе, в том числе и связанные с постоянными магнитами, вызваны электрическими токами (теория молекулярных токов Ампера).

Дальнейшими важными результатами того периода мы обязаны Фарадею. Из них особое значение имело открытие электромагнитной индукции. Фарадей исходил из основной идеи о взаимной связи явлений природы. Он считал, что если ток способен вызывать магнитные явления, то и, наоборот, при помощи магнитов или других токов можно получить электрические токи. В результате настойчивых и многочисленных попыток Фарадей действительно открыл в 1831 г. это явление, которое еще более укрепило представление о связи между электричеством и магнетизмом.

Второй важнейшей идеей в работах Фарадея было признание основной, определяющей роли промежуточной среды в электрических явлениях. Фарадей не допускал действия на расстоянии, которое, как мы сейчас хорошо знаем, физически бессодержа-



тельно, и считал, что электрические и магнитные взаимодействия передаются промежуточной средой и что именно в этой среде разыгрываются основные электрические и магнитные процессы.

В работах Максвелла идеи Фарадея подверглись дальнейшему углублению и развитию и были превращены в строгую математическую теорию. В теории Максвелла мысль о тесной связи электрических и магнитных явлений получила окончательное оформление в виде двух основных положений теории, рассмотренных нами в § 131 и 136, и была в строгой форме выражена в виде уравнений Максвелла (§ 137, 138). Поэтому теория Максвелла явилась завершением важного этапа в развитии учения об электричестве и привела к классическому представлению об электромагнитном поле, содержащем в общем случае и электрическое, и магнитное поля, связанные между собой и способные взаимно превращаться друг в друга.

Уравнения Максвелла содержат в себе все основные законы электрического и магнитного полей, включая электромагнитную индукцию, и поэтому являются общими уравнениями электромагнитного поля в покоящихся средах.

Теория Максвелла не только объяснила уже известные факты, но и предсказала новые и важные явления. Совершенно новым в этой теории явилось предположение Максвелла о магнитном поле токов смещения (§ 136). На основе этого предположения Максвелл теоретически предсказал существование электромагнитных волн, т.е. переменного электромагнитного поля, распространяющегося в пространстве с конечной скоростью. Теоретическое исследование свойств электромагнитных волн привело затем Максвелла к созданию электромагнитной теории света, согласно которой свет представляет собой также электромагнитные волны. В дальнейшем электромагнитные волны действительно были получены на опыте, а еще позднее электромагнитная теория света, а с нею и вся теория Максвелла, получили полное и блестящее подтверждение.

Однако мы отложим рассмотрение электромагнитных волн до гл. XXII, так как для понимания методов их получения и исследования необходимо изучение электронных явлений и электрических колебаний.

## § 140. Электромагнитное поле в движущихся телах

До сих пор в настоящей главе мы рассматривали взаимные превращения электрических и магнитных полей, вызванные изменением полей во времени. Аналогичные явления имеют место и при движении электромагнитного поля относительно наблюдателя.

Рассмотрим заряд, движущийся в магнитном поле в вакууме. С точки зрения наблюдателя, неподвижного относительно магнитного поля, на заряд действует сила (§ 88)

$$F = qvB \sin(\mathbf{v}, \mathbf{B}). \quad (140.1)$$

Здесь  $q$  — заряд,  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$  — индукция магнитного поля, а  $\mathbf{v}$  — скорость движения заряда относительно магнитного поля. Направление этой силы перпендикулярно к  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{B}$  и подчиняется правилу правого буравчика (совпадает с направлением векторного произведения  $[\mathbf{v}\mathbf{B}]$ ).

Представим себе теперь второго наблюдателя, движущегося вместе с зарядом. Для этого наблюдателя заряд будет неподвижным, а между тем на заряд будет действовать та же сила  $\mathbf{F}$ . Но если на неподвижный заряд действует сила, пропорциональная заряду, то это значит, что имеется электрическое поле. Его напряженность равна

$$E = F/q = vB \sin(\mathbf{v}, \mathbf{B}), \quad (140.2)$$

а направление поля совпадает с направлением силы  $\mathbf{F}$ , т.е. перпендикулярно к  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{B}$  (рис. 240).

Таким образом, электромагнитное поле зависит от системы отсчета. Если в какой-либо системе отсчета существует одно магнитное поле, то в других системах, движущихся относительно первой, мы имеем и магнитное поле, и электрическое.

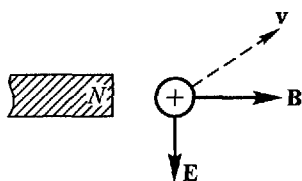


Рис. 240. При движении относительно магнитного поля появляется электрическое поле

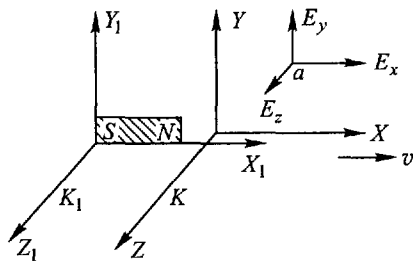


Рис. 241. Если в системе отсчета  $K_1$  имеется только магнитное поле, то в системе  $K$ , движущейся относительно  $K_1$ , появляется еще и электрическое поле

Полученные результаты можно представить в другом виде. Пусть имеются две системы отсчета  $K$  и  $K_1$ , причем  $K$  движется относительно  $K_1$  с постоянной скоростью  $v$  параллельно оси  $X_1$  (рис. 241). Пусть, далее, в  $K_1$  существует магнитное поле, которое в произвольной точке  $a$  имеет составляющие  $H_{1x}$ ,  $H_{1y}$  и  $H_{1z}$ . Тогда в той же точке, но в системе  $K$  появится вследствие

движения электрическое поле  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_z$ . Применяя к отдельным составляющим поля формулу (140.2), получаем

$$E_x = 0, \quad E_y = -vB_{1z}, \quad E_z = +vB_{1y}.$$

Если в системе  $K_1$  имеется еще и электрическое поле, то полное электрическое поле в системе  $K$  имеет составляющие

$$E_x = E_{1x}, \quad E_y = E_{1y} - vB_{1z}, \quad E_z = E_{1z} + vB_{1y}. \quad (140.3)$$

Отметим еще раз, что  $v$  есть скорость системы  $K$  относительно системы  $K_1$ .

Совершенно аналогично при движении относительно электрического поля появляется магнитное поле. Чтобы определить это поле, рассмотрим заряд  $+q$ , движущийся относительно наблюдателя со скоростью  $v$ . Такой заряд создает магнитное поле (§ 86)

$$H = \frac{qv}{4\pi r^2} \sin(\mathbf{v}, \mathbf{r}), \quad (140.4)$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, проведенный из заряда в данную точку. Но в выражении (140.4)  $q/(4\pi r^2)$  есть электрическое смещение  $D = \epsilon_0 E$ , создаваемое зарядом в рассматриваемой точке  $a$ . Поэтому, учитывая еще, что  $\mathbf{D}$  направлено вдоль  $\mathbf{r}$ , можно написать

$$H = vD \sin(\mathbf{v}, \mathbf{D}). \quad (140.5)$$

Поле  $\mathbf{H}$  перпендикулярно к  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{D}$  (совпадает с направлением векторного произведения  $[\mathbf{v}\mathbf{D}]$ ).

Для наблюдателя, движущегося вместе с зарядом, существовало бы только электрическое поле. Если же это электрическое поле движется относительно наблюдателя, то появляется еще и магнитное поле, выражаемое формулой (140.5) (рис. 242).

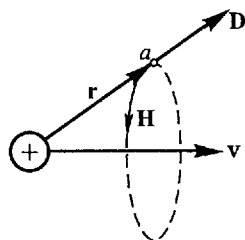


Рис. 242. При движении относительно электрического поля появляется магнитное поле  $\mathbf{H}$

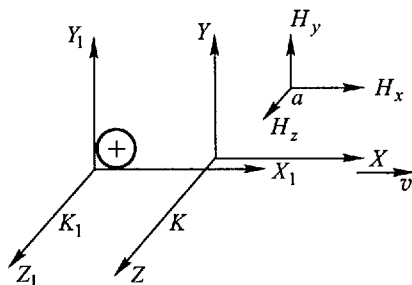


Рис. 243. Если в системе отсчета  $K_1$  имеется только электрическое поле, то в системе  $K$ , движущейся относительно  $K_1$ , появляется еще и магнитное поле

Введем, как и раньше, две системы отсчета, одна из которых  $K$  движется относительно другой  $K_1$  в направлении  $X_1$  (рис. 243), и положим, что заряд покоится в системе  $K_1$ . Следовательно, электрическое поле этого заряда будет двигаться относительно  $K$  со скоростью  $-v$ . Тогда, применяя формулу (140.5) к отдельным составляющим поля и изменяя в ней знак у скорости  $v$ , получим

$$H_x = 0, \quad H_y = +vD_{1z}, \quad H_z = -vD_{1y}.$$

Если в системе  $K_1$  имеется еще и магнитное поле ( $H_{1x}, H_{1y}, H_{1z}$ ), то полное магнитное поле в системе  $K$  имеет составляющие

$$H_x = H_{1x}, \quad H_y = H_{1y} + vD_{1z}, \quad H_z = H_{1z} - vD_{1y}. \quad (140.6)$$

Здесь, как и раньше,  $v$  есть скорость движения системы  $K$  (в которой наблюдается поле  $H_x, H_y, H_z$ ) относительно системы  $K_1$ .

Напомним в заключение, что формулы (140.1) и (140.4), из которых мы исходили в наших рассуждениях, были получены в конечном счете из опытов с магнитным взаимодействием проводов с током. Но в проводах мы имеем всегда лишь медленные движения зарядов. Поэтому и написанные выше формулы преобразования полей можно считать обоснованными только для медленных движений (по сравнению со скоростью света). Для быстрых движений эти формулы должны быть заменены на более общие (см. § 143).

### § 141. Для электромагнитных явлений важно относительное движение

В предыдущем параграфе мы говорили, что скорость  $v$ , входящая в формулы преобразования электромагнитного поля, есть скорость относительного движения. Совершенно так же опыт дает, что и для всех других электрических явлений важно только относительное движение: в явлении электромагнитной индукции — движение провода относительно магнита, в магнитных действиях движущихся зарядов — движение этих зарядов относительно наблюдателя (магнитной стрелки) и т.д.

Однако вопрос о том, какая скорость входит в законы электрических явлений, не был сразу самоочевидным. Примерно с конца XVII века для объяснения электрических и световых явлений в физике начали пользоваться зародившимся еще гораздо раньше представлением об эфире, т.е. представлением о некоторой всепроникающей среде, заполняющей все мировое пространство. Так как физика в XVIII–XIX веках была по преимуществу физикой механистической, то и эфир считали также хотя

и особой, но некоторой механической средой, а электрические и магнитные явления рассматривали как различные процессы деформаций и движений эфира. В соответствии с этим можно было сделать два предположения: либо электромагнитные явления обусловлены движением относительно эфира («абсолютное» движение), либо они определяются движением относительно наблюдателя (относительное движение).

Легко видеть, что оба эти предположения приводят к совсем различным следствиям. В качестве примера рассмотрим заряженный плоский конденсатор, неподвижно установленный на земной поверхности. Так как Земля движется по орбите со скоростью около 30 км/с, то с такой же скоростью должно было бы двигаться и электрическое поле относительно эфира (оптические явления, например, так называемая абберация света, требуют допущения, что эфир не увлекается Землей при движении). Если бы важно было движение относительно эфира, то такой конденсатор должен был бы создавать еще и магнитное поле, напряженность которого определилась бы формулой (140.5). Так, например, если расстояние между пластинами равно 1 см =  $10^{-2}$  м, напряжение между ними 10 кВ, а направление поля перпендикулярно к скорости Земли ( $\sin(\mathbf{v}, \mathbf{D}) = 1$ ), то

$$D = \epsilon_0 E = 8,85 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}^2,$$

$$H = vD = 30 \cdot 10^3 \cdot 8,85 \cdot 10^{-6} \approx 0,33 \text{ А/м},$$

что нетрудно обнаружить на опыте. Если же важно движение относительно наблюдателя, то никакого магнитного поля быть не должно. Поэтому, исследуя, имеется ли магнитное поле возле заряженного конденсатора, можно решить поставленный вопрос.

Такие опыты были действительно произведены Рентгеном и А.А. Эйхенвальдом. Они показали, что магнитометр, расположенный вблизи конденсатора, не обнаруживает никакого магнитного поля.

Другой вариант подобного опыта был осуществлен Трутоном и Ноблем в 1904 г. Идея опыта заключалась в следующем. Представим себе заряженный конденсатор, напряженность электрического поля которого  $E$  составляет угол  $\vartheta$  с направлением орбитальной скорости Земли  $v$  (рис. 244). Если бы было важно движение относительно эфира, то внутри конденсатора имелось бы, кроме электрического, магнитное поле напряженности

$$H = v\epsilon_0 E \sin \vartheta.$$

Поэтому в каждой единице объема поля заключалась бы не только энергия электрического поля  $\epsilon_0 E^2/2$ , но еще и энергия магнитного поля  $\mu_0 H^2/2$  и полная энергия конденсатора была бы равна

$$W = \frac{1}{2}(\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2)\tau = W_E(1 + \epsilon_0 \mu_0 v^2 \sin^2 \vartheta),$$

где  $W_E = \tau \epsilon_0 E^2 / 2$  — энергия электрического поля,  $\tau$  — объем поля. Следовательно, энергия конденсатора зависела бы от угла  $\vartheta$ , а значит, на конденсатор действовала бы пара сил с моментом

$$M = -dW/d\vartheta = -W_E \epsilon_0 \mu_0 \cdot v^2 \sin 2\vartheta.$$

Под действием этой пары сил конденсатор должен был бы повернуться так, чтобы линии напряженности его электрического поля сделались параллельными скорости  $v$  ( $\vartheta = 0$ ), причём его энергия стала бы минимальной.

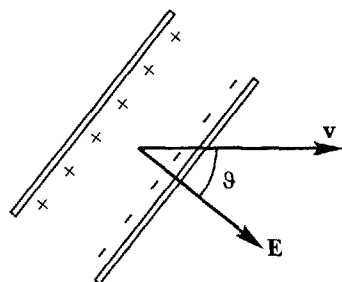


Рис. 244. Опыт Трутона и Нобля

В опытах небольшой конденсатор подвешивали на тонкой нити, заряжали его до высокой разности потенциалов и с помощью светового указателя наблюдали крутильные колебания конденсатора. Отсюда можно было определить положение равновесия конденсатора. Так как направление предполагаемого движения Земли относительно эфира неизвестно, то наблюдения производили в различное время суток. При этом вследствие вращения Земли направление скорости относительно эфира должно было изменяться, а следова-

тельно, должно было меняться и положение равновесия конденсатора. Эти опыты не обнаружили никаких систематических отклонений конденсатора в течение суток. Подобные опыты впоследствии повторялись с большей точностью и также дали отрицательный результат.

Описанные опыты показывают, что магнитное поле зависит от относительного движения электрического поля.

Попытки обнаружить абсолютное движение Земли в эфире производились и оптическими методами, которые отличаются особенно большой точностью. Однако все подобные опыты неизменно давали один и тот же отрицательный результат. Так как свет представляет собой тоже электромагнитное явление, то, суммируя результаты всех опытов, можно заключить, что с помощью электромагнитных явлений, так же как и с помощью механических, невозможно обнаружить абсолютное движение. Или иначе: для электромагнитных явлений важно только относительное движение.

Низменные отрицательные результаты различных и многочисленных опытов, имевших целью обнаружить движение относительно эфира, привели также к безнадежному крушению всех теорий эфира. В результате этих опытов в теориях эфира возникло принципиальное и неустранимое противоречие, заключающееся в том, что, с одной стороны, эфир трактовался как механическая среда, а с другой, — эфир оказался лишенным основного свойства всякой механической системы — свойства служить системой отсчета. Указанное, а также и другие

противоречия привели постепенно к выводу, что их причина лежит в самой исходной предпосылке теорий, т.е. что эфира вообще не существует. Поэтому современная физика рассматривает электрические явления как особый класс явлений природы, несводимый к механическим явлениям.

### § 142. Электромагнитная индукция в движущихся проводниках

Мы знаем, что в случае неподвижных (относительно магнитов и токов) проводников причина электромагнитной индукции заключается в возникновении вихревого электрического поля (§ 131). Спросим себя теперь, чем обусловлено возникновение ЭДС индукции в проводниках, движущихся в магнитном поле?

Ответ на этот вопрос дают законы преобразования электромагнитного поля, рассмотренные в § 140. Когда проводник перемещается относительно магнитного поля, то в нем (т.е. в системе отсчета, связанной с проводником) тоже появляется электрическое поле (но не электростатическое!). Это поле и является той сторонней силой, которая обуславливает возникновение ЭДС и приводит в движение электроны внутри проводника.

Вычислим ЭДС индукции, исходя из этих соображений. Рассмотрим отрезок прямого провода длины  $l$ , расположенный в плоскости, перпендикулярной к магнитной индукции  $\mathbf{B}$ , и движущийся в этой плоскости с постоянной скоростью  $\mathbf{v}$  (рис. 245). Электрическое поле, возникающее в проволоке вследствие движения, определяется формулой (140.2):

$$E = vB.$$

Так как это поле в данном случае является сторонней силой, то ЭДС равна (ср. § 69)

$$\mathcal{E} = \int_0^l E dl = vlB.$$

Но  $vl$  есть площадь, описываемая проводником в единицу времени, а  $vlB$  — магнитный поток через эту площадь, или, иначе,

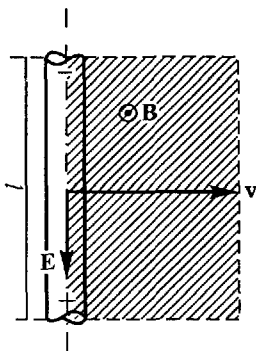


Рис. 245. Объяснение электромагнитной индукции при движении проводника. Магнитная индукция  $\mathbf{B}$  направлена от чертежа к читателю

число пересекаемых в единицу времени линий магнитной индукции, т.е. мы получили закон электромагнитной индукции Фарадея (§ 91). Направление индукционного тока совпадает с направлением напряженности поля  $E$ . На рис. 245 видно, что оно удовлетворяет закону Ленца.

Таким образом, причина электромагнитной индукции в движущихся проводниках заключается в появлении электрического поля при движении относительно магнитного поля.

Рассмотрим один специальный случай индукции, являющийся хорошей иллюстрацией сказанному. Пусть имеется цилиндрический постоянный магнит, вращающийся вокруг своей оси (рис. 246). Половина магнита включена в электрическую цепь при помощи двух скользящих контактов, один из которых касается оси магнита, а другой — самого магнита в нейтральной линии. Такой опыт был осуществлен еще Фарадеем («униполярная индукция») и показал, что в цепи действительно появляется индукционный ток. ЭДС индукции оказывается такой же, как если бы магнит находился в покое, но двигался контур  $abcVa$  с такой же угловой скоростью, но в обратном направлении.

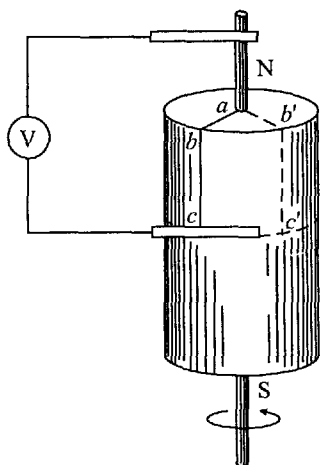


Рис. 246. Схема униполярной машины Фарадея

Для объяснения этого опыта иногда представляют себе, что линии индукции магнитного поля скреплены с магнитом наподобие жестких спиц, и рассматривают возникающую ЭДС как следствие пересечения линиями магнитной индукции проволочного контура  $abcVa$ . Однако это объяснение совершенно неверно. Ведь линия магнитной индукции — это введенный нами способ изображения поля (а не магнита). При вращении же магнита все его положения неотличимы, а создаваемое им поле постоянно и не зависит вовсе от скорости вращения магнита. Поэтому и говорить о движении линий поля вместе с магнитом нет никаких оснований.

Истинная сущность этого явления опять заключается в законах преобразования электромагнитного поля при движении системы отсчета (§ 140). Чтобы сделать рассуждения наиболее ясными, заменим вращательное движение поступательным и представим себе бесконечную равномерно намагниченную ленту, движущуюся с постоянной скоростью  $v$  вдоль оси  $X$  (рис. 247). В системе отсчета, связанной с магнитом ( $K_1$ ), мы имеем только магнитное поле. Но в системе отсчета ( $K$ ), связанной с контуром  $abVa$ , движущейся относительно магнита со скоростью  $-v$ , появляется электрическое поле, которое и вызывает индукционный ток.

Полагая в формулах (140 3)  $E_{1x} = E_{1y} = E_{1z} = 0$ ,  $B_{1x} = B_{1z} = 0$ ,  $B_{1y} = B$  и заменяя в них  $v$  на  $-v$ , имеем

$$E = -vB.$$



Следовательно, ЭДС в отрезке  $ab$  (с длиной  $l$ ) равна

$$\mathcal{E} = \int_a^b E dl = -vlB.$$

В этой формуле  $vlB$  есть магнитный поток через площадь  $abb'a'a$ , описываемую линией  $ab$  в единицу времени. В случае вращательного движения

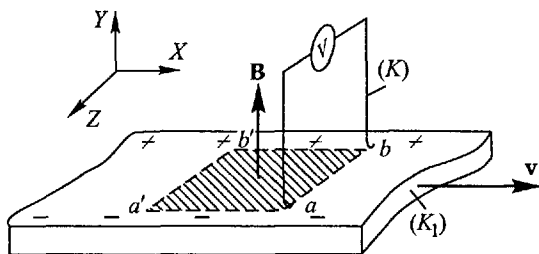


Рис. 247. К объяснению униполярной индукции

поток войдет через боковую поверхность магнита  $abcc'b'a$  (рис. 246), описываемую линией  $abc$  (тоже в единицу времени).

### § 143. Преобразования Лоренца

Как известно, механические явления в различных системах отсчета, движущихся друг относительно друга прямолинейно и равномерно, протекают одинаково. С помощью механических измерений невозможно установить, какая из этих систем покоится, а какие — движутся, и поэтому можно лишь говорить об относительном их движении по отношению друг к другу (принцип относительности для механических явлений).

Совершенно то же мы имеем в электромагнитных явлениях. В § 141 мы видели, что с помощью электромагнитных явлений, так же как и с помощью явлений механических, нельзя получить никаких указаний о существовании абсолютного движения, и поэтому нельзя указать никакой привилегированной системы отсчета. Все системы отсчета, движущиеся друг относительно друга прямолинейно и равномерно, равноправны между собой и во всех этих системах законы электромагнитных явлений одинаковы. В этом заключается *принцип относительности для электромагнитных явлений*.

Вернемся теперь опять к формулам преобразования электромагнитных полей (140.3) и (140.6) и посмотрим, удовлетворяют ли они принципу относительности. Для простоты будем считать, что в системе отсчета  $K_1$  электрическое поле направлено вдоль оси  $Y$  ( $E_{1y} = E_1$ ,  $E_{1x} = E_{1z} = 0$ ), а магнитное поле — вдоль оси

$Z$  ( $H_{1z} = H_1$ ,  $H_{1x} = H_{1y} = 0$ ). Тогда формулы преобразования принимают вид

$$E = E_1 - vB_1, \quad H = H_1 - vD_1. \quad (143.1)$$

Они выражают поле в системе  $K$ , движущейся относительно  $K_1$  со скоростью  $v$ . Но, согласно принципу относительности, мы с таким же правом можем считать, что система  $K_1$  движется относительно системы  $K$  со скоростью  $-v$ , и исходить в своих рассуждениях из полей  $E$  и  $H$  в системе  $K$ . Мы должны были бы получить те же формулы (143.1), только с измененным знаком у скорости  $v$ :

$$E_1 = E + vB, \quad H_1 = H + vD.$$

Однако если мы с помощью формул (143.1) выразим  $E_1$  и  $H_1$  через  $E$  и  $H$ , то получим выражения

$$(1 - \varepsilon_0\mu_0v^2)E_1 = E + vB, \quad (1 - \varepsilon_0\mu_0v^2)H_1 = H + vD,$$

которые отличаются от написанных выше. Эти выражения можно представить в более удобном виде. Произведение  $\varepsilon_0\mu_0$  имеет размерность, обратную размерности квадрата скорости. Поэтому

$$c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$$

есть некоторая скорость. Она равна  $c = 4 \cdot 10^8$  м/с, т.е. скорости света в вакууме. Такой результат не является случайным совпадением, а непосредственно следует из электромагнитной теории света (ср. § 240). Учитывая это обстоятельство, последние два соотношения можно записать в следующем виде:

$$(1 - \beta^2)E_1 = E + vB, \quad (1 - \beta^2)H_1 = H + vD,$$

где  $\beta \equiv v/c$  есть скорость относительного движения, выраженная в долях скорости света в вакууме.

Таким образом, формулы (143.1) не удовлетворяют принципу относительности. Хотя величина  $\beta^2$  обычно весьма мала по сравнению с единицей (даже для орбитального движения Земли  $\beta^2 \sim 10^{-8}$ ), это обстоятельство имеет принципиальное значение и указывает на то, что формулы (143.1) не вполне точны. Они справедливы только для медленных движений, для которых  $\beta^2 \ll 1$  (т.е.  $v^2 \ll c^2$ ). Однако для быстрых движений (например, для движений электронов и ионов в ускорителях, где мы имеем  $\beta \sim 1$ ) они уже неприменимы и должны быть заменены другими.

Формулы преобразования полей, пригодные для любых скоростей (вплоть до  $v = c$ ), были впервые найдены Лоренцем (преобразования Лоренца для электромагнитных полей) и имеют

вид

$$\begin{aligned} E_x &= E_{1x}, & H_x &= H_{1x}, \\ \sqrt{1 - \beta^2} E_y &= E_{1y} - vB_{1z}, & \sqrt{1 - \beta^2} H_y &= H_{1y} + vD_{1z}, \\ \sqrt{1 - \beta^2} E_z &= E_{1z} + vB_{1y}, & \sqrt{1 - \beta^2} H_z &= H_{1z} - vD_{1y}. \end{aligned} \quad (143.2)$$

Они позволяют найти электромагнитное поле  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в системе отсчета  $K$ , движущейся относительно другой системы  $K_1$  в направлении положительной оси  $X_1$  со скоростью  $v$ , если известно электромагнитное поле  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{H}_1$  в системе отсчета  $K_1$ . Позднее эти формулы были строго обоснованы как следствие принципа относительности в теории относительности Эйнштейна.

Легко убедиться, что преобразования Лоренца (143.2) удовлетворяют принципу относительности. Если систему (143.2) разрешить относительно полей  $E_1$  и  $H_1$ , то получатся те же самые выражения, с той только разницей, что знак у скорости изменится на обратный. Если  $\beta^2 \ll 1$ , то преобразования Лоренца переходят в формулы (140.3) и (140.6), установленные на опыте для медленных движений.

В качестве примера применения преобразований Лоренца исследуем, как изменяется электрическое поле заряда при движении. Для наблюдателя, относительно которого заряд покоится (система  $K_1$ ), линии напряженности электрического поля расходятся во всех направлениях с одинаковой плотностью (рис. 248 *a*). Для наблюдателя же, относительно которого заряд движется

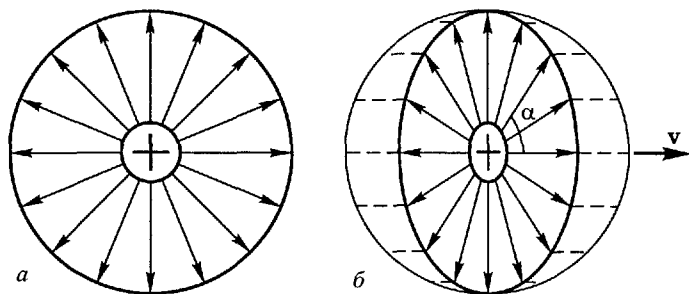


Рис. 248 Электрическое поле неподвижного (*a*) и движущегося (*b*) заряда

(система  $K$ ), электрическое поле заряда будет другим. Разложим это поле на две составляющие:  $E_t$ , параллельную скорости  $v$ , и  $E_n$ , перпендикулярную к скорости. Так как в нашем случае  $\mathbf{V}_{1x} = \mathbf{V}_{1y} = \mathbf{V}_{1z} = 0$ , то преобразования Лоренца дают

$$E_x = E_{1x}, \quad \sqrt{1 - \beta^2} E_y = E_{1y}, \quad \sqrt{1 - \beta^2} E_z = E_{1z}.$$

Следовательно,

$$E_t = E_x = E_{1t}, \quad E_n = \sqrt{E_y^2 + E_z^2} = E_{1n} / \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Для угла  $\alpha$ , составляемого в какой-либо точке поля линий напряженности с направлением скорости  $v$ , мы имеем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{E_n}{E_t} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{E_{1n}}{E_{1t}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \operatorname{tg} \alpha_1,$$

где  $\alpha_1$  — соответствующий угол наклона в случае покоящегося заряда. Так как  $\sqrt{1 - \beta^2} < 1$ , то  $\alpha > \alpha_1$ , т.е. при движении заряда линии напряженности поворачиваются, стремясь стать перпендикулярно к направлению движения (рис. 248 б). Нетрудно показать, что рис. 248 б можно получить из рис. 248 а путем сжатия всех линейных размеров в направлении движения в отношении  $1/\sqrt{1 - \beta^2}$ .

Таким образом, при движении электрического заряда относительно наблюдателя не только появляется магнитное поле, но и первоначальное электрическое поле также изменяется. Впрочем, это изменение становится заметным только при очень быстрых движениях, так как оно зависит от  $\beta^2$  (в то время как магнитное поле пропорционально первой степени  $\beta$ ).

# ЭЛЕКТРОННЫЕ И ИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ

---

## Г Л А В А XIV

### ПРИРОДА ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА В МЕТАЛЛАХ И ПОЛУПРОВОДНИКАХ

#### § 144. Измерение заряда электрона

Наиболее прямое определение заряда электрона было произведено в опытах Р. Милликена, в которых измерялись очень малые заряды, возникавшие на мелких частицах. Идея этих опытов заключалась в следующем. Согласно основным представлениям электронной теории заряд какого-либо тела возникает в результате изменения содержащегося в нем числа электронов (или положительных ионов, заряд которых равен или кратен заряду электрона). Вследствие этого заряд любого тела должен изменяться только скачкообразно и притом такими порциями, которые содержат целое число зарядов электрона. Поэтому установив на опыте дискретный характер изменения электрического заряда, можно получить тем самым и подтверждение существования электронов, и определить заряд одного электрона (элементарный заряд).

Понятно, что в подобных опытах измеряемые заряды должны быть очень малыми и состоять лишь из небольшого числа зарядов электрона. В противном случае добавление или отнятие одного электрона будет приводить только к небольшому в процентном отношении изменению общего заряда и поэтому может легко ускользнуть от наблюдателя вследствие неизбежных ошибок при измерении заряда.

В опытах было обнаружено, что заряд частичек действительно изменяется скачками, причем изменения заряда всегда были кратны определенному конечному заряду.

Схема опыта Милликена показана на рис. 249. Основной частью прибора является тщательно изготовленный плоский конденсатор, пластины которого присоединяются к источнику напряжения в несколько тысяч вольт. Напряжение между пластинами можно изменять и точно измерять. Мелкие капельки масла, получаемые с помощью специального пульверизатора, попадают через отверстие в верхней пластине в пространство между

пластинами. Движение отдельной капельки масла наблюдают в микроскоп. Конденсатор заключен в защитный кожух, поддерживаемый при неизменной температуре, предохраняющей капельку от конвекционных токов воздуха.

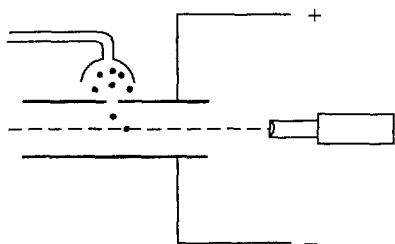


Рис 249. Схема опыта Милликена

Капельки масла при распылении заряжаются, и поэтому на каждую действуют две силы: результирующая силы тяжести и выталкивающей (архимедовой) силы и сила, вызванная электрическим полем. Если  $U$  —

напряжение между пластинами конденсатора, а  $d$  — расстояние между ними, то напряженность поля в конденсаторе есть  $E = U/d$ . Поэтому на капельку с зарядом  $q$  действует сила поля

$$F_E = qE = q \frac{U}{d}.$$

Результирующая силы тяжести капельки и выталкивающей (архимедовой) силы со стороны окружающего воздуха равна

$$F_g = \frac{4}{3} \pi a^3 (\delta - \delta_0) g,$$

где  $a$  — радиус капельки,  $\delta$  — плотность масла,  $\delta_0$  — плотность воздуха при условиях опыта,  $g$  — ускорение свободного падения.

Подбирая должным образом знак заряда на пластинах конденсатора, можно сделать направление силы  $F_E$  противоположным направлению  $F_g$ . Если при этом  $F_E > F_g$ , то капля будет двигаться вертикально вверх. Если  $F_E < F_g$ , то капля будет опускаться. Изменяя напряжение на конденсаторе, можно, очевидно, добиться и такого положения, чтобы обе силы были равны друг другу:

$$\frac{4}{3} \pi a^3 (\delta - \delta_0) g = q \frac{U}{d}. \quad (144.1)$$

В этом случае капля не будет ни опускаться, ни подниматься, а будет находиться в равновесии. Поэтому, определяя на опыте напряжение  $U$ , соответствующее равновесию капельки, и зная ее радиус  $a$ , можно по формуле (144.1) найти заряд капельки.

Для определения радиуса капельки наблюдают скорость ее движения в отсутствие электрического поля. Как известно из механики, на шар, движущийся с малой скоростью в вязкой среде, действует сила трения, пропорциональная скорости (закон Стокса):

$$F_{\text{тр}} = 6\pi\eta av.$$

Здесь  $v$  — скорость движения шара,  $\eta$  — вязкость среды. При установившемся движении шар приобретает постоянную ско-

рость, при которой сила трения равна силе  $F_g$ :

$$\frac{4}{3}\pi a^3(\delta - \delta_0)g = 6\pi\eta av. \quad (144.2)$$

Измеряя скорость равномерного падения капельки  $v$  (определяя время, за которое капелька проходила расстояние между двумя нитями, видимыми в поле зрения микроскопа), можно по формуле (144.2) определить радиус капельки  $a$ .

Практически удобнее не уравновешивать капельку, а измерять скорость ее движения. Если при наличии поля капелька приобретает скорость  $v_1$ , направленную вверх, то

$$qU/d - \frac{4}{3}\pi a^3(\delta - \delta_0)g = 6\pi\eta av_1.$$

Скорость равномерного падения капельки  $v$  в отсутствие электрического поля определяется уравнением (144.2). Из этих двух уравнений можно исключить радиус капельки  $a$ , и тогда для заряда  $q$  получается выражение

$$q = \frac{4\pi}{3} \left( \frac{9}{2} \eta \right)^{3/2} \frac{(v_1 + v)\sqrt{v}}{\sqrt{(\delta - \delta_0)g}} \frac{d}{U}. \quad (144.3)$$

Поэтому, измеряя скорость равномерного движения капельки при наличии поля ( $v_1$ ) и без поля ( $v$ ), можно найти ее заряд по формуле (144.3).

При точных измерениях заряда приходится еще учитывать, что для очень малых капель (радиус которых невелик по сравнению со средним свободным пробегом атомов газа) закон Стокса требует поправки. Более точное выражение для силы трения имеет вид

$$F_{\text{тр}} = \frac{6\pi\eta av}{1 + b/ap}, \quad (144.4)$$

где  $p$  — давление газа,  $b$  — постоянная. Если давление  $p$  измерено в см рт. ст.,  $a$  — в см, то для воздуха  $b = 0,000617$  при температуре  $23^\circ\text{C}$ . Из формулы (144.4) видно, что для введения необходимой поправки в выражение (144.3) нужно заменить в нем вязкость  $\eta$  на  $\frac{\eta}{1 + b/ap}$ .

В опытах Милликена сначала определяли заряд капельки  $q_0$ , полученный ею при распылении. Затем в пространстве между обкладками создавались ионы, для чего воздух в конденсаторе подвергался действию рентгеновских лучей, ультрафиолетовых лучей или излучения радиоактивных препаратов. Ионы оседали на капельку, ее заряд изменялся и принимал значения  $q_1$ ,  $q_2$  и т.д. Сравнивая найденные заряды, а также их изменения  $(q_1 - q_0)$ ,  $(q_2 - q_1)$ , ..., можно определить общий наибольший делитель этих количеств, который, очевидно, и является зарядом электрона.

Наряду с рассмотренным существуют и другие методы определения заряда электрона. На основании сопоставления всех экспериментальных данных в настоящее время считают, что наиболее точное значение заряда электрона равно

$$e = 1,602189 \cdot 10^{-19} \text{ Кл.}$$

### § 145. Природа носителей заряда в металлах

Выше мы неоднократно говорили, что электрический ток в металлах есть движение электронов и что ионы металла не принимают участия в переносе электрического заряда. Сейчас мы рассмотрим опытные доказательства этого.

Прежде всего отметим, что если бы при электрическом токе происходило движение ионов, то электрический ток в металлах должен был бы обязательно сопровождаться переносом вещества металла. Чтобы проверить, имеет ли место это явление, Рике произвел специальные опыты, в которых электрический ток проходил в течение года через три поставленных друг на друга цилиндра — медный, алюминиевый и медный. Несмотря на то, что общий заряд, прошедший через цилиндры, достигал огромного значения около 3,5 МКл, никакого проникновения металлов друг в друга обнаружено не было и масса цилиндров сохранилась с погрешностью до  $\pm 0,03$  мг.

Наиболее убедительное доказательство электронной природы тока в металлах было получено в опытах с инерцией электронов. Идею этих опытов разъясняет рис. 250. Представим себе

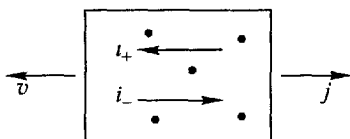


Рис. 250. Идея опытов с инерцией электронов

кусочек незаряженного металла, движущийся с постоянной скоростью  $v$ . Вместе с металлом будут двигаться с той же скоростью и электроны, и поэтому никакого движения электронов относительно кристаллической решетки, а следовательно, и электрического тока не будет.

Однако электроны, помимо заряда, обладают еще и массой, и поэтому им присуща определенная инерция. При всяком изменении скорости движения металла электроны будут либо отставать от движения решетки, либо его опережать, отчего возникает электрический ток. Это явление можно сравнить с толчками, испытываемыми пассажирами трамвая при резкой остановке вагона или резком трогании с места.

Легко видеть, что направление этого тока зависит от знака заряда подвижных частиц в металле. Так, например, при торможении металла (ускорение  $j$  направлено слева направо, рис. 250) частицы будут опережать решетку и двигаться относительно нее справа налево. Если частицы несут положительный заряд, то и возникающий ток  $i_+$  будет направлен также справа налево. Если же частицы заряжены отрицательно, то направление тока  $i_-$  будет противоположно. Поэтому, исследуя на опыте направление возникающего тока, можно определить знак носителей заряда в металлах. Измеряя же еще и значение заряда, пере-



несенного этим током, можно определить отношение заряда к массе  $e/m$  носителей заряда, а следовательно, и установить их природу.

Идея этого опыта была высказана в 1913 г. Л.И. Мандельштамом и Н.Д. Папалекси. Они произвели качественные опыты и установили, что в катушке с проволокой, совершающей вращательные колебания вокруг своей оси, действительно возникает переменный ток. Затем этот опыт был предложен вновь Г. Лоренцем и осуществлен с количественными результатами Толменом и Стюартом в 1916 г.

Схема опыта Толмена и Стюарта показана на рис. 251. Катушка с большим числом витков тонкой проволоки приводилась в быстрое вращение вокруг своей оси. Концы обмотки были присоединены к чувствительному баллистическому гальванометру при помощи длинных гибких проводов, скручивающихся при вращении катушки. После раскручивания катушки она резко тормозилась специальным приспособлением. Общая длина обмотки составляла примерно 500 м, а линейная скорость движения проволоки достигала 300 м/с. При измерениях тщательно устранялось действие магнитного поля Земли, которое могло бы вызвать появление индукционных токов.

Опыты показали, что при торможении катушки в цепи действительно возникает кратковременный ток, а его направление соответствует отрицательно заряженным частицам. В этих опытах было определено отношение заряда к массе носителей заряда  $e/m$ . При помощи простых рассуждений легко показать, что заряд  $q$ , протекающий по цепи за время торможения катушки, выражается формулой

$$q = \frac{m}{e} \frac{v_0 l}{R}, \quad (145.1).$$

где  $v_0$  — начальная линейная скорость проволоки,  $l$  — ее длина,  $R$  — сопротивление цепи. Поэтому, измеряя заряд  $q$  баллистическим гальванометром и зная остальные (легко определяемые) величины  $v_0$ ,  $l$  и  $R$ , можно найти значение  $e/m$ .

Зная значение элементарного заряда  $e$ , можно было найти массу  $m$  носителей заряда в металлах. Она оказалась порядка  $10^{-30}$  кг, примерно в 2000 раз меньше массы самого легкого атома — водорода ( $m_H = 1,67 \cdot 10^{-27}$  кг). Это показало, что носителями заряда в металлах никоим образом не могут быть заряженные атомы (ионы). С другой стороны, найденное значение  $e/m$  близко к значению  $e/m$  для электронов, получаемо-

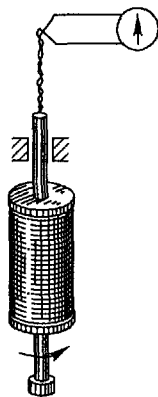


Рис. 251. Схема опыта Толмена и Стюарта

му другими методами, в частности по отклонению электронов в электрических и магнитных полях.

Формула (145.1) легко выводится следующим образом. При торможении катушки на электроны действует сила инерции, которая и является в данном случае сторонней силой (§ 64). При ускорении проволоки  $dv/dt$  на один электрон действует сила

$$F = -m \frac{dv}{dt}.$$

Сила, отнесенная к единице заряда, т.е. напряженность поля сторонних сил  $E^*$ , равна

$$E^* = -\frac{m}{e} \frac{dv}{dt}.$$

Отсюда, пользуясь формулой (69.2), находим ЭДС, развивающуюся в цепи при торможении катушки:

$$\mathcal{E} = -\frac{m}{e} \frac{dv}{dt} l,$$

где  $l$  — длина проволоки катушки. Если  $R$  — сопротивление цепи, то сила тока, вызываемого этой ЭДС, равна

$$i = -\frac{m}{e} \frac{l}{R} \frac{dv}{dt}.$$

Поэтому заряд, прошедший по цепи за полное время торможения катушки, определяется формулой

$$q = \int_{v_0}^0 i dt = -\frac{m}{e} \frac{l}{R} \int_{v_0}^0 dv = \frac{m}{e} \frac{lv_0}{R}.$$

## § 146. Причина электрического сопротивления

Результаты опытов, описанных в предыдущем параграфе, показывают, что в металлах имеются электроны, способные перемещаться по металлу. Такие электроны получили название *электронов проводимости*.

Так как в отсутствие тока объемных зарядов в металлах нет (в проводнике постоянного сечения их нет и при наличии тока), то отсюда можно заключить, что в металлах имеются еще и положительные заряды, которые, однако, не принимают участия в образовании тока. Положительные заряды металла представляют собой ионы, образующие кристаллическую решетку металла.

Электроны проводимости движутся в металлах не свободно, но испытывают соударения с ионами решетки. В отсутствие внешнего электрического поля электроны совершают только беспорядочное тепловое движение — каждый электрон описывает сложную траекторию, подобную траектории атома газа или частицы, совершающей броуновское движение (рис. 252 а). Вследствие беспорядочности теплового движения количество

электронов, движущихся в любом направлении, в среднем всегда равно числу электронов, перемещающихся в противоположном направлении. Поэтому в отсутствие внешнего поля суммарный заряд, переносимый электронами в любом направлении, равен нулю.

При наложении внешнего электрического поля электроны получают дополнительное упорядоченное движение в направлении, противоположном направлению поля (так как заряд электронов отрицательный; рис. 252 б). Поэтому фактическое движение электронов представляет собой сумму беспорядочного и упорядоченного движений, а следовательно, появляется преимущественное направление движения электронов (рис. 252 в). В этом случае число электронов, движущихся противоположно полю, будет больше числа электронов, перемещающихся в направлении поля, так что возникнет перенос электрического заряда, т.е. электрический ток.

Рассмотренная картина движения электронов приводит также к объяснению электрического сопротивления металлов. Между двумя последовательными соударениями электроны движутся под действием поля с ускорением и приобретают определенную энергию. Эта энергия передается полностью или частично положительным ионам при соударениях и превращается в энергию беспорядочного колебания ионов, т.е. в тепло. Поэтому при наличии тока металлы нагреваются. Точно так же после исчезновения внешнего поля упорядоченное движение электронов вследствие соударений быстро превращается в беспорядочное тепловое движение, и электрический ток прекращается. Таким образом, движение электронов в металлах происходит с трением, которое вызвано соударениями и подобно внутреннему трению в газах. Мы видим, что причина электрического сопротивления заключается в соударениях электронов с положительными ионами решетки металла.

Трение электронов в металлах приводит не только к выделению тепла Джоуля–Ленца, но и к обмену импульсами между

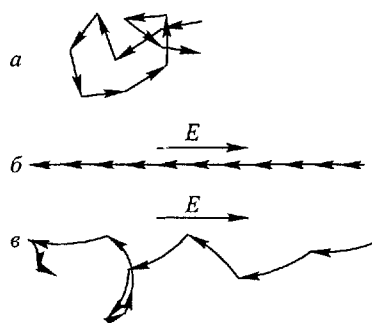


Рис. 252. Движение электронов в металле: а) беспорядочное тепловое движение в отсутствие электрического поля (отрезки пути между столкновениями показаны для простоты одинаковыми); б) составляющая движения электронов под действием электрического поля; в) фактическое движение электронов

электронами проводимости и решеткой металла. Это можно продемонстрировать на опыте, изображенном на рис. 253. Металлический диск, способный вращаться с малым трением вокруг

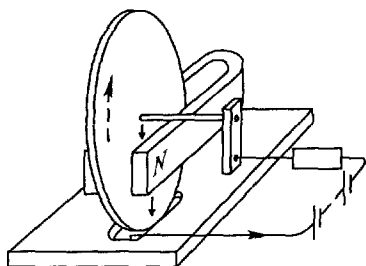


Рис. 253. Демонстрация существования трения электронов в металлах

горизонтальной оси, помещен между полюсами магнита. Диск включен в электрическую цепь, так что в нем имеется ток, идущий между осью и краем диска, погруженным в чашку со ртутью. При наличии тока диск приходит во вращение, направление которого изменяется при перемене направления тока. На электроны, движущиеся в нижней половине диска, действует сила Лоренца (§ 88), направленная перпендикулярно к току и к магнитному полю. Если бы электроны двигались без трения, то сила Лоренца лишь искривляла бы траекторию электронов внутри металла, но диск оставался бы в покое. Вследствие же трения электронов получаемое ими количество движения передается диску и поэтому он приходит во вращение.

### § 147. Классическая электронная теория металлов

Объяснение различных свойств вещества существованием и движением в нем электронов составляет содержание электронной теории. В классической электронной теории металлов предполагается, что движение электронов подчиняется законам классической механики Ньютона. Далее, в этой теории пренебрегают взаимодействием электронов между собой, а взаимодействие электронов с положительными ионами сводят только к соударениям. Иными словами, электроны проводимости рассматривают как электронный газ, подобный идеальному атомарному газу молекулярной физики.

Такой электронный газ должен подчиняться всем законам идеального газа и, в частности, закону равномерного распределения энергии по степеням свободы, согласно которому средняя кинетическая энергия теплового движения, приходящаяся на каждую степень свободы, равна  $(1/2)kT$  ( $k$  — постоянная Больцмана, равная  $1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К, а  $T$  — термодинамическая температура газа). Так как свободный электрон обладает тремя степенями свободы, то средняя энергия беспорядочного теплового движения, приходящаяся на один электрон, равна

$$\frac{1}{2}mv_T^2 = \frac{3}{2}kT, \quad (147.1)$$

где  $\overline{v_T^2}$  — среднее значение квадрата скорости теплового движения.

Несмотря на эти допущения, которые, как мы увидим ниже, являются только весьма приближенными, классическая электронная теория качественно объясняет многие законы электрического тока.

**Объяснение закона Ома.** Чтобы выяснить физическую сущность этого объяснения и упростить расчеты, будем предполагать, что время свободного пробега  $\tau$  между двумя последовательными соударениями одинаково для всех электронов. Далее будем считать, что при каждом соударении электрон передает решетке накопленную энергию полностью и поэтому после соударения начинает движение без начальной скорости.

Вычислим плотность тока  $j$ , возникающего в металле под действием электрического поля с напряженностью  $E$ . Согласно сказанному в § 53 имеем

$$j = ne\bar{v}, \quad (147.2)$$

где  $n$  — концентрация электронов проводимости,  $e$  — заряд электрона, а  $\bar{v}$  — средняя скорость упорядоченного движения электронов (скорость дрейфа).

На каждый электрон действует сила, равная  $eE$ , и электрон приобретает ускорение  $eE/m$ . Поэтому к концу свободного пробега скорость электрона равна

$$v_{\text{макс}} = \frac{eE}{m} \tau.$$

Так как электрон между соударениями движется равноускоренно, то среднее значение скорости равно половине ее максимального значения:

$$\bar{v} = \frac{eE}{2m} \tau.$$

Скорость дрейфа оказывается пропорциональной напряженности поля  $E$ . Поэтому можно положить

$$\bar{v} = bE, \quad (147.3)$$

где  $b = (e/2m)\tau$  не зависит от  $E$ . Величина  $b$  называется *подвижностью* электронов. Она равна скорости дрейфа в поле с напряженностью, равной единице. Если измерять скорость в м/с, а напряженность поля в В/м, то подвижность будет выражена в  $\text{м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$ .

В действительности, конечно, времена свободного пробега у различных электронов не одинаковы. Расчет показывает, что при учете этого обстоятельства выражение для подвижности есть

$$b = (e/m)\bar{\tau}, \quad (147.4)$$

где  $\bar{\tau}$  — среднее время свободного пробега для всей совокупности электронов.

Подставляя найденное значение  $\bar{v}$  в (147.2), находим

$$j = \frac{ne^2\tau}{2m} E. \quad (147.5)$$

Мы видим, что плотность тока  $j$  оказывается пропорциональной напряженности поля  $E$ , а это и выражается законом Ома (§ 61). Для удельной электрической проводимости  $\lambda$  получается выражение

$$\lambda = \frac{1}{2} \frac{ne^2}{m} \tau. \quad (147.6)$$

Оно показывает, что электропроводность тем больше, чем больше концентрация электронов проводимости и чем больше время свободного пробега  $\tau$ . Это и понятно, так как чем больше  $\tau$ , тем меньшую помеху представляют соударения для упорядоченного движения электронов.

При учете распределения времен свободного пробега удельная электрическая проводимость выражается формулой

$$\lambda = \frac{ne^2}{m} \bar{\tau}. \quad (147.6a)$$

**Объяснение закона Джоуля–Ленца.** К концу свободного пробега электроны приобретают под действием поля кинетическую энергию

$$\frac{1}{2} m v_{\text{макс}}^2 = \frac{1}{2} \frac{e^2 \tau^2}{m} E^2.$$

Согласно сделанному предположению вся эта энергия передается решетке при соударении и переходит в тепло

В единицу времени каждый электрон испытывает  $1/\tau$  соударений, а следовательно, выделяет тепла во столько же раз больше. Так как в каждой единице объема имеется  $n$  электронов, то количество теплоты  $Q_1$ , выделяемое в единице объема металла в 1 с, равно

$$Q_1 = \frac{1}{2} \frac{ne^2\tau}{m} E^2.$$

Воспользовавшись формулой (147.6), получаем

$$Q_1 = \lambda E^2 = \frac{1}{\rho} E^2, \quad (147.7)$$

где  $\rho = 1/\lambda$  — удельное сопротивление металла.

Формула (147.7) выражает закон Джоуля–Ленца в дифференциальной форме.

**Связь между теплопроводностью и электропроводностью металлов.** Уже давно было замечено, что металлы, обладающие большей электропроводностью, имеют и лучшую теплопроводность, и наоборот. Видеман и Франц на основании опытных данных пришли к заключению, что

отношение коэффициента теплопроводности  $K$  к удельной электрической проводимости  $\lambda$  для всех металлов при одинаковой температуре одинаково и увеличивается пропорционально термодинамической температуре (закон Видемана-Франца):

$$K/\lambda = aT, \quad (147.8)$$

где  $a$  не зависит от рода металла.

Классическая электронная теория легко объясняет и эту закономерность. Действительно, электроны проводимости, перемещаясь в металле, переносят с собой не только свой электрический заряд, но и присущую им энергию беспорядочного теплового движения, т.е. осуществляют перенос тепла. В металлах концентрация электронов весьма велика (см. § 150), и все тепло практически переносится электронами, а ионная решетка принимает лишь небольшое участие в этом процессе. Поэтому те металлы, которые хорошо проводят электричество, являются и хорошими проводниками тепла.

Как известно из молекулярной физики, кинетическая теория газов дает для коэффициента теплопроводности идеального одноатомного газа выражение

$$K = nk\bar{v}_T\bar{l}/2, \quad (147.9)$$

где  $n$  — число атомов в единице объема,  $k$  — постоянная Больцмана,  $\bar{v}_T$  — средняя скорость теплового движения,  $\bar{l}$  — средняя длина свободного пути атомов. Такая же формула должна быть справедлива и для коэффициента теплопроводности электронного газа, только в этом случае  $n$ ,  $\bar{v}_T$  и  $\bar{l}$  должны обозначать концентрацию, тепловую скорость и средний пробег электронов в металле. Далее, для  $\bar{l}$  можно положить  $\bar{l} = \bar{v}_T\tau$ . Здесь мы пренебрегаем скоростью дрейфа  $\bar{v}$  по сравнению с тепловой скоростью  $\bar{v}_T$ . Это действительно можно сделать, так как, вследствие малой подвижности электронов в металлах (см. § 150), даже для очень сильных электрических полей  $\bar{v} \ll \bar{v}_T$ . Тогда из формул (147.9) и (147.6) находим

$$\frac{K}{\lambda} = \frac{nk(\bar{v}_T)^2\tau/2}{(ne^2/m)\tau/2} = \frac{mk(\bar{v}_T)^2}{e^2}.$$

Полагая приближенно  $(\bar{v}_T)^2 \approx \bar{v}_T^2$  и пользуясь соотношением (147.1), получаем

$$K/\lambda = 3(ke)^2T, \quad (147.10)$$

т.е. закон Видемана-Франца. При этом постоянная  $a$  оказывается равной  $a = 3(k/e)^2$ . Она определяется только универсальными постоянными  $k$  и  $e$  и поэтому не зависит от природы металла. Теоретическое значение  $a$  хорошо согласуется с опытными данными.

Таким образом, классическая электронная теория хорошо объясняет существование электрического сопротивления металлов, законы Ома и Джоуля-Ленца, позволяет выразить удельную электрическую проводимость через атомарные постоянные металла, позволяет понять связь между теплопроводностью и электропроводностью.

Однако в некоторых вопросах классическая электронная теория приводит к выводам, находящимся в противоречии с опытом. Наиболее ярким примером является сверхпроводимость.

## § 148. Сверхпроводимость

Согласно классической электронной теории удельное сопротивление металлов должно монотонно уменьшаться при охлаждении, оставаясь при всех температурах конечным. Такая температурная зависимость сопротивления действительно наблюдается на опыте при сравнительно высоких температурах. Однако если сделать температуру достаточно низкой (несколько кельвинов), то эта зависимость становится совсем иной. Прежде всего оказывается, что удельное сопротивление перестает зависеть от температуры и достигает некоторого предельного значения. Оно различно для разных веществ и даже для разных образцов одного и того же вещества. Это остаточное сопротивление особенно велико у сплавов, но существует и в чистых металлах. Опыт показывает, что остаточное сопротивление тем меньше, чем чище металл и чем меньше структурных дефектов содержит исследуемый образец.

Если понижать температуру еще больше, то в некоторых веществах наблюдается удивительное явление *сверхпроводимости*, открытое Камерлинг-Оннесом в 1911 г. При некоторой определенной температуре, различной для разных веществ, удельное сопротивление внезапно, скачком, уменьшается практически до нуля. В табл. 9 приведены температуры перехода в сверхпроводящее состояние  $T_{кр}$  для некоторых веществ.

Таблица 9

Вещество	$T_{кр}$ , К	Вещество	$T_{кр}$ , К
Титан	0,4	Ртуть	4,1
Кадмий	0,5	Ванадий	5,3
Цинк	0,38	Свинец	7,2
Алюминий	1,2	Ниобий	9,3
Олово	3,7	$Nb_3Sn$	18

Сверхпроводимость наблюдается не только у элементов, но и во многих химических соединениях и сплавах, причем сами элементы, входящие в состав сверхпроводящего соединения, могут и не являться сверхпроводниками.

Вещества в сверхпроводящем состоянии обладают исключительно необычными свойствами. Во-первых, в сверхпроводниках однажды возбужденный электрический ток может длительно существовать без источника тока. Это происходит потому, что вследствие исчезновения сопротивления время затухания тока  $T = L/r$  (ср. § 95) становится огромным. Такое явление наблюдали в первых же опытах со сверхпроводниками: небольшой замкнутый контур из сверхпроводника погружали в сосуд с



жидким гелием и возбуждали в контуре ток с помощью электромагнитной индукции. Этот ток обнаруживали по отклонению магнитной стрелки, помещенной вблизи сосуда, причем стрелка оставалась в отклоненном состоянии в течение многих суток.

На рис. 254 показана схема другого опыта со сверхпроводниками. Здесь сверхпроводник соединен с гальванометром, но замкнут в точках  $a$  и  $b$  проволокой, находящейся также в сверхпроводящем состоянии. После возбуждения тока в сверхпроводнике с помощью электромагнитной индукции этот ток циркулирует лишь по замкнутой цепи  $abca$  из сверхпроводника и не ответвляется в гальванометр, который поэтому не показывает никакого отклонения. Если же через некоторое время разорвать при помощи нити  $H$  перемычку  $ab$ , то ток устремляется по единственно возможному пути — через гальванометр, который обнаруживает кратковременный отброс.

Второе важное свойство сверхпроводников заключается в том, что *внутри вещества в сверхпроводящем состоянии магнитная индукция всегда равна нулю*.

Положим, что какое-либо тело из сверхпроводника мы сначала охладили и перевели в сверхпроводящее состояние, а затем включили внешнее магнитное поле, индукция которого (в отсутствие тела) есть  $\mathbf{V}_a = \mu_0 \mathbf{H}_a$ . При включении магнитного поля в сверхпроводнике возникнут индукционные токи, создающие дополнительную индукцию  $\mathbf{V}_i = \mu_0 \mathbf{H}_i$  (рис. 255  $a$ ), которая в соответствии с законом Ленца будет компенсировать внешнюю индукцию  $\mathbf{V}_a$ . В обычном проводнике компенсирующие индукционные токи быстро затухают, и остается лишь поток, обусловленный намагничивающей катушкой. В случае же сверхпроводника компенсирующие токи не затухают вовсе, и поэтому результирующая индукция внутри тела все время будет  $\mathbf{V} = \mathbf{V}_a + \mathbf{V}_i = 0$ . Во внешнем же пространстве линии результирующей индукции будут иметь вид, показанный на рис. 255  $b$ : они выталкиваются из тела и его огибают.

Это свойство сверхпроводящего состояния связано не только с исчезновением электрического сопротивления. Представим себе проводник, единственное отличие которого от нормального металла заключается лишь в том, что его сопротивление равно

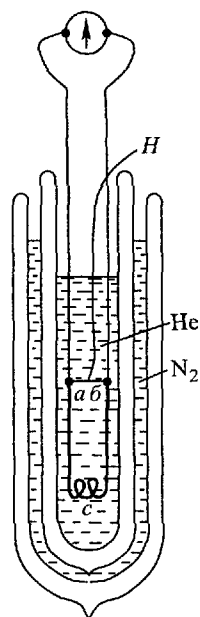


Рис. 254. Опыт для обнаружения длительного тока в сверхпроводнике

нулю. Положим далее, что мы сначала создаем внешнее магнитное поле и только потом охлаждаем проводник до исчезновения его сопротивления. Так как при этом внешнее поле не изменяется, то и индукционные токи возникать не будут, а следовательно, и после исчезновения сопротивления магнитный поток внутри проводника должен сохраниться. Опыт, однако, показывает, что в сверхпроводниках и в этом случае магнитный поток исче-

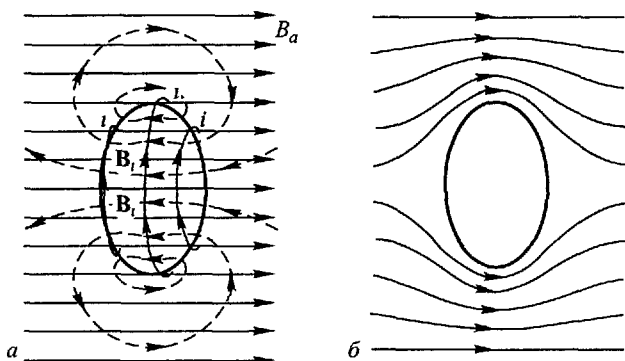


Рис. 255 Сверхпроводящее тело в магнитном поле

зает. Равенство нулю магнитной индукции есть специфическое свойство сверхпроводящего состояния. Напряженность же магнитного поля, определяемая лишь намагничивающей катушкой, может и не равняться нулю. Можно сказать, что сверхпроводящее вещество является идеальным диамагнетиком с магнитной восприимчивостью  $\kappa = -1$  и магнитной проницаемостью  $\mu = 1 + \kappa = 0$ .

Из этого следует, что плотность тока в толще массивного сверхпроводника равна нулю. Действительно, магнитная индукция внутри тела есть

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H}_a + \mathbf{H}_i).$$

Для каждого из полей  $\mathbf{H}_a$  и  $\mathbf{H}_i$  справедлива теорема о магнитном напряжении, и поэтому, вычисляя интеграл от  $\mathbf{B}$  по любому замкнутому контуру  $L$ , мы получим

$$\oint_L B_l dl = \mu_0 i.$$

Здесь  $i$  — полная сила тока через любую поверхность, ограниченную контуром  $L$ . Если  $L$  целиком лежит внутри сверхпроводника, то интеграл по контуру равен нулю, так как в каждой точке контура  $B_l = 0$ , а значит,  $i = 0$ . В сверхпроводящем сплошном теле ток может быть сосредоточен только в тонком поверхностном слое.

Если тело имеет форму длинной цилиндрической проволоки, то магнитное поле  $H$  во внешнем пространстве не зависит от распределения тока по сечению проволоки, а определяется только полной силой тока. Поэтому и для сверхпроводящего провода  $H$  выражается прежней формулой (81.5), а индукция  $B = \mu_0 H$ . У поверхности прямого провода напряженность магнитного поля равна

$$H_S = \frac{i}{2\pi a},$$

где  $a$  — радиус провода. При переходе извне внутрь провода  $B$  быстро (экспоненциально) уменьшается до 0. Распределение индукции в пространстве показано на рис. 256. Расстояние  $d$  от поверхности, на котором  $B$  уменьшается в  $e$  раз, носит название глубины проникновения индукции. Она различна для разных веществ и увеличивается с повышением температуры. Ее типичные значения имеют порядок  $10^{-5}$  см.

Третья важная особенность сверхпроводимости состоит в том, что магнитное поле разрушает состояние сверхпроводимости. Чем сильнее охлажден сверхпроводник ниже температуры перехода в сверхпроводящее состояние, тем больше и «критическое» магнитное поле, при котором исчезает сверхпроводимость. При температуре перехода в сверхпроводящее состояние критическое поле равно нулю.

Магнитным полем, разрушающим сверхпроводимость, может быть и поле самого тока в сверхпроводнике. Когда сила тока становится такой, что магнитное поле у поверхности провода достигает критического значения, сверхпроводимость исчезает. Из сказанного ясно, что эта максимальная (критическая) сила тока при температуре перехода равна нулю, но увеличивается по мере понижения температуры. Кроме этого, для данного вещества и данной температуры она прямо пропорциональна диаметру провода. Укажем для примера, что у олова при 1 К  $H_{кр}$  составляет около  $2 \cdot 10^4$  А/м. Поэтому для оловянной проволоки диаметром  $2a = 3$  мм критическая сила тока при этой температуре равна

$$i_{кр} = 2\pi a H_{кр} = 2\pi \cdot 1,5 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^4 \approx 180 \text{ А.}$$

Влияние магнитного поля на сверхпроводимость имеет интересную особенность. Если форма тела такая, что размагничивающий фактор  $\beta$  (§ 107) равен нулю, то при увеличении  $H$  внутри тела выше  $H_{кр}$  вещество пере-

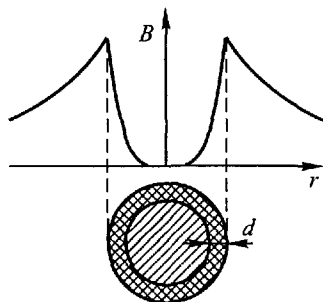


Рис 256 Магнитная индукция прямого провода в сверхпроводящем состоянии

ходит в нормальное состояние сразу во всем объеме. Это имеет место, например, для прямых проволок, параллельных направлению поля. Если же  $\beta \neq 0$ , то при  $H = H_{кр}$  тело переходит сначала в промежуточное состояние, в котором одновременно сосуществуют малые области в сверхпроводящем и в нормальном состояниях. Промежуточное состояние существует в некотором интервале магнитных полей и только при достаточном увеличении  $H$  нормальная проводимость устанавливается во всем объеме.

Описанные выше магнитные свойства характерны для так называемых сверхпроводников 1-го рода, к которым принадлежит большинство чистых металлов. Однако существуют и сверхпроводники другого типа (сверхпроводники 2-го рода), у которых магнитные свойства более сложны.

Совокупность имеющихся данных о сверхпроводимости позволяет заключить, что электроны в сверхпроводящем веществе ведут себя подобно смеси двух жидкостей, одна из которых состоит из сверхпроводящих электронов, а другая — из нормальных электронов.

Концентрации сверхпроводящих электронов  $n_c$  и нормальных  $n_n$  зависят от температуры. При  $T \geq T_{кр}$  концентрация  $n_c = 0$  и все электроны находятся в нормальном состоянии. При  $T \rightarrow 0$   $n_n \rightarrow 0$  и все электроны становятся сверхпроводящими.

Вещество в сверхпроводящем и нормальном состояниях с термодинамической точки зрения можно рассматривать как разные фазы данного вещества, а превращение сверхпроводящего вещества в нормальное — как фазовый переход. Однако, в отличие, например, от фазовых переходов пар-жидкость или жидкость-твердое тело, скрытая теплота такого перехода в отсутствие магнитного поля равна нулю. Теплоемкость же вещества при  $T = T_{кр}$  меняется скачкообразно. Такие фазовые переходы называются *переходами 2-го рода*. Если же переход из сверхпроводящего состояния в нормальное происходит во внешнем магнитном поле, т.е. при  $T < T_{кр}$ , то для перехода при неизменной температуре необходимо подведение тепла извне. В этом случае скрытая теплота перехода уже не равна нулю, и мы имеем фазовый *переход 1-го рода*.

## § 149. Пределы применимости классической электронной теории металлов

Вторым примером несостоятельности классической электронной теории может служить теория теплоемкости металлов.

Согласно основному допущению классической электронной теории (§ 147) средняя тепловая энергия каждого электрона равна  $(3/2)kT$ . Если  $N'$  есть число электронов проводимости в 1 моле металла, то тепловая энергия этих электронов должна быть равна

$$W' = N' \cdot \frac{3}{2}kT.$$

Число электронов проводимости в металлах по порядку величины равно числу атомов (см. § 150), а значит,  $N'$  равно прибли-

зительно постоянной Авогадро  $N = 6,02 \cdot 10^{23}$  моль<sup>-1</sup>. Поэтому

$$W' \approx \frac{3}{2} NkT = \frac{3}{2} RT,$$

где  $R$  — газовая постоянная, рассчитанная на 1 моль. Отсюда следует, что электронный газ в 1 моле металла должен иметь теплоемкость при постоянном объеме  $C'_V = dW'/dT \approx (3/2)R$ , т.е. такую же, как и 1 моль идеального одноатомного газа.

Теплоемкость всего металла складывается из теплоемкости его кристаллической решетки и теплоемкости электронного газа. Согласно кинетической теории тепла молярная (т.е. рассчитанная на 1 моль) теплоемкость одноатомных кристаллов равна  $C_V = 3R$ . Поэтому следовало бы ожидать, что молярная теплоемкость металлов будет близка к  $4,5R$ . Однако опыт показывает, что она равна приблизительно  $3R$ , т.е. для металлов, так же как и для диэлектрических кристаллов, хорошо выполняется закон Дюлонга и Пти. Таким образом, наличие электронов проводимости практически не сказывается на теплоемкости, что непонятно с точки зрения классической электронной теории.

Помимо указанных, имеются и другие расхождения между выводами классической электронной теории и опытом.

Одна из причин расхождений заключается в том, что движение электронов в металлах подчиняется не законам классической механики, а более сложным законам квантовой механики. А эта последняя показывает, что движение электронов в периодическом поле потенциала решетки кристалла может существенно отличаться от предсказываемого классической механикой.

Далее, в классической электронной теории предполагается, что электроны проводимости подчиняются, как и атомы газа, законам статистики Максвелла–Больцмана. В действительности же для электронов внутри металла справедлива иная, квантовая статистика, и они подчиняются другому закону распределения (ср. § 155).

И, наконец, в классической электронной теории не учитывается взаимодействие электронов друг с другом, а их взаимодействие с решеткой металла описывается с помощью представления о кратковременных соударениях. Между тем при очень низких температурах взаимодействие между электронами может играть решающую роль.

Было бы, однако, ошибкой считать, что классическая электронная теория утратила свое значение вовсе. Она позволяет во многих случаях быстро найти правильные качественные результаты и притом в наглядной форме. Более того, оказывается, что расхождения между теорией и опытом тем меньше, чем меньше концентрация электронов проводимости и чем выше температура. В металлах, где концентрация электронов велика, эти различия имеют существенное значение. В ряде же других слу-

чаев, где концентрация электронов мала (электронные явления в газах, многие явления в полупроводниках), классическая электронная теория применима не только качественно, но и количественно.

### § 150. Концентрация и подвижность электронов в металлах

Согласно сказанному в § 147 электропроводность металлов зависит от концентрации электронов проводимости  $n$  и от их подвижности  $b$ . Обе эти величины, являющиеся важными характеристиками металла, могут быть определены из опыта.

Для измерения концентрации электронов чаще всего пользуются эффектом Холла. Рассмотрим проводник в форме прямоугольной пластинки, в которой имеется ток с плотностью  $j$

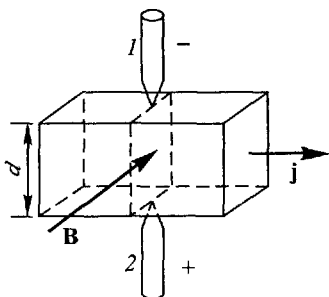


Рис. 257. Эффект Холла

(рис. 257). Эквипотенциальными поверхностями внутри такой пластинки будут плоскости, перпендикулярные к направлению тока, и поэтому разность потенциалов между двумя металлическими зондами 1 и 2, лежащими в одной из этих плоскостей, будет равна нулю. Если, однако, создать в образце магнитное поле, перпендикулярное к току и к зондам, то между зондами возникает разность потенциалов, указывающая на то, что при

наличии магнитного поля эквипотенциальные плоскости в пластинке становятся наклонными. В возникновении этой поперечной разности потенциалов и заключается эффект Холла.

Опыт показывает, что поперечная разность потенциалов  $U$  в слабых магнитных полях пропорциональна магнитной индукции  $B$ ; она пропорциональна также плотности тока  $j$  и расстоянию между зондами  $d$ :

$$U = RdjB, \quad (1150.1)$$

где  $R$  — постоянная, зависящая от рода вещества. Она получила название *постоянной Холла*.

Эффект Холла просто объясняется электронной теорией и является следствием существования силы Лоренца (§ 88). Чтобы лучше выяснить физическую сущность этого явления, мы ограничимся только упрощенной его теорией и будем приближенно считать, что все электроны движутся с постоянной скоростью, равной средней скорости их упорядоченного движения  $v$ .

Тогда на каждый электрон действует сила, перпендикулярная к направлению тока и к магнитному полю и равная  $e\mathbf{v}B$ . Под действием этой силы электроны будут смещаться, так что одна из граней пластинки зарядится отрицательно, а другая — положительно, и внутри пластинки возникнет поперечное (к току и к магнитному полю) электрическое поле  $E$ . При равновесии  $e\mathbf{v}B = eE$ . Поэтому поперечная разность потенциалов равна

$$U = Ed = vBd.$$

В этом уравнении среднюю скорость электронов  $v$  можно выразить через плотность тока  $j$ , так как

$$j = nev,$$

и поэтому

$$U = \frac{1}{ne}djB.$$

Полученное выражение совпадает с формулой (150.1). Постоянная Холла оказывается равной

$$R = 1/ne. \quad (150.2)$$

Она зависит от концентрации электронов  $n$ , и поэтому, измеряя постоянную Холла, можно определить концентрацию электронов внутри проводника.

Легко также видеть, что знак поперечной разности потенциалов зависит от знака заряда подвижных частиц, обуславливающих электропроводность. Действительно, пусть в проводящей пластинке ток течет слева направо (рис. 258 а). Если подвижные

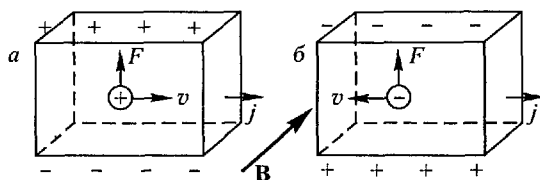


Рис. 258. Знак поперечной разности потенциалов в эффекте Холла зависит от знака носителей заряда проводника

частицы в проводнике несут положительный заряд, то скорость этих частиц имеет то же направление, что и ток, и при указанном направлении магнитного поля отклоняющая сила будет направлена снизу вверх. В этом случае верхняя грань пластинки будет заряжаться положительно, а нижняя — отрицательно. Если же частицы заряжены отрицательно, то их скорость направлена противоположно току (рис. 258 б). Так как отклоняющая сила зависит и от заряда частиц, и от их скорости, то ее направление не изменится, и поэтому заряженные частицы будут также накапливаться у верхней грани. Однако, так как частицы заряжены отрицательно, верхняя грань в этом случае

будет заряжаться отрицательно, а нижняя — положительно, т.е. явление Холла будет иметь обратный знак.

Измеряя постоянную Холла, можно найти концентрацию носителей заряда  $n$ . Зная же электрическую проводимость  $\lambda = enb$ , можно найти произведение  $nb$  и, следовательно, определить концентрацию  $n$  и подвижность  $b$  порознь.

Подобные определения, однако, в действительности сложнее, чем это может показаться на первый взгляд. Причина усложнений заключается в том, что изложенная выше простая теория эффекта Холла основана на классической электронной теории, имеющей ограниченную применимость для металлов. Более того, для некоторых веществ наблюдается обратный знак эффекта Холла, т.е. соответствующий движению положительных носителей заряда, в то время как в действительности и в этих металлах носителями заряда являются отрицательные электроны. Это явление объясняется современной квантовой теорией твердых тел и связано с существованием так называемых положительных дырок (ср. § 152).

Во всяком случае измерения постоянной Холла и удельной электрической проводимости позволяют найти порядок концентрации и подвижности, что уже позволяет сделать важные выводы о природе проводимости.

Концентрация электронов проводимости в металлах, определенная из значения постоянной Холла, имеет порядок  $10^{28} \text{ м}^{-3}$  и оказывается близкой к концентрации атомов.

Подвижности электронов в металлах, напротив, весьма малы. Выражая их в единицах  $\text{м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$  (т.е. выражая среднюю скорость, приобретаемую в поле  $1 \text{ В/м}$ , в  $\text{м/с}$ ), мы получаем подвижности порядка (табл. 10)  $10^{-3} - 10^{-4} \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$ . Низкие значения подвижности указывают на то, что электроны испытывают большое число соударений с кристаллической решеткой.

Таблица 10

Металл	Ag	Na	Be	Cu	Au	Li	Al	Cd	Zn
Подвижность электронов, $10^{-4} \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$	56	48	44	35	30	19	10	7,9	5,8

## § 151. Полупроводники и диэлектрики

До сих пор мы ничего не говорили о процессах, приводящих к образованию электронов проводимости в проводниках. Для выяснения этого вопроса большое значение имеет исследование зависимости концентрации электронов проводимости от температуры. Эти данные, как мы знаем (§ 150), можно получить, измеряя, например, значение постоянной Холла при различных температурах.

Опыт показывает, что в металлах концентрация электронов практически не зависит от температуры. Даже при самых



низких температурах в металлах уже имеется большое количество подвижных электронов. Это показывает, что в образовании электронов проводимости в металлах тепловое движение не играет существенной роли.

Атомы типичных металлов характеризуются тем, что в них имеется один или несколько электронов, связанных с ядром слабо. При сближении атомов металла такие электроны под действием сил взаимодействия с соседними атомами отщепляются от своих атомов. Они принадлежат уже не какому-либо определенному атому, а всему металлу в целом и движутся по металлу в результирующем поле всех ионов и электронов. Эти отщепившиеся электроны и являются электронами проводимости.

Наряду с металлами мы встречаемся с проводниками и другого типа. Эти проводники являются, так же как и металлы, электронными (проводниками 1-го рода), и в них электрический ток не сопровождается никакими химическими изменениями. Однако концентрация носителей заряда в таких проводниках чрезвычайно сильно увеличивается с увеличением температуры. Подобные проводники при низких температурах имеют весьма большое удельное сопротивление и практически являются изоляторами, но с увеличением температуры их удельное сопротивление сильно уменьшается и при достаточно высоких температурах становится весьма малым. Вещества такого типа получили название *электронных полупроводников*.

Полупроводниками являются многие элементы (кремний, германий, селен и др.), закись меди  $\text{Cu}_2\text{O}$ , сернистый свинец  $\text{PbS}$  и многие другие химические соединения. Так, например, по данным опыта можно заключить, что концентрация электронов в чистейшем кремнии при комнатных температурах должна быть меньше  $10^{17} \text{ м}^{-3}$ , а его удельное сопротивление должно быть больше  $10^3 \text{ Ом}\cdot\text{м}$ ; но при температуре  $700^\circ\text{C}$  концентрация электронов в нем возрастает до  $10^{24} \text{ м}^{-3}$ , а удельное сопротивление падает до  $0,001 \text{ Ом}\cdot\text{м}$ , т.е. больше чем в миллион раз.

Сильная зависимость концентрации носителей заряда в полупроводниках от температуры показывает, что в этом случае электроны проводимости возникают под действием теплового движения. В полупроводниках атомное взаимодействие само по себе еще недостаточно для отщепления электронов от атомов и превращения их в электроны проводимости. Для этого даже наиболее слабо связанным электронам нужно сообщить некоторую добавочную энергию, которая и заимствуется из энергии теплового движения. Чем выше температура, тем большее число электронов будет существовать в полупроводнике в отщепленном состоянии, т.е. в виде электронов проводимости.

Если энергия отщепления велика по сравнению со средней энергией теплового движения (имеющей порядок  $kT$ ) при всех

температурах в области существования данного кристалла, то электроны проводимости в заметном количестве не образуются и такой кристалл будет диэлектриком.

## § 152. Собственная проводимость полупроводников

Остановимся подробнее на процессе образования электронов проводимости в полупроводниках. Для конкретности дальнейших рассуждений рассмотрим кремний, являющийся типичным полупроводником.

Атом кремния имеет порядковый номер в периодической системе Менделеева  $Z = 14$ . Поэтому заряд ядра атома кремния равен  $+14e$  и в состав его атома входит 14 электронов. Однако из



Рис. 259. Атом кремния и четыре его валентные связи

них только четыре слабо связаны. Именно эти слабо связанные электроны участвуют в химических реакциях и обуславливают четыре валентности кремния, отчего они и получили название валентных электронов. Остальные десять электронов вместе с ядром составляют остов атома, имеющий заряд  $+14e - 10e = +4e$ . Он окружен четырьмя валентными электронами, которые движутся вокруг остова и образуют облако отрицательного заряда (рис. 259).

В решетке кремния расположение атомов таково, что каждый атом окружен четырьмя ближайшими соседями. Упрощенная плоская схема расположения атомов в кристалле кремния показана на рис. 260. Связь двух соседних атомов обусловлена парой электронов, образующих так называемую парно-электронную, или валентную, связь.

Картина, изображенная на рис. 260, соответствует чистому кремнию (о влиянии примесей будет сказано ниже) и очень низкой температуре. В этом случае все валентные электроны участвуют в образовании связей между атомами, являются структурными элементами и не участвуют в электропроводности.

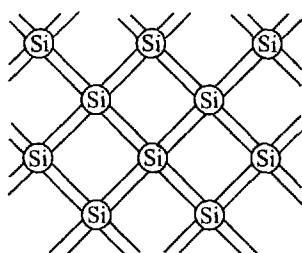


Рис. 260. Парно-электронные связи в кристалле кремния

При повышении температуры кристалла тепловые колебания решетки приводят к разрыву некоторых валентных связей. В результате часть электронов, ранее участвовавших в образовании валентных связей, отщепляется и становится электронами

проводимости. При наличии электрического поля они перемещаются против поля и образуют электрический ток.

Однако, кроме процесса переноса заряда с помощью электронов проводимости, возможен еще и другой механизм электропроводности. Он обусловлен тем, что всякий разрыв валентной связи приводит к появлению вакантного места с отсутствующей связью. Такие «пустые» места с отсутствующими электронами связи получили название *дырок* (рис. 261). Легко видеть, что возникновение дырок в кристалле полупроводника создает дополнительную возможность для переноса заряда. Действительно, при наличии дырки какой-либо из электронов связи может перейти на место дырки. В результате на этом месте будет восстановлена нормальная связь, но зато появится дырка в другом месте. В новую дырку в свою очередь сможет перейти какой-либо из других электронов связи и т.д. Такой процесс будет происходить многократно, в результате чего

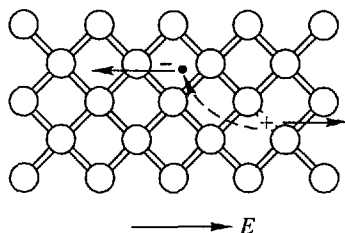


Рис. 261. Возникновение электрона проводимости и дырки в решетке кремния

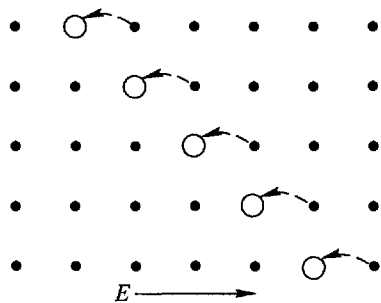


Рис. 262. Схема дырочной проводимости: черные точки — связанные электроны, светлые кружки — вакантные места (дырки)

два различных процесса электропроводности: электронный, осуществляемый движением электронов проводимости, и дырочный, обусловленный движением дырок.

На первый взгляд может показаться, что представление об электропроводности с помощью дырок весьма искусственно и даже неоправдано, так как дырки, т.е. «пустые» места, естественно, не могут переносить электри-

в результате на этом месте будет восстановлена нормальная связь, но зато появится дырка в другом месте. В новую дырку в свою очередь сможет перейти какой-либо из других электронов связи и т.д. Такой процесс будет происходить многократно, в результате чего в образовании тока будут принимать участие не только электроны проводимости, но и электроны связи, которые будут постепенно перемещаться, так же как и электроны проводимости, против электрического поля. Сами же дырки будут двигаться противоположно, в направлении электрического поля, т.е. так, как двигались бы положительно заряженные частицы (рис. 262).

Рассмотренный процесс получил название *дырочной проводимости*. Следовательно, в полупроводниках возможны

ческий заряд, а в действительности, как мы видели, перенос заряда осуществляется перемещением электронов связи. Дело, однако, заключается в том, что движение электронов, как уже упоминалось (§ 149), подчиняется законам не классической, а квантовой механики. А законы квантовой механики показывают, что если только концентрация дырок мала по сравнению с концентрацией электронов связи, то простые законы движения получают лишь для дырок, но не для электронов связи. А именно, оказывается, что дырки в электрических и магнитных полях движутся так же, как двигались бы положительно заряженные частицы, обладающие зарядом  $+e$  и некоторой определенной массой (вообще не равной массе электрона). Поэтому и все электрические процессы при наличии дырок происходят так, как если бы наряду с отрицательными электронами проводимости имелись еще и положительно заряженные частицы — дырки.

Наряду с переходами электронов из связанного состояния в свободное существуют обратные переходы, при которых электрон проводимости улавливается на одно из вакантных мест электрона связи. Этот процесс называют *рекомбинацией электрона и дырки*. В состоянии равновесия устанавливается такая концентрация электронов (и равная ей концентрация дырок), при которой число прямых и обратных переходов в единицу времени одинаково.

Рассмотренный процесс проводимости в совершенно чистых полупроводниках, лишенных вовсе химических примесей и других дефектов решетки, получил название *собственной* проводимости.

### § 153. Примесная проводимость полупроводников

При наличии примесей электропроводность полупроводников сильно изменяется. Укажем в качестве примера, что кремний с добавкой фосфора в количестве всего около 0,001 ат. % имеет удельное сопротивление при комнатной температуре около 0,006 Ом·м, т.е. его сопротивление уменьшается более чем в 100 000 раз по сравнению с совершенно чистыми кристаллами.

Такое влияние примесей вполне объясняется изложенными выше представлениями о строении полупроводников. Вернемся опять к конкретному примеру кремния и предположим, что в нем имеются атомы химической примеси, замещающие некоторые атомы кремния. В качестве примера рассмотрим сначала какой-либо элемент пятой группы, например мышьяк. Атом мышьяка как элемент пятой группы имеет пять валентных электронов. Но для осуществления парно-электронных связей в решетке кремния, как мы видели, необходимы всего четыре электрона. Поэтому пятый электрон атома мышьяка оказывается связанным особенно слабо и может быть легко отщеплен при тепловых колебаниях решетки. Тогда возникает один электрон проводимости, а атом мышьяка превращается в положительно заряженный

ион. Образование же дырки не происходит. Подобный процесс схематически изображен на рис. 263 а.

Посмотрим теперь, как будет вести себя атом примеси какого-либо элемента, стоящего левее в периодической системе, нежели кремний; пусть это будет бор, стоящий в третьей группе. Атом бора имеет всего три валентных электрона, в то время как для нормальной валентной связи в решетке кремния необходимы четыре электрона. Недостающий четвертый электрон будет

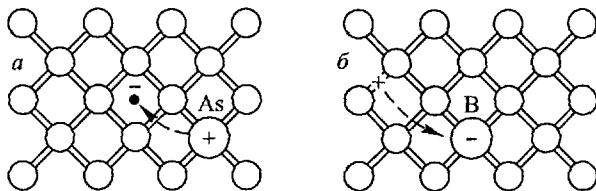


Рис. 263. Атомы мышьяка (а) и бора (б) в решетке кремния

захвачен из соседних мест кристалла, в соответствующем месте образуется дырка, а атом бора превратится в отрицательный ион (рис. 263 б). Таким образом, и при наличии бора в кристалле кремния окажется возможным возникновение тока, но, в отличие от случая мышьяка, электрический ток здесь будет обусловлен движением дырок, а не электронов.

Следовательно, электропроводность полупроводников может быть обусловлена также примесями (*примесная* проводимость). Примеси, вызывающие появление электронов проводимости (например, мышьяк в кремнии), получили название *донорных* примесей, а примеси, вызывающие появление дырок (например, бор в кремнии), названы *акцепторными*.

Резюмируя сказанное, мы видим, что полупроводники обладают той особенностью, что электропроводность в них может быть обусловлена как подвижными электронами, так и дырками. Если концентрация электронов в полупроводнике значительно больше концентрации дырок, то мы говорим, что полупроводник имеет *электронную* проводимость, или проводимость *n*-типа. Если же значительно преобладают положительные дырки, то электропроводность называется *дырочной*, или *p*-типа. Носители заряда, представленные в большинстве (электроны в полупроводнике *n*-типа и дырки в полупроводнике *p*-типа), получили название *основных* носителей заряда, а представленные в меньшинстве — *неосновных*. Если же концентрации электронов и дырок сравнимы между собой, то мы имеем смешанную проводимость.

Так, например, кремний с примесью мышьяка при низких температурах имеет только примесную проводимость и являет-

ся полупроводником  $n$ -типа. Основные носители заряда в нем — электроны, а неосновные — дырки. Последние возникают лишь в результате разрыва валентных связей и их концентрация при низких температурах мала. Но при увеличении температуры примесная проводимость, напротив, делается гораздо меньше, нежели собственная, и концентрация дырок становится практически равной концентрации электронов.

## § 154. Понятие об энергетических зонах

Результаты § 152 и 153 можно изобразить при помощи энергетической диаграммы (рис. 264). Здесь по вертикали снизу вверх отложены значения полной энергии электрона и отмечены наименьшая энергия электронов проводимости  $E_c$  и наибольшая энергия связанных электронов  $E_v$ . Возможные значения энергии электронов проводимости за-полняют некоторую область или зону энергии  $W \geq E_c$ , называемую *зоной проводимости*.

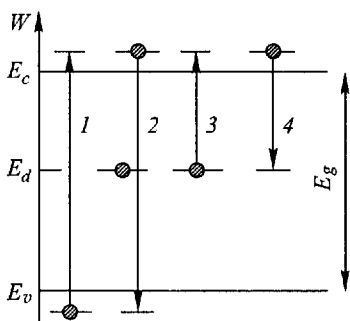


Рис. 264 Энергетическая диаграмма полупроводника и электронные переходы зона-зона (1, 2) и донор-зона (3, 4)

электронов проводимости заполняют некоторую область или зону энергии  $W \geq E_c$ , называемую *зоной проводимости*. Аналогично, энергии электронов связи образуют другую зону с  $W \leq E_v$ , которая получила название *зоны валентных электронов* или просто *валентной зоны*. Обе эти зоны разделены энергетическим промежутком ширины  $E_g = E_c - E_v$ , образующим *зону запрещенных энергий*. В отсутствие примесных атомов и структурных дефектов решетки, стационарные движения электронов с энергией внутри запрещенной зоны невозможны.

Разрыв химической связи, приводящий к образованию электрона проводимости и положительной дырки (см. рис. 261), есть электронный переход валентная зона-зона проводимости (1 на рис. 264). Обратный процесс — рекомбинация электрона проводимости и положительной дырки представляет собой электронный переход 2.

При наличии примесных атомов в запрещенной зоне возникают дискретные разрешенные уровни энергии (один из них  $E_d$  показан на рис. 264). Они существуют не во всем объеме кристалла, а лишь в местах нахождения примесных атомов (локальные уровни энергии). Каждый локальный уровень дает энергию электрона, когда он находится на примесном атоме.

Локальные уровни энергии создают возможность дополнительных электронных переходов. Так, ионизация донора с обра-

зованием электрона проводимости (см. рис. 263 *a*) изображается на диаграмме рис. 264 электронным переходом 3. Обратный ему процесс захвата электрона на атом донора есть электронный переход 4 из зоны проводимости на незаполненный уровень донора. Аналогично ионизация акцептора с образованием нарушенной химической связи — положительной дырки (см. рис. 263 *b*) — изображается электронным переходом 1 на рис. 265. Обратный ему переход 2 с заполненного акцепторного уровня в валентную зону описывает воссоединение связанного электрона со свободной дыркой, когда последняя при своем движении сближается с заряженным акцептором. Помимо рассмотренных переходов, конечно, могут происходить еще и другие.

Картина энергетических зон, к которой мы пришли из рассмотрения химических связей, в квантовой теории существенно обобщается и уточняется.

А именно, решение задачи о движении электрона в поле периодического потенциала решетки показывает, что существует целая система зон разрешенных энергий (рис. 266, локальные уровни не показаны).

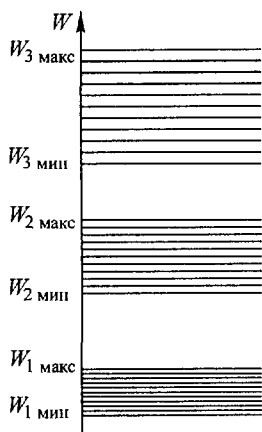


Рис 266 Энергетические зоны электрона в твердом теле

Каждая из зон ограничена снизу некоторой энергией  $W_{\text{мин}}$  («дно» зоны) и сверху энергией  $W_{\text{макс}}$  («потолок» зоны). Эти зоны отделены друг от друга полосами запрещенных энергий. Ширина разрешенных зон энергии увеличивается по мере возрастания энергии, и широкие верхние зоны в некоторых случаях могут перекрывать друг друга, образуя единую сложную зону.

Происхождение энергетических зон имеет следующую общую причину. Положим, что мы имеем  $N$  изолированных атомов, удаленных друг от друга и поэтому не взаимодействующих между собой. В каждом из этих атомов энергия электронов может изменяться лишь скачками и поэтому характеризуется набором резких, дискретных уровней энергии.

В рассматриваемой системе невзаимодействующих атомов вместо каждого атомного энергетического уровня имеется  $N$  совпадающих уровней энергии. Представим себе теперь,

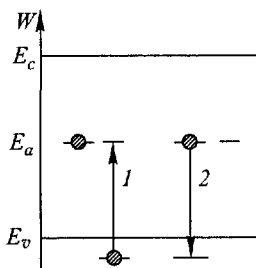


Рис 265 Электронные переходы акцептор-валентная зона

что мы сближаем атомы до образования кристаллической решетки. При этом возникает взаимодействие между атомами и уровни энергии электронов изменяются. Оказывается, что в результате такого взаимодействия первоначально совпадавшие  $N$  уровней энергии становятся различными. Эта совокупность теперь уже не совпадающих уровней энергии и есть разрешенная зона энергий. Таким образом, энергетические зоны возникают в атомах под влиянием взаимодействия атомов в решетке.

Число энергетических уровней в каждой зоне очень велико — порядка числа атомов в кристалле, и уровни расположены очень близко друг к другу. Поэтому во многих случаях можно считать, что внутри каждой зоны энергия электрона, как и в классической теории, изменяется непрерывно. Однако число этих уровней все же конечно, что, как мы увидим ниже, имеет принципиальное значение.

В классической механике полная энергия электрона выражается формулой

$$W = U + \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2), \quad (154.1)$$

где  $U$  — потенциальная энергия, а  $p_x$ ,  $p_y$  и  $p_z$  — составляющие импульса  $\mathbf{p}$ . Последние связаны с массой электрона  $m$  и составляющими скорости соотношениями:  $p_x = mv_x$ ,  $p_y = mv_y$ ,  $p_z = mv_z$ . Энергия есть четная (квадратичная) функция импульса  $\mathbf{p}$  и при изменении знака любой его составляющей не изменяется. В квантовой механике оказывается возможным также сохранить понятие механического импульса. Энергия и в этом случае оказывается четной функцией  $\mathbf{p}$ . Но в общем случае она уже не выражается простым квадратичным законом. Однако во многих случаях важно знать энергию электронов только в непосредственной близости от дна энергетической зоны. Если при этом отсчитывать импульс от его значения  $\mathbf{p}_0$ , соответствующего дну разрешенной зоны, т.е. понимать под  $\mathbf{p}$  разность  $(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)$ , то функцию  $W(\mathbf{p})$  можно разложить в ряд Тейлора по степеням  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$  в окрестности точки  $p_x = p_y = p_z = 0$ . Вследствие четности функции  $W(\mathbf{p})$  все нечетные степени в разложении исчезают, и поэтому, ограничиваясь первыми исчезающими членами, получим

$$W = W_{\text{мин}} + \frac{1}{2m_{\text{эф}}} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2). \quad (154.2)$$

Эта формула имеет тот же вид, что и формула классической механики. Однако между ними имеется и существенное отличие. В формуле (154.1)  $m$  есть истинная масса изолированного электрона. В формуле же (154.2) через  $1/2m_{\text{эф}}$  мы обозначили



коэффициенты в разложении Тейлора

$$\frac{1}{2m_{\text{эф}}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial p_x^2} \right)_{p=0} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial p_y^2} \right)_{p=0} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial p_z^2} \right)_{p=0}. \quad (154.3)$$

Величина  $m_{\text{эф}}$  называется *эффективной* массой электрона в кристалле (ср. § 186). При движении электрона внутри кристалла она играет ту же роль, что и масса, однако отличается от истинной массы электрона.

Отметим также, что в формулах (154 2) и (154 3) мы считали  $m_{\text{эф}}$  одинаковой при движении вдоль каждой из осей  $X$ ,  $Y$  и  $Z$ , т. е. не зависящей от направления (изотропной). В действительности же  $m_{\text{эф}}$  может зависеть от направления движения. Однако мы ограничимся простейшим случаем изотропной эффективной массы.

Задавая тройку возможных значений  $p_x$ ,  $p_y$  и  $p_z$  и определенную ориентировку электронного спина (§ 117), мы определяем некоторое возможное стационарное движение электрона, или, иначе, *квантовое состояние* электрона. Формула (154.2) показывает, что одна и та же энергия электрона может соответствовать различным значениям  $p_x$ ,  $p_y$  и  $p_z$ , а, следовательно, каждому энергетическому уровню внутри зоны соответствует целая совокупность квантовых состояний.

При заданном состоянии кристалла электроны в нем определенным образом распределяются по различным квантовым состояниям. Однако такое распределение всегда подчиняется *принципу Паули*: в любой электронной системе — атомах, молекулах, твердых телах — *в каждом квантовом состоянии не может быть более одного электрона*. Это обстоятельство приводит к тому, что число электронов, энергии которых лежат в пределах какой-либо разрешенной зоны, ограничено. Или, короче: *вместимость каждой энергетической зоны конечна*.

Положим, что кристалл состоит из  $N$  атомов и каждый атом в изолированном состоянии имеет  $\xi$  электронов. Температуру кристалла будем считать равной абсолютному нулю. Тогда имеющиеся  $N\xi$  электронов будут заполнять различные квантовые состояния в порядке возрастания их энергий. Вследствие конечной вместимости зон часть низкорасположенных зон энергии окажется целиком заполненной электронами, а следующая за ними зона — либо заполненной частично, либо пустой. Более же высокие зоны будут наверняка пустыми.

Конечная вместимость энергетических зон существенно проявляется в процессах переноса электрического заряда в электронном газе. Положим, что, желая создать электрический ток, мы ускоряем электроны электрическим полем. При этом мы увеличиваем их энергию и переводим в новые квантовые состояния. На энергетических диаграммах это соответствует возбуждению

электронов, т.е. переходу их с первоначальных энергетических уровней на другие, более высокие уровни внутри зоны. Но тогда из сказанного выше следует, что электроны целиком заполненной зоны, хотя и находятся в движении, не могут дать никакого вклада в электрический ток. Действительно, так как энергия электрона есть четная функция импульса, то каждому квантовому состоянию электрона в зоне с какой-либо составляющей импульса, скажем  $p_x$ , обязательно соответствует и другое состояние с той же самой энергией, но с составляющей импульса  $-p_x$ . Составляющие скорости этих электронов равны соответственно  $p_x/m_{эф}$  и  $-p_x/m$  и направлены в противоположные стороны. Поэтому электроны целиком заполненной зоны можно разбить на пары, создающие противоположно направленные токи, а, следовательно, результирующий ток, создаваемый такой совокупностью электронов, всегда равен нулю. Чтобы создать отличный от нуля электрический ток, мы должны были бы возбудить электроны внутри зоны и перевести часть из них на более высокие уровни. Однако, так как в целиком заполненной зоне все имеющиеся квантовые состояния заняты, то вследствие принципа Паули это оказывается невозможным.

Таким образом, для электропроводности существенны только две энергетические зоны: та, которая при температуре абсолютного нуля заполнена лишь частично или пуста, и лежащая непосредственно под ней целиком заполненная зона. Последняя может тоже участвовать в электропроводности, так как при повышении температуры часть электронов, находящихся под потолком этой зоны, может возбуждаться в выше расположенную незаполненную зону, и поэтому она становится уже не целиком заполненной. Обе эти зоны и представляют собой зону проводимости и валентную зону, введенные нами выше. Незанятые же электронами квантовые состояния, энергии которых лежат

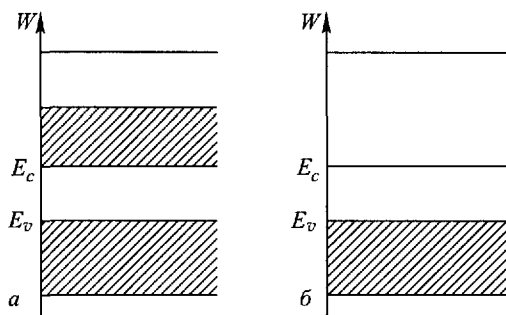


Рис 267 Заполнение энергетических зон электронами в металле (а) и в полупроводнике (б) при температуре абсолютного нуля

вблизи потолка валентной зоны, соответствуют положительным дыркам (ср. § 152).

Из сказанного следует, что металлы суть такие кристаллы, у которых при температуре абсолютного нуля одна из энергетических зон заполнена частично. Типичными же полупроводниками являются те кристаллы, энергетические зоны которых при абсолютном нуле либо заполнены целиком, либо совершенно пусты (рис. 267).

### § 155. Распределение импульса и энергии у электронов

Для понимания многих электронных явлений важно выяснить, какое число носителей заряда  $dn$  из общей их совокупности в единице объема  $n_0$  имеют составляющие импульса в пределах  $p_x$  и  $p_x + dp_x$ ,  $p_y$  и  $p_y + dp_y$ ,  $p_z$  и  $p_z + dp_z$ . Энергия такой группы частиц будет лежать в некотором интервале  $W$  и  $W + dW$ , определяемом зависимостью  $W(\mathbf{p})$ . Ответ на поставленный вопрос опыту получается разным в классической и квантовой теориях. Мы поясним это на примере электронов в зоне проводимости.

Пусть  $dZ$  есть число состояний в единице объема тела, принадлежащих рассматриваемому интервалу. Для малого интервала импульсов его можно считать пропорциональным этому интервалу:  $dZ \propto dp_x dp_y dp_z$ . Если, далее,  $f$  есть вероятность таких состояний, то интересующее нас число электронов равно

$$dn = dZ f. \quad (155.1)$$

В классической статистике вероятность  $f$  выражается законом Больцмана

$$f = C \exp(-W/kT), \quad (155.2)$$

где  $W$  — энергия частицы в рассматриваемом состоянии,  $k$  — постоянная Больцмана,  $T$  — температура,  $C$  — постоянная. Если рассматривать электроны как идеальный газ, то в отсутствие внешних сил их потенциальная энергия не зависит от координат и ее можно включить в постоянную  $C$ . Тогда  $W$  есть кинетическая энергия

$$W = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2), \quad (155.3)$$

и из формул (155.1), (155.2) и (155.3) находим

$$dn = A \exp\left(-\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2mkT}\right) dp_x dp_y dp_z, \quad (155.4)$$

где  $A$  — новая постоянная. Последняя формула выражает закон Максвелла, дающий распределение импульсов в идеальном газе.

Постоянная  $A$  определяется из условия, что полное число электронов с любыми импульсами есть заданная концентрация  $n_0$ , т.е.

$$\int_{p_x, p_y, p_z = -\infty}^{\infty} dn = n_0. \quad (155.5)$$

Выполняя интегрирование и учитывая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2) dx = \sqrt{\pi/a}, \quad (155.6)$$

получаем

$$A = \frac{n_0}{(2\pi mkT)^{3/2}} \quad (155.7)$$

В классической статистике величина  $dZ$  ничем не ограничивается (любое число электронов может иметь компоненты импульса в данном интервале). В квантовой статистике компоненты импульса квантуются, и поэтому  $dZ$  имеет определенное конечное значение

$$dZ = 2 \frac{dp_x dp_y dp_z}{h^3}. \quad (155.8)$$

Здесь  $h$  есть универсальная постоянная квантовой механики — постоянная Планка.  $h = 6,62 \cdot 10^{-27}$  эрг·с =  $6,62 \cdot 10^{-34}$  Дж·с (ср. § 117) Множитель 2 учитывает то обстоятельство, что каждой тройке величин ( $p_x, p_y, p_z$ ) могут соответствовать две различные ориентировки электронного спина (ср. § 117).

Второе важное обстоятельство, учитываемое квантовой статистикой, заключается в том, что вероятность квантового состояния с энергией  $W$  для электронов определяется не законом Больцмана, а функцией Ферми-Дирака

$$f = \frac{1}{1 + \exp[(W - F)/kT]}. \quad (155.9)$$

Здесь  $F$  есть некоторая характерная энергия, не зависящая от переменных  $W$  и  $p$ . Она получила название электрохимического потенциала или уровня Ферми. Величина  $F$  является параметром распределения и играет ту же роль, что и постоянная  $C$  в законе Больцмана. Конечно,  $F$  не универсальная постоянная, а зависит

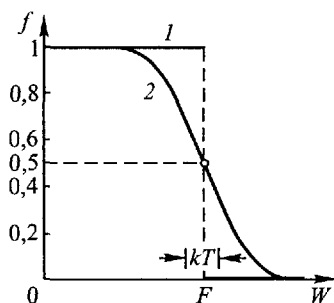


Рис. 268 Функция Ферми-Дирака 1 —  $T = 0$ , 2 —  $T \neq 0$

от природы вещества и его состояния. Для данного вещества  $F$ , как и  $C$ , определяется полной концентрацией электронов и температурой (см. ниже).

Графики функции Ферми–Дирака показаны на рис. 268. При  $T = 0$  она имеет вид разрывной ступенчатой функции. Для всех энергий  $W < F$ ,  $f = 1$ , а следовательно, все квантовые состояния с такими энергиями заняты электронами. При  $W = F$ ,  $f = 0,5$ , а при  $W > F$ ,  $f = 0$ . В классической же статистике (формула (155.2)) мы имели бы, что для всех энергий  $W \neq 0$ ,  $f = 0$  (частиц с отличной от нуля кинетической энергией нет вовсе). При  $T \neq 0$  функция  $f$  становится непрерывной и тем более размытой, чем выше температура. При  $W$ , большем  $F$  на несколько  $kT$ , единицей в знаменателе (155.9) можно пренебречь по сравнению с экспонентой, и тогда

$$f \approx \exp \frac{F - W}{kT} = C \exp \left( -\frac{W}{kT} \right). \quad (155.10)$$

Следовательно, при достаточно больших энергиях («хвост» функции распределения) распределение Ферми–Дирака переходит в классическое распределение Больцмана.

Обратимся теперь к энергетическим диаграммам и положим, что при  $T = 0$  уровень Ферми  $F$  лежит в зоне проводимости (рис. 269 а). Тогда в зоне будут квантовые состояния с энергией  $W < F$ , и существенно необходимо пользоваться распределением Ферми–Дирака. Такой электронный газ называется *вырожденным*. Этот случай мы имеем в металлах. Здесь все квантовые состояния с энергией  $W < F$  целиком заполнены электронами, а электронов с энергией  $W > F$  нет вовсе. Следовательно, даже при  $T = 0$  электроны находятся в движении, а их максимальная кинетическая энергия равна  $W_{k, \text{макс}} = F - E_c$ . Существование этой энергии при абсолютном нуле есть специальный результат квантовых законов движения электронов.

При  $T \neq 0$  распределение Ферми размывается и появляется небольшое число электронов с энергией  $W > F$ . Однако размывание функции Ферми охватывает лишь область энергий порядка  $kT$  в окрестности уровня Ферми  $F$ . Если  $F$  отстоит от  $E_c$  на много  $kT$  (что и имеет место в металлах), распределение по энергиям для большинства электронов (с энергией  $W < F$ ) практически не меняется. Поэтому, в частности, средняя энергия электронов зависит от температуры слабо. Это объясняет,

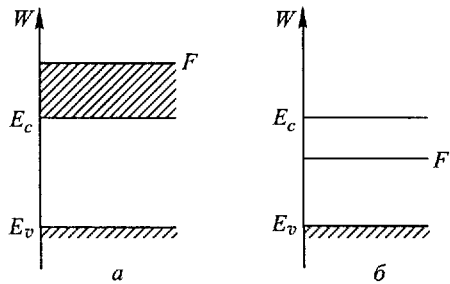


Рис 269. Положение уровня Ферми в металле (а) и в невырожденном полупроводнике (б)

почему электронный газ в металлах слабо влияет на их теплоемкость (§ 149).

Если же уровень Ферми лежит в запрещенной зоне (рис. 269 б), то для всех состояний в зоне проводимости мы имеем  $W > F$  и для них справедливо классическое распределение Больцмана (155.10) (*невыврожденный* электронный газ). При  $T = 0$  для всех состояний в зоне проводимости  $f = 0$  и электронов проводимости нет. Этот случай соответствует совершенно чистым полупроводникам, не содержащим примесей или дефектов решетки.

Вернемся теперь к закону распределения электронов по импульсам. Из сказанного выше следует, что вместо закона Максвелла (155.4) для электронов оно выражается формулой

$$dn = f dZ = \frac{2}{h^3} \frac{dp_x dp_y dp_z}{1 + \exp[(W - F)/kT]}. \quad (155.11)$$

Здесь энергия  $W$  есть определенная функция  $p_x$ ,  $p_y$  и  $p_z$ , зависящая от природы кристалла. Для состояний, энергия которых близка к энергии дна зоны проводимости  $E_c$ , она выражается формулой (154.2). Параметр же распределения — уровень Ферми  $F$  — можно определить, как раньше, из условия нормировки (155.5).

Такой расчет особенно прост для невырожденных проводников. В этом случае

$$\begin{aligned} dn &\approx \frac{2}{h^3} \exp\left(\frac{F - W}{kT}\right) dp_x dp_y dp_z = \\ &= \frac{2}{h^3} \exp\left(\frac{F - E_c}{kT}\right) \exp\left(-\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m_{эф}kT}\right) dp_x dp_y dp_z. \end{aligned} \quad (155.12)$$

Подставляя это выражение в (155.5) и выполняя интегрирование с учетом (155.6), получаем

$$n_0 = N_c \exp\left(\frac{F - E_c}{kT}\right), \quad (155.13)$$

где введено обозначение

$$N_c = 2 \left(\frac{2\pi m_{эф} kT}{h^2}\right)^{3/2}. \quad (155.14)$$

Величина  $N_c$  получила название *эффективной плотности состояний* в зоне проводимости.

Отметим, что в этих расчетах мы использовали для  $W$  выражение (154.2), которое, строго говоря, справедливо лишь в окрестности дна зоны проводимости. Кроме того, интегрирование по импульсам мы проводили не в пределах зоны проводимости, а в бесконечных пределах. Однако это не вносит заметной ошибки, так как экспоненциальный множитель в формуле (155.12) быстро затухает при увеличении  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$ , и поэтому значение интеграла (155.5) определяется только состояниями, близкими к дну зоны.

Формула (155.13) устанавливает связь между положением уровня Ферми  $F$  и полной концентрацией электронов проводимости  $n_0$  в невырожденных полупроводниках. Из этой формулы видно, что чем ближе  $F$  к краю

зоны  $E_c$ , тем больше и концентрация электронов в зоне. Если  $n_0$  задано, то формула (155.13) определяет положение уровня Ферми относительно края зоны  $E_c$ .

Если мы теперь выразим  $\exp[(F - W)/kT]$  из формулы (155.13) и подставим это значение в (155.12) для  $dn$ , то постоянная Планка  $h$  сократится, и мы получим в точности закон распределения Максвелла, выражаемый формулами (155.4) и (155.7). Однако при этом все же вместо массы изолированного электрона  $m$  будет входить эффективная масса электрона в кристалле  $m_{эф}$ . Она и учитывает квантовые особенности движения электронов.

Таким образом, для применимости классической статистики нужно, чтобы электронный газ был невырожденным. А это значит, что концентрация электронов в нем должна быть не очень велика. Именно это мы имели в виду в § 149, говоря о пределах применимости классической электронной теории

Из формулы (155.13) видно, что для отсутствия вырождения концентрация электронов должна удовлетворять условию  $n_0 \ll N_c$ . Чтобы оценить порядок величины  $N_c$ , положим  $m_{эф} = m$  и примем температуру  $T = 300$  К. Тогда по формуле (155.14) получаем

$$N_c = 2,4 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3} = 2,4 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}.$$

## Г Л А В А XV

### ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ТОКИ В ВАКУУМЕ

#### § 156. Электронная эмиссия

В гл. XIV мы видели, что в металлах имеются электроны проводимости, участвующие в тепловом движении. Так как электроны удерживаются внутри металла, то, значит, вблизи поверхности существуют силы, действующие на электроны и направленные внутрь металла. Они возникают вследствие притяжения между электронами и положительными ионами решетки. В результате этого взаимодействия в поверхностном слое металлов появляется электрическое поле, а потенциал при переходе из внешнего пространства внутрь металла увеличивается на некоторую величину  $\varphi$ . Соответственно потенциальная энергия электрона уменьшается на  $e\varphi$ .

Распределение потенциальной энергии электрона для ограниченного металла показано на энергетической диаграмме рис. 270. Здесь  $W_0$  — уровень энергии покоящегося электрона вне металла,  $E_c$  — наименьшая энергия электронов проводимости (дно зоны проводимости). Распределение потенциальной энергии имеет вид потенциальной ямы. Ее глубина равна  $\chi = e\varphi = W_0 - E_c$ . Эта величина называется *электронным сродством* и является важной характеристикой вещества.

Если электрон внутри металла имеет полную энергию  $W_1$ , меньшую  $W_0$  (рис. 270), то такой электрон не сможет покинуть металл. Условие вылета электрона из металла

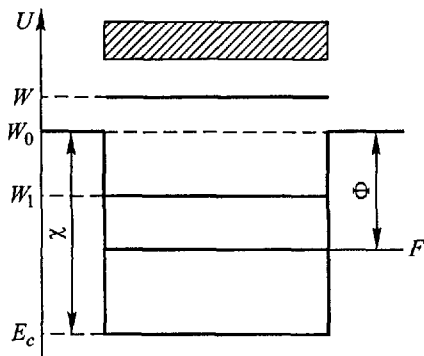
$$W \geq W_0. \quad (156.1)$$

При комнатных температурах практически для всех электронов в металлах и полупроводниках это условие не выполняется и электроны связаны в пределах проводника. Однако электронам

можно сообщить различными способами дополнительную энергию. В этом случае часть электронов металла получает возможность покинуть металл, и мы наблюдаем явление испускания электронов, или *электронной эмиссии*

В зависимости от того, каким способом сообщена электронам энергия, мы различаем разные типы электронной эмиссии. Если электроны получают энергию за счет тепловой энергии тела при повышении температуры этого тела, мы говорим о *термоэлектронной эмиссии*; при подведении энергии светом мы имеем явление *фотоэмиссии*, или фотоэлектрический эффект; если энергия сообщается электронам при бомбардировке извне какими-либо другими частицами (электронами, ионами), мы наблюдаем *вторичную электронную эмиссию*.

Рис. 270 Распределение потенциальной энергии электрона  $U$  в ограниченном металле;  $\Phi = W_0 - F$  — термоэлектронная работа выхода (§ 158)



го тела, мы говорим о *термоэлектронной эмиссии*; при подведении энергии светом мы имеем явление *фотоэмиссии*, или фотоэлектрический эффект; если энергия сообщается электронам при бомбардировке извне какими-либо другими частицами (электронами, ионами), мы наблюдаем *вторичную электронную эмиссию*.

## § 157. Вольт-амперная характеристика вакуумного диода

Для наблюдения термоэлектронной эмиссии может служить пустотная лампа, содержащая два электрода: один — в виде проволоки из тугоплавкого материала (вольфрам, молибден и др.), раскаляемой током (катод), и другой, холодный электрод, собирающий термоэлектроны (анод). Подобные лампы получили широкое применение в современной радиотехнике для выпрямления переменных токов (вакуумные диоды, см. § 159). Аноду диода чаще всего придают форму цилиндра, внутри которого расположен накаливаемый катод.



Если составить электрическую цепь, содержащую вакуумный диод, источник напряжения и миллиамперметр (рис. 271), то при холодном катоде ток в цепи не возникнет, так как сильно разреженный газ внутри диода (вакуум) не содержит заряженных частиц, и потому электропроводность диода практически равна нулю. Если же раскалить катод диода при помощи дополнительного источника тока до высокой температуры, то миллиамперметр обнаруживает появление тока.

Ток в цепи диода появляется только в том случае, если положительный полюс батареи соединен с анодом, а отрицательный — с катодом. Если же изменить знак разности потенциалов, приложенной к диоду, то тока в цепи не будет, как бы сильно мы ни раскаляли катод. Это обстоятельство показывает, что катод испускает отрицательные частицы, т.е. электроны, и что положительные ионы не покидают металл в заметном количестве.

Сила термоэлектронного тока в диоде зависит от величины потенциала анода относительно катода (мы считаем, что падение напряжения на самом катоде

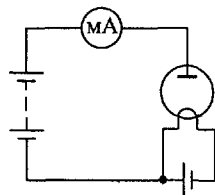


Рис 271. Схема для наблюдения термоэлектронной эмиссии

достаточно мало, и поэтому не уточняем, относительно какой точки катода измеряется анодный потенциал). Кривая, изображающая зависимость силы тока в диоде от анодного напряжения (вольт-амперная характеристика), изображена на рис. 272 (кривая 014). Когда потенциал анода равен нулю, сила тока через диод мала. При увеличении положительного потенциала анода сила тока возрастает в соответствии с кривой 01. При дальнейшем возрастании анодного напряжения сила тока достигает

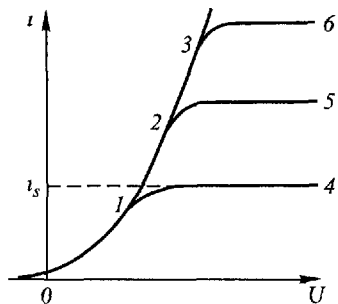


Рис. 272 Вольт-амперные характеристики диода при различной температуре катода

некоторого максимального значения  $i_s$ , называемого *током насыщения* диода, и почти перестает зависеть от анодного напряжения (участок характеристики 14).

При увеличении температуры катода вольт-амперная характеристика изображается кривыми 0125, 01236 и т.д. При значении тока, меньших  $i_s$ , зависимость силы тока от напряжения при всех температурах изображается одной и той же кривой 0123. Различными при разных температурах оказываются значения тока насыщения  $i_s$ , которые быстро увеличиваются при

возрастании температуры катода. При этом увеличивается и то анодное напряжение, при котором устанавливается ток насыщения.

Мы видим, что вольт-амперная характеристика электронной лампы оказывается нелинейной, а, следовательно, электронная лампа представляет собой пример проводника, не подчиняющегося закону Ома.

Зависимость тока диода от напряжения имеет простое объяснение. При наличии термоэлектронной эмиссии в пространстве между катодом и анодом в любой момент времени находятся электроны, движущиеся от катода к аноду, которые образуют облако отрицательного заряда (*пространственный заряд*). Этот пространственный заряд изменяет распределение потенциала в диоде. Если катод и анод представляют собой плоские пластины, параллельные друг другу (рис. 273), то в отсутствие пространственного заряда (при холодном катоде) распределение потенциала между катодом и анодом, образующими плоский конденсатор, изображается прямой линией 1.

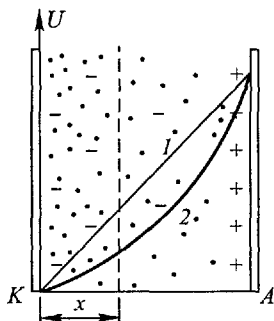


Рис. 273. Пространственный заряд в диоде и вызываемое им перераспределение потенциала

При этом значение потенциала в любой плоскости  $x$  оказывается меньше, чем в отсутствие пространственного заряда, а следовательно, и скорости движения электронов при наличии пространственного заряда уменьшаются. С увеличением анодного напряжения концентрация электронов в облаке пространственного заряда уменьшается. Поэтому и тормозящее действие пространственного заряда делается меньше, и анодный ток увеличивается.

Отметим, что распределение потенциала, изображенное кривой 2, получается в том случае, когда начальные скорости вылета электронов из катода достаточно малы, что обычно и имеет место. В тех же случаях, когда начальными скоростями нельзя пренебрегать, распределение потенциала имеет более сложный вид

Зависимость тока диода  $i$  от потенциала анода  $U$  имеет вид

$$i = CU^{3/2}, \quad (157.1)$$

где  $C$  зависит от формы и размеров электродов.

Для плоского диода

$$C = \frac{4}{9} \varepsilon_0 \frac{S}{d^2} \sqrt{\frac{2e}{m}}, \quad (157.2)$$

где  $e/m$  — удельный заряд электрона,  $d$  — расстояние между катодом и анодом,  $S$  — поверхность катода (равная поверхности анода),  $\varepsilon_0$  — электрическая постоянная (см. Добавление 8).

Формула (157.1) выражает уравнение кривой 0123 рис. 272. Она носит название закона Богуславского–Лэнгмюра или «закона  $3/2$ ».

Когда потенциал анода становится настолько большим, что все электроны, испускаемые катодом за каждую единицу времени, попадают на анод, ток достигает своего максимального значения и перестает зависеть от анодного напряжения. Плотность тока насыщения  $j_s$ , т.е. сила тока насыщения на каждую единицу поверхности катода, характеризует эмиссионную способность катода, которая зависит от природы катода и его температуры.

### § 158. Зависимость тока насыщения от температуры

Число электронов в металле, способных преодолеть потенциальный барьер на поверхности и выйти в вакуум, быстро увеличивается при повышении температуры. Поэтому и плотность тока насыщения очень сильно зависит от температуры. Расчет показывает (см. ниже), что эта зависимость выражается формулой

$$j_s = AT^2 \exp(-\Phi/kT). \quad (158.1)$$

Здесь  $A$  — постоянная, которая для всех металлов с совершенно чистой поверхностью должна иметь одно и то же значение,  $k$  — постоянная Больцмана,  $\Phi$  — величина, имеющая размерность энергии, которая по определению называется *термоэлектронной работой выхода* данного металла.

Термоэлектронная работа выхода равна разности между энергией покоящегося электрона в вакууме  $W_0$  и уровнем Ферми  $F$  (см. рис. 270):

$$\Phi = W_0 - F. \quad (158.2)$$

Следовательно, отвлекаясь от тепловой «размазки» функции Ферми (§ 155), можно сказать, что  $\Phi$  есть работа, необходимая для перевода электрона с наибольшей кинетической энергией из металла в вакуум без начальной скорости. Соотношение (158.1) называется *формулой Ричардсона–Дэшмэна*.

Формулы (158.1) и (158.2) справедливы не только для металлов, но и для полупроводников. Однако в последнем случае физический смысл работы выхода становится более сложным.

Формулу (158.1) можно получить следующим образом. Термоэлектронную эмиссию можно рассматривать как испарение электронов из металла. Рассмотрим кусок металла, который раскален до высокой температуры и заключен в замкнутый эвакуированный сосуд, поддерживаемый при той же температуре. С поверхности металла будет происходить испарение электронов, и обратно, часть электронов, находящихся вне металла, при тепловом движении будет встречать поверхность металла и конденсироваться на ней. В состоянии термодинамического равновесия над металлом будет существовать электронный газ, подобный насыщенному пару над жидкостью; концентрация электронного газа определяется условием равенства скоростей конденсации электронов и их испарения. Скорость конденсации электронов можно просто вычислить, а следовательно, нетрудно найти и скорость испарения.

Чтобы получить формулу (158.1), нужно учесть квантовые свойства электронного газа (§ 155). Равновесную концентрацию электронов над металлом можно найти по формуле (155.11), которая применима как для электронов внутри металла, так и для электронов в вакууме. Под  $W$  нужно понимать энергию электронов в вакууме:

$$W = W_0 + \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2),$$

где  $m$  в данном случае есть не эффективная, а истинная масса электрона. Кроме того, так как  $W_0$  больше  $F$  на много  $kT$ , единицей в знаменателе формулы (155.11) можно пренебречь. Поэтому для концентрации в вакууме электронов, импульсы которых лежат в интервале  $dp_x dp_y dp_z$ , имеем

$$\begin{aligned} dn &= \frac{2}{h^3} \exp\left(-\frac{W-F}{kT}\right) dp_x dp_y dp_z = \\ &= \frac{2}{h^3} \exp\left(-\frac{W_0-F}{kT}\right) \exp\left(-\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2mkT}\right) dp_x dp_y dp_z. \end{aligned}$$

Направим теперь ось  $X$  перпендикулярно поверхности в глубь металла. Тогда для электронов, движущихся по направлению к металлу,  $p_x > 0$ . Число электронов с данными составляющими импульса, встречающих единицу поверхности металла в единицу времени и входящих из вакуума в металл, равно  $v_x dn$ , где  $v_x = p_x/m$  есть  $x$ -составляющая тепловой скорости электронов. Число электронов, выходящих из металла в вакуум и имеющих импульсы в вакууме в том же интервале  $dp_x dp_y dp_z$ , будет таким же, так как металл и электроны над ним находятся в равновесии. Вклад указанной группы электронов в плотность тока равен

$$dj_s = e \frac{p_x}{m} dn.$$

Полная плотность тока насыщения получается интегрированием этого выражения по всем возможным положительным значениям  $p_x$ . Составляющие же импульса  $p_y$  и  $p_z$  (параллельные поверхности) могут иметь любые значения. Следовательно,

$$\begin{aligned} j_s &= \frac{2}{h^3} \frac{e}{m} \exp\left(-\frac{W_0-F}{kT}\right) \times \\ &\times \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{p_x^2}{2mkT}\right) p_x dp_x \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{p_y^2}{2mkT}\right) dp_y \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{p_z^2}{2mkT}\right) dp_z. \end{aligned}$$

Каждый из интегралов по  $p_y$  и  $p_z$  выражается формулой (155.6) и равен  $(2\pi mkT)^{1/2}$ . Интеграл же по  $p_x$  вычисляется непосредственно интегрированием по частям и дает  $mkT$ . Поэтому мы получаем

$$j_s = \frac{4\pi me k^2}{h^3} T^2 \exp\left(-\frac{W_0 - F}{kT}\right),$$

т.е. формулу (158.1). Постоянная  $A$  оказывается равной

$$A = 4\pi me k^2 / h^3 = 12,0 \cdot 10^5 \text{ А}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^2) = 120 \text{ А}/(\text{см}^2 \cdot \text{К}^2).$$

Измеряя на опыте зависимость тока насыщения от температуры, можно определить работу выхода  $\Phi$  для данного металла. Работа выхода для некоторых металлов приведена в табл. 10. Для всех металлов она имеет величину порядка нескольких электронвольт.

Таблица 11

Металл	W	Mo	Pt	Fe	Mg	Na
Работа выхода, эВ	4,5	4,3	5,3	4,4	3,5	2,3

Наряду с термоэлектронной эмиссией существуют и другие явления, позволяющие определить работу выхода (фотоэлектрический эффект, контактная разность потенциалов). Значения работы выхода для металлов, определенные различными методами, удовлетворительно совпадают друг с другом.

## § 159. Электронная лампа как выпрямитель

Так как раскаленный катод электронной лампы испускает только электроны, но не положительные ионы, лампа пропускает ток только тогда, когда ее катод соединен с отрицательным полюсом источника. При перемене полярности приложенного напряжения все термоэлектроны возвращаются в катод и ток через лампу не проходит. Поэтому лампа обладает односторонней проводимостью.

Вентильное действие диодов широко используют для устройства выпрямителей, предназначенных для превращения переменного тока в постоянный. Простейшая схема выпрямителя с электронной лампой показана на рис. 274. Переменное напряжение между точками  $A$  и  $B$  (входное напряжение  $U_{вх}$ ) изменяется во времени согласно кривой  $a$ . Вследствие вентильного свойства лампы ток в нагрузочном сопротивлении  $r$  имеется только в те полупериоды, когда лампа пропускает ток. Поэтому выходное напряжение  $U_{вых}$  на сопротивлении  $r$  изображается кривой  $b$  и мы получаем пульсирующее напряжение одного знака.

Чтобы избавиться от пульсаций, между диодом и нагрузкой включают фильтры. Простейший из них представляет собой

конденсатор, включенный параллельно нагрузке. При нарастании напряжения конденсатор быстро заряжается, но затем, при уменьшении входного напряжения, медленно разряжается только через нагрузочное сопротивление  $r$ , так как электроны в диоде не могут идти от анода к катоду. В результате получается выходное напряжение, изображаемое кривой  $в$ . Пульсации напряжения тем меньше, чем больше постоянная времени цепи  $rC$ . При увеличении  $r$  постоянная составляющая напряжения  $U_0$  стремится к максимальному (пиковому) значению входного напряжения.

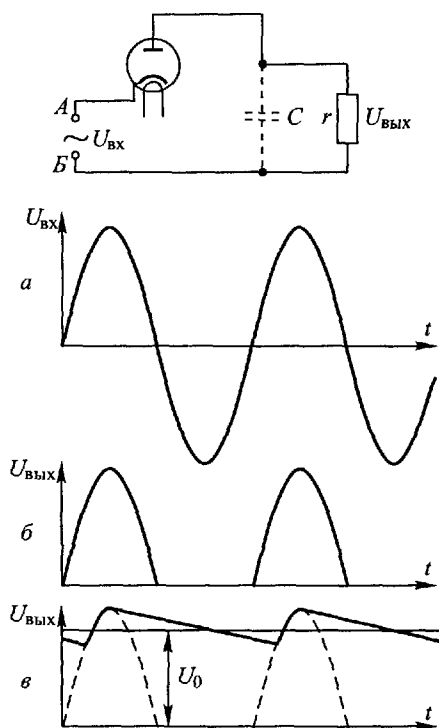


Рис. 274. Выпрямитель с электронной лампой

На рис. 275 показана схема двухполупериодного выпрямителя. В каждый момент времени работает лишь одна из ламп, а именно та, напряжение на которой соответствует пропускному направлению и заряжает

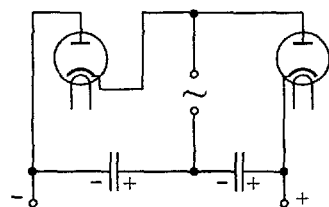


Рис. 275. Схема двухполупериодного выпрямителя

соединенный с нею конденсатор. Оба конденсатора соединены последовательно, и поэтому выходное напряжение выпрямителя (в отсутствие нагрузки) равно удвоенному пиковому значению входного напряжения.

## § 160. Трехэлектродная электронная лампа (триод)

Основное техническое значение электронных ламп определяется тем, что электронным током в лампе легко управлять. Для этого внутрь лампы вводят один или несколько дополнительных

металлических электродов; их чаще всего делают в виде проводочных спиралей и помещают между катодом и анодом. Эти дополнительные электроды получили название *сеток*.

Рассмотрим трехэлектродную лампу, или триод. Она имеет накаливаемый катод, анод и единственную сетку (рис. 276). Электронный ток в такой лампе зависит не только от потенци-

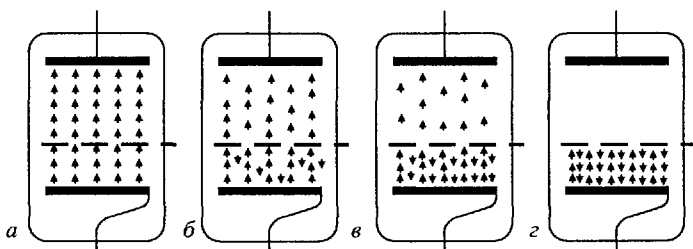


Рис. 276. Управляющее действие сетки

ала анода, но и от потенциала сетки относительно катода. Если потенциал сетки равен нулю, то число электронов, достигающих анода, будет практически то же, что и в отсутствие сетки (*а*). При положительном потенциале сетки пространственный заряд в лампе уменьшится и ток анода будет больше. Напротив, при отрицательном потенциале сетки пространственный заряд увеличится; вследствие этого часть термоэлектронов будет возвращена обратно в катод и ток анода будет меньше, чем в отсутствие сетки (*б*). При увеличении отрицательного потенциала сетки анодный ток будет уменьшаться (*в*) и при некотором потенциале сетки ток в лампе будет заперт вовсе (*г*). Этот запирающий отрицательный потенциал, очевидно, будет тем больше, чем выше положительный потенциал анода. Из сказанного ясно, что, изменяя потенциал сетки, мы можем изменять и ток анода, т.е. им управлять. Так как масса электронов ничтожна, то инерция триода очень мала и его управляющее действие сохраняется даже при очень быстрых изменениях потенциала сетки.

Рассмотрим подробнее, от чего и как зависит сила термоэлектронного тока в трехэлектродной лампе.

Картина электрического поля триода схематически представлена на рис. 277. При наличии сетки линии напряженности, которые заканчиваются частично на катоде, а частично на электронах пространственного заряда, исходят не только из анода *A*, но и из проволок сетки *C*. Поэтому электрическое поле вблизи катода, а значит, и пространственный заряд зависят как от потенциала анода  $U_a$ , так и от потенциала сетки  $U_c$ . Однако, так как анод частично экранируется сеткой, влияние потенциала

анода слабее, чем влияние потенциала сетки, и поэтому можно положить, что полный ток с катода определяется некоторым результирующим или управляющим напряжением

$$U_y = U_c + DU_a. \quad (160.1)$$

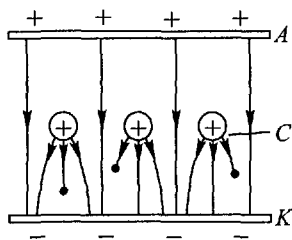
Здесь  $D$  — величина, зависящая от устройства лампы, причем  $D < 1$ . Ее значение тем меньше, чем гуще сетка и чем ближе она расположена к катоду. Величина  $D$  получила название *проницаемости* сетки, а обратная ей величина

$$K = 1/D \quad (160.2)$$

— *коэффициента усиления* лампы (см. ниже). Из сказанного следует, что ток с катода, или полный ток лампы  $i$ , есть функция управляющего напряжения:

$$i = f(U_c + DU_a). \quad (160.3)$$

Рис 277 Электрическое поле внутри триода (схематически)



возникает некоторый ток  $i_c$ . Очевидно, что полный ток лампы есть сумма токов анода и сетки:

$$i = i_a + i_c. \quad (160.4)$$

Отметим, что появление заметного тока сетки представляет собой нежелательное явление, так как приводит к бесполезному расходу мощности в цепи сетки. Однако в большинстве случаев ток сетки мал по сравнению с током анода, и поэтому можно положить

$$i_a \approx i = f(U_c + DU_a). \quad (160.5)$$

Свойства триода можно вполне определить, задавая кривые зависимости анодного тока  $i_a$  от напряжения сетки  $U_c$  при различных значениях напряжения на аноде  $U_a$  в качестве параметра. Такие кривые называют *сеточными характеристиками* триода; они приведены на рис 278. Из этих кривых видно, что одно и то же значение  $i_a$  можно получить при разных значениях напряжения  $U_c$ . Чем выше потенциал анода  $U_a$ , тем ниже должен быть потенциал сетки  $U_c$  для получения одного и того же тока; или, иначе, при повышении потенциала анода сеточные характеристики смещаются в сторону уменьшения потенциала сетки. Величина

$$S = \left( \frac{\partial i_a}{\partial U_c} \right)_{U_a} \quad (160.6)$$

характеризует быстроту изменения анодного тока при изменении потенциала сетки, или крутизну характеристики. Индекс



$U_a$  обозначает, что потенциал анода остается постоянным. Крутизна характеристики  $S$  равна, очевидно, тангенсу угла наклона сеточной характеристики в рассматриваемой точке.

Если бы мы изображали зависимость анодного тока  $i_a$  от анодного напряжения  $U_a$  при различных постоянных значениях  $U_c$ , то получили бы семейство кривых, называемых *анодными характеристиками* триода. Такие кривые для того же триода, к которому относится рис. 278, изображены на рис. 279. При

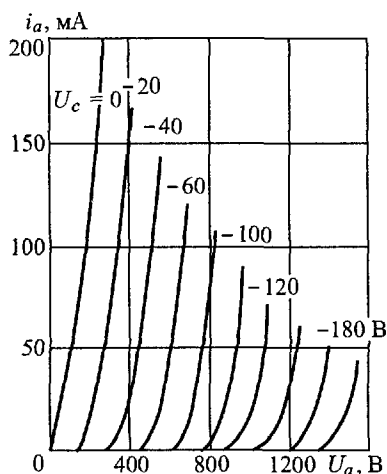
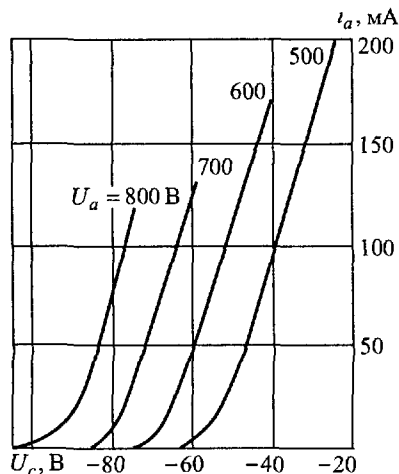


Рис. 278. Сеточные характеристики мощного триода

Рис. 279. Анодные характеристики триода

повышении сеточного потенциала анодные характеристики смещаются в сторону уменьшения потенциала анода.

Мы видим, что триоды, так же как и диоды, представляют пример проводников с нелинейной вольт-амперной характеристикой, не подчиняющихся закону Ома. Однако достаточно малый отрезок характеристики можно считать отрезком прямой линии и говорить о сопротивлении при данном значении напряжения (или тока). Поэтому проводники, не подчиняющиеся закону Ома (нелинейные сопротивления), характеризуют, задавая их дифференциальное сопротивление  $R = \partial U / \partial i$ . Применяя это понятие к триоду и обозначая его дифференциальное сопротивление через  $R_i$ , мы имеем, следовательно,

$$R_i = \left( \frac{\partial U_a}{\partial i_a} \right)_{U_c}, \quad (160.7)$$

где индекс  $U_c$  указывает на то, что потенциал сетки поддерживается постоянным. Дифференциальное сопротивление триода

часто называют его *внутренним сопротивлением*. Из формулы (160.7) видно, что внутреннее сопротивление триода равно тангенсу угла наклона анодной характеристики к оси токов в данной точке. Оно характеризует быстроту изменения анодного напряжения при изменении анодного тока.

Крутизна характеристики  $S$  и внутреннее сопротивление  $R_i$  триода в рабочей точке, а также проницаемость сетки  $D$  являются важнейшими величинами, характеризующими триод.

Эти величины не являются независимыми. Продифференцируем обе части (160.5) по  $i_a$ , считая  $U_c = \text{const}$ . Получим

$$1 = \frac{\partial f}{\partial U_y} \left( \frac{\partial U_y}{\partial U_a} \right)_{U_c} \left( \frac{\partial U_a}{\partial i_a} \right)_{U_c}.$$

Но

$$\frac{\partial f}{\partial U_y} = \left( \frac{\partial f}{\partial U_c} \right)_{U_a} = S, \quad \left( \frac{\partial U_y}{\partial U_a} \right)_{U_c} = D, \quad \left( \frac{\partial U_a}{\partial i_a} \right)_{U_c} = R_i.$$

Поэтому

$$SDR_i = 1. \quad (160.8)$$

## § 161. Усиление электрических сигналов

Управляющее действие сетки, рассмотренное в предыдущем параграфе, позволяет использовать триоды для усиления электрических сигналов и переменных токов.

Принципиальная схема усилителя с трехэлектродной лампой показана на рис. 280. Анодная цепь лампы содержит источник тока с ЭДС  $\mathcal{E}$  и нагрузочное сопротивление  $R_a$ . Усиливаемое переменное напряжение  $U_c$  прикладывается между сеткой и катодом лампы.

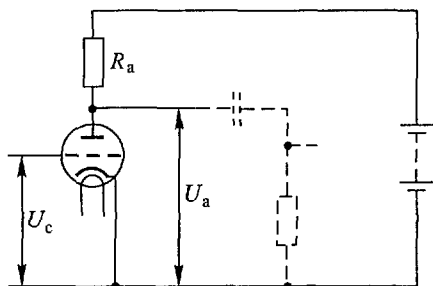


Рис. 280. Схема усилителя на сопротивлении

Изменение сеточного напряжения  $\Delta U_c$  вызывает определенное изменение анодного тока  $\Delta i_a$ . Но напряжение между анодом и катодом, согласно закону Ома, для участка цепи с ЭДС выражается соотношением

$$U_a = \mathcal{E} - R_a i_a.$$

Поэтому изменение анодного тока  $\Delta i_a$  вызовет изменение анодного напряжения

$$\Delta U_a = -R_a \Delta i_a, \quad (161.1)$$

и если к сетке приложено переменное напряжение, то и на аноде лампы (на нагрузочном сопротивлении  $R_a$ ) появится также переменное напряжение.

Легко видеть, что изменение анодного напряжения  $\Delta U_a$  может быть больше, чем  $\Delta U_c$ . В самом деле, рассмотрим важный частный случай, когда нагрузочное сопротивление намного больше внутреннего сопротивления лампы ( $R_a \gg R_i$ ). В этом случае ток через лампу будет практически определяться только сопротивлением  $R_a$ , а значит, будет оставаться постоянным. Но, согласно (160.1), это значит, что

$$U_c + DU_a = \text{const.}$$

Поэтому

$$\Delta U_c + D\Delta U_a = 0,$$

а следовательно,

$$\Delta U_a / \Delta U_c = -1/D = -K. \quad (161.2)$$

Так как всегда проницаемость сетки  $D < 1$ , то  $\Delta U_a > \Delta U_c$ , и мы имеем усиление напряжения. Из (161.2) видно, что отношение обоих напряжений в этом случае равно  $K = 1/D$ , чем и объясняется название «коэффициент усиления» для величины  $K$ .

Знак минус в формуле (161.2) показывает, что увеличение потенциала сетки (положительного) вызывает уменьшение потенциала на аноде. При наличии колебательного сеточного напряжения это обозначает, что колебания анодного напряжения противоположны по фазе колебаниям напряжения на сетке.

Рассмотрим теперь второй предельный случай  $R_a \ll R_i$ . Теперь напряжение на аноде лампы будет равно ЭДС источника  $\mathcal{E}$ , а следовательно, здесь, в противоположность предыдущему примеру, постоянным остается анодное напряжение  $U_a$ . Напротив, изменения анодного тока в этом случае будут наибольшими.

Обращаясь вновь к формуле (160.5), можно написать для малых изменений тока

$$\Delta i_a = \left( \frac{\partial i_a}{\partial U_c} \right)_{U_a} \Delta U_c.$$

Но производная в правой части есть крутизна  $S$  сеточной характеристики, и поэтому

$$\Delta i_a = S \Delta U_c.$$

Так как  $\Delta U_c = \Delta i_c r$ , где  $\Delta i_c$  — изменение тока сетки, а  $r$  — сопротивление между сеткой и катодом, то для коэффициента усиления по току находим

$$\frac{\Delta i_a}{\Delta i_c} = Sr. \quad (161.3)$$

Усиление по току тем больше, чем больше крутизна характеристики  $S$ .

В общем случае, когда нагрузочное сопротивление  $R_a$  сравнимо с внутренним сопротивлением  $R_i$ , для малого изменения анодного тока можно

написать

$$\Delta i_a = \left( \frac{\partial i_a}{\partial U_c} \right)_{U_a} \Delta U_c + \left( \frac{\partial i_a}{\partial U_a} \right)_{U_c} \Delta U_a.$$

Но

$$\left( \frac{\partial i_a}{\partial U_c} \right)_{U_a} = S, \quad \left( \frac{\partial i_a}{\partial U_a} \right)_{U_c} = \frac{1}{R_i}.$$

Кроме того, согласно (161.1),

$$\Delta U_a = -R_a \Delta i_a.$$

Поэтому

$$\Delta i_a = S \Delta U_c - \frac{R_a}{R_i} \Delta i_a,$$

или

$$\Delta i_a = \frac{R_i S}{R_a + R_i} \Delta U_c.$$

Отсюда находим изменение анодного напряжения

$$\Delta U_a = -R_a \Delta i_a = -\frac{R_a}{R_a + R_i} R_i S \Delta U_c.$$

Согласно (160.8) заменяем в этом выражении  $R_i S$  на  $1/D = K$  и получаем окончательно

$$\Delta U_a = -\frac{R_a}{R_a + R_i} K \Delta U_c. \quad (161.4)$$

Если бы мы имели цепь (рис. 281), содержащую генератор с ЭДС  $\mathcal{E} = K \Delta U_c$  и внутренним сопротивлением  $R_i$ , который замкнут на нагрузку с сопротивлением  $R_a$ , то, согласно закону Ома, напряжение на нагрузочном сопротивлении выразилось бы как раз формулой (161.4). Поэтому можно сказать, что если к сетке электронной лампы подводится переменное напряжение  $\Delta U_c$ , то действие лампы в анодной цепи подобно действию генератора переменного тока с ЭДС  $\mathcal{E} = K \Delta U_c$  и внутренним сопротивлением  $R_i$ , замкнутого на внешнюю цепь с сопротивлением  $R_a$ .

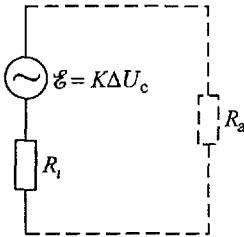


Рис. 281. Эквивалентная схема триода в режиме усиления

Это положение является основным для понимания усилительного действия электронных ламп. Рассмотренный выше первый частный случай ( $R_a \gg R_i$ , усиление напряжения) соответствует, очевидно, режиму холостого хода генератора, а второй частный случай ( $R_a \ll R_i$ , усиление тока) — режиму короткого замыкания.

**Ламповые усилители.** Усиление сигналов можно производить многократно. Для этого напряжение, усиленное электронной лампой, подают на сетку второй лампы, а усиленное ею напряжение — на сетку третьей лампы и т.д. Одна из схем усилительного каскада или многолампового усилителя изображена на рис. 282. Здесь анодные цепи всех ламп соединены параллельно

но и питаются одной и той же анодной батареей. Накаливание катодов производится также от единственной батареи накала.

Следует обратить внимание на то, что напряжение на сетку каждой лампы подается не непосредственно, а через разделительный конденсатор  $C$ . Он не препятствует прохождению переменных усиливаемых сигналов, но не допускает попадания на сетку высокого постоянного

напряжения анодной батареи. Между сеткой и катодом каждой лампы включено еще сопротивление  $r$  (утечка сетки), роль которого заключается в следующем. В те периоды времени, когда на сетке имеется положительный потенциал, на нее попадают электроны. Если бы утечки сетки не было, то сетка в конце концов зарядилась бы до отрицательного запирающего потенциала и ток через лампу прекратился бы. Но по сопротивлению  $r$  отрицательные заряды непрерывно стекают с сетки и запираения тока в лампе не происходит. Подбирая должным образом соотношение между  $C$  и  $r$ , можно добиться, чтобы колебания напряжения на сетке происходили относительно небольшого отрицательного значения, при котором еще сохраняется управляющее действие сетки, но ток на сетку практически равен нулю.

Мы рассмотрели только одну из наиболее распространенных схем усилителей (усилитель на сопротивлениях). Существуют и многочисленные другие схемы усилителей, описание которых можно найти в радиотехнической литературе.

## § 162. Электрические флуктуации

Общий коэффициент усиления лампового усилителя может быть как угодно велик. Если, например, одна лампа дает усиление напряжения 10, то усилитель из трех подобных ламп позволит получить усиление  $10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3$ , из шести ламп —  $10^6$  и т.д. Поэтому для получения на выходе усилителя определенной амплитуды напряжения, например в 1 В, сигнал на входе при трех лампах должен иметь амплитуду  $10^{-3}$  В, при шести лампах — только  $10^{-6}$  В, а при большем количестве ламп — еще меньшее значение.

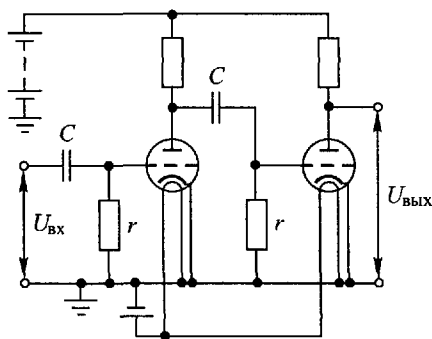


Рис. 282 Схема усилительного каскада на сопротивлениях

Однако было бы ошибкой считать, что при достаточном увеличении числа ламп можно зарегистрировать любой, произвольно малый сигнал. При увеличении общего коэффициента усиления на выходе усилителя появляются быстрые и неправильные колебания напряжения, которые затушевывают усиливаемый сигнал. Если в качестве выходного прибора служит телефон, то в нем возникают шумы. Указанные хаотические колебания напряжения получили название *электрических шумов*.

Электрические шумы обусловлены атомарной природой электрического заряда. Они возникают как внутри электронных ламп, так и в тех сопротивлениях, которые входят в схему усилителя.

Остановимся сначала на шумах электронной лампы. Число термоэлектронов, испускаемых катодом за каждую единицу времени, хотя и очень велико, однако конечно. Вследствие хаотичности теплового движения это число остается постоянным только в среднем. Число же электронов, вылетающих из катода за малые промежутки времени, различно в разные моменты времени; оно то больше, то меньше среднего значения. Эта неравномерность термоэлектронной эмиссии и является одной из причин появления электрических шумов. Она получила название *дробового эффекта*.

Дробовой эффект проявляется особенно сильно в том случае, когда все термоэлектроны достигают анода, т.е. когда электронная лампа работает в режиме насыщения (§ 157). В тех же случаях, когда ток в лампе ограничен пространственным зарядом (что и имеет место в усилительном режиме), колебания тока, вызываемые дробовым эффектом, сильно подавляются.

Гораздо большее значение имеют шумы, возникающие в сопротивлениях. Для того чтобы понять происхождение этих шумов, представим себе металлический проводник, отключенный от источника тока. Электроны проводимости в таком проводнике, участвуя в тепловом движении, перемещаются вследствие диффузии. Диффузия не приводит к появлению тока, так как при тепловом движении нет никаких преимущественных направлений, и число электронов, перемещающихся в любом направлении, в среднем равно числу перемещающихся в прямо противоположном направлении. Однако равенство обоих диффузионных потоков имеет место только при достаточно большом промежутке времени. В отдельные же моменты времени вследствие беспорядочности теплового движения в проводнике существуют слабые токи, направление и сила которых беспорядочно изменяются, а между концами проводника появляется хаотически изменяющееся напряжение.

Мы видим, что электрические шумы имеют то же происхождение, что и хаотические отступления (*флуктуации*) давления,

плотности, температуры и других макроскопических величин от их равновесных значений, наблюдаемые в атомарных системах и обусловленные тепловым движением. Шумы в сопротивлениях и дробовой эффект представляют собой электрические флуктуации.

Электрические флуктуации можно наглядно продемонстрировать, если подключить ко входу усилителя с коэффициентом усиления  $10^5 - 10^6$  сопротивление в несколько тысяч ом, а выход усилителя присоединить к осциллографу (рис. 283). Тогда на экране осциллографа вместо ровной нулевой линии, видимой при отключенном усилителе, можно наблюдать совершенно хаотические колебания луча,

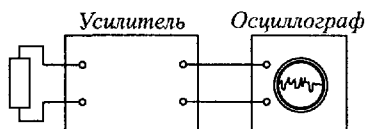


Рис. 283. Схема для наблюдения электрических флуктуаций

вызванные флуктуациями напряжения. При нагревании сопротивления интенсивность флуктуаций увеличивается.

Из сказанного ясно, что для усиления и регистрации электрического сигнала необходимо, чтобы он превосходил уровень собственных шумов усилителя или, по крайней мере, был сравним с ним. В современных хороших ламповых усилителях минимальный сигнал, еще заметный на фоне шумов, может быть доведен до  $10^{-7}$  В и ниже.

## § 163. Вторичная электронная эмиссия

Эмиссия электронов из металла наблюдается также при бомбардировке металла извне электронами. Это явление «выбивания» электронов из металла получило название *вторичной электронной эмиссии*. Его причина заключается в том, что приходящие извне электроны, проникая в глубь металла, передают электронам проводимости часть своей энергии. При этом некоторая доля электронов металла приобретает скорости, достаточные для преодоления поверхностного потенциального барьера, и вылетает из металла.

Отношение числа выбитых вторичных электронов  $n$  к числу проникающих первичных  $n_0$

$$\gamma = n/n_0$$

называется *коэффициентом вторичной эмиссии*. Он зависит от рода металла и скорости первичных электронов. С увеличением скорости первичных электронов коэффициент вторичной эмиссии сначала возрастает, затем достигает размытого максимума и снова уменьшается. Энергия первичных электронов, соответствующая максимальному  $\gamma$ , различна для разных металлов и имеет порядок сотен электрвольт.

Значение  $\gamma$  в максимуме для чистых металлов не превышает 2. Гораздо более сильная вторичная эмиссия наблюдается у многих полупроводников, для которых  $\gamma_{\text{макс}}$  может достигать 10 и более. Поэтому для получения сильной вторичной эмиссии употребляют сложные катоды (эмиттеры), состоящие из металлической подложки, на которую наносят слой полупроводника, и подвергают его соответствующей химической обработке. Таковы, например, применяемые на практике сурьмяноцезиевые эмиттеры, получаемые обработкой сурьмы в парах цезия; эмиттеры из арсенида галлия, покрытого тончайшим слоем окислов цезия, и другие.

Вторичная электронная эмиссия используется в электронных умножителях, предназначенных для усиления слабых электронных токов. Схема одного из типов умножителей показана на

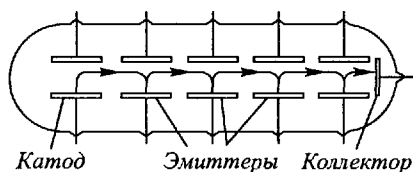


Рис. 284. Электронный умножитель с магнитным управлением

рис. 284. Умножитель представляет собой вакуумную трубку, в которой расположен ряд плоских конденсаторов и собирающий электрод (коллектор). Одна из пластин каждого конденсатора является вторично-

электронным эмиттером, а другая служит лишь для создания электрического поля, ускоряющего вторичные электроны. Трубка помещается между полюсами постоянного магнита (на рисунке не показан), создающего магнитное поле, перпендикулярное к электрическому полю (перпендикулярное к плоскости чертежа).

Если из катода (например, под действием света) вышло небольшое число электронов, то эти электроны будут ускоряться электрическим полем. Благодаря магнитному полю траектория электронов искривляется, как показано на рисунке, и электроны попадут на первый эмиттер. Здесь возникнет вторичная эмиссия, и с эмиттера выйдет электронный поток, более сильный, чем поток с катода. Этот усиленный поток отклонится магнитным полем ко второму эмиттеру и т.д. В результате электронный поток, приходящий на собирающий электрод, будет гораздо сильнее, нежели первичный поток, вышедший с катода, т.е. мы получим усиление тока с помощью вторичной эмиссии.

Наряду с электронными умножителями с магнитным управлением применяют умножители с электрическим управлением, не требующие постоянных магнитов. Схема устройства и включения такого умножителя показана на рис. 285. Его действие понятно из рисунка.



В настоящее время электронные умножители применяются главным образом для усиления слабых фотоэлектрических токов. Они находят успешное применение в астрофизике для регистрации слабого свечения звезд, а также в других областях науки и техники.

Электронными умножителями токи могут усиливаться в миллионы раз. Однако, как и в ламповых усилителях, усиление нельзя сделать произвольно большим. Оно ограничивается теми токами, которые самопроизвольно возникают внутри умножителя, даже без воздействия света на фотокатод (темновые токи умножителя).

Вторичная электронная эмиссия происходит не только при бомбардировке мишени электронами, но и при бомбардировке ее тяжелыми частицами — положительными и отрицательными ионами. Вторичная электронная эмиссия, вызываемая положительными ионами, играет важную роль в некоторых формах газового разряда (см. гл. XVI).

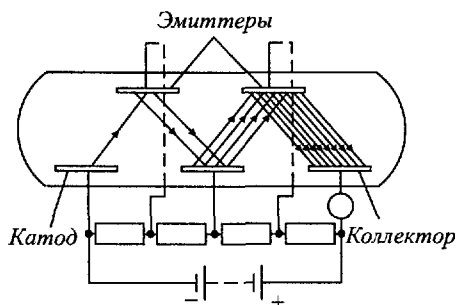


Рис. 285. Электронный умножитель с электрическим управлением

## § 164. Многосеточные лампы

Наряду с трехэлектродными электронными лампами (триодами) в современной радиотехнике широко применяются электронные лампы, имеющие несколько сеток. Рассмотрим кратко, в чем заключается смысл применения дополнительных сеток.

В § 161 мы видели, что усиление напряжения, даваемое триодом, тем больше, чем меньше проницаемость сетки  $D$ , т.е. чем меньше влияние потенциала анода по сравнению с потенциалом сетки. Чтобы уменьшить влияние

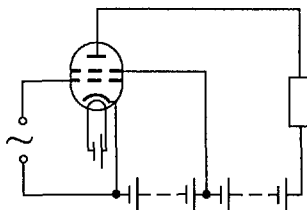


Рис. 286. Тетрод

потенциала анода по сравнению с потенциалом сетки. Чтобы уменьшить влияние потенциала анода на ток лампы, между управляющей сеткой и анодом помещают вторую сетку, на которую накладывают положительный относительно катода потенциал, несколько меньший потенциала анода. Такая лампа с четырьмя электродами, или тетрод, схематически изображена на рис. 286. Роль дополнительной сетки тетрода заключается в том, что она перехватывает часть линий напряженности поля, которые раньше достигали анода, т.е. частично экранирует анод, отсюда эта сетка и получила название *экранной сетки*. Экранная сетка вызывает то же

Экранная сетка вызывает то же

действие, что и уменьшение проницаемости управляющей сетки, и поэтому коэффициент усиления у тетрода при прочих равных условиях гораздо больше, чем у триода.

Однако тетроды обладают тем недостатком, что в них может легко возникнуть вторичная электронная эмиссия с анода, вызванная бомбардировкой термоэлектронами. В случае триода в обычном усилительном режиме сетка находится под небольшим (а часто и под отрицательным) потенциалом, поэтому электрическое поле возле анода направлено так, что возвращает вторичные электроны обратно в анод, и вторичная эмиссия не происходит. Она, впрочем, может возникнуть и в триоде, если на сетке имеется положительный потенциал, более высокий, нежели на аноде.

В тетроде же возле анода имеется экранная сетка, все время заряженная положительно, и поэтому, если потенциал анода делается ниже потенциала экранной сетки (что может легко произойти при наличии колебаний

направления на аноде), в тетроде возникает вторичная эмиссия. В результате этого уменьшается анодный ток лампы и на вольт-амперной анодной характеристике тетрода появляются провалы, ухудшающие свойства тетрода (динатронный эффект).

Для устранения динатронного эффекта в электронные лампы вводят еще одну сетку и располагают ее между экранной сеткой и анодом. Эту сетку, называемую защитной (или противодинаatronной), соединяют с катодом (рис. 287), так что между защитной

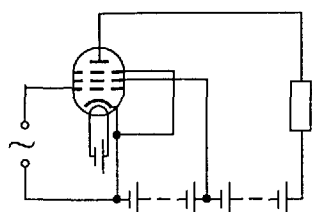


Рис. 287. Пентод

сеткой и анодом образуется электрическое поле, тормозящее вторичные электроны и устраняющие вторичную эмиссию с анода. Подобные лампы с пятью электродами, или пентоды, имеют высокий коэффициент усиления, «гладкую» анодную характеристику и ряд других достоинств и поэтому широко применяются в современных радиотехнических схемах.

## § 165. Автоэлектронная эмиссия

Эмиссия электронов из металлов происходит также под действием очень сильного электрического поля.

Для наблюдения этого явления может служить хорошо откачанная трубка, содержащая два металлических электрода — катод и анод (рис. 288). В качестве катода применяют электрод с очень маленькой поверхностью (острие), а анод, напротив, делают большим. В этом случае линии напряженности электрического поля сильно сгущаются возле катода, и напряженность поля у поверхности катода, даже при умеренных напряжениях, становится очень большой.

Поясним это на примере. Пусть анод имеет форму сферы с радиусом  $b$ , а катод представляет собой маленький шарик с радиусом  $a$ , помещенный в центре сферы. Тогда значение потенциала на расстоянии  $r$  от центра катода (вне катода) выражается формулой (24.2), а напряженность поля в этой точке равна

$$E = -\frac{dU}{dr} = \frac{U}{1/a - 1/b} \frac{1}{r^2}$$

Полагая  $r = a$  и учитывая, что  $b \gg a$ , находим напряженность поля у самой поверхности катода:

$$E_a \approx U/a.$$

Если, например, радиус катода  $a = 10^{-2}$  мм =  $10^{-5}$  м, то уже при напряжении  $U = 1000$  В у катода будет громадная напряженность поля:  $10^8$  В/м.

Если постепенно повышать напряжение между катодом и анодом, то при напряженности поля у катода  $10^7 - 10^8$  В/м в

трубке возникает слабый ток, который обусловлен электронами, испускаемыми катодом; сила этого тока быстро увеличивается с увеличением напряжения. Ток возникает даже при холодном катоде, поэтому описанное явление получило название *холодной эмиссии* (его

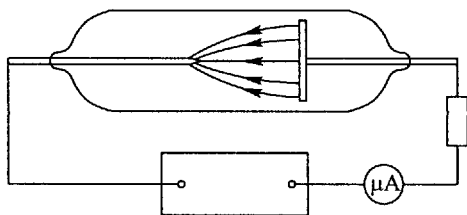


Рис. 288. Схема наблюдения автоэлектронной эмиссии

называют также *автоэлектронной эмиссией*). При дальнейшем повышении напряжения катод начинает сильно нагреваться и испаряться и в трубке возникает газовый разряд.

Возникновение автоэлектронной эмиссии объясняется тем, что сильное электрическое поле у катода изменяет потенциальный барьер на поверхности металла. Это изменение сводится, во-первых, к понижению высоты барьера (уменьшению работы выхода) и, во-вторых, к уменьшению толщины барьера. Оба эти обстоятельства приводят к увеличению вероятности прохождения электронов через поверхностный потенциальный барьер. Если деформация потенциального барьера достаточно велика, то уже при низкой температуре заметная доля электронов проводимости оказывается в состоянии выйти из металла, и тогда возникает автоэлектронная эмиссия.

## Г Л А В А XVI

### РАЗРЯДЫ В ГАЗАХ

#### § 166. Ионизация газов

Газы в естественном состоянии не проводят электричества. Если поместить в сухом атмосферном воздухе хорошо изолированное заряженное тело, например заряженный электромметр с

хорошей изоляцией, то заряд электрометра долгое время практически остается неизменным.

Однако, подвергая газ различным внешним воздействиям, можно вызвать в нем электропроводность. Так, например, помещая вблизи заряженного электрометра пламя горелки, можно видеть, что заряд электрометра быстро уменьшается. В данном случае мы сообщили газу электропроводность, создавая в нем высокую температуру. Если бы вместо пламени горелки мы поместили вблизи электрометра подходящий источник света, например ртутную дуговую лампу (см. ниже), дающую много ультрафиолетовых лучей, то мы также наблюдали бы утечку зарядов с электрометра. Такое же действие на газ оказывают рентгеновские лучи и излучение радиоактивных препаратов.

Это показывает, что в газах под влиянием высокой температуры и различных излучений появляются заряженные частицы. Они возникают потому, что от атомов газа отщепляется один или несколько электронов, в результате чего вместо нейтрального атома возникают положительный ион и электроны. Часть образовавшихся электронов может быть при этом захвачена другими нейтральными атомами, и тогда появятся еще отрицательные ионы.

Отрыв электрона от атома (ионизация атома) требует затраты определенной энергии — энергии ионизации. Она зависит от строения атома и поэтому различна для разных веществ.

После прекращения действия ионизатора число ионов в газе с течением времени уменьшается и в конце концов ионы исчезают вовсе. Исчезновение ионов объясняется тем, что ионы и электроны участвуют в тепловом движении и поэтому соударяются друг с другом. При столкновении положительного иона и электрона они могут воссоединяться в нейтральный атом. Точно так же при столкновении положительного и отрицательного ионов, отрицательный ион может отдать свой избыточный электрон положительному иону и оба иона превратятся в нейтральные атомы. Этот процесс взаимной нейтрализации ионов называется *рекомбинацией ионов*.

При рекомбинации положительного иона и электрона или двух ионов освобождается определенная энергия, равная энергии, затраченной на ионизацию. Частично она излучается в виде света, и поэтому рекомбинация ионов сопровождается свечением (свечение рекомбинации). Если концентрация положительных и отрицательных ионов велика, то и число ежесекундно происходящих актов рекомбинации также будет большим, и свечение рекомбинации может быть очень сильным. Излучение света при рекомбинации является одной из причин свечения многих форм газового разряда.

## § 167. Ионизация электронными ударами

В явлениях электрического разряда в газах большую роль играет ионизация атомов электронными ударами. Этот процесс заключается в том, что движущийся электрон, обладающий достаточной кинетической энергией, при соударении с нейтральным атомом выбивает из него один или несколько атомных электронов, в результате чего нейтральный атом превращается в положительный ион, а в газе появляются новые электроны.

Схема типичного опыта для изучения ионизации электронными ударами показана на рис. 289 (опыты Джеймса Франка и Густава Герца). Исследуемый газ при давлении порядка 0,1–0,01 мм рт. ст. вводится в стеклянную трубку, которая сначала откачивается до высокого вакуума (для удаления других газов).

Трубка имеет накаливаемый катод  $K$ , сетку  $C$  и коллектор ионов  $K_1$ . На сетку подается положительный (относительно катода) потенциал, который можно изменять при помощи делителя напряжения  $D_1$  и измерять вольтметром  $V$ . На коллектор ионов накладывается отрицательный потенциал, на 0,5–1,0 В больший, чем потенциал катода. Эта небольшая разность потенциалов снимается с делителя напряжения  $D_2$ , положительный конец которого соединен с катодом.

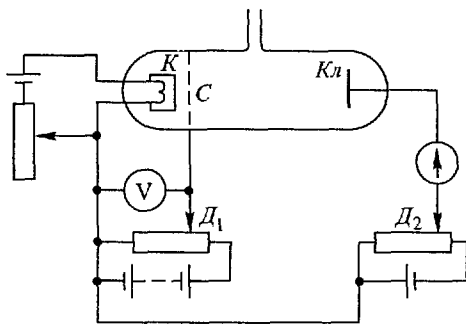


Рис. 289. Схема опытов Д. Франка и Г. Герца

В подобных опытах катод обычно нагревают излучением вспомогательной спирали, помещенной внутрь катода. Этим устраняется изменение потенциала вдоль катода, вызываемое током накала, и поэтому все точки такого катода имеют один и тот же потенциал (катоде косвенного нагрева, или эквипотенциальные катоды).

Расстояние катод–сетка в таких трубках делают значительно меньшим, чем расстояние сетка–коллектор, и подбирают давление газа так, чтобы средняя длина свободного пробега электронов в газе была больше расстояния между сеткой и катодом. Поэтому электроны, испущенные катодом, движутся в пространстве катод–сетка практически без соударений, и если разность потенциалов (выраженная в вольтах), между сеткой и катодом равна  $U$ , то каждый электрон приобретает кинетическую

энергию (выраженную в электронвольтах)

$$mv^2/2 = eU. \quad (167.1)$$

Электроны, ускоренные сеткой, испытывают затем соударения с атомами газа в пространстве между сеткой и коллектором

Так как потенциал коллектора ниже, чем потенциал катода, то в отсутствие ионизации все электроны тормозятся, не долетая до коллектора, и поэтому ток через гальванометр равен нулю. Если, однако, постепенно повышать разность потенциалов  $U$  между сеткой и катодом, то, когда энергия электронов сделается равной энергии ионизации, в пространстве сетка-коллектор появятся положительные ионы. Они будут двигаться к коллектору, и гальванометр обнаружит ток. Поэтому, измеряя наименьший потенциал сетки  $U$ , при котором впервые появляется ток коллектора, можно найти энергию ионизации атомов исследуемого газа.

В точных измерениях приходится еще учитывать то обстоятельство, что если катод и сетка сделаны из разных металлов, то между ними существует электрическое поле при нулевом показании вольтметра  $V$ , а, следовательно, на отрезке катод-сетка уже имеется некоторая разность потенциалов  $U_{кк}$ . Это — так называемая *контактная разность потенциалов*, возникающая всегда между двумя различными металлами (§ 198). Поэтому более точное выражение для энергии электронов имеет вид

$$mv^2/2 = eU + eU_{кк} \quad (167.1a)$$

Контактную разность потенциалов можно всегда определить на опыте и ввести соответствующую поправку к показаниям вольтметра

Метод Франка и Герца не является единственным методом измерения энергии ионизации. Она может быть определена также из исследования линейчатых спектров свечения разреженных газов и паров и притом с очень большой точностью. Значения энергии ионизации, найденные по спектрам, хорошо совпадают с ее значениями, определенными методом электронных ударов.

В табл. 12 даны значения энергии ионизации некоторых атомов.

Таблица 12

Элемент	He	Ne	Ar	Hg	Na	K	Rb
Энергия ионизации, эВ	24,5	21,5	13,9	10,4	5,12	4,32	4,68

## § 168. Движение ионов в газах

В § 146, 147 мы видели, что вследствие соударений электронов с кристаллической решеткой металла появляется определенная сила трения, пропорциональная скорости, и поэтому скорость упорядоченного движения электронов  $v$  оказывается

пропорциональной напряженности поля  $E$ . Этот закон оказывается применимым и к газовым ионам, если они испытывают много соударений; поэтому можно считать, что

$$v_{\pm} = b_{\pm} E. \quad (168.1)$$

Здесь  $b_{\pm}$  — подвижность газовых ионов, аналогичная подвижности электронов в металлах. Она равна средней скорости, приобретаемой ионами в поле с напряженностью, равной единице, и в системе единиц СИ выражается в  $\text{м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$ . Индексы + и — обозначают, что подвижности положительных и отрицательных ионов различны, и поэтому скорость, приобретаемая ими в одном и том же поле, также неодинакова.

Соотношение (168.1) справедливо в том случае, если число соударений достаточно велико, т.е. если средняя длина свободного пути  $l$  ионов газа значительно меньше расстояния  $d$  между электродами. Обычно это условие выполняется, начиная с давлений газа в несколько десятых мм рт. ст. и выше. Если же  $l \gg d$ , то мы говорим, что ионы движутся в вакууме. В этом случае движение ионов будет происходить без сопротивления и ионы в электрическом поле будут двигаться с ускорением.

Подвижность ионов данного типа тем больше, чем меньше сила трения, испытываемая ими со стороны окружающих атомов газа. А сила трения тем меньше, чем меньше число соударений, которое в свою очередь пропорционально давлению газа. Поэтому в очень широком интервале изменения давлений подвижность ионов обратно пропорциональна давлению газа, т.е.

$$bp = \text{const.} \quad (168.2)$$

Значения подвижностей некоторых ионов при  $p = 700$  мм рт. ст. и  $T = 18^\circ\text{C}$  приведены в табл. 13.

Таблица 13

Газ	Подвижность ионов, $10^{-4} \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$		Газ	Подвижность ионов, $10^{-4} \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$	
	$b_+$	$b_-$		$b_+$	$b_-$
Водород	5,91	8,26	Окись углерода	1,10	1,14
Кислород	1,29	1,79	Хлор	0,65	0,51
Азот	1,27	1,84			

Однако движение ионов в газах более сложно, чем движение электронов в металлах. В газовых разрядах часто наблюдается неравномерное распределение ионов между электродами, при котором градиент концентрации ионов  $dn/dx$  не равен нулю, и поэтому возникает заметный поток диффузии ионов. Заряд, переносимый положительными ионами вследствие диффузии через единицу поверхности в единицу времени (плотность тока

диффузии), равен

$$-qD_+ \frac{dn_+}{dx},$$

где  $D_+$  — коэффициент диффузии ионов,  $q$  — заряд иона. Количество электричества, проходящее через ту же площадку за единицу времени вследствие упорядоченного движения ионов под действием поля (плотность тока дрейфа), есть

$$qn_+b_+E.$$

Поэтому плотность тока  $j_+$  равна

$$j_+ = qn_+b_+E - qD_+ \frac{dn_+}{dx}. \quad (168.3)$$

Аналогичное выражение получается и для плотности тока  $j_-$ , вызванного движением отрицательных ионов. Нужно только учесть, что вследствие отрицательного заряда ионов направление тока противоположно направлению потока диффузии, и поэтому

$$j_- = qn_-b_-E + qD_- \frac{dn_-}{dx}. \quad (168.3a)$$

Полная плотность тока в ионизованном газе есть

$$j = j_+ + j_-. \quad (168.4)$$

Концентрации  $n_+$  и  $n_-$  в ионизованном газе могут быть равны друг другу. Поэтому, в отличие от металлов, в газовых проводниках при наличии тока появляются объемные заряды, которые обуславливают сложное распределение электрического поля между электродами.

Второе обстоятельство, сильно отличающее газовые проводники от металлов, заключается в следующем. В металлах концентрация электронов есть величина постоянная, не зависящая от напряженности поля и плотности тока и определяемая только природой данного металла. В ионизованном же газе носители заряда (ионы и электроны) могут возникать в процессе разряда, например в результате ионизации электронными ударами. Поэтому концентрации ионов  $n_+$  и  $n_-$  могут зависеть от напряженности поля.

Указанные причины приводят к тому, что газовые проводники, как правило, не подчиняются закону Ома.

## § 169. Несамостоятельные и самостоятельные разряды

Рассмотрим цепь, содержащую источник напряжения, газовый промежуток и переменное сопротивление  $r$ , которое можно изменять в широких пределах (рис. 290). Цепь содержит также токоизмерительный прибор  $A$  и вольтметр  $V$ . Предположим сначала, что на газовый промежуток воздействует какой-либо ио-



низатор, например ультрафиолетовые лучи, падающие на отрицательный электрод и освобождающие из него фотоэлектроны. От этого газ приобретет некоторую электропроводность и в цепи появится ток. Если плавно уменьшать сопротивление  $r$  в цепи газового промежутка, то сила тока будет сначала увеличиваться, что связано с увеличением напряжения между электродами и объясняется уменьшением пространственного заряда между ними. При дальнейшем уменьшении сопротивления напряжение на электродах достигнет такого значения, при котором все образующиеся ионы доходят до положительного электрода, и мы получим ток насыщения  $i_s$ , сила которого зависит только от интенсивности ионизатора (рис. 291). Наблюдаемые при этом токи очень малы (обычно микроамперы и меньше, в зависимости от интенсивности ионизатора).

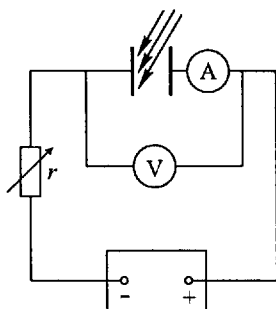


Рис 290 Принципиальная схема для определения вольт-амперной характеристики газового промежутка

Если в одном из режимов разряда, изображаемых ветвью характеристики  $Oa$ , прекратить действие ионизатора, то и разряд прекращается. Подобные разряды, существующие только при действии внешнего ионизатора, получили название *несамостоятельных* газовых разрядов.

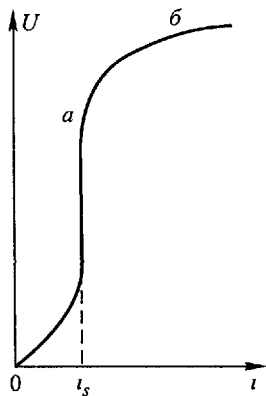


Рис 291 Вольт-амперная характеристика несамостоятельного газового разряда

Если продолжать уменьшать сопротивление цепи  $r$ , то ток через разрядный промежуток начинает сильно возрастать, хотя напряжение повышается сравнительно мало. Это соответствует участку характеристики  $ab$  (рис. 291). Возрастание тока на участке характеристики  $ab$  показывает, что в газовом промежутке появляются новые ионы.

Если еще уменьшить сопротивление  $r$ , то разряд приобретает совсем другой характер. Сила тока в разряде резко возрастает (в сотни и тысячи раз) и в газе появляются сильно выраженные световые и тепловые эффекты. Если теперь прекратить действие ионизатора, то разряд продолжается. Это значит, что ионы, необходимые для поддержания электропроводности газа, создаются самим разрядом в резуль-

тате процессов, происходящих в разряде. Такие газовые разряды называют *самостоятельными* разрядами. Напряжение, при котором возникает самостоятельный разряд, называется *напряжением пробоя* газового промежутка или *напряжением зажигания* газового разряда.

В зависимости от того, какие именно процессы образования ионов в разряде играют главную роль, мы говорим о различных формах, или типах, самостоятельных разрядов. Так, например, мы различаем коронный, искровой, дуговой, тлеющий и другие разряды. Эти формы разряда отличаются друг от друга свойствами и внешним видом.

### § 170. Возникновение самостоятельных разрядов

Посмотрим теперь, каким образом несамостоятельный разряд в газе может перейти в самостоятельный.

Одна из первых количественных теорий возникновения самостоятельного разряда в газах была предложена Таунсендом. Как выяснилось впоследствии, эта теория имеет ограниченную применимость и приложима только к некоторым формам газового разряда. Однако она хорошо разъясняет саму возможность превращения несамостоятельного разряда в самостоятельный.

Представим себе, что под действием какого-либо внешнего ионизатора, например ультрафиолетовых лучей, из катода вылетел электрон. На длине свободного пробега он будет двигаться в электрическом поле ускоренно и перед столкновением приобретет определенную кинетическую энергию. Если эта энергия равна или больше энергии ионизации атомов газа, то при соударении атом будет ионизирован, в результате чего появятся один новый электрон и один положительный ион.

Положительные ионы будут двигаться по направлению к катоду, а электроны — к аноду (рис. 292: черные точки — электроны, светлые кружки — нейтральные атомы). После соударения электроны будут опять набирать энергию, и при следующем соударении появятся уже четыре электрона. После третьей ионизации их будет восемь, после четвертой — шестнадцать и т.д. Поэтому общее число электронов и ионов будет возрастать лавинообразно по мере продвижения электронов к аноду. Обозначим через  $\alpha$

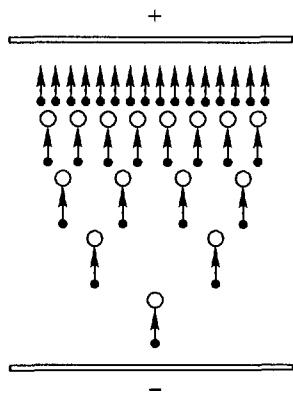


Рис. 292. Схема образования электронной лавины

общее число электронов и ионов будет возрастать лавинообразно по мере продвижения электронов к аноду. Обозначим через  $\alpha$

число пар электронов и ионов, образуемых одним электроном на единице длины пути (*коэффициент объемной ионизации*). Так как энергия, приобретаемая электронами на пути свободного пробега, тем больше, чем больше напряженность электрического поля  $E$  в газе, то и коэффициент  $\alpha$  зависит от напряженности поля. Этот коэффициент меняется также с изменением давления газа  $p$ , так как число актов ионизации зависит от числа соударений, испытываемых электроном на единице длины пути, а это последнее пропорционально давлению газа.

Путем простых теоретических рассуждений можно легко установить, что для данного газа частное  $\alpha/p$  есть функция отношения напряженности поля к давлению газа, т.е.

$$\alpha/p = f(E/p), \quad (170.1)$$

где вид функции  $f$  зависит от рода газа. Эта формула хорошо согласуется с опытом и оказывается весьма полезной, так как позволяет выразить зависимость  $\alpha$  от двух переменных  $E$  и  $p$  при помощи одной кривой, определяемой уравнением (170.1).

Рассмотрим теперь столб газа, заключенный между плоскими электродами, и найдем ионизацию в слое газа толщины  $dx$ , находящемся на расстоянии  $x$  от катода (рис. 293). Один электрон на пути  $dx$  создает  $\alpha dx$  пар ионов. Если в рассматриваемый слой влетают со стороны катода не один, а  $n$  электронов, то увеличение числа электронов на пути  $dx$  будет равно

$$dn = n\alpha dx. \quad (170.2)$$

В дальнейшем для простоты мы будем считать, что возникающие ионы не изменяют существенно электрическое поле, которое таким образом остается однородным и при ионизации. Поэтому и коэффициент  $\alpha$  мы будем считать величиной постоянной, не зависящей от  $x$ . Тогда, интегрируя (170.2), находим

$$n = Ce^{\alpha x},$$

где  $C$  — постоянная интегрирования.

При  $x = 0$ , т.е. на самом катоде,  $n$  равно числу электронов  $n_0$ , производимых внешним ионизатором. Поэтому  $C = n_0$ . Полагая  $x = d$ , где  $d$  — расстояние между катодом и анодом, мы находим окончательно число электронов  $n_a$ , попадающих на анод:

$$n_a = n_0 e^{\alpha d}. \quad (170.3)$$

Легко видеть, что  $n_a$  может на много порядков превышать  $n_0$ . Пусть, например, на 1 м пути возникают 300 пар ионов ( $\alpha = 300 \text{ м}^{-1}$ ). Если расстояние между катодом и анодом

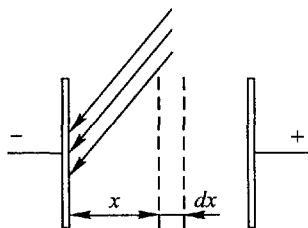


Рис. 293. К расчету электронной лавины

равно  $3 \text{ см} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ , то один первичный электрон, вылетающий с катода, вызовет появление у анода  $e^{300 \cdot 3 \cdot 10^{-2}} = e^9 \sim 10^4$  электронов, т.е. произойдет огромное размножение электронов вследствие образования электронной лавины.

Возникновение электронных лавин в газе, однако, еще не представляет собой самостоятельный разряд. Так, например, полагая в формуле (170.3)  $n_0 = 0$ , мы получаем и  $n_a = 0$ , т.е. при выключении внешнего ионизатора исчезает и ток анода. Чтобы разряд был самостоятельным, нужно, чтобы электронные лавины поддерживали сами себя, т.е. чтобы в газе происходил еще и другой процесс (или процессы), непрерывно производящий новые электроны взамен ушедших на анод.

Один из важных процессов такого рода заключается в образовании вторичной электронной эмиссии с катода под действием бомбардировки положительными ионами. Если положительный ион при своем движении к катоду приобретает достаточную энергию, то он может выбить из катода некоторое число электронов (ср. § 163). Этот процесс можно охарактеризовать коэффициентом вторичной эмиссии  $\gamma$  (ср. § 163), который показывает, сколько вторичных электронов выбивает с катода один положительный ион. Величина  $\gamma$  зависит от скорости ионов, их природы и материала катода.

Таунсенд показал, что одновременное существование обоих процессов, т.е. объемной и поверхностной ионизаций, может привести к самостоятельному разряду. Вернемся опять к рис. 293 и предположим сначала, что между электродами имеется установившийся несамостоятельный газовый разряд. Обозначим полное число электронов, выходящих с катода за 1 с (образованных и внешним ионизатором, и вторичной эмиссией), через  $n_1$ . Согласно формуле (170.3) в результате объемной ионизации число электронов, попадающих на анод, возрастет до величины

$$n_a = n_1 e^{\alpha d}. \quad (170.4)$$

Следовательно, число новых электронов, возникших в лавине, равно

$$n_a - n_1 = n_1 (e^{\alpha d} - 1).$$

Таким же будет и число образовавшихся в лавине положительных ионов. Положительные ионы, обрушиваясь на катод, выбьют

$$\gamma n_1 (e^{\alpha d} - 1)$$

вторичных электронов. Это число электронов, сложенное с числом электронов  $n_0$ , производимых за 1 с внешним ионизатором, равно, очевидно, полному числу  $n_1$  электронов, вышедших с катода; поэтому

$$n_0 + \gamma n_1 (e^{\alpha d} - 1) = n_1.$$

Или, иначе

$$n_1 = \frac{n_0}{1 - \gamma(e^{\alpha d} - 1)}.$$

Подставляя это выражение в (170.4), мы можем выразить число электронов, ежесекундно приходящих на анод, в следующем виде:

$$n_a = \frac{n_0 e^{\alpha d}}{1 - \gamma(e^{\alpha d} - 1)}. \quad (170.5)$$

Полученное выражение разъясняет возникновение самостоятельного разряда. Действительно, предположим, что мы постепенно увеличиваем напряженность электрического поля. При этом будут возрастать значения  $\alpha$  и  $\gamma$ , и  $n_a$  будет непрерывно увеличиваться. При некоторой напряженности поля будет выполнено условие

$$\gamma(e^{\alpha d} - 1) = 1, \quad (170.6)$$

и знаменатель формулы (170.5) обратится в нуль. Значение  $n_a$  будет неограниченно возрастать даже при любом, сколь угодно малом, значении  $n_0$ . Следовательно, внешний ионизатор здесь уже не нужен, и мы имеем превращение несамостоятельного разряда в самостоятельный. Условие (170.6) есть условие зажигания газового разряда.

Отметим, что в действительности, конечно, никакого бесконечного возрастания числа электронов  $n_a$  не будет. Так как цепь разряда имеет определенное сопротивление, то при значительном увеличении тока разряда будет уменьшаться напряжение на газоразрядном промежутке, а следовательно, и электрическое поле, и поэтому в газе установится конечный ток, зависящий от ЭДС источника и сопротивления цепи.

Теория Таунсенда в дальнейшем подверглась многочисленным дополнениям и уточнениям. Так, например, выше мы предполагали, что электроны на катоде возникают только под действием положительных ионов. Между тем в разряде могут происходить и другие процессы, приводящие к возникновению электронов. Таким процессом может быть освобождение электронов с катода, вызванное излучением самого разряда (так называемый *фотоэлектрический эффект*). Электроны, необходимые для поддержания лавины, могут возникнуть также в объеме газа при соударении атомов с положительными ионами (это было учтено уже самим Таунсендом) или в результате фотоионизации. Далее нужно учесть и то изменение электрического поля, которое вызывается объемными зарядами при ионизации газа. Эти процессы часто имеют место в газовом разряде одновременно, и поэтому точная теория самостоятельных газовых разрядов весьма сложна.

### § 171. Тлеющий разряд

Процессы, рассмотренные выше, играют важную роль в возникновении и поддержании так называемого тлеющего разряда.

Эту форму газового разряда удобно наблюдать при пониженном давлении газа. Если к электродам, впаянным в стеклянную трубку длиной 30–50 см, приложить постоянное напряжение в несколько сот вольт и затем постепенно откачивать воздух из трубки, то наблюдаются следующие явления. При атмосферном давлении приложенное напряжение недостаточно для пробоя газа и трубка остается темной. При уменьшении давления газа в некоторый момент в трубке возникает разряд, имеющий вид светящегося шнура, соединяющего анод и катод трубки. При дальнейшем уменьшении давления этот шнур расширяется и заполняет все сечение трубки, а свечение вблизи катода ослабевает.

При давлениях газа порядка 0,1–0,01 мм рт. ст. разряд имеет вид, изображенный на рис. 294. Непосредственно к катоду прилегает тонкий светящийся слой (*первое катодное свечение*,

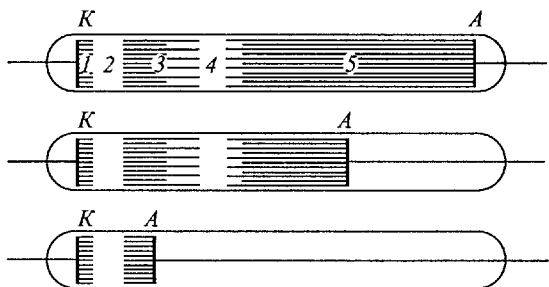


Рис 294. Основные части тлеющего разряда

или *катодная пленка* (1)), за которым следует темный слой, получивший название *катодного темного пространства* (2). Это темное пространство затем переходит в светящийся слой (*тлеющее свечение* (3)), который имеет резкую границу со стороны катода и постепенно исчезает со стороны анода. За тлеющим свечением наблюдается опять темный промежуток, называемый *вторым* или *фарадеевым темным пространством* (4). Указанные части называются катодными частями разряда. За вторым темным пространством лежит светящаяся область, простирающаяся до анода, или *положительный столб* (5). В некоторых случаях этот столб распадается на ряд слоев, или страт.

Особое значение в тлеющем разряде имеют только две его части — катодное темное пространство и тлеющее свечение, в которых и происходят основные процессы, поддерживающие разряд. Если в газоразрядной трубке сделать анод подвижным и

постепенно придвигать его к катоду (рис. 294), то все катодные части остаются неизменными, а укорачивается только положительный столб. При дальнейшем уменьшении длины разрядного промежутка начинает укорачиваться второе катодное темное пространство, и когда анод попадает в тлеющее свечение, оно исчезает вовсе. Однако при этом разряд продолжает существовать. Когда же анод при дальнейшем уменьшении расстояния подходит к границе между первым катодным пространством и тлеющим свечением, разряд гаснет.

Характерным для тлеющего разряда является особое распределение потенциала по длине трубки. Его можно определить, впаивая в трубку ряд дополнительных электродов — зондов, расположенных в различных местах трубки, и присоединяя между катодом и соответствующим зондом вольтметр с большим сопротивлением. Тогда получается кривая распределения потенциала, изображенная на рис. 295. Она показывает, что почти все падение потенциала в разряде приходится на область катодного темного пространства. Эта разность потенциалов между катодом и границей тлеющего свечения получила название *катодного падения потенциала*.

Опыт показывает, что если сила тока в разряде не очень велика, то катодное падение потенциала не зависит от силы тока (нормальное катодное падение потенциала). Изменение силы тока изменяет лишь размер светящейся поверхности на катоде, которая увеличивается с увеличением силы тока.

Когда же сила тока достигает такого значения, что катодная пленка покрывает всю поверхность катода, катодное падение потенциала начинает возрастать с увеличением силы тока (аномальное катодное падение потенциала).

Существенным для понимания процессов в тлеющем разряде является то обстоятельство, что нормальное катодное падение потенциала зависит лишь от материала катода и рода газа, причем катодное падение потенциала оказывается пропорциональным работе выхода электронов из катода.

Рассмотренные свойства тлеющего разряда приводят к следующей картине процессов, поддерживающих разряд. Положительные ионы, образующиеся в результате ионизации электрон-

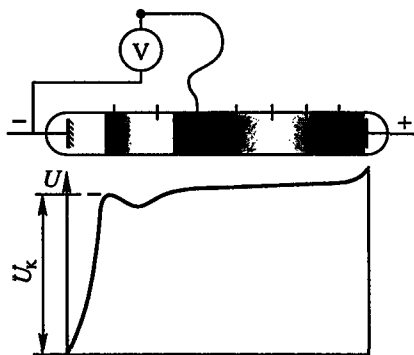


Рис 295. Распределение потенциала в тлеющем разряде

ными ударами (в тлеющем свечении и в положительном столбе), движутся к катоду и, проходя через область катодного падения потенциала, приобретают значительную энергию. Под действием интенсивной бомбардировки быстрыми положительными ионами (а также вследствие фотоэффекта, вызванного излучением разряда) с катода вылетают электроны, которые движутся к аноду. Эти электроны в области катодного падения потенциала сильно ускоряются и при последующих соударениях с атомами газа их ионизируют. В результате опять появляются положительные ионы, которые, снова устремляясь на катод, производят новые электроны и т.д. Таким образом, основными процессами, поддерживающими разряд, являются ионизация электронными ударами в объеме и вторичная электронная эмиссия на катоде.

Существование катодного темного пространства объясняется тем, что электроны начинают сталкиваться с атомами газа не сразу, а лишь на некотором расстоянии от катода. Ширина катодного темного пространства приблизительно равна средней длине свободного пробега электронов: она увеличивается с уменьшением давления газа. В катодном темном пространстве электроны, следовательно, движутся практически без соударений.

Распределение концентраций положительных ионов и электронов в различных частях разряда весьма неодинаково. Так как положительные ионы движутся гораздо медленнее, нежели электроны, то у катода концентрация ионов значительно больше, чем концентрация электронов. Поэтому вблизи катода возникает сильный пространственный положительный заряд, который и вызывает появление катодного падения потенциала. Напротив, в области положительного столба концентрации положительных ионов и электронов почти одинаковы и здесь пространственного заряда нет. Благодаря большой концентрации электронов положительный столб обладает хорошей электропроводностью и поэтому падение напряжения на нем весьма мало (см. рис. 295).

Так как в положительном столбе имеются и положительные ионы, и электроны, то здесь происходит интенсивная рекомбинация ионов, чем и объясняется свечение положительного столба (свечение рекомбинации; ср. § 166).

Мы видим, что катодное падение потенциалов необходимо для поддержания тлеющего разряда. Именно благодаря его наличию положительные ионы приобретают необходимую энергию для образования интенсивной вторичной электронной эмиссии с катода, без которой тлеющий разряд не мог бы существовать. Поэтому катодное падение потенциала есть наиболее характерный признак тлеющего разряда, отличающий эту форму газового разряда от всех других форм.



**Применения тлеющего разряда.** Тлеющий разряд широко используют в качестве источника света в различных газоразрядных трубках. В лампах дневного света излучение тлеющего разряда поглощается слоем специальных веществ, нанесенных на внутреннюю поверхность трубки, которые под действием поглощенного излучения в свою очередь начинают светиться. Подходящим подбором этих веществ (люминофоров) испускаемое ими излучение можно сделать близким к дневному свету. Такие трубки оказываются более экономичными, нежели обычные лампы накаливания.

Газоразрядные трубки применяются также для рекламных и декоративных целей, для чего им придают очертания различных фигур и букв. Наполняя трубки различными газами, можно получить свечение разной окраски (красное у неона, синевато-зеленое у аргона).

Пользуясь тем, что катодное падение потенциала зависит от материала катода, можно сделать газоразрядные трубки с малым напряжением зажигания. Так, например, в неоновой лампе, в которой электродами служат два железных листочка, покрытых слоем бария, вследствие малости работы выхода электронов у бария, катодное падение потенциала составляет только около 70 В. Поэтому лампа зажигается уже при включении в обычную осветительную сеть. Такие лампы употребляют для целей сигнализации в различной аппаратуре (индикаторные лампы).

В лабораторной практике используют тлеющий разряд для катодного распыления металлов, так как вещество катода в тлеющем разряде постепенно переходит в парообразное состояние и оседает в виде металлического налета на стенках трубки.

Причина катодного распыления, по всей вероятности, заключается в том, что каждый положительный ион при соударении с катодом передает свою энергию сначала небольшой группе атомов катода. Это приводит к сильному местному повышению температуры, возникающему в отдельных микроскопических областях катода, которое и приводит к испарению металла в этих местах. Помещая в тлеющем разряде против катода различные предметы, оказывается возможным покрыть их равномерным и прочным слоем металла. Этим способом, в частности, пользуются для изготовления металлических зеркал высокого качества.

## § 172. Искровой разряд

Если постепенно увеличивать напряжение между двумя электродами, находящимися в атмосферном воздухе и имеющими такую форму, что электрическое поле между ними не слишком сильно отличается от однородного (например, два плоских электрода с закругленными краями или два достаточно боль-

ших шара), то при некотором напряжении возникает электрическая искра. Она имеет вид ярко светящегося тонкого канала, соединяющего оба электрода, который обычно бывает сложным образом изогнут и разветвлен (рис 296).



Рис 296 Искровой разряд

Электрическая искра возникает в том случае, если электрическое поле в газе достигает некоторого определенного значения  $E_k$  (критическая напряженность поля, или напряженность пробоя), которая зависит от рода газа и его состояния. Для воздуха при нормальных условиях  $E_k \approx 3 \cdot 10^6$  В/м.

Значение  $E_k$  увеличивается с увеличением давления. Отношение критической напряженности поля к давлению газа  $p$  для данного газа остается приблизительно постоянным в широкой области изменения давлений

$$E_k/p \approx \text{const} \quad (172 \text{ 1})$$

Этот закон, который можно обосновать в теории Таунсенда, оказывается во многих случаях весьма полезным и позволяет определить  $E_k$  при разных давлениях, если известно его значение при каком-либо одном давлении

Напряжение пробоя понижается при воздействии на газ внешнего ионизатора. Если приложить к газовому промежутку напряжение, несколько меньшее пробойного, и внести в пространство между электродами зажженную газовую горелку, то возникает искра. Такое же действие оказывает и освещение отрицательного электрода ультрафиолетовым светом, а также другие ионизаторы.

Для объяснения искрового разряда вначале казалось естественным предположить, что основными процессами в искре являются, в соответствии с теорией Таунсенда, ионизация электронными ударами в объеме и ионизация положительными ионами (в объеме или на катоде). Однако впоследствии выяснилось, что эти процессы не могут объяснить многие особенности образования искры. Остановимся для примера на скорости развития искрового разряда. Если бы в искре существенную роль играла ионизация положительными ионами, то время развития искры было бы по крайней мере того же порядка, что и время перемещения положительных ионов от анода до катода. Это время легко оценить, оно оказывается порядка  $10^{-4} - 10^{-5}$  с. Между тем опыт дает, что время ее развития —  $10^{-7}$  с и меньше, т. е. на несколько порядков меньше.

Объяснение большой скорости развития искры, так же как и других особенностей этой формы разряда, дано так называемой стримерной теорией искры, в настоящее время надежно обоснованной прямыми экспериментальными данными. Согласно этой теории возникновению ярко светящегося канала искры предшествует появление слабо светящихся скоплений ионизованных частиц (*стримеров*). Пронизывая газоразрядный промежуток, стримеры образуют проводящие мостики, по которым в последующие стадии разряда и устремляются мощные потоки электронов. Причиной возникновения стримеров является не только образование электронных лавин посредством ударной ионизации, но еще и ионизация газа излучением, возникающим в самом разряде (фотоионизация).

Схема развития стримера изображена на рис. 297. В виде конусов на этом рисунке показаны электронные лавины, зарождающиеся в точках вершин конусов и распространяющиеся от катода к аноду. Существенным в этой схеме является то обстоя-

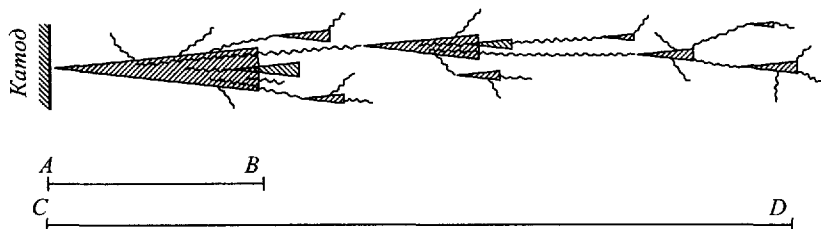


Рис. 297 Развитие отрицательного стримера

тельство, что, помимо, первоначальной электронной лавины, зародившейся непосредственно у катода, происходит образование новых лавин в точках, расположенных далеко впереди от головы первоначальной лавины. Эти новые лавины возникают вследствие появления электронов в объеме газа в результате фотоионизации излучением, исходящим из лавин, возникших ранее (на рисунке это излучение показано схематически в виде волнистых линий). В процессе своего развития отдельные лавины нагоняют друг друга и сливаются вместе, в результате чего возникает хорошо проводящий канал стримера. Из приведенной схемы ясно, что вследствие возникновения многих лавин общий путь  $CD$ , проходимый стримером, намного больше расстояния  $AB$ , проходимого одной первоначальной лавиной (различие в длинах  $AB$  и  $CD$  в действительности намного больше, чем показано на рис. 297).

Наряду со стримерами, распространяющимися от катода к аноду (отрицательные стримеры), существуют также стримеры, движущиеся от анода к катоду (положительные стримеры).

### § 173. Коронный разряд

Разряд, получивший такое название, наблюдается при сравнительно высоких давлениях газа (например, при атмосферном давлении) в сильно неоднородном поле. Для получения значительной неоднородности поля электроды должны иметь очень неодинаковую поверхность, т.е. один электрод — очень большую

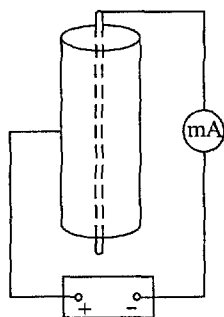


Рис. 298. Схема получения коронного разряда

поверхность, а другой — очень малую. Так, например, коронный разряд легко получить, располагая тонкую проволоку внутри металлического цилиндра, радиус которого значительно больше радиуса проволоки (рис. 298); следует отметить, что наличие внешнего цилиндра не обязательно и его роль могут играть окружающие заземленные предметы.

Линии напряженности электрического поля сгущаются по мере приближения к проволоке, а, следовательно, напряженность поля возле проволоки имеет наибольшее значение. Когда она достигает приблизительно  $3 \cdot 10^6$  В/м (при атмосферном давлении и нормальной температуре), между проволокой и цилиндром зажигается разряд и в цепи появляется ток. При этом возле проволоки возникает свечение, имеющее вид оболочки или короны, окружающей проволоку, откуда и произошло название разряда (рис. 299).

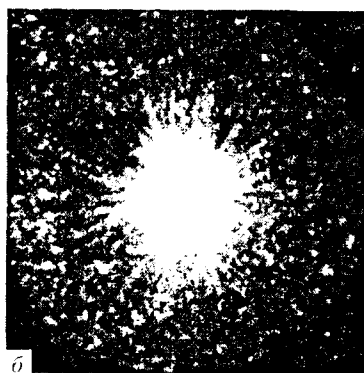
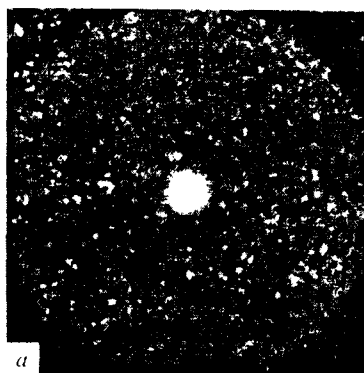


Рис. 299. Фотографии короны вокруг проволоки

Коронный разряд возникает как при отрицательном потенциале на проволоке (отрицательная корона, рис. 299 а), так и

при положительном (положительная корона, рис. 299 б), а также при переменном напряжении между проволокой и цилиндром. При увеличении напряжения между проволокой и цилиндром растет и ток в коронном разряде. При этом увеличивается толщина светящегося слоя короны.

Процессы внутри короны сводятся в основном к следующему. Если проволока заряжена отрицательно, то по достижении напряженности пробоя у поверхности проволоки зарождаются электронные лавины, которые распространяются от проволоки к цилиндру. Так как напряженность поля уменьшается по мере удаления от проволоки, то на некотором расстоянии от проволоки электронные лавины обрываются. Расстояние, на которое распространяются электронные лавины, и есть толщина короны. Следовательно, в коронном разряде электронные лавины не пронизывают целиком слой газа, т.е. мы имеем неполный пробой газового промежутка.

В случае положительной короны электронные лавины зарождаются на внешней поверхности короны и движутся по направлению к проволоке.

Таким образом, внутри короны мы имеем и положительные и отрицательные ионы. Отрицательные ионы (при отрицательной короне) движутся к аноду и выходят за пределы короны. Положительные ионы движутся к проволоке.

Электроны, вышедшие за пределы короны, присоединяются к нейтральным атомам газа, отчего возникают отрицательные ионы. За пределами короны мы имеем только ионы одного знака (отрицательные при отрицательной короне и положительные при положительной короне). В этой области разряд имеет самостоятельный характер.

Коронный разряд может возникнуть не только возле проволок, но и возле любых проводников с малой поверхностью, каковыми являются всякого рода заострения. В частности, рассмотренные ранее в электростатике свойства острий (§ 29) объясняются зажиганием возле них микроскопической короны. Корона возникает также иногда в природе под влиянием атмосферного электрического поля и появляется на верхушках деревьев, корабельных мачт и т.п.

С возможностью возникновения коронного разряда приходится всегда считаться в технике высоких напряжений. При зажигании короны возле проводов высоковольтных линий электропередачи окружающий воздух сильно ионизируется и появляются вредные токи утечки. Чтобы коронный разряд не мог возникнуть, провода высоковольтных линий должны иметь достаточно большой диаметр, тем больший, чем выше напряжение линий. По этой же причине и в лабораторной практике вся проводка высокого напряжения (к рентгеновским установкам и

другим высоковольтным устройствам) осуществляется обычно с помощью труб достаточно большого диаметра.

### § 174. Молния

Молния представляет собой гигантскую электрическую искру. Электрическая природа молнии была впервые доказана известными опытами Франклина с воздушным змеем и многочисленными исследованиями М.В. Ломоносова и Рихмана.

Наблюдая за показаниями электроскопа, соединенного с высоким металлическим шестом, Ломоносов обнаружил, что электрическое поле у поверхности земли существует и в отсутствие грозы, сильно увеличиваясь в предгрозовые периоды. Он создал первую теорию возникновения электрических зарядов в атмосфере, указав на важную роль восходящих и нисходящих потоков воздуха, и этим положил начало науке об атмосферном электричестве.

Молнии возникают либо между облаками, либо между облаком и землей. Сила тока в молнии огромна и колеблется обычно от 10 до 1000 кА, а напряжение между облаком и землей перед возникновением молнии достигает  $10^8 - 10^9$  В. Длительность отдельного разряда молнии очень мала, порядка микросекунды. Поэтому общий заряд, переносимый отдельной молнией, обычно невелик (0,1–10 Кл).

Очень часто молния представляет собой ряд искровых разрядов, следующих друг за другом по одному пути (кратные молнии). Число таких разрядов может достигать нескольких десятков, а общая длительность молнии — 1 с.

Особенно интересные результаты получаются при фотографировании молнии камерой с вращающимся объективом. Подобные фотографии позволяют проследить за последовательными стадиями развития молнии. Они показывают, что молнии предшествует развитие слабо светящегося канала — лидера, распространяющегося обычно от облака к земле и аналогичного стримеру (§ 172) в коротких лабораторных искрах. Когда лидер достигает земли, по пути, пробитому лидером, устремляются большие заряды и развивается ярко светящийся главный канал молнии, распространяющийся с огромной скоростью  $10^7 - 10^8$  м/с от земли к облаку. При этом происходит сильное разогревание воздуха в главном канале и возникает ударная звуковая волна — гром.

Хотя основные процессы в молнии, по-видимому, такие же, как в коротких лабораторных искрах, особенности развития обоих типов разрядов все же несколько различны. Это видно, например, из следующего любопытного факта. Как говорилось выше (§ 172), искровой разряд (короткий) в воздухе при нор-

мальных условиях возникает при напряженности поля  $E_k \approx \approx 3000$  кВ/м. Многочисленные же измерения напряженности поля в атмосфере показывают, что даже во время грозы она значительно меньше и не превышает 200–400 кВ/м. Такое снижение пробойной напряженности поля наблюдается и в очень длинных лабораторных искрах (длиной до 10 м). Оно объясняется, по-видимому, тем, что в очень длинных разрядных промежутках могут возникать случайные большие местные усиления электрического поля, в которых и зарождаются стримеры искрового разряда.

Кроме обычных молний, наблюдаются, хотя и редко, так называемые шаровые молнии. Они имеют вид светящихся шаров диаметром 10–20 см, которые либо медленно движутся, либо прикрепляются к неподвижным предметам. Шаровые молнии зарождаются обычно при ударе очень сильных молний и через несколько секунд, а иногда и минут, исчезают с сильным взрывом. Сущность этого явления окончательно еще не понята.

### § 175. Дуговой разряд

Если после зажигания искрового разряда постепенно уменьшать сопротивление цепи, то сила тока в искре будет увеличиваться. Когда сопротивление цепи станет достаточно малым, возникает новая форма газового разряда, называемая *дуговым разрядом*. При этом сила тока резко увеличивается, достигая десятков и сотен ампер, а напряжение на разрядном промежутке уменьшается до нескольких десятков вольт. Это показывает, что в разряде возникают новые процессы, сообщающие газу очень большую проводимость.

Дуговой разряд можно получить, минуя стадию искры. Профессор физики Петербургской медико-хирургической академии В В Петров, открывший в 1802 г эту важную форму газового разряда, получил электрическую дугу, раздвигая два кусочка древесного угля, предварительно приведенные в соприкосновение и присоединенные к мощной батарее гальванических элементов. Он обнаружил, что при этом между концами углей возникает ярко светящийся столб газа, а сами угли раскаляются до ослепительного свечения.

В настоящее время электрическую дугу, горящую при атмосферном давлении, чаще всего получают между специальными угольными электродами, изготовленными прессованием порошкообразного графита и связующих веществ (дуговые угли). Фотография подобной дуги приведена на рис. 300. Наиболее горячим местом дуги является углубление, образующееся на положительном электроде и называемое *кратером* дуги. Его температура при атмосферном давлении равна около 4000 К, а при давлении в 20 атм превышает 7000 К, т.е. больше температуры внешней поверхности Солнца (примерно 6000 К).

Что же является основной причиной большой электропроводности газа в дуговом разряде? Установлено, что хорошая электропроводность дуги поддерживается за счет высокой температуры отрицательного электрода из-за интенсивной термоэлектронной эмиссии. Это хорошо подтверждается тем фактом, что во многих случаях устойчивую дугу можно получить только при условии, что катод имеет высокую температуру, температура же анода не имеет существенного значения. Так, например,

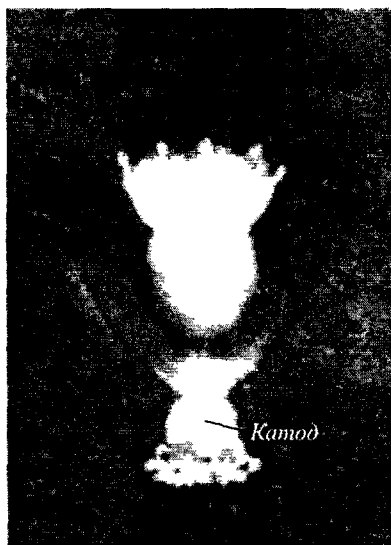


Рис 300 Фотография дугового разряда между угольными электродами при атмосферном давлении

если одним из электродов дуги сделать угольный стержень, а другим — массивную, хорошо охлаждающуюся медную пластину и перемещать угольный стержень возле пластины (чтобы она не могла разогреться), то устойчивая дуга возникает только при отрицательном угле. Если же отрицательным полюсом служит пластина, то дуга периодически зажигается и снова гаснет, а получить ее устойчивое горение нельзя.

Дуговой разряд возникает во всех случаях, когда вследствие разогревания катода основной причиной ионизации газа становится термоэлектронная эмиссия. Так, например, в тлеющем разряде положительные ионы, бомбардирующие катод, не только вызывают вторичную эмиссию электронов, но и нагревают катод. Поэтому если увеличивать силу тока в тлеющем разряде, то температура катода увеличивается, и когда она достигает такой величины, что начинается заметная термоэлектронная эмиссия, тлеющий разряд переходит в дуговой. При этом исчезает и катодное падение потенциала. Дуговой разряд мы получим и в том случае, если введем в разреженный газ в качестве катода металлическую спираль, раскаливаемую током.

Наряду с рассмотренными выше термоэлектронными дугами наблюдаются и дуговые разряды другого типа. Примером может служить дуговой разряд в так называемой ртутной дуговой лампе, изображенной на рис. 301. Такая лампа предварительно откачивается и электрическая дуга в ней возникает в



ртутном паре. Электродами же являются столбики жидкой ртути. Так как температура электродов в этом случае не превышает немногих сотен градусов, то и термоэлектронная эмиссия здесь не может играть заметной роли.

Отметим, что дуга, горящая в ртутном паре, является мощным источником ультрафиолетовых лучей. Поэтому ртутные лампы широко применяются в медицине («искусственное горное солнце») и в научных исследованиях, а баллоны таких ламп делают из кварца или специальных сортов стекла, хорошо пропускающих ультрафиолетовое излучение.

Многочисленные исследования электрических дуг с холодными электродами показывают, что источником мощной электронной эмиссии с катода является небольшое, ярко светящееся и непрерывно движущееся пятнышко на катоде, всегда возникающее в подобных дугах (*катодное пятно*). Плотность тока в катодном пятне огромна и может достигать  $10^{10} - 10^{11}$  А/м<sup>2</sup>. Причина образования катодного пятна заключается в сильном увеличении концентрации положительных ионов у катода, которое создает очень сильное местное электрическое поле, вызывающее мощную автоэлектронную эмиссию (§ 165). Поэтому электрические дуги с холодными катодами иногда называются *автоэлектронными дугами*. Катодное пятно может возникнуть не только у поверхности ртути, но и у любого металлического твердого электрода

**Применения дугового разряда.** Электрическая дуга является мощным источником света и широко применяется в проекционных (кино), прожекторных и других установках. Расходуемая ею удельная мощность меньше, чем у ламп накаливания.

В качестве источников света употребляют также дуговые лампы высокого давления. Дуговой разряд в этих лампах происходит в парах ртути или же в инертном газе при высоком давлении (десятки атмосфер). Зажигание дуги производится разрядом от источника высокого напряжения с помощью третьего электрода.

Вследствие высокой температуры дуги ее применяют для сварки и резания металлов.

Высокую температуру дуги используют также при устройстве дуговых электрических печей, играющих важную роль в современной электрометаллургии

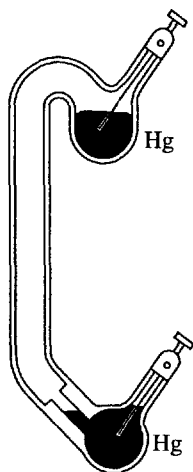


Рис 301 Схема устройства ртутной дуговой лампы

Автоэлектронные дуги с ртутным катодом применяют для выпрямления переменного электрического тока. Схема устройства ртутного выпрямителя и его включение показаны на

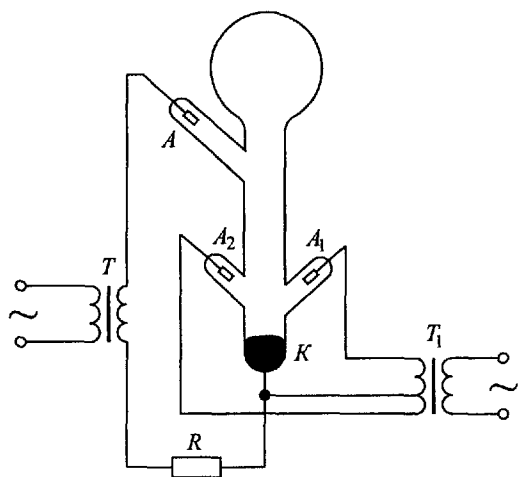


Рис. 302. Схема ртутного выпрямителя

Он состоит из большого стеклянного (а иногда металлического) сосуда, заполненного ртутным паром, и содержит ртутный катод  $K$  и три анода  $A$ ,  $A_1$  и  $A_2$  (число анодов часто бывает больше). Аноды  $A_1$  и  $A_2$  («дежурные» аноды) питаются от вспомогательного трансформатора  $T_1$  таким образом, что один из них в любой полупериод положителен относительно катода. Роль анодов  $A_1$  и  $A_2$  заключается в непрерывном поддержании катодного пятна. Анод  $A$  («главный» анод) и катод входят в цепь вторичной обмотки силового трансформатора  $T$ , содержащую также сопротивление нагрузки  $R$ . Так как ток на главный анод  $A$  существует только в те полупериоды, когда анод положителен относительно катода, то в нагрузке  $R$  появляется пульсирующий ток одинакового направления, соответствующий движению электронов от катодного пятна к главному аноду.

Если напряжение между анодом и катодом делается слишком большим, то катодное пятно может возникнуть и на аноде («обратное зажигание» ртутных выпрямителей), нарушая правильную работу выпрямителя.

## § 176. Устойчивость электрических разрядов

Как уже говорилось выше, многие формы электрических разрядов не подчиняются закону Ома и поэтому обладают нелинейной вольт-амперной характеристикой (электрические токи в вакууме, разряды в газах и другие). Может даже оказаться, что увеличение силы тока через проводник сопровождается уменьшением падения напряжения на нем, т.е. в этих случаях вольт-амперная характеристика имеет падающий участок (рис. 303). Такую характеристику имеет, например, участок цепи, содержа-

щий электрическую дугу и последовательное постоянное сопротивление. Если по вертикальной оси откладывать не напряжение, а ток, а по горизонтальной оси — напряжение (как это часто делают), то кривая зависимости  $i$  от  $U$  будет подобна букве S, и поэтому характеристики такого типа называют характеристиками S-типа.

Сопротивлением любого проводника мы называем отношение напряжения между концами проводника к силе тока в нем:  $U/i$ . Для проводников, подчиняющихся закону Ома, это отношение не зависит от силы тока (и напряжения), и поэтому их вольт-амперная характеристика прямолинейна. В случае нелинейной вольт-амперной характеристики мы можем рассматривать каждый малый ее участок как отрезок прямой линии и ввести *дифференциальное сопротивление* в данной точке характеристики

$$R_i = dU/di.$$

Если характеристика имеет падающий участок, то на этом участке  $R_i$  отрицательно.

Конечно, это не значит, что в проводниках с отрицательным дифференциальным сопротивлением не происходит выделения (а имеется, наоборот, поглощение) тепла Джоуля-Ленца. Тепловой эффект тока определяется не дифференциальным, а полным сопротивлением проводника  $U/i$ , которое всегда положительно.

Каждая точка вольт-амперной характеристики соответствует определенному состоянию электрического разряда, а вся кривая изображает совокупность возможных состояний разряда в данном проводнике. Однако если проводник имеет отрицательное дифференциальное сопротивление, то может оказаться, что не все эти состояния разряда можно получить в действительности.

Рассмотрим простую цепь, содержащую проводник и источник тока с ЭДС  $\mathcal{E}$  (рис. 304). Обозначим через  $r$  сопротивление всей остальной части цепи, через  $i$  — ток в цепи и через  $U$  — напряжение на проводнике. Тогда, согласно закону Ома, для участка цепи с ЭДС (§ 68)

$$U = \mathcal{E} - ir. \quad (176.1)$$

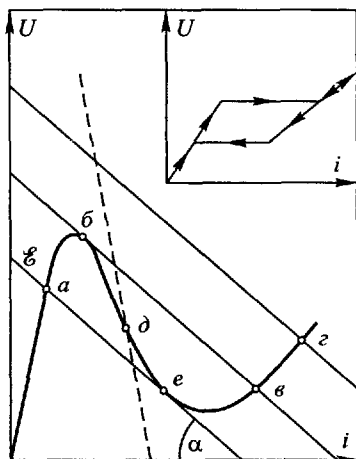


Рис 303. Вольт-амперная характеристика S-типа

С другой стороны,  $U$  и  $i$  связаны уравнением характеристики  $U = f(i)$ , где  $f$  — функция, зависящая от свойств проводника. Поэтому при данных  $\mathcal{E}$  и  $r$  в проводнике окажутся возможными только те состояния разряда, при которых  $U$  и  $i$  одновременно удовлетворяют обоим уравнениям.

Нахождение возможных состояний разряда удобно производить графически. Для этого на графике вольт-амперной характеристики проведем прямую, уравнение которой есть (176.1) («линия нагрузки»). Она отсекает на оси  $U$  отрезок, равный ЭДС источника  $\mathcal{E}$ , и наклонена к оси  $i$  на угол  $\alpha = \text{arctg } r$ . Тогда

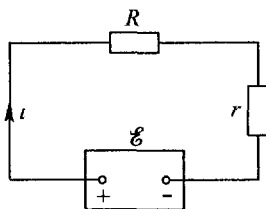


Рис 304 К вопросу об устойчивости электрических разрядов

возможные при этих условиях состояния разряда будут определяться точками пересечения характеристики и линии нагрузки.

Положим, что состояние разряда характеризуется точкой характеристики  $a$  (см. рис 303). Если теперь увеличивать ЭДС источника, то линия нагрузки будет перемещаться вверх, оставаясь параллельной самой себе, и разряд будет плавно менять свое состояние в соответствии с участком характеристики  $ab$ . Если после достижения точки  $b$  увеличивать ЭДС еще больше, то разряд скачком перейдет в новое состояние, описываемое точкой  $v$ . При этом напряжение на проводнике уменьшится, а сила тока увеличится. Если же мы захотим поддерживать то же напряжение, которое было в точке  $b$ , то нам придется еще увеличить ЭДС источника. При этом будем передвигаться по ветви характеристики  $vg$  вверх, и сила тока увеличится еще больше. Если исходить из правой ветви характеристики, например из точки  $z$ , и постепенно уменьшать ЭДС источника, то мы пройдем все состояния разряда, изображаемые ветвью  $zve$ . При этом будут существовать и состояния, соответствующие отрезку  $ve$ , которые нельзя было получить при увеличении ЭДС. При достижении точки  $e$  произойдет опять скачкообразное изменение разряда, и он перейдет в новое устойчивое состояние  $a$ . При этом сила тока скачкообразно уменьшится, а напряжение возрастет. Если же мы захотим сохранить напряжение таким, каким оно было в точке  $e$ , то мы должны будем уменьшить ЭДС источника. Таким образом, наблюдаемая на опыте зависимость  $i$  от  $U$  не будет воспроизводить истинную вольт-амперную характеристику, а будет иметь вид петлеобразной кривой, показанной в верхнем правом углу рис. 303 (*гистерезис* разряда). При некотором значении напряжения, разном при прямом и обратном ходе, сила тока будет делаться неустойчивой и скачком изменять свою величину.

Из сказанного ясно, что для устойчивости тока нужно, чтобы линия нагрузки при любом значении ЭДС пересекла вольт-амперную характеристику только один раз, а это значит, что она должна идти более круто, чем характеристика (штриховая линия на рис. 303). Или, иначе, внешнее сопротивление  $r$  должно быть больше модуля дифференциального сопротивления  $R_1$  в любой точке характеристики:

$$r > |R_1| \quad (\text{S-тип}). \quad (176.2)$$

Наряду с характеристиками S-типа существуют и характеристики другого типа, показанного на рис. 305 (характеристики N-типа). Примером проводника с характеристикой N-типа может служить туннельный полупроводниковый диод (§ 203). Она может также возникнуть в вакуумных лампах вследствие динаatronного эффекта (§ 164).

Если проводник имеет вольт-амперную характеристику N-типа, то при постепенном увеличении ЭДС мы сначала будем двигаться по участку характеристики  $ab$  (рис. 305). В точке  $b$  произойдет скачкообразное изменение разряда. Однако в данном случае увеличится не ток, а напряжение, а сила тока станет меньше. Для поддержания тока неизменным необходимо сместиться вдоль ветви характеристики  $вz$ , отчего скачок напряжения сделается еще больше. При обратном уменьшении тока мы сумеем дойти до состояния разряда  $e$ , после чего опять произойдет скачок, и т.д. Поэтому наблюдаемая на опыте зависимость  $U$  от  $i$  может иметь вид, показанный в правом верхнем углу рис. 305. Отличие от предыдущего случая S-характеристики заключается в том, что здесь неустойчивым может оказаться напряжение, а не ток. Для устойчивости разряда необходимо, чтобы линия нагрузки проходила более полого, чем вольт-амперная характеристика, т.е. чтобы выполнялось условие

$$r < |R_1| \quad (\text{N-тип}). \quad (176.3)$$

Из сказанного также ясно, что если вольт-амперная характеристика не имеет падающего участка (т.е.  $R_1$  всюду положи-

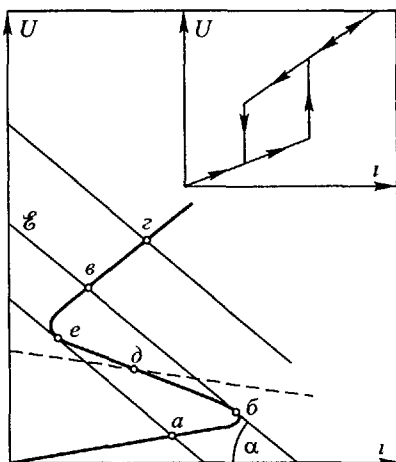


Рис 305 Вольт-амперная характеристика N-типа

тельно), то линия нагрузки при любом значении  $r$  пересекает характеристику только один раз, и поэтому разряд в таком проводнике будет всегда устойчив.

В предыдущих рассуждениях мы не учитывали емкость и индуктивность цепи. Поэтому формулы (176.2) и (176.3) выражают условие устойчивости для постоянного тока. Оно необходимо, но может оказаться недостаточным. Чтобы разряд в данном состоянии был устойчивым, нужно еще, чтобы при случайных малых изменениях тока и напряжения в цепи возникали такие процессы, которые препятствовали бы этим изменениям, для чего необходимо выполнение дополнительных условий, рассмотренных в Добавлении 9 (его следует читать после гл. XX).

### § 177. Плазма

В различных формах газового разряда иногда образуется сильно ионизованный газ, в котором концентрация электронов приблизительно равна концентрации положительных ионов. Такая система из электронов и положительных ионов, распределенных с одинаковой концентрацией, получила название *электронно-ионной плазмы* или просто *плазмы*.

Плазму мы имеем в положительном столбе тлеющего разряда. Она образуется также в главном канале искрового разряда.

Так как концентрация электронов и ионов в плазме одинакова, то объемный заряд в ней, как и в металлах, равен нулю. Кроме того, при значительной ионизации газа электропроводность плазмы может быть очень большой. Поэтому по характеру своей электропроводности ионная плазма приближается к металлам.

Если плазма находится в электрическом поле, то в ней возникает электрический ток и выделяется тепло. При этом энергию в поле получают сначала электроны как более подвижные частицы, которые затем передают энергию ионам при соударениях. Однако при соударениях, вследствие большой разницы масс обеих частиц, электрон передает иону не всю энергию, а только ее часть. При низких давлениях, когда число соударений относительно мало, это приводит к тому, что средняя кинетическая энергия электронов оказывается больше средней кинетической энергии ионов. Или, иными словами, температура электронного газа в плазме выше температуры ионного газа (неизотермическая плазма). Эти температуры можно измерить косвенными методами, причем оказывается, что, например, в положительном столбе тлеющего разряда при давлениях порядка 0,1 мм рт. ст. температура электронов может достигать  $10^5$  К и выше, в то время как температура ионов не превышает нескольких сотен градусов.

При повышении давления увеличивается число соударений и улучшается теплообмен между электронным и ионным газами, отчего разность между их температурами уменьшается. При достаточно высоком давлении электроны и ионы имеют одинаковую температуру (изотермическая плазма). Изотермическую плазму мы имеем всегда при ионизации с помощью высокой температуры, например, в искровом канале.

В лабораторных условиях плазма получается не только в газовых разрядах. В электропроводящих твердых телах (металлы, полупроводники) мы имеем подвижные электроны проводимости и неподвижные положительные ионы с общим объемным зарядом, равным нулю, т.е. тоже электронно-ионную плазму.

Однако наиболее часто плазма встречается в космических телах. Основная масса вещества космоса практически полностью ионизирована вследствие высокой температуры и действия различных излучений и находится в состоянии сильно ионизованной плазмы. В частности, Солнце полностью состоит из плазмы. Верхние ионизованные слои атмосферы Земли (ионосфера) тоже представляют собой плазму.

Плазма как сильно ионизованный газ имеет некоторое сходство с обычными газами и подчиняется многим газовым законам. Однако между плазмой и обычными газами имеются и радикальные отличия. Они особенно резко проявляются тогда, когда имеется магнитное поле. В этом случае на частицы плазмы (ионы и электроны) действуют большие силы (силы Лоренца), не существующие в газе нейтральных атомов. При движении частиц вдоль магнитного поля эти силы равны нулю. При движении же поперек магнитного поля они максимальны и препятствуют этому движению. Второе отличие заключается в том, что ионы и электроны в плазме сильно взаимодействуют между собой с помощью кулоновских сил. Оба обстоятельства в сочетании с большой электропроводностью сильно ионизованной плазмы приводят к тому, что свойства плазмы и уравнения ее движения при наличии электрических и магнитных полей оказываются резко отличающимися от таковых для обычных газов и жидкостей. Изучение законов движения плазмы, рассматриваемой как особого рода жидкость с большой электропроводностью, составляет предмет магнитной гидродинамики плазмы и имеет большое значение для понимания многих астрофизических процессов.

Исследование свойств плазмы имеет исключительное практическое значение, так как с помощью использования плазмы открывается принципиальная возможность осуществления управляемых термоядерных реакций.

## Г Л А В А XVII

ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В  
ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

Явления электронной эмиссии (гл. XV) и газовых разрядов (гл. XVI) позволяют получить потоки электронов и ионов, движущихся в вакууме практически без соударений. Попадая в электрические и магнитные поля, эти частицы оказываются под действием определенных сил и изменяют свое первоначальное движение.

Изучая движение различных заряженных частиц в электрических и магнитных полях, оказывается возможным определить отношение их заряда к массе  $e/m$  и отсюда получить ценные сведения о природе этих частиц и о тех процессах, в которых они возникают. Воздействуя на потоки электронов и ионов электрическими и магнитными полями, можно управлять этими потоками, т.е. изменять их силу и направление движения; это лежит в основе действия различных важных электронных приборов (осциллографов, электронных микроскопов, ускорителей заряженных частиц, телевизионных трубок и др.).

## § 178. Движение заряженных частиц в однородном электрическом поле

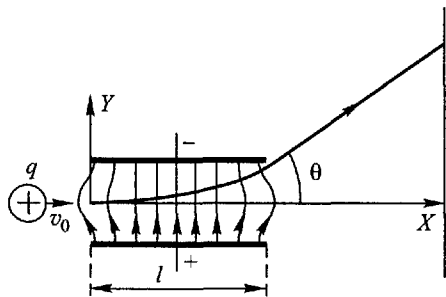
Если частица, обладающая зарядом  $q$ , движется в пространстве, где имеется электрическое поле с напряженностью  $\mathbf{E}$ , и магнитное поле с индукцией  $\mathbf{B}$ , то на нее действует сила Лоренца (§ 88). Поэтому, согласно второму закону Ньютона, уравнение

движения частицы имеет вид

$$m \frac{dv}{dt} = q\mathbf{E} + q[\mathbf{v}\mathbf{B}]. \quad (178.1)$$

Написанное векторное уравнение распадается на три скалярных, каждое из которых описывает движение вдоль соответствующей координатной оси.

Рис 306 Движение заряженной частицы в однородном электрическом поле



В дальнейшем мы будем интересоваться только некоторыми частными случаями движения. Предположим, что заряженные частицы, двигавшиеся первоначально вдоль оси  $X$  (рис. 306) со скоро-



стью  $v_0$ , попадают в электрическое поле плоского конденсатора. Если зазор между пластинами мал по сравнению с их длиной  $l$ , то краевыми эффектами можно пренебречь и считать электрическое поле между пластинами однородным. Направляя ось  $Y$  параллельно полю, мы имеем:  $E_x = E_z = 0$ ,  $E_y = E$ . Так как магнитного поля нет, то  $B_x = B_y = B_z = 0$ .

В рассматриваемом случае на заряженные частицы действует только сила со стороны электрического поля, которая при выбранном направлении координатных осей целиком направлена по оси  $Y$ . Поэтому траектория движения частиц лежит в плоскости  $XU$  и уравнения движения принимают вид

$$\frac{dv_x}{dt} = 0, \quad \frac{dv_y}{dt} = \frac{q}{m} E. \quad (178.2)$$

Движение частиц в этом случае происходит под действием постоянной силы и подобно движению горизонтально брошенного тела в поле тяжести. Поэтому ясно без дальнейших расчетов, что частицы будут двигаться по параболам.

Вычислим угол  $\theta$  (рис. 306), на который отклонится пучок частиц после прохождения через конденсатор. Интегрируя первое из уравнений (178.2), находим

$$v_x = dx/dt = \text{const} = v_0. \quad (178.3)$$

Интегрирование второго уравнения дает

$$v_y = (q/m)Et + C,$$

где  $t = l/v_0$  есть время нахождения частицы в электрическом поле, а  $C$  — постоянная интегрирования. Так как при  $t = 0$  (момент вступления частицы в конденсатор)  $v_y = 0$ , то  $C = 0$ , и

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{q}{m} E \frac{l}{v_0}. \quad (178.4)$$

Отсюда получаем для угла отклонения  $\theta$

$$\text{tg } \theta = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{q}{m} \frac{lE}{v_0^2}. \quad (178.5)$$

Отклонение пучка существенно зависит от удельного заряда частиц  $q/m$ .

### § 179. Движение заряженных частиц в однородном магнитном поле

Рассмотрим теперь другой частный случай, когда нет электрического поля, но имеется магнитное поле. Предположим, что частица, обладающая начальной скоростью  $\mathbf{v}_0$ , попадает в магнитное поле с индукцией  $\mathbf{B}$ . Это поле мы будем считать однородным и направленным перпендикулярно к скорости  $\mathbf{v}_0$  (рис. 307).

Основные особенности движения в этом случае можно объяснить, не прибегая к полному решению уравнений движения.

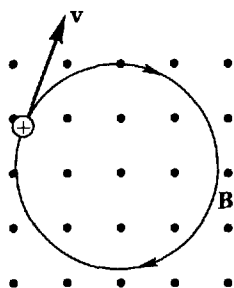


Рис. 307. Движение заряженной частицы в однородном магнитном поле

Прежде всего отметим, что действующая на частицу сила всегда перпендикулярна к скорости движения частицы. Это значит, что работа силы всегда равна нулю; следовательно, абсолютное значение скорости движения частицы, а значит, и энергия частицы остаются постоянными при движении. Так как скорость частицы  $v$  не изменяется, то модуль силы

$$F = qvB$$

остается постоянным. Эта сила, будучи перпендикулярной к направлению движения, является центростремительной силой. Но движение под действием постоянной по модулю центростремительной силы есть движение по окружности. Радиус  $r$  этой окружности определяется условием

$$\frac{mv^2}{r} = qvB,$$

откуда

$$r = \frac{v}{(q/m)B}. \quad (179.1)$$

Если энергия электрона выражена в электронвольтах и равна  $U$ , то

$$\frac{1}{2}mv^2 = qU, \quad v = \left(2\frac{q}{m}U\right)^{1/2},$$

и поэтому

$$r = \left(\frac{2}{q/m}\right)^{1/2} \frac{U^{1/2}}{B}. \quad (179.1a)$$

Так, например, если электрон с энергией 100 эВ движется в магнитном поле с индукцией 0,01 Тл, то он описывает окружность с радиусом около  $3,4 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 3,4 \text{ мм}$ . Если бы вместо электрона с той же энергией и в том же поле двигался ион атомного водорода, масса которого  $M = 1837m$ , то радиус соответствующей окружности был бы в  $\sqrt{M/m}$  раз больше, т.е. был бы равен  $3,4\sqrt{1837} = 147 \text{ мм}$ .

Кругообразное движение заряженных частиц в магнитном поле обладает важной особенностью: период обращения не зависит от энергии частицы. Действительно, период обращения равен

$$T = 2\pi r/v.$$

Подставляя сюда вместо  $T$  его выражение (179.1), имеем

$$T = \frac{2\pi}{(q/m)} \frac{1}{B}. \quad (179.2)$$

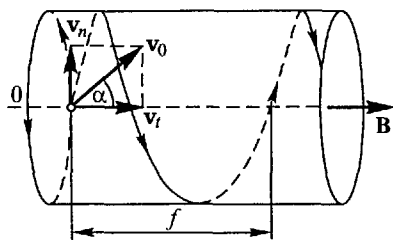
Частота же (число оборотов за  $2\pi$  с) оказывается равной

$$\omega_c = 2\pi/T = (q/m)B \quad (179.2a)$$

и называется *циклотронной частотой*<sup>1)</sup>.

Для данного типа частиц и период, и частота зависят только от индукции магнитного поля.

Выше мы предполагали, что направление начальной скорости перпендикулярно к направлению магнитного поля. Нетрудно сообразить, какой характер будет иметь движение, если начальная скорость частицы составляет некоторый угол  $\alpha$  с направлением поля (рис. 308). В этом случае удобно разложить скорость  $v_0$  на две составляющие, одна из которых  $v_t = v_0 \cos \alpha$  параллельна полю, а другая  $v_n = v_0 \sin \alpha$  перпендикулярна к полю. На частицу



действует сила Лоренца, обусловленная составляющей  $v_n$ , и частица движется по окружности, лежащей в плоскости, перпендикулярной к полю. Составляющая  $v_t$  не вызывает появления добавочной силы, так как сила Лоренца при движении параллельно полю равна нулю. Поэтому в направлении поля частица движется по инерции, равномерно, со скоростью  $v_t = v_0 \cos \alpha$ . В результате сложения обоих движений частица будет двигаться по цилиндрической спирали, изображенной на рис. 308. Шаг винта этой спирали равен

Рис. 308. Движение частицы по цилиндрической спирали (начальная скорость заряженной частицы направлена под углом к магнитному полю)

$$f = v_t T = v_0 T \cos \alpha.$$

Подставляя вместо  $T$  его выражение (179.2), имеем

$$f = \frac{2\pi v_0 \cos \alpha}{(q/m)} \frac{1}{B}. \quad (179.3)$$

<sup>1)</sup> Циклотронной (или гиромагнитной) называется частота обращения заряженных частиц в постоянном магнитном поле в плоскости, перпендикулярной к полю. (Примеч. ред.)

## § 180. Циклотрон

Независимость частоты обращения в магнитном поле (§ 179) от энергии частиц используют для устройства ускорителя заряженных частиц — циклотрона. Он предназначен для ускорения тяжелых частиц (ионов) без применения высокого напряжения.

Принцип действия циклотрона схематически изображен на рис. 309. Ускорение ионов происходит между двумя полукруглыми полыми металлическими электродами  $D$ , имеющими вид

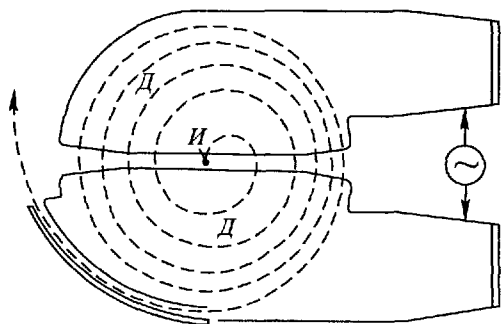


Рис. 309. Принцип действия циклотрона. Магнитное поле перпендикулярно к плоскости чертежа

коробок и называемыми дуантами. К дуантам приложено переменное напряжение в несколько десятков киловольт, создаваемое мощным ламповым генератором. Поэтому в щели между дуантами возникает электрическое поле, ускоряющее ионы. Сами ионы получают в газовом разряде низкого давления в специальном источнике ионов  $I$  и вводятся в центре щели между дуантами. Дуанты находятся внутри вакуумной камеры, которая помещается между полюсами большого электромагнита.

В циклотроне происходит ступенчатое ускорение ионов. Каждый ион, попавший в щель между дуантами, ускоряется электрическим полем и вступает внутрь одного из дуантов. Здесь под действием магнитного поля он описывает полуокружность и через время, равное половине времени обращения, вновь попадает в щель между дуантами. Если частота генератора  $\omega$  равна циклотронной частоте  $\omega_c$  (§ 179), то к этому времени электрическое поле изменит направление на обратное и ион получит повторное ускорение и во втором дуанте будет двигаться по окружности большего радиуса. Так как время обращения иона по окружности не зависит от его энергии, то при следующем прохождении щели фаза напряжения опять изменится на  $\pi$  и опять произойдет ускорение иона, и т.д. Поэтому ион будет двигаться по раскручивающейся спирали, непрерывно увеличивая свою энергию. В периферической части магнитного поля либо помещают мишень, подлежащую бомбардировке, либо отклоняют пучок с помощью дополнительного электрода, имеющего от-

рицательный потенциал, и выпускают пучок из камеры через специальное окошко, закрытое тонкой металлической фольгой.

Из сказанного ясно, что условие ускорения ионов в циклотроне есть

$$\omega = \omega_c = \frac{q}{m} B. \quad (180.1)$$

Если амплитуда переменного напряжения (выраженная в вольтах) между дуантами равна  $U_0$ , а число проходов ионов через щель равно  $n$ , то максимальная энергия, приобретаемая ионами, есть  $nU_0$  (выраженная в электронвольтах).

Максимальная энергия частиц зависит от магнитной индукции  $B$  и максимально возможного радиуса орбиты, т.е. от радиуса магнита  $R$ . Полагая в формуле (179.1)  $r = R$ , находим, что максимальная энергия ионов, которую можно получить в данном циклотроне, равна

$$U_{\text{макс}} = \frac{q}{2m} B^2 R^2.$$

Так, например, если ускоряются ионы водорода, то  $q/m = 0,96 \cdot 10^8$  Кл/кг. Для типичного циклотрона средних размеров можно принять  $B \approx 1$  Тл,  $R \approx 0,5$  м. Это дает  $U_{\text{макс}} = 12 \cdot 10^6$  эВ = 12 МэВ.

Такой циклотрон представляет собой большую и сложную установку. Масса его магнита равна сотням тонн. Общая мощность питания (высокочастотного генератора, магнита и вакуумных насосов) составляет сотни киловатт. Сила тока в пучке ускоренных ионов имеет порядок миллиампер.

Отметим еще, что при практическом осуществлении ускорения необходимо обеспечить хорошую фокусировку пучка ионов, т.е. удержание пучка вблизи центральной плоскости дуантов и предотвращение его попадания на крышки дуантов. Это достигается главным образом тем, что магнитное поле магнита делают слабо неоднородным, уменьшающимся от центра магнита к его периферии. Возникающая при этом радиальная составляющая магнитной индукции вызывает появление дополнительных сил Лоренца (по сравнению с однородным полем), отклоняющих расходящийся пучок ионов обратно к центральной плоскости.

Однако, увеличивая радиус магнита, нельзя увеличить неограниченно максимальную энергию ионов. Предел ускорению кладет зависимость массы частиц от их скорости (ср. § 183). При достаточном увеличении энергии ионов их масса увеличивается и циклотронная частота  $\omega_c$  уменьшается. Поэтому условие резонанса (180.1) нарушается и ускорение в конце концов прекращается.

Отношение массы движущейся частицы к ее массе покоя  $m/m_0$  зависит от отношения  $v/c$  — скорости частицы, выраженной в долях скорости света в вакууме (ср. § 183). С другой стороны, при данной энергии частиц их скорости обратно пропорциональны  $\sqrt{m}$ . Вследствие этого эффект изменения массы для

легких частиц (электронов) проявляется при значительно меньших энергиях, нежели для тяжелых частиц (ионов), и поэтому циклотроны практически непригодны для ускорения электронов.

### § 181. Определение удельного заряда электронов методом магнитной фокусировки

В § 178, 179 мы видели, что отклонение, испытываемое заряженными частицами в электрическом и магнитном полях, существенно зависит от удельного заряда частиц. Поэтому, измеряя это отклонение, можно определить удельный заряд частиц  $q/m$ .

В зависимости от того, известна или неизвестна скорость частиц, приходится поступать по-разному. Если скорость частиц известна или может быть определенным образом задана в эксперименте, то достаточно измерить лишь одно из отклонений — либо в магнитном, либо в электрическом поле. Если же неизвестны и удельный заряд частиц  $q/m$ , и их скорость  $v$ , то требуется

измерение и электрического, и магнитного отклонений, так как для определения двух неизвестных необходимы два соотношения.

Примером методов первой группы может служить метод магнитной фокусировки для определения удельного заряда термоэлектронов. Схема опыта показана на рис. 310. Электроны вылетают из накаленной проволоки  $K$  и ускоряются электрическим полем, созданным между проволокой и диафрагмой  $D_1$ . Диафрагма  $D_2$  имеет кольцевую щель, причем центр соответствующей ей

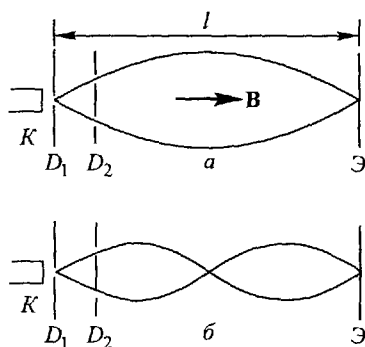


Рис. 310 Определение  $e/m$  для термоэлектронов методом магнитной фокусировки

окружности лежит на оси пучка. Эта диафрагма пропускает только те электроны, которые движутся по образующим конуса с углом раскрытия  $2\alpha$ . За диафрагмой  $D_1$  электроны движутся в пространстве, свободном от электрического поля, и попадают на люминесцирующий экран Э. Все указанные части заключены внутри цилиндрической стеклянной трубки, из которой тщательно выкачан воздух. На трубку надевается снаружи длинная катушка (соленоид), создающая внутри трубки однородное магнитное поле с известной индукцией  $B$ , направленное параллельно оси электронного пучка.

В § 179 мы видели, что в этом случае электроны движутся по цилиндрическим спиральям. Поэтому все электроны, вышедшие из диафрагмы  $D_1$  под одним и тем же углом  $\alpha$ , вновь пересекут ось пучка на расстояниях  $f$ ,  $2f$  и т.д., где  $f$  — шаг винта спирали. В этих точках сечение пучка будет наименьшим, т.е. в них электронный пучок будет фокусироваться. Следовательно, если изменять магнитное поле или скорость электронов, то первоначально размытое изображение пучка на экране будет периодически стягиваться в ярко светящееся пятнышко. Если расстояние  $l$  между  $D_1$  и экраном  $\mathcal{E}$  равно  $f$ , то пучок будет таким, как показано на рис. 310 а. При  $l = 2f$  пучок имеет вид, изображенный на рис. 310 б, и т.д.

Условие фокусировки пучка на экране есть

$$l = nf,$$

где  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Подставляя вместо  $f$  выражение (179.3), имеем

$$l = \frac{2\pi v_0 \cos \alpha}{(e/m)B} n. \quad (181.1)$$

Но скорость электронов  $v_0$  определяется напряжением  $U$ , приложенным между катодом  $K$  и диафрагмой  $D_1$ , так как

$$mv_0^2/2 = eU.$$

Выражая отсюда  $v_0$  и подставляя ее в формулу (181.1), находим окончательно

$$e/m = 8\pi^2 n^2 U \frac{\cos^2 \alpha}{l^2 B^2}.$$

Поэтому, измеряя значения  $U$  и  $B$ , при которых происходит фокусировка пучка на экране, можно определить  $e/m$ .

## § 182. Магнетрон

Важный случай движения электронов мы имеем при наличии двух полей — магнитного и электрического, перпендикулярных друг к другу. Это осуществляется в специальных вакуумных трубках — магнетронах, которые можно использовать для определения удельного заряда электронов.

Магнетрон представляет собой аналог двухэлектродной лампы (диода), содержащий накаливаемый катод и холодный анод и помещаемый во внешнее магнитное поле. Это поле создается либо катушками с током, либо электромагнитом, между полюсами которого помещается магнетрон.

Рассмотрим сначала плоский магнетрон, катод и анод которого ограничены плоскостями, параллельными между собой (рис. 311). В этом случае в центральной части магнетрона электрическое поле  $\mathbf{E}$  однородно. Магнитное поле  $\mathbf{B}$ , которое мы будем считать также однородным, направлено перпендикулярно к электрическому.

Если бы магнитного поля не было, то электроны, вылетающие из катода практически без начальной скорости, двигались бы в электрическом поле вдоль прямых линий, перпендикулярных к катоду, и все попадали бы на анод. При наличии магнитного поля траектории электронов искривляются силой Лоренца и имеют вид циклоиды, описываемой точкой, лежащей на окружности круга, равномерно катящегося вдоль катода в направлении, перпендикулярном к  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ . Если магнитное поле достаточно велико, то траектории электронов не пересекают плоскости анода и имеют вид, изображенный на рис. 311. В этом случае ни один электрон не достигает анода.

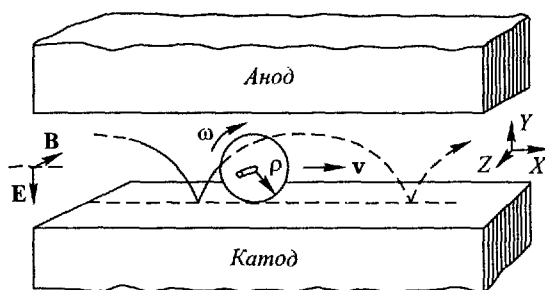


Рис. 311. Движение электрона, вылетающего с катода с нулевой начальной скоростью, в плоском магнетроне

В магнетроне траектории электронов уже не являются окружностями, как в случае отсутствия электрического поля (§ 179), а изображаются линиями с меняющейся кривизной. Это происходит потому, что электрон при своем движении попадает на различные эквипотенциальные поверхности электрического поля, и поэтому модуль его скорости изменяется. Вследствие этого изменяется модуль силы Лоренца, а следовательно, и вызываемое ею искривление траектории.

Из сказанного ясно, что для каждого данного напряжения  $U$  между катодом и анодом существует некоторое критическое значение магнитной индукции  $B_k$ , при котором траектории электронов как раз касаются поверхности анода. Если  $B < B_k$ , то все электроны доходят до анода и ток через магнетрон имеет то же значение, что и без магнитного поля. Если же  $B > B_k$ , то ни один электрон не достигает анода и ток через лампу равен нулю. Расчет показывает, что это критическое значение индукции выражается формулой

$$B_k = \frac{\sqrt{2U}}{d\sqrt{e/m}}, \quad (182.1)$$

где  $d$  — расстояние между катодом и анодом. Поэтому, измеряя



на опыте  $B_k$ , начиная с которого запирается ток в магнетроне, можно определить удельный заряд электронов  $e/m$ .

Легко показать, что траектория электрона в плоском магнетроне есть циклоида (рис 311), Действительно, для нашего случая уравнения движения электрона принимают вид

$$m \frac{dv_x}{dt} = ev_y B, \quad m \frac{dv_y}{dt} = eE - ev_x B. \quad (182.2)$$

Если электрон вылетел в начале координат (расположенном в плоскости катода) с нулевой начальной скоростью, то в качестве начальных условий задачи имеем

$$t = 0; \quad x = y = 0; \quad v_x = v_y = 0. \quad (182.3)$$

Нетрудно убедиться непосредственной подстановкой, что решение уравнений движения, удовлетворяющее этим начальным условиям, есть

$$x = vt - \rho \sin \omega_c t, \quad y = \rho(1 - \cos \omega_c t), \quad (182.4)$$

что и представляет уравнение циклоиды в параметрической форме. Здесь  $\omega_c$  — циклотронная частота, определяемая формулой (179.2а), а  $v$  и  $\rho$  равны соответственно

$$v = E/B, \quad \rho = v/\omega_c. \quad (182.5)$$

При  $B = B_k$  циклоида касается анода, а следовательно,

$$2\rho = d. \quad (182.6)$$

Подставляя для  $\rho$  и  $v$  их значения (182.5), учитывая выражение (179.2а) для  $\omega_c$  и заменяя  $E$  на  $U/d$ , получаем для  $B_k$  соотношение (182.1), приведенное выше.

На практике применяют цилиндрические магнетроны. Их анод представляет собой металлический цилиндр, а катод имеет также цилиндрическую форму и расположен на оси анода. Пути электронов

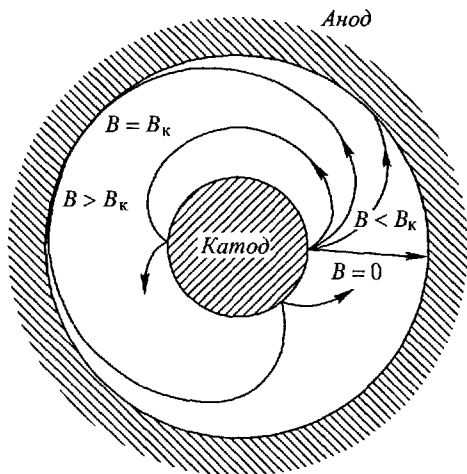


Рис. 312 Пути электронов в цилиндрическом магнетроне

в цилиндрическом магнетроне имеют более сложную форму; они изображены на рис. 312. Соответствующий расчет показывает, что критическое значение магнитной индукции в цилиндрическом магнетроне определяется выражением

$$B_k = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{e/m}} \frac{\sqrt{U}}{b(1 - a^2/b^2)},$$

где  $a$  — радиус катода,  $b$  — радиус анода. Отметим так же, что значение  $B_k$  не изменяется под действием пространственного за-

ряда и имеет одно и то же значение как в режиме тока насыщения, так и в режиме пространственного заряда.

Подобные измерения приводят к тем же значениям  $e/m$  для термоэлектронов, что и найденные по методу магнитной фокусировки (§ 181), а также другими способами.

Отметим, что магнетроны представляют интерес не только для определения удельного заряда электронов. Магнетроны (правда, несколько измененного устройства) используют для генерации мощных электрических колебаний высокой частоты, и поэтому они играют выдающуюся роль в современной радиотехнике сверхвысоких частот.

### § 183. Определение удельного заряда $\beta$ -частиц

Многие вещества, называемые радиоактивными, самопроизвольно испускают из недр своих атомов (атомных ядер) различные излучения. Еще в конце XIX в. было установлено, что среди радиоактивных излучений имеются так называемые  $\beta$ -частицы,

представляющие собой поток отрицательно заряженных частиц, движущихся с большой скоростью. Изучение отклонения  $\beta$ -частиц в электрических и магнитных полях позволило окончательно установить их природу.

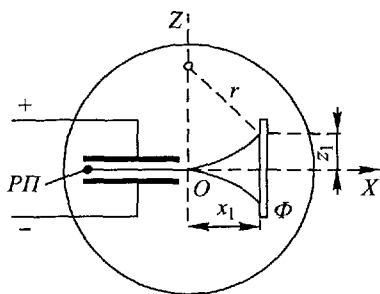
Схема одного из таких опытов показана на рис. 313:  $\beta$ -частицы, испускаемые радиоактивным препаратом  $РП$ , движутся в вакууме в узком зазоре между пластинами плоского конденсатора и попадают на фотографическую пластинку  $\Phi$ .

Рис. 313. Определение удельного заряда  $\beta$ -частиц

Весь прибор помещается в сильное магнитное поле, перпендикулярное к направлению электрического поля и к направлению движения частиц.

Частицы, движущиеся между пластинами конденсатора, находятся под действием электрического и магнитного полей. Сила, действующая на частицу в электрическом поле конденсатора, есть  $eE$ , а сила, вызываемая магнитным полем, равна  $-evB$ . Чтобы частица могла пройти через конденсатор, она не должна отклоняться, а значит, полная сила, действующая на частицу, должна равняться нулю. Отсюда находим

$$v = E/B. \quad (183.1)$$



Частицы же, имеющие другие скорости, попадают на пластины и выбывают из пучка, так что за конденсатором получается пучок  $\beta$ -частиц с одинаковой скоростью. За пределами конденсатора на пучок действует только магнитное поле, и пучок изгибается по окружности. Радиус этой окружности определяется формулой (179.1) или, если выразить  $v$  через  $E$  и  $B$ ,

$$r = \frac{E}{(e/m)B^2}. \quad (183.2)$$

Если изменить направления обоих полей  $E$  и  $H$  на противоположные, то пучок будет искривлен в другую сторону.

Радиус окружности  $r$  можно определить, измеряя смещение пучка  $z_1$  на фотопластинке и зная расстояние  $x_1$  от края конденсатора до пластинки. Действительно, пусть начало координатных осей  $X, Z$  находится в точке  $O$  (рис 313). Тогда уравнение круговой траектории частиц есть

$$(z - r)^2 + x^2 = r^2.$$

Полагая  $x = x_1, z = z_1$  и выражая из этой формулы  $r$ , имеем

$$r = (x_1^2 + z_1^2)/2z_1. \quad (183.3)$$

Таким образом, зная  $E$  и  $B$ , а также расстояние  $x_1$  до фотопластинки и измеряя отклонение пучка  $z_1$ , можно найти  $e/m$ .

Применяя в качестве источника  $\beta$ -частиц различные радиоактивные препараты, можно получать разные скорости  $\beta$ -частиц. Эти скорости очень велики (близки к скорости света). Оказалось, что значения  $e/m$  для  $\beta$ -частиц, обладающих разными скоростями, не одинаковы и тем меньше, чем больше скорость частиц (табл. 14).

Таблица 14

$v/c$	$e/m,$ $10^{11}$ Кл/кг	$e/m_0,$ $10^{11}$ Кл/кг	$v/c$	$e/m,$ $10^{11}$ Кл/кг	$e/m_0,$ $10^{11}$ Кл/кг
0,3173	1,661	1,752	0,5154	1,511	1,763
0,3787	1,630	1,761	0,6870	1,283	1,767
0,4281	1,590	1,760			

В настоящее время нет никаких оснований считать, что заряд частицы может зависеть от скорости ее движения. С другой стороны, согласно теории относительности, масса всякого движущегося тела должна зависеть от скорости тела, причем эта зависимость выражается формулой

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (183.4)$$

Здесь  $m$  — масса, определяемая наблюдателем, относительно которого тело имеет скорость  $v$ ,  $m_0$  — масса покоя, т.е. масса

того же тела, покоящегося относительно наблюдателя. Поэтому с точки зрения теории относительности для разных  $\beta$ -частиц, движущихся с разными скоростями, постоянной должна оставаться не измеренная величина  $e/m$ , а величина  $e/m_0$ , т.е. удельный заряд для покоящихся частиц, равный

$$\frac{e}{m_0} = \frac{e/m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (183.5)$$

Результаты опытов хорошо подтвердили это заключение. В вышеприведенной таблице даны значения  $e/m_0$ , полученные по формуле (183.5) из измеренных значений  $e/m$ . Как видно из таблицы, отношение  $e/m_0$  действительно остается постоянным и не зависит от скорости частиц. Поэтому описанные опыты являются одним из прямых экспериментальных подтверждений вывода теории относительности о зависимости массы от скорости. К этому вопросу мы вернемся еще в гл. XXIII.

Значение  $e/m_0$  для  $\beta$ -частиц показало, что они представляют собой поток электронов, движущихся со скоростями, близкими к скорости света.

### § 184. Результаты измерений удельного заряда электронов

Помимо методов, рассмотренных выше, имеются и другие способы определения удельного заряда электронов. Однако мы ограничимся приведенными примерами и остановимся на основных результатах.

Прежде всего отметим, что опыты по измерению  $e/m$  заряженных частиц привели к открытию самого существования электронов. А именно, Дж.Дж. Томсон в 1897 г., исследуя отклонение в электрических и магнитных полях отрицательно заряженных частиц, исходящих из катода в тлеющем разряде (катодных лучей), получил впервые совершенно неожиданные в то время результаты. Оказалось, что отношение  $e/m$  в катодных лучах вовсе не зависит от природы газа в разрядной трубке. Оно не зависит также от материала катода и давления газа. Но самое удивительное заключалось в том, что значение  $e/m$  для частиц катодных лучей оказалось намного больше, нежели это отношение для самого легкого иона водорода, которое было найдено из опытов с электролизом.

Результаты Томсона показали, что частицы в катодных лучах (природа которых в то время была еще неизвестна) не могут быть заряженными атомами газа или материала электродов и впервые привели к заключению, что эти частицы являются элементарными заряженными частицами, общими для всех веществ, свободно существующими в катодных лучах независимо

от атомов и обладающими гораздо меньшей массой, нежели атомы.

Дальнейшие опыты по измерению отношения  $e/m$  подтвердили этот вывод. Они установили, что такое же значение  $e/m$ , как и для частиц катодных лучей, имеют  $\beta$ -частицы, отрицательные частицы, возникающие при термоэлектронной эмиссии, фотоэлектрическом эффекте, автоэлектронной эмиссии, а также те частицы, которые обуславливают электрический ток в металлах. Это показало, что все электроны тождественны между собой и что они являются составной частью атомов всех веществ.

Удельный заряд электронов можно определить не только из электрических измерений, но и из оптических. Совокупность всех результатов по определению  $e/m$  для электронов приводит к следующему значению:

$$e/m_0 = 1,759 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг.}$$

Так как заряд электрона  $e$  известен из независимых измерений (§ 144), то отсюда можно найти массу электрона:

$$m_0 = 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ кг,}$$

что составляет  $1/1836$  массы протона. Приведенное значение есть масса покоящегося электрона.

Укажем в заключение, что по отклонению в электрических и магнитных полях можно найти удельный заряд не только электронов, но и ионов. Зная же удельный заряд ионов, можно найти и массу атомов исследуемого вещества, и притом с большой точностью. Поэтому измерение  $e/M$  для газовых ионов является важным и точным методом определения атомных масс и широко применяется в современной физике. Для этой цели разработаны различные приборы, получившие общее название *масс-спектрографов* (если положение пучков определяют фотографическим способом) или *масс-спектрометров* (при регистрации пучков электрическими методами).

## § 185. Циклотронный (диаманитный) резонанс

Современная электроника располагает еще одним замечательным методом определения удельного заряда электронов. Особое достоинство этого метода заключается в том, что он применим не только к электронам в вакууме или в разреженных газах, но и к электронам проводимости в твердых телах. Образец исследуемого вещества помещают в постоянное магнитное поле и одновременно подвергают его воздействию переменного электрического поля, перпендикулярного к магнитному полю. При этом происходит явление, аналогичное процессу ускорения ионов в циклотроне (§ 181), но в данном случае ускоряемыми ча-

стицами являются электроны проводимости и роль ускоряющего электрического поля между дуантами играет электрическое поле электромагнитной волны.

Рассмотрим качественно поведение свободного электрона в этих условиях. В постоянном магнитном поле (индукцию которого обозначим через  $\mathbf{B}_0$ ) электрон движется по окружности, лежащей в плоскости  $\Pi$  (рис. 314), перпендикулярной к магнитному полю, с циклотронной частотой обращения (§ 179)

$$\omega_c = (e/m)B_0. \quad (185.1)$$

Его круговое движение можно разложить на два взаимно перпендикулярных гармонических колебания в плоскости  $\Pi$  и рассматривать электрон в постоянном магнитном поле как два гар-

Рис. 314. К объяснению циклотронного резонанса

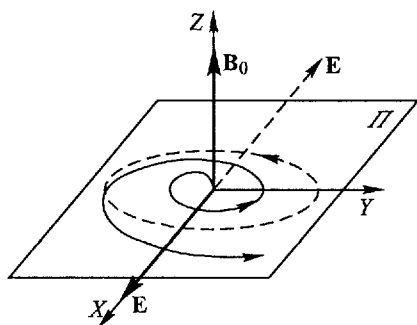
монических осциллятора, колеблющиеся вдоль осей  $X$  и  $Y$  с одинаковой частотой  $\omega_c$  и с постоянной разностью фаз, равной  $\pi/2$ .

Положим теперь, что на электрон действует еще электрическое поле  $\mathbf{E}$  электромагнитной волны, лежащее в плоскости  $\Pi$  и изменяющееся с частотой  $\omega$  (длина волны намного больше радиуса орбиты, так что мгновенное значение  $\mathbf{E}$  одинаково во всех точках орбиты). Тогда на каждый из указанных осцилляторов будет действовать периодическая внешняя сила с частотой  $\omega$ , и поэтому они будут совершать вынужденные колебания с той же частотой  $\omega$ . Но из механики известно, что при условии

$$\omega = \omega_c \quad (185.2)$$

возникает явление резонанса, при котором амплитуда колебаний осциллятора и его энергия достигают наибольшего значения, а в случае отсутствия затухания (сил трения) неограниченно увеличиваются с течением времени. Поэтому свободный электрон при резонансе будет набирать энергию за счет энергии электромагнитной волны и двигаться по раскручивающейся траектории (рис. 314), а электромагнитная волна при резонансе будет поглощаться (см. Добавление 10).

В действительности же электроны испытывают соударения. При соударениях они передают накопленную энергию кристаллической решетке твердого тела, после чего процесс ускорения электронов начинается снова. Поэтому поглощение энергии электромагнитной волны происходит и в отсутствие резонанса. При резонансе же поглощение достигает максимума.



Описанное явление получило название *циклотронного резонанса* или, иначе, *диамагнитного резонанса* (так как его происхождение тесно связано с искривлением траектории электронов силой Лоренца, т.е. с тем же эффектом, который обуславливает диамагнитные свойства, ср. § 118).

Резонансное поглощение выражено тем сильнее, чем большее число полных обращений успеет совершить электрон за среднее время свободного пробега  $\tau$ , т.е. чем больше произведение  $\omega\tau$  по сравнению с единицей. Чтобы оно вообще было заметно, необходимо по крайней мере выполнение условия  $\omega\tau \sim 1$ . Обычно это имеет место при частотах  $\omega \sim 10^{10}$  Гц, что соответствует радиоволнам сантиметрового диапазона. Кроме того, выгодно увеличивать  $\tau$ , для чего исследуемое вещество в некоторых случаях охлаждают до низких температур.

Для наблюдения циклотронного резонанса исследуемое вещество (например, небольшой кристалл) помещают внутрь резонансной полости, в которой создают стоячую электромагнитную волну (§ 241). Резонатор с образцом помещают между полюсами электромагнита, создающего постоянное однородное магнитное поле, и измеряют поглощение электромагнитной энергии в зависимости от отношения  $\omega/\omega_c$ . При этом оказывается удобным поддерживать неизменной частоту генератора  $\omega$ , а изменять  $\omega_c$  изменением индукции  $B_0$ . На опыте определяют частоту  $\omega_c$ , соответствующую резонансу. Тогда по формуле (185.1) можно найти удельный заряд  $e/m$ , а зная еще заряд частиц, можно определить их массу.

## § 186. Эффективная масса

Исследование циклотронного резонанса в различных кристаллах показало, что получаемая из этих опытов масса электронов проводимости не равна массе свободного электрона в вакууме  $m$ . Эта — так называемая *эффективная масса* может быть как больше, так и меньше  $m$ .

На рис. 315 в качестве примера приведены экспериментальные кривые циклотронного поглощения для кристаллов германия  $n$ -типа. По горизонтальной оси отложено отношение  $\omega_c/\omega$ , где  $\omega_c$  вычислено для  $m_{эф} = m$ . Из рисунка видно, что максимумы поглощения лежат при значениях  $\omega_c/\omega$ , не равных 1, а значительно меньших, что соответствует  $m_{эф} < m$ .

Далее оказалось, что значение эффективной массы зависит от направления  $\mathbf{B}_0$  (рис. 315). Так как в этих опытах направление электрического поля всегда перпендикулярно к  $\mathbf{B}_0$ , то это значит, что эффективная масса зависит от направления действующей силы (анизотропия эффективной массы). Так, например, в германии для силы, параллельной кристаллографическому направлению [111] (пространственная диагональ куба), эффек-

тивная масса электронов равна  $m_{эф} \approx 1,6m$ , а для силы, действующей в перпендикулярной плоскости,  $m_{эф} \approx 0,08m$ .

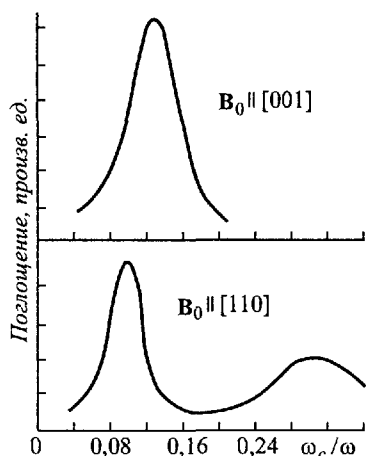


Рис. 315. Циклотронное поглощение в германии  $n$ -го типа при двух различных направлениях магнитного поля относительно осей кристалла. Температура 4,2 К. Частота 8,9 ГГц

них сил (электрического и магнитного полей) определяется не истинной массой электронов, а их эффективной массой.

Эти результаты, кажущиеся сначала очень удивительными, имеют простое объяснение. Общая их причина заключается в том, что электроны проводимости находятся все время под действием периодического в пространстве электрического поля кристалла и их движение определяется не только внешними полями, но и полем самого кристалла. Поэтому, пытаясь описать движение электронов и учитывая только внешние силы, мы получаем в законах движения вместо истинной массы электрона  $m$  некоторую другую, гораздо более сложную величину (эффективную массу). Если же учесть и внутреннее поле самого кристалла и воспользоваться квантовыми законами движения электронов, то оказывается возможным объяснить все важнейшие экспериментальные результаты, и притом не только качественно, но и количественно.

Исследование эффективных масс в различных кристаллах играет важную роль в современной физике твердого тела и позволяет получить ценные сведения об особенностях движения электронов внутри кристаллов.

И, наконец, число различных резонансных частот оказывается в ряде случаев больше, нежели ожидаемое теоретически для частиц с одним определенным значением  $m_{эф}$ . Так, например, в кристаллах германия  $p$ -типа наблюдаются резонансы, соответствующие двум различным типам положительных дырок с сильно различающимися эффективными массами («тяжелые» и «легкие» дырки).

С понятием эффективной массы мы уже встречались в § 154, рассматривая зависимость энергии электронов проводимости от их импульса. Опыты по циклотронному резонансу показывают, что и движение электронов в кристаллах под действием внешних



## § 187. Отражение и преломление электронных пучков. Электронная и ионная оптика

Предположим, что пучок электронов, движущихся в одном направлении, попадает в однородное электрическое поле плоского конденсатора, входя через одну из его пластин (рис. 316). Это можно осуществить, если пластины конденсатора сделать из металлических сеток или из тончайших слоев металла, прозрачных для электронов.

Пусть, далее, направление электрического поля в конденсаторе таково, что оно тормозит электроны. Тогда нормальная к эквипотенциальным поверхностям составляющая скорости электронов  $v_n$  будет уменьшаться, составляющая же  $v_t$ , параллельная эквипотенциальным поверхностям, изменяться не будет. Если электрическое поле достаточно сильно, то в некоторой точке  $\epsilon$  составляющая  $v_n$  обратится в нуль, а затем изменит свое направление.

Электронны, вошедшие в электрическое поле в точке  $a$ , будут двигаться по изогнутой траектории  $авб$  и выйдут из поля в точке  $б$ . Так как при движении от  $\epsilon$  к  $б$  они проходят ту же разность потенциалов, что и между  $a$  и  $\epsilon$  (но в обратном направлении), то модуль скорости  $v_n$  в точке  $б$  будет тот же, что и в точке  $a$ , а следовательно, электроны выйдут из конденсатора под тем же углом  $i$ , под которым они вошли в конденсатор.

Мы получим отражение электронного пучка, подобное отражению света от плоского зеркала, причем и здесь будет справедлив закон отражения: угол отражения равен углу падения, а направления падающего пучка, отраженного пучка и нормали к эквипотенциальным поверхностям поля лежат в одной плоскости.

Если разность потенциалов между пластинами недостаточна для того, чтобы обратить в нуль скорость  $v_n$ , то пучок электро-

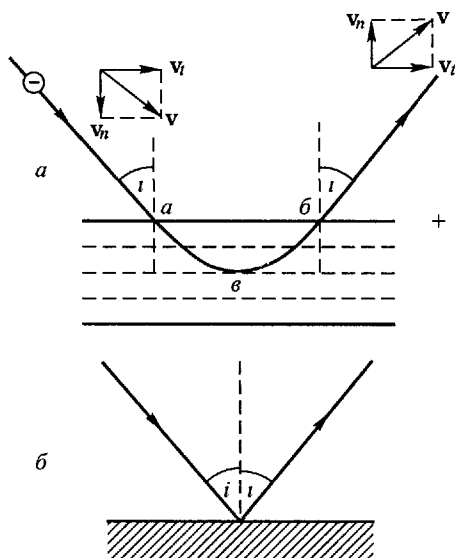


Рис. 316. Электроны в поле плоского конденсатора (а) и его оптическая аналогия (б)

нов выйдет из поля через другую пластину (рис. 317). Однако направление выходящего пучка будет отличаться от направления входящего, и мы получим преломление электронного пучка, причем опять направления падающего и выходящего пучков будут лежать в одной плоскости с нормалью к эквипотенциальным поверхностям. Если электроны движутся от более высокого потенциала к более низкому (тормозящее электрическое поле), то угол преломления  $r$  будет больше угла падения  $i$ , и явление будет аналогично преломлению света, распространяющегося из среды с большим показателем преломления  $n_1$  в среду с меньшим показателем преломления  $n_2$  (например, из стекла в воздух, рис. 317а). Если же электроны движутся от низшего потенциала к высшему, то угол преломления  $r$  будет меньше угла падения  $i$  и преломление электронных пучков будет соответствовать преломлению света при условии  $n_2 > n_1$  (например, при переходе из воздуха в стекло, рис. 317б).

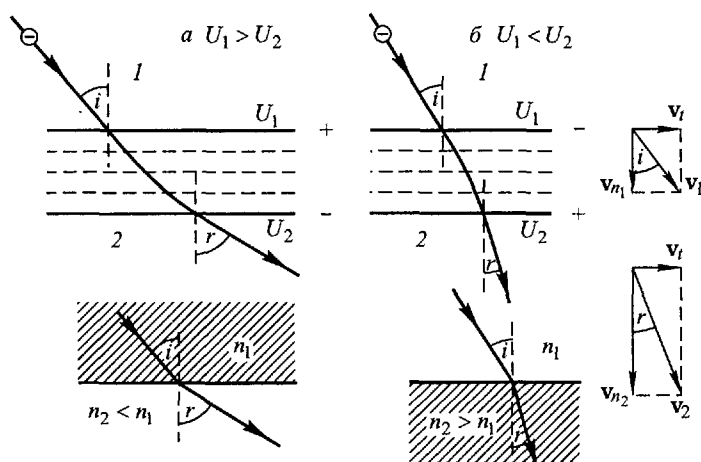


Рис. 317. Преломление электронных пучков

Нетрудно найти и количественную связь между преломлением электронных пучков и изменением потенциала. Показателем преломления среды  $n$  называют отношение

$$n = \sin i / \sin r.$$

Переходя к электронам и обращаясь к рис. 317, мы видим, что

$$\sin i = v_t / v_1, \quad \sin r = v_t / v_2, \quad n = \sin i / \sin r = v_2 / v_1.$$

Здесь  $v_1$  — полная скорость электронов до вступления в электрическое поле (в «среде» 1),  $v_2$  — полная их скорость после выхода из поля (в «среде» 2), причем учтено, что касательная составляющая скорости  $v_t$  остается

постоянной. Если энергия электронов, выраженная в электронвольтах, в пространстве 1 есть  $V$ , то

$$mv_1^2/2 = eV.$$

Если, далее, при переходе из пространства 1 (в котором потенциал постоянен) в пространство 2 (тоже с постоянным потенциалом) потенциал изменяется на  $U$ , то

$$mv_2^2/2 = e(V + U).$$

Деля оба последних равенства друг на друга и подставляя выражение  $v_2/v_1$  в формулу для показателя преломления, находим

$$n = \sin i / \sin r = \sqrt{1 + U/V}. \quad (187.1)$$

Так же как и в оптике,  $n$  не зависит от угла падения и определяется только изменением потенциала пространства и начальной энергией электронов  $V$ .

Таким образом, изменение потенциала пространства оказывает на электронные пучки такое же влияние, как изменение показателя преломления среды на лучи света. Создавая подходяще подобранные электрические поля, можно осуществить системы, которые действуют на электроны подобно тому, как действуют оптические линзы на лучи света, и позволяют получать изображения объектов.

Один из способов осуществления электростатической линзы показан на рис. 318. Линза состоит из двух отделенных узкой щелью коаксиальных цилиндров, к которым приложена разность потенциалов. Эквипотенциальные поверхности электрического поля вблизи щели изображены на рисунке. На-

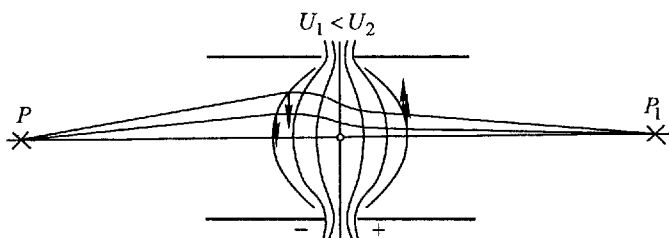


Рис. 318. Электростатическая линза в виде двух коаксиальных цилиндров

пряженность электрического поля перпендикулярна к эквипотенциальным поверхностям и имеет составляющую  $E_t$ , параллельную оси линзы, и составляющую  $E_r$ , перпендикулярную к оси. Электроны, вышедшие из некоторой точки  $P$  и попавшие в линзу, в левой половине электрического поля отклоняются полем  $E_r$  к оси линзы, и поэтому расходящийся пучок превращается в сходящийся. В правой половине поля направление  $E_r$  изменяется на противоположное и на электроны действует сила, направленная от оси наружу. Однако электроны, достигнув центральной плоскости (щели), прошли ускоряющую разность потенциалов  $U/2$  ( $U$  — разность потенциалов между цилиндрами) и увеличили свою скорость. Поэтому электронный пучок во второй части линзы, хотя и уменьшает свою сходямость, остается все

же сходящимся и пересекает ось в некоторой точке  $P_1$ , которая и является изображением точки  $P$ .

Для электростатической линзы, так же как и для оптической, существует определенная точка  $F_1$  на оси линзы (рис. 319 а), которая отличается тем, что расходящийся электронный пучок, выходящий из этой точки, после преломления в линзе превращается в параллельный. Эта точка называется *главным фокусом* линзы, а ее расстояние от центра линзы (центра щели) — *главным фокусным расстоянием*. С другой стороны линзы расположен ее

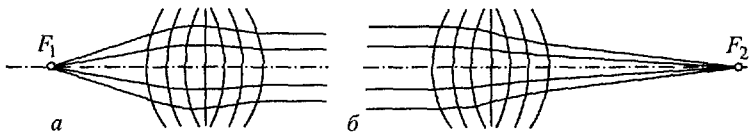


Рис. 319. Фокусы электростатической линзы

второй главный фокус (рис. 319 б). Легко сообразить, что для рассматриваемой электростатической линзы оба фокусных расстояния неодинаковы. Отметим, что такое же положение вещей мы имеем и для оптических линз, если показатели преломления окружающей среды с обеих сторон линзы неодинаковы.

На рис. 320 изображена электростатическая линза, для которой оба фокусных расстояния одинаковы. Она состоит из двух диафрагм  $D_1$  и  $D_2$ , соединенных вместе и находящихся при одинаковом потенциале, и третьей

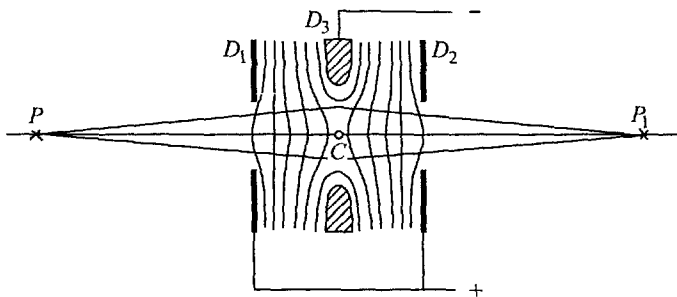


Рис. 320. Однопотенциальная электростатическая линза

диафрагмы  $D_3$ , помещенной между ними. Если внутренняя диафрагма имеет отрицательный потенциал относительно крайних диафрагм, то линза является для электронов собирающей. Так как потенциал пространства слева и справа от рассматриваемой линзы одинаков, то она соответствует оптической линзе, с обеих сторон которой находится одна и та же среда (рис. 320).

Линзам для электронов, так же как и оптическим линзам, присущи различные ошибки, или аберрации, не позволяющие получить абсолютно резкое изображение, при котором каждая точка объекта отображалась бы также точкой в плоскости изображения. Эти аберрации можно лишь уменьшить, но не устранить совсем.

Линзы для электронов можно получить и с помощью магнитных полей (магнитные линзы).

Исследование условий получения изображений с помощью электронных и ионных пучков и способов практического построения таких систем составляет содержание электронной и ионной оптики.

## § 188. Электронный осциллограф

В качестве примера применения электронной оптики рассмотрим устройство электронного осциллографа, который предназначен для наблюдения быстрых электрических процессов. Основной его частью является электронно-лучевая трубка, схематически изображенная на рис. 321. Источник электронов  $I$  с

накаленным катодом создает узкий пучок электронов (электронный луч), сходящийся в очень маленькое пятнышко  $n$  на люминесцирующем экране  $\mathcal{E}$ , нанесенном внутри на стенке трубки. Трубка откачана до высокого вакуума. Между источником и экраном расположены

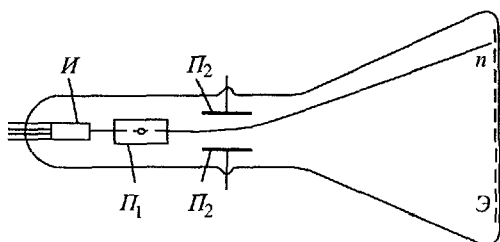


Рис. 321. Осциллографическая электронно-лучевая трубка

две пары металлических пластин  $P_1$  и  $P_2$ , которые отклоняют электронный пучок в двух взаимно перпендикулярных направлениях. На одну из пар пластин, например  $P_1$ , накладывается электрическое напряжение, изменяющееся во времени, как

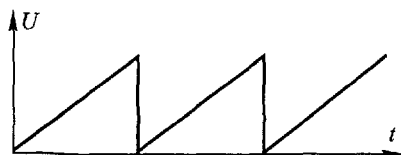


Рис. 322. Пилообразное напряжение, накладываемое на пластины времени осциллографа

показано на рис. 322 («пилообразное» напряжение), создаваемое специальным генератором внутри осциллографа. Это напряжение вызывает равномерное движение пятна на экране в горизонтальном направлении (развертка во времени). На вторую пару пластин накладывают исследуемое напряжение. Под

действием обоих электрических полей, создаваемых пластинами  $P_1$  и  $P_2$ , пятно на экране вычерчивает кривую, изображающую зависимость исследуемого напряжения от времени.

Отклонение электронного луча в осциллографе пропорционально приложенному напряжению, и поэтому электронный осциллограф представляет собой быстродействующий вольтметр. Так как электроны имеют ничтожную массу, то электронный луч практически не обладает никакой инерцией даже для очень быстро изменяющихся напряжений, в чем и заключается основное достоинство электронных осциллографов.

В некоторых типах электронно-лучевых трубок отклонение электронного пучка производится магнитным полем. В этом случае вместо отклоняющих пластин применяют проволочные катушки, расположенные вне трубки, в непосредственной близости к ней.

Развитие быстродействующей осциллографии и телевидения потребовало создания таких источников электронов, которые позволили бы получить на экране возможно меньшее пятно с максимальной интенсивностью. Это осуществляют с помощью специальных электронно-оптических систем, получивших название электронных пушек.

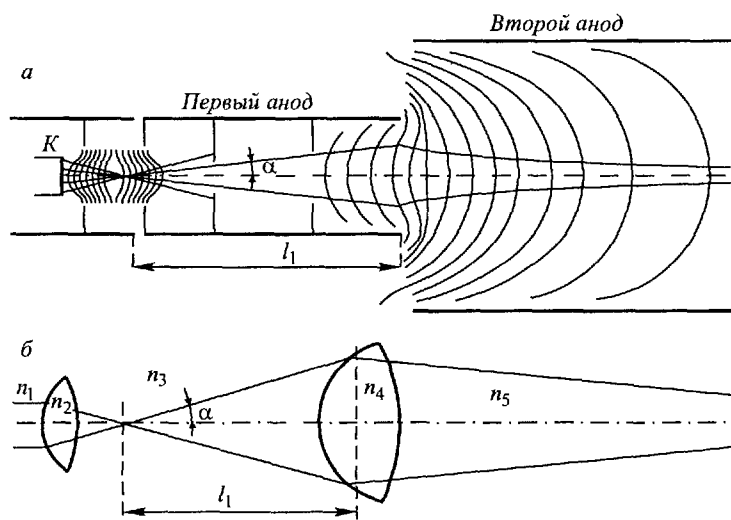


Рис. 323. Типичная электронная пушка (а) и ее оптическая аналогия (б). Показатели преломления  $n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < n_5$

Устройство типичной электронной пушки изображено на рис. 323 а. Она имеет накаливаемый катод и три коаксиальных цилиндра: управляющий электрод, первый анод и второй анод. Управляющий электрод имеет отрицательный потенциал относительно катода и сжимает выходящий из катода электронный пучок. Изменяя этот потенциал, можно изменять число электронов, проходящих через диафрагмы первого анода, а следовательно, регулировать интенсивность пятна на экране. Потенциал первого анода положителен относительно катода, а потенциал второго анода положителен

относительно первого анода. Управляющий электрод и первый анод и соответственно первый и второй аноды образуют две электрические линзы. Их эквипотенциальные поверхности изображены на рисунке. Регулируя потенциалы анодов, можно изменять сходимоссть электронного пучка и добиться наилучшей фокусировки пятна на экране. Потенциал второго анода относительно катода определяет также конечную скорость электронов в пучке. В типовых электронно-лучевых трубках потенциал первого анода делают равным  $U_1 = +(250 - 500)$  В, а потенциал второго анода доводят до  $U_2 = +(1000 - 2000)$  В.

На рис. 323 б изображена также оптическая система из двух линз, приблизительно соответствующая рассматриваемой электронно-оптической системе.

## Г Л А В А XVIII

### ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В ЭЛЕКТРОЛИТАХ

#### § 189. Законы электролиза Фарадея

В настоящей главе мы рассмотрим особенности электрического тока в проводниках 2-го рода — электролитах.

В § 55 мы уже говорили, что электрический ток в электролитах всегда сопровождается выделением на электродах химических составных частей электролита. Это явление было тщательно исследовано Фарадеем, который установил на опыте два основных закона электролиза. Согласно первому закону Фарадея, масса  $m$  вещества, выделившаяся на каком-либо из электродов, пропорциональна заряду (количеству электричества)  $q$ , прошедшему через электролит:

$$m = Kq. \quad (189.1)$$

Здесь  $K$  — электрохимический эквивалент, различный для разных веществ. Он равен массе данного вещества, выделяемой при электролизе зарядом  $q = 1$ .

Обычно  $K$  выражают в граммах (или килограммах) на кулон. Значения электрохимических эквивалентов для некоторых веществ приведены в табл. 15.

Таблица 15

Вещество	Молярная масса $M$ , $10^{-3}$ кг/моль	Валентность $Z$	Электрохимический эквивалент $K$ , $10^{-7}$ кг/Кл
Серебро	107,9	1	11,18
Медь	63,57	2	3,294
Водород	1,008	1	0,1045
Кислород	16,000	2	0,8293
Хлор	35,46	1	3,674

Второй закон Фарадея касается величины электрохимического эквивалента. Фарадей обратил внимание на то, что электрохимические эквиваленты  $K$  различных веществ всегда пропорциональны молярной массе вещества  $M$  и обратно пропорциональны валентности  $Z$  вещества. Отношение  $M/Z$  называется в химии *химическим эквивалентом* вещества. Второй закон Фарадея утверждает, что *электрохимический эквивалент прямо пропорционален химическому эквиваленту данного вещества*:

$$K = CM/Z. \quad (189.2)$$

В этой формуле коэффициент пропорциональности  $C$  имеет одно и то же значение для всех веществ.

Оба закона Фарадея можно выразить одной формулой. Подставляя выражение (189.2) для  $K$  в (189.1) и обозначая  $1/C = F$ , находим

$$m = \frac{M}{Z} \frac{q}{F}. \quad (189.3)$$

Величина  $F$  получила название *постоянной Фарадея*.

Полагая в (189.3)  $q = F$ , имеем  $m = M/Z$  — количество вещества, масса которого равна химическому эквиваленту.

Следовательно, если через любой электролит проходит заряд, равный постоянной Фарадея  $F$ , то на каждом из электродов выделяется  $1/Z$  молей вещества.

Опыт показывает, что

$$F = 96,4845 \cdot 10^3 \text{ Кл/моль} \approx 96,5 \text{ Кл/моль}.$$

Явление электролиза показывает, что молекулы растворенного вещества в электролитах существуют в виде положительно

и отрицательно заряженных частей, ионов, которые под действием электрического поля движутся в противоположные стороны: положительные ионы — к катоду, а отрицательные ионы — к аноду (рис. 324). Достигая анода, отрицательный ион передает аноду свой отрицательный заряд, отчего один или несколько электронов (в зависимости от заряда иона) проходят по внешней цепи, и ион превращается в нейтральный атом или молекулу, выделяющуюся на аноде. Положительный ион, напротив, заимствует от катода один или несколько электронов и, нейтрализуясь, выделяется на катоде.

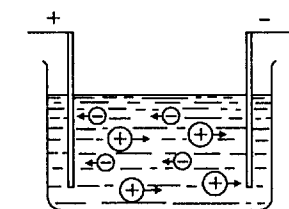


Рис. 324. Схема ионной проводимости

Ионы, выделяющиеся на аноде, т.е. несущие отрицательный заряд, Фарадей назвал *анионами*, а выделяющиеся на катоде



(положительно заряженные) — *катионами*. В § 55 мы видели, что при электролизе раствора КВг на катоде выделяется К, а на аноде — Вг. Следовательно, ионы Вг<sup>-</sup> являются анионами, а ионы К<sup>+</sup> — катионами. Так как все металлы и водород выделяются всегда на катоде, т.е. являются катионами, то отсюда можно заключить, что в электролитах ионы металлов и водорода всегда заряжены положительно.

Представление об ионной проводимости электролитов позволяет не только качественно понять явление электролиза, но и объяснить законы Фарадея. Действительно, пусть число ионов, выделившихся на каком-либо электроде в процессе электролиза, равно  $\nu$ , а заряд каждого иона есть  $q_1$ . Тогда полный заряд  $q$ , прошедший через электролит, есть  $q = q_1\nu$ . Если масса одного иона равна  $m_1$ , то масса, выделившаяся на электроде, есть  $m = m_1\nu$ . Исключая из этих равенств  $\nu$ , находим

$$m = \frac{m_1}{q_1} q, \quad (189.4)$$

т.е. первый закон Фарадея.

Из (189.4) следует, что электрохимический эквивалент  $K = m_1/q_1$  или (если умножить числитель и знаменатель на число частиц в 1 моле вещества, т.е. постоянную Авогадро  $N = 6,02 \cdot 10^{23}$  моль<sup>-1</sup>)  $K = M/q_1N$ . С другой стороны, согласно (189.3),  $K = M/(ZF)$ . Сравнивая оба выражения для  $K$ , получаем

$$q_1 = ZF/N. \quad (189.5)$$

Следовательно, заряд электролитического иона пропорционален валентности  $Z$  вещества, т.е. ионы двухвалентных веществ имеют вдвое больший заряд, нежели одновалентные ионы, ионы трехвалентных веществ — втрое больший и т.д.

Полученный результат показывает, что заряды ионов кратны между собой. Наименьший заряд  $e$  имеют ионы одновалентных веществ, заряд двухвалентного иона равен  $2e$ ,  $Z$ -валентных —  $Ze$ , но дробные части  $e$  не наблюдаются. Отсюда Гельмгольц и Стоней, независимо друг от друга, в 1881 г. впервые сделали заключение, что электрические заряды имеют атомарную природу, т.е. разделены на определенные элементарные количества. Значение элементарного заряда получается из (189.5) при  $Z = 1$ :

$$e = \frac{F}{N} = \frac{96\,500}{6,02 \cdot 10^{23}} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ Кл.}$$

Это значение прекрасно согласуется со значением заряда электрона, полученным позднее другими методами.

## § 190. Электролитическая диссоциация

Рассмотрим теперь, каким образом возникают ионы в электролитах. На первый взгляд можно было бы предположить, что ионы образуются в электролитах под действием самого тока, подобно тому как это происходит в самостоятельных газовых разрядах. Однако если бы это было действительно так, то на расщепление молекул на ионы должна была бы затрачиваться определенная энергия. Между тем опыт показывает, что для электролитов хорошо выполняется закон Джоуля–Ленца и вся работа электрического тока целиком превращается в тепло. Поэтому остается единственная возможность предположить, что ионы возникают независимо от электрического тока, т.е. растворенные молекулы в электролитах распадаются (диссоциируют) на заряженные части даже в отсутствие тока, под влиянием процессов, происходящих в самом электролите. Это представление лежит в основе теории электролитической диссоциации, заложенной Клаузиусом и Аррениусом (1887) и позволившей объяснить не только явление электролиза, но и многие другие свойства растворов.

Наиболее убедительное доказательство существования электролитической диссоциации дает исследование осмотического давления растворов. Согласно закону Вант-Гоффа при малой концентрации растворов осмотическое давление подчиняется тем же законам, что и давление идеального газа. А именно, если  $n_1$  есть концентрация частиц растворенного вещества, а  $T$  — абсолютная температура раствора, то осмотическое давление  $p$  равно

$$p = n_1 kT, \quad (190.1)$$

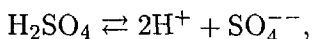
где  $k$  — постоянная Больцмана. Поэтому, измеряя осмотическое давление, можно определить и число частиц в каждом кубическом сантиметре раствора. Представим себе теперь, что мы растворяем  $m$  граммов вещества с молярной массой  $M$ . Это количество вещества содержит  $(m/M)N$  молекул и, следовательно, концентрация молекул равна

$$n = \frac{m}{M} \frac{N}{V}, \quad (190.2)$$

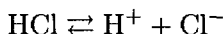
где  $V$  — объем раствора. Опыт показывает, что если мы имеем дело с растворами, которые не являются электролитами (не проводят электричества), например с раствором сахара в воде, то концентрация частиц  $n_1$ , определенная из измерений осмотического давления, всегда равна концентрации молекул  $n$ , вычисленной по (190.2), и, следовательно, в непроводящих растворах молекулы не диссоциируют. Напротив, для электролитов опыт всегда дает, что число частиц  $n_1$  больше числа растворенных молекул  $n$ , что и доказывает диссоциацию молекул в электролитах.

Молекулы различных веществ диссоциируют по-разному и могут распадаться на два или большее число ионов. Характер диссоциации тесно связан с химическими свойствами вещества. Все кислоты характеризуются тем, что в водном растворе дают положительные ионы водорода  $H^+$ . Так, например, серная

кислота диссоциирует по уравнению

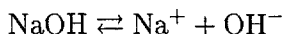


соляная кислота



и т.д.

Для оснований или щелочей характерно образование ионов гидроксила  $\text{OH}^-$ . Примером может служить диссоциация едкого натра



или нашатырного спирта



Растворы, в которых концентрации ионов водорода и ионов гидроксила одинаковы, называются *нейтральными*. Нейтральна химически чистая вода, диссоциирующая на положительные ионы водорода  $\text{H}^+$  и отрицательные ионы гидроксила  $\text{OH}^-$ . Однако концентрация ионов в ней весьма мала: при комнатной температуре в тонне воды диссоциировано только около 1,4 мг.

**Коэффициент диссоциации.** Процесс диссоциации молекулы можно представить себе следующим образом. Пусть какое-либо вещество, обладающее полярными молекулами (т.е. молекулами, построенными из ионов, например  $\text{NaCl}$ ), растворено в воде. Молекулы воды, обладающие большим дипольным моментом, будут ориентироваться в электрическом поле растворенной молекулы таким образом,

что их положительная сторона (ионы  $\text{H}^+$ ) окажется преимущественно обращенной к иону  $\text{Cl}^-$ , а отрицательная сторона (ион  $\text{O}^{2-}$ ) — к иону  $\text{Na}^+$  (как показано схематически на рис. 325). Это приведет к ослаблению связи ионов  $\text{Na}^+$  и  $\text{Cl}^-$  в молекуле. Рассуждая приближенно, можно сказать, что сила взаимного притяжения ионов  $\text{Na}^+$  и  $\text{Cl}^-$  уменьшится в  $\epsilon$  раз, где  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость растворителя. Но молекулы, участвуя в тепловом движении, испытывают непрерывные соударения. Поэтому при встрече с достаточно быстрой молекулой растворителя (или другой молекулой растворенного вещества) молекула  $\text{NaCl}$  может распасться (диссоциировать) на ионы  $\text{Na}^+$  и  $\text{Cl}^-$ .

Наряду с рассмотренными актами диссоциации возможны и обратные процессы, когда при соударении двух разноименных

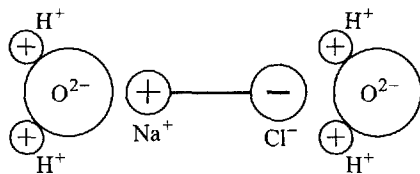


Рис. 325. Молекула хлористого натрия в воде (схематически)

и обратные процессы, когда при соударении двух разноименных

ионов  $\text{Na}^+$  и  $\text{Cl}^-$  они воссоединяются в нейтральную молекулу  $\text{NaCl}$  (рекомбинация ионов). В электролитах мы имеем подвижное (динамическое) равновесие, при котором число элементарных актов диссоциации в каждую единицу времени равно числу актов рекомбинации. В любой момент оказывается диссоциированной только часть всех молекул, а часть молекул находится в недиссоциированном состоянии.

Пусть в каждой единице объема раствора имеется  $n$  молекул растворенного вещества, из которых  $\alpha n$  диссоциированы, а  $(1 - \alpha)n$  не диссоциированы. Коэффициент  $\alpha$  называется *коэффициентом диссоциации*; он показывает, какая доля всех молекул распалась на ионы.

Коэффициент диссоциации зависит от концентрации раствора. Общий характер этой зависимости можно найти из следующих простых соображений. Число элементарных актов диссоциации в 1 с в единице объема тем больше, чем больше имеется в наличии нерасцепленных молекул, и поэтому можно положить, что оно равно

$$A(1 - \alpha)n,$$

где  $A$  — некоторый коэффициент, зависящий от природы электролита и его температуры. Число обратных актов рекомбинации пропорционально числу соударений разноименных ионов, а это последнее пропорционально как концентрации положительных ионов  $n\alpha$ , так и концентрации отрицательных ионов, равной также  $n\alpha$  (в предположении, что молекула распадается на две части), т.е. пропорционально  $(n\alpha)^2$ . Поэтому число воссоединяющихся молекул равно

$$B(n\alpha)^2,$$

где  $B$  — некоторый коэффициент. В состоянии равновесия

$$A(1 - \alpha)n = B(n\alpha)^2,$$

откуда

$$\frac{\alpha^2}{1 - \alpha} = \frac{A}{B} \frac{1}{n}.$$

Полученная формула выражает закон Оствальда, показывающий, как зависит коэффициент диссоциации  $\alpha$  от концентрации раствора  $n$ . Хотя этот закон и не очень точен, он правильно передает общий характер зависимости  $\alpha$  от  $n$ . Мы видим, что чем меньше концентрация раствора  $n$ , тем ближе  $\alpha$  к единице, и для очень разбавленных электролитов ( $n \rightarrow 0$ )  $\alpha \rightarrow 1$ . В этом случае все молекулы практически диссоциированы.

Из изложенных представлений также следует, что чем больше диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  растворителя, тем сильнее ослабляются связи ионов в молекулах растворенного вещества и, следовательно, тем больше диссоциация при прочих равных

условиях. Это заключение также соответствует данным опыта. Так, например, соляная кислота  $\text{HCl}$  при растворении в воде ( $\epsilon = 81$ ) дает электролит с хорошей электропроводностью, тогда как ее раствор в этиловом эфире ( $\epsilon = 4,3$ ) проводит электричество очень плохо. Различные вещества хорошо диссоциируют в воде потому, что она имеет большую диэлектрическую проницаемость.

### § 191. Движение ионов в электролитах

Электролитическая диссоциация происходит не только в растворах, но и во многих чистых жидкостях. Так, электролитами являются в расплавленном состоянии многие соли, кристаллы которых построены из ионов. Сюда относятся поваренная соль  $\text{NaCl}$ ,  $\text{KCl}$ ,  $\text{AgCl}$ ,  $\text{AgBr}$ ,  $\text{NaNO}_3$  и многие другие.

Стекло является сильно переохлажденной жидкостью с очень большой вязкостью. Оно представляет собой также электролит, в котором ионы  $\text{Na}^+$  обладают заметной подвижностью. На рис. 326 показан опыт, доказывающий ионную проводимость стекла. В тигле находится расплавленная чилийская селитра  $\text{NaNO}_3$ , в которую погружен стеклянный баллон лампы накаливания. Для опыта необходимо брать лампу пустотную, а не наполненную инертным газом. Нить лампы раскаляется постоянным током, а второй электрод  $a$  (из угля), погруженный в расплав, присоединяется к положительному концу нити. При этом раскаленная середина нити оказывается при отрицательном потенциале относительно расплава. При накаливании нити лампы амперметр  $A$  показывает наличие тока в цепи.  $\text{NaNO}_3$  диссоциирует на ионы  $\text{Na}^+$  и  $\text{NO}_3^-$ . Ионы  $\text{Na}^+$  движутся от анода  $a$  к стеклу лампы и проходят сквозь стекло. Внутри лампы имеется чисто электронный ток термоэлектронной эмиссии. Термоэлектроны нейтрализуют заряд  $\text{Na}^+$ , отчего эти ионы превращаются в нейтральные атомы  $\text{Na}$ , выделяющиеся на стенке баллона внутри лампы. Под влиянием высокой температуры этот натрий затем перегоняется на более холодные части баллона, где образуется ясно видимый зеркальный слой натрия.

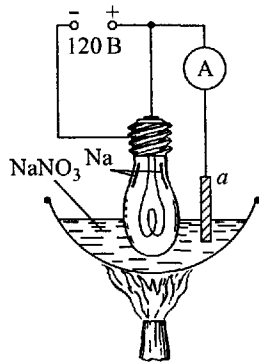


Рис. 326. Прохождение ионов  $\text{Na}^+$  сквозь стекло

Ионы в электролитах испытывают многочисленные соударения с другими молекулами, и поэтому их движение происходит с трением, которое имеет то же происхождение, что и трение

при движении больших макроскопических тел, движущихся в газе или жидкости.

Как известно, сила трения, испытываемая телами при движении в жидкостях и газах, при малой скорости движения пропорциональна скорости. Аналогично сила трения иона пропорциональна скорости  $v$  его упорядоченного движения и равна  $-fv$ , где  $f$  — коэффициент трения, различный для разных ионов и зависящий от рода растворителя и температуры. При наличии электрического поля ион приобретает такую скорость установившегося движения, при которой сумма силы трения и силы  $eE$  со стороны поля равна нулю:

$$eE - fv = 0.$$

Обозначая  $e/f$  через  $b$ , имеем

$$v = bE. \quad (191.1)$$

Таким образом, электролитический ион движется равномерно, со скоростью, пропорциональной напряженности поля. Величина  $b$  (так же, как для ионов в газах и электронов в металлах) называется *подвижностью* ионов. Она равна скорости иона в поле с напряженностью, равной единице.

Пользуясь тем, что некоторые ионы сообщают раствору определенную окраску, можно сделать видимым движение ионов и непосредственно измерить их скорость. Прибор для наблюдения движения таких «окрашенных» ионов изображен на рис. 327. К U-образной трубке *A* припаяна снизу изогнутая тонкая трубка *B*, заканчивающаяся сверху воронкой и снабженная краном. В трубку *A* сначала наливают при закрытом кране водный раствор азотнокислого калия  $KNO_3$ , который диссоциирует на катионы  $K^+$  и анионы  $NO_3^-$ , а трубку *B* заполняют через воронку водным раствором марганцевокислого калия  $KMnO_4$ , диссоциирующего на ионы  $K^+$  и  $MnO_4^-$ . Затем, осторожно открывая кран, впускают в трубку *A* раствор  $KMnO_4$ . При тщательном выполнении этой операции в трубке *A* видна резкая граница между фиолетовым раствором  $KMnO_4$  и бесцветным  $KNO_3$ . При пропускании тока ионы  $K^+$  в обоих растворах движутся от анода к катоду. Однако, так как ионы  $K^+$  не сообщают раствору окраски, за их движением следить нельзя. Ионы  $MnO_4^-$  движутся от катода

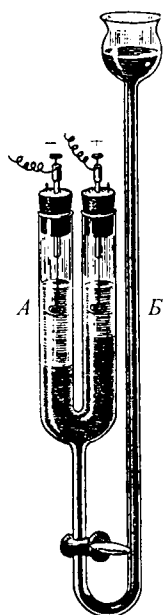


Рис 327 Прибор для наблюдения движения окрашенных ионов

да к аноду и вместе с ними перемещается фиолетовая окраска. Поэтому в том колене, где находится катод, видимая граница раздела жидкостей понижается, а в другом колене повышается. Скорость перемещения этой границы равна скорости движения ионов  $v$ .

Для успеха подобных опытов нужно, чтобы плотность тока была не слишком велика, так как в противном случае будет происходить заметное нагревание растворов и граница раздела будет размываться вследствие конвекции и диффузии.

## § 192. Проводимость электролитов

Электрический ток в электролитах имеет много сходных черт с током в металлах. В электролитах и металлах, в отличие от газов, носители заряда образуются независимо от электрического тока. Далее, заряд положительных ионов в каждом объеме электролита равен заряду отрицательных ионов, и поэтому объемный заряд в электролитах, так же как и в металлах, равен нулю. Наконец, вдали от электродов концентрация ионов (положительных и отрицательных), как правило, одинакова в разных точках электролита. Вследствие этого градиент концентрации ионов внутри электролитов равен нулю и диффузия ионов не играет роли в образовании тока.

Плотность тока, создаваемая дрейфом положительных ионов, равна

$$j_+ = n_+ e v_+,$$

где  $n_+$  — концентрация положительных ионов,  $e$  — заряд иона,  $v_+$  — дрейфовая скорость положительных ионов. Аналогично для плотности тока отрицательных ионов можно написать

$$j_- = n_- e v_-.$$

Полная плотность тока

$$j = j_+ + j_- = n_+ e v_+ + n_- e v_-.$$

Как уже говорилось, концентрации положительных и отрицательных ионов в электролитах одинаковы (мы везде предполагаем, что молекулы диссоциируют на два иона), и поэтому

$$n_+ = n_- = \alpha n,$$

где  $\alpha$  — коэффициент диссоциации, а  $n$  — число молекул в единице объема электролита. Далее скорости ионов можно выразить через их подвижности и напряженность электрического поля в электролите:

$$v_+ = b_+ E, \quad v_- = b_- E.$$

Поэтому

$$j = ne\alpha(b_+ + b_-)E. \quad (192.1)$$

Плотность тока оказывается пропорциональной напряженности поля, а следовательно, для электролитов, так же как и для металлов, справедлив закон Ома. Удельная электрическая проводимость электролита равна

$$\lambda = ne\alpha(b_+ + b_-). \quad (192.2)$$

Она тем больше, чем выше коэффициент диссоциации  $\alpha$  (чем больше концентрация ионов  $n\alpha$ ) и чем больше подвижности ионов  $b_+$  и  $b_-$ .

Входящая в эту формулу концентрация молекул  $n$  известна, а коэффициент диссоциации  $\alpha$  можно определить из независимых измерений, например из опытов с осмотическим давлением. Поэтому, измеряя удельную электрическую проводимость  $\lambda$  электролитов, можно определить сумму подвижностей ионов.

В § 55 мы уже говорили, что сопротивление электролитов при нагревании уменьшается, т.е. электролиты имеют отрицательный температурный коэффициент сопротивления. Это происходит по двум причинам: во-первых, при увеличении температуры увеличивается коэффициент диссоциации  $\alpha$ ; во-вторых, при нагревании вязкость жидкостей уменьшается и поэтому подвижность ионов увеличивается.

### § 193. Числа переноса. Подвижности ионов в электролитах

При электролизе положительные ионы (катионы) уходят от анода к катоду, а отрицательные ионы (анионы) удаляются от катода. Поэтому концентрация электролита в приэлектродных областях изменяется. Гитторф

еще в середине прошлого века показал, что, определяя эти изменения концентрации, можно найти отношение подвижностей ионов обоих знаков.

Рассмотрим сначала это явление качественно, для чего обратимся к схеме рис. 328. До электролиза концентрация анионов и катионов одинакова во всех частях электролита (рис. 328, *вверху*). Между анодом и линией *a* имеется четыре пары ионов (четыре молекулы), между

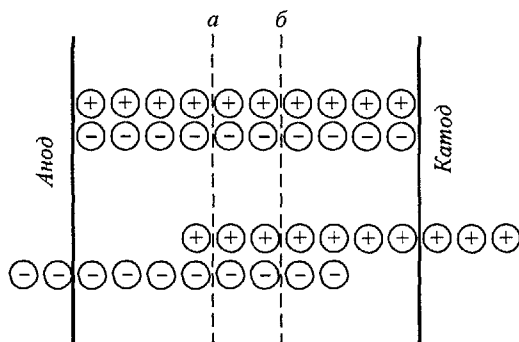


Рис. 328 Объяснение изменения концентрации электролита у электродов

*b* и катодом — такое же число, а в средней части между *a* и *b* — две молекулы. При электролизе положительные ионы движутся слева направо,



а отрицательные — справа налево. Положим, что скорость движения катионов  $v_+$  в полтора раза больше скорости анионов  $v_-$  и что за время электролиза три положительных иона встретили катод и выделились на нем (рис. 328, внизу). Тогда за то же время анод встретит два отрицательных иона. Кроме того, у катода вследствие движения отрицательных ионов окажутся непарными два положительных иона, которые также выделятся у катода. Поэтому всего у катода выделится  $3 + 2 = 5$  ионов. У анода вследствие движения положительных ионов окажутся непарными три отрицательных иона, а следовательно, у анода будет выделено всего  $2 + 3 = 5$  ионов, т.е. такое же число, как у катода.

В средней части электролита (между  $a$  и  $b$ ) концентрация электролита не изменилась. Так же как и до электролиза, здесь имеются две пары ионов или две молекулы. В пространстве же у катода (справа от  $b$ ) было четыре молекулы, а после электролиза осталось только две. У анода (слева от  $a$ ) вместо четырех первоначальных осталась лишь одна молекула. Мы видим, что у электродов происходит уменьшение концентрации электролита и притом в неодинаковой степени. Изменение концентрации больше у того электрода (в нашем случае — у анода), от которого уходят более быстрые ионы (на рис. 328 — положительные катионы).

К сказанному необходимо сделать следующее замечание. В схеме рис. 328 мы предполагали, что каждый ион выделяется при электролизе, т.е. никаких вторичных химических реакций нет. В этом случае концентрация у каждого из электродов уменьшалась пропорционально скорости уходящего иона. В действительности же судьба выделяющегося иона может быть весьма различной; она зависит от материала электродов, плотности тока и т.д. Чтобы получить окончательные изменения концентрации, эти дальнейшие превращения выделяющихся ионов необходимо всегда учитывать. Ниже мы предполагаем, что вторичные химические реакции у электродов не происходят.

Рассмотрим теперь явление количественно. Пусть два сосуда  $A$  и  $K$  (рис. 329), содержащие анод и катод, соединены трубкой с поперечным сечением  $S$ . Обозначим концентрацию ионов каждого сорта до электролиза через  $n$ , а скорости движения ионов в трубке — через  $v_+$  и  $v_-$ . Тогда за время  $t$  в сосуд  $K$  войдут  $nv_+St$  положительных ионов. За то же время из сосуда  $K$  выйдут  $nv_-St$  отрицательных ионов и столько же освободится ионов положительных. Полное число освободившихся положительных ионов в сосуде  $K$  будет равно

$$\nu = n(v_+ + v_-)St.$$

Эти ионы и выделятся у катода. Такое же точно число ионов будет выделено и у анода.

Найдем теперь изменение концентрации в обоих сосудах  $A$  и  $K$ . Из сосуда  $A$  ушло  $\Delta\nu = nv_+St$  положительных ионов. Напротив, в него вошло  $nv_-St$  отрицательных ионов, но в то же время выдвинулось у анода, как мы видели выше,  $\nu = n(v_+ + v_-)St$  этих ионов. Поэтому уменьшение числа отрицательных ионов в сосуде  $A$  есть

$$n(v_+ + v_-)St - nv_-St = nv_+St = \Delta\nu_A.$$

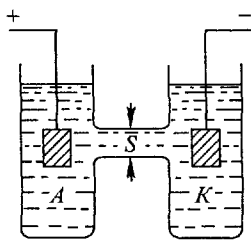


Рис. 329. Наблюдение изменения концентрации электролита у электродов

Мы видим, что число положительных и отрицательных ионов уменьшается на одну и ту же величину  $\Delta\nu_A$ , которая, следовательно, есть уменьшение числа молекул растворенного вещества в сосуде  $A$ .

Таким образом,

$$\Delta\nu_A/\nu = \nu_+/(v_+ + v_-).$$

Но скорости ионов  $v_+$  и  $v_-$  пропорциональны их подвижностям  $b_+$  и  $b_-$ . Поэтому

$$\Delta\nu_A/\nu = b_+/(b_+ + b_-).$$

Отношение

$$p_k = \nu_+/(v_+ + v_-) = b_+/(b_+ + b_-) \quad (193.1)$$

Гитторф назвал *числом переноса катионов*. Оно показывает, какая доля полного заряда переносится положительными ионами (катионами). Из (193.1) видно, что это число определяет также и относительное изменение числа молекул в электролите вблизи анода.

Аналогично можно найти изменение числа молекул у катода. В сосуде  $K$  выделилось у катода  $n(v_+ + v_-)St$  положительных ионов, но вошло в сосуд  $n\nu_+St$  этих ионов. Следовательно, убыль положительных ионов в  $K$  равна

$$\Delta\nu_K = n(v_+ + v_-)St - n\nu_+St = n\nu_-St.$$

Убыль отрицательных ионов равна числу ионов, ушедших из  $K$  через трубку, т.е.  $n\nu_-St$ . И здесь убыль отрицательных ионов равна убыли положительных, и, следовательно,  $\Delta\nu_K$  есть уменьшение числа молекул в сосуде  $K$ . Из сказанного следует, что

$$\Delta\nu_K/\nu = \nu_-/(v_+ + v_-) = b_-/(b_+ + b_-) = p_a, \quad (193.2)$$

где  $p_a$  — *число переноса анионов*. Из (193.1) и (193.2) также видно, что

$$p_a + p_k = 1,$$

т.е. сумма чисел переноса анионов и катионов всегда равна единице.

Рассмотренное явление важно в том отношении, что, измеряя на опыте изменения концентрации электролита у анода и катода, можно определить отношение подвижностей обоих ионов. Изменяя же удельную электрическую проводимость, можно найти сумму этих подвижностей. Зная же сумму и отношение подвижностей, можно определить и каждую из подвижностей аниона и катиона порознь.

В табл. 16 приведены подвижности некоторых ионов, найденные этим способом для водных растворов малой концентрации при комнатной температуре. С увеличением концентрации раствора подвижности ионов уменьшаются, хотя и не очень сильно.

Таблица 16

Ион	Подвижность, $10^{-7} \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$	Ион	Подвижность, $10^{-7} \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$
$\text{H}^+$	3,263	$\text{OH}^-$	1,802
$\text{K}^+$	0,669	$\text{Cl}^-$	0,677
$\text{Na}^+$	0,450	$\text{NO}_3^-$	0,639
$\text{Li}^+$	0,346	$\text{Br}^-$	0,694

Малые значения подвижности ионов в электролитах указывают на то, что силы трения, действующие на ионы, весьма велики. Для приближенной

оценки коэффициента трения  $f$  ионов уподобим ион маленькому шариком радиусом  $r$  и применим к нему закон Стокса, согласно которому  $f = 6\pi\eta r$ , где  $\eta$  — вязкость растворителя. Отсюда можно заключить, что подвижность ионов, равная  $b = e/f$ , будет тем меньше, чем больше вязкость растворителя, что согласуется с опытом. Так, например, увеличивая температуру электролита, мы уменьшаем его вязкость; опыт показывает, что при этом подвижность ионов увеличивается. Далее измерения показывают, что подвижность ионов тем больше, чем меньше вязкость растворителя.

Однако если по значениям подвижностей вычислить радиусы ионов  $r$ , то получаются величины, не согласующиеся со значениями, определенными другими методами. Это расхождение легко понять, если учесть, что ионы вследствие электростатического взаимодействия притягивают к себе окружающие молекулы растворителя. В результате ионы в электролитах оказываются окруженными оболочкой из молекул растворителя, которая движется вместе с ионами. Подобные группы молекул получили название *сольватов*, а в случае водных растворов — *гидратов*. Явление сольватации приводит к тому, что размер движущегося иона как бы возрастает, а его подвижность вследствие этого уменьшается.

## § 194. Электродные потенциалы

Если какой-либо проводник 1-го рода, например металл, соприкасается с электролитом, то на металле и электролите появляются заряды противоположного знака. При этом металл приобретает относительно электролита определенный электрический потенциал, который получил название *электродного потенциала*.

Возникновение электродных потенциалов объясняется следующим образом. Рассмотрим простой случай металла, погруженного в водный раствор своей собственной соли. Будем далее считать, что процессы, происходящие у электрода, обратимы. Это значит, что если при данном направлении тока на электроде происходит определенная химическая реакция, то при пропускании тока в противоположном направлении на электроде происходит реакция обратная. В отсутствие же тока никаких реакций на электроде нет.

Примером, приближенно удовлетворяющим этим условиям, может служить цинк, находящийся в водном растворе сернокислого цинка  $ZnSO_4$ . Посмотрим подробнее, что происходит у границы цинк-раствор. Ионы  $SO_4^{2-}$ , находящиеся в растворе, вступают в химическую реакцию с ионами  $Zn^{2+}$  металла, образуя  $ZnSO_4$ , который, растворяясь в воде, вновь диссоциирует на ионы  $Zn^{2+}$  и  $SO_4^{2-}$ . В результате этого процесса ионы  $Zn^{2+}$  непрерывно переходят с электрода в раствор. Каждый перешедший ион цинка переносит в раствор положительный заряд  $+2e$  и освобождает в металле отрицательный заряд  $-2e$ .

Наряду с растворением цинка происходит и обратный ему процесс: ионы  $Zn^{2+}$ , находящиеся в растворе, при тепловом дви-

жении встречаются цинковый электрод и на нем высаживаются. При этом электрод получает положительный заряд, а в растворе остаются некомпенсированные ионы  $\text{SO}_4^{2-}$ .

Если поток ионов  $\text{Zn}^{2+}$  из электрода в раствор больше потока тех же ионов из раствора на электрод, то металл будет заряжаться отрицательно, а раствор — положительно. Вследствие взаимного притяжения разноименных зарядов избыточные ионы  $\text{Zn}^{2+}$  в растворе будут сосредоточены в тонком слое вблизи границы раздела, отчего возникает двойной электрический слой (рис. 330 а). Электрическое поле внутри двойного слоя будет противодействовать переходу ионов цинка в раствор и способствовать обратному переходу их из раствора на электрод.

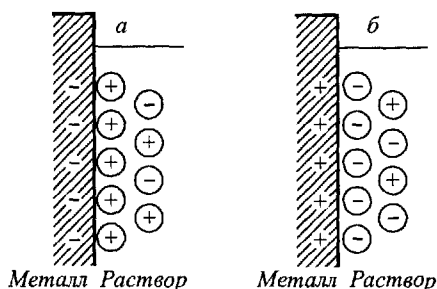


Рис. 330. Двойной электрический слой на границе металла с электролитом: а — концентрация ионов металла  $c$  в растворе меньше концентрации нулевого заряда  $c_0$ ; б —  $c > c_0$

электрод будет заряжаться положительно, а раствор — отрицательно, и появится двойной электрический слой, показанный на рис. 330 б. И в этом случае электрическое поле двойного слоя будет стремиться выровнять оба потока ионов  $\text{Zn}^{2+}$ .

При некотором потенциале электрода относительно раствора оба потока ионов становятся равными друг другу и между электродом и раствором устанавливается *электрохимическое равновесие*. Этот равновесный потенциал и есть электродный потенциал металла (в нашем случае цинка) относительно данного раствора.

Очевидно, что для каждого вещества в растворе своей соли существует и такая концентрация раствора  $c_0$ , при которой двойной электрический слой не возникает. Она называется *концентрацией нулевого заряда*.

В рассмотренном примере ( $\text{Zn}$  в растворе  $\text{ZnSO}_4$ ) электрод и раствор обмениваются положительными ионами металла (катионами). В других комбинациях электродов с растворами может происходить и обмен анионами (см. ниже табл. 17). Оба эти случая принципиально не отличаются друг от друга.

Из сказанного ясно, что электродный потенциал зависит от концентрации раствора. Если выбрать концентрацию ионов в

растворе, участвующих в обмене, всегда одной и той же, то электродный потенциал будет зависеть только от вещества электрода и будет характеризовать его способность посылать ионы в раствор. Для этого можно выбирать растворы нормальной концентрации, т.е. содержащие 1 кмоль ионов в 1 м<sup>3</sup> раствора (или, что то же, 1 моль в 1 л). Потенциал равновесия в таком растворе называют *абсолютным нормальным электродным потенциалом*. Зная абсолютный нормальный потенциал какого-либо электрода, можно вычислить его потенциал относительно раствора любой концентрации.

Чтобы найти зависимость электродного потенциала от концентрации раствора, представим себе два раствора одного и того же вещества, но с разной концентрацией, разделенных полупроницаемой перегородкой (рис. 331). Пусть растворы содержат катионы металла  $Me^{Z+}$  ( $Z$  — кратность заряда ионов) и какие-либо анионы. Будем считать, что перегородка свободно пропускает ионы  $Me^{Z+}$ , но совершенно не пропускает анионы. Положим, далее, что концентрация ионов  $Me^{Z+}$  в одном из растворов равна концентрации нулевого заряда  $c_0$  металла, а в другом растворе имеет произвольное значение  $c$ . Так как потоки ионов  $Me^{Z+}$  через перегородку из обоих растворов различны, то при равновесии между растворами появится разность потенциалов  $\varphi_0 - \varphi$ . Но раствор с концентрацией  $c_0$ , по определению, обладает такой же способностью посылать ионы  $Me^{Z+}$ , как и металлический электрод. Поэтому можно считать, что разность  $\varphi_0 - \varphi$  равна электродному потенциалу  $V$  рассматриваемого металла в растворе с концентрацией  $c$ .

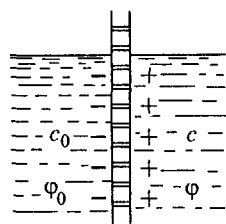


Рис. 331. Два раствора с различной концентрацией, разделенные полупроницаемой перегородкой. Концентрация пропускаемых ионов  $c < c_0$

С другой стороны, частицы растворенного вещества ведут себя подобно атомам газа. Поэтому, согласно закону Больцмана, имеем

$$c/c_0 = \exp[-Ze(\varphi - \varphi_0)/kT].$$

Здесь  $Ze(\varphi - \varphi_0) = -ZeV$  есть приращение потенциальной энергии иона  $Me^{Z+}$  при переходе из раствора с концентрацией  $c_0$  в раствор с концентрацией  $c$ . Отсюда находим

$$V = (kT/Ze)(\ln c - \ln c_0).$$

В этом соотношении второе слагаемое зависит только от природы металла. Обозначая его через  $V_N$ , получаем окончательно

$$V = V_N + (kT/Ze) \ln c. \quad (194.1)$$

В этих формулах концентрации  $c$  и  $c_0$  можно выражать в любых (но одинаковых) единицах. Если концентрации выражать числом молей ионов металла в литре раствора (молярно-объемная концентрация), то в растворе с нормальной концентрацией ( $c = 1$ )  $V = V_N$ , а следовательно,  $V_N$  есть абсолютный нормальный электродный потенциал. Формула (194.1) была впервые получена Нернстом.

Абсолютные электродные потенциалы определить из опыта очень трудно. А именно, чтобы присоединить к металлу и электролиту вольтметр, мы должны ввести в электролит второй электрод, а этот последний приобретет в свою очередь некоторый электродный потенциал. Поэтому мы измерим лишь разность потенциалов  $V - V'$ , где  $V'$  — электродный потенциал второго электрода. Однако для целей практики как раз и нужно знать только разность потенциалов двух каких-либо электродов. Но эта разность не зависит от того, относительно какого тела измерены потенциалы каждого из электродов. Поэтому при измерении электродных потенциалов условились применять в качестве второго электрода определенный стандартный электрод, отличающийся постоянством своих свойств. Обычно используют водородный электрод, состоящий из платины, насыщенной водородом и находящейся в растворе, содержащем ионы водорода (например, в растворе серной кислоты) с определенной концентрацией. Для таких измерений разработана специальная методика.

Электродный потенциал вещества в водном растворе его соли с нормальной концентрацией ионов, измеренный относительно водородного электрода, называют *нормальным электродным потенциалом*. Значения нормальных электродных потенциалов для некоторых веществ при комнатной температуре приведены в табл. 17. В ней указаны также ионы, участвующие в обмене между электродом и раствором.

Таблица 17

Электрод		Потенциал, В	Электрод		Потенциал, В
Li	Li <sup>+</sup>	-3,0	H <sub>2</sub>		0
Na	Na <sup>+</sup>	-2,7	Cu	Cu <sup>2+</sup>	+0,34
Mg	Mg <sup>2+</sup>	-2,4	Ag	Ag <sup>+</sup>	+0,80
Al	Al <sup>3+</sup>	-1,7	Hg	Hg <sup>2+</sup>	+0,85
Zn	Zn <sup>2+</sup>	-0,76	Br <sub>2</sub>	Br <sup>-</sup>	+1,0
Cd	Cd <sup>2+</sup>	-0,40	Cl <sub>2</sub>	Cl <sup>-</sup>	+1,3
Pb	Pb <sup>2+</sup>	-0,13	F <sub>2</sub>	F <sup>-</sup>	+2,6

Формула Нернста (194.1) является приближенной. При ее получении мы предполагали, что при переходе иона между двумя растворами его потенциальная энергия изменяется только вследствие скачка потенциала в двойном электрическом слое. Однако между ионами в каждом из растворов существует электростатическое взаимодействие. Поэтому потенциальная энергия ионов в растворе зависит от среднего расстояния между ними, т.е. от концентрации раствора. При переходе иона из одного раствора в другой его потенциальная энергия изменяется не только вследствие скачка потенциала на границе, но еще и из-за изменения концентрации ионов. Это обстоятельство не учитывается формулой Нернста, и поэтому она справедлива лишь для очень разбавленных растворов.

В электрохимии взаимодействие между ионами формально учитывают при помощи понятия *активности* ионов. В частности, в формулу Нернста вводят поправочный коэффициент, а именно вместо концентрации с пишут  $fc$ . Множитель  $f$  называется *коэффициентом активности ионов*, а произведение  $fc$  — *активностью ионов* в данном растворе. Значение  $f$  само зависит от концентрации и должно быть определено из дополнительных данных.

Таким образом, более точная запись формулы Нернста имеет вид

$$V = V_0 + (kT/Ze) \ln a, \quad (194\ 2)$$

где  $a = fc$  — активность ионов, а  $V_0$  — потенциал электрода относительно раствора с активностью ионов, равной единице

Потенциалы  $V_0$ , измеренные относительно водородного электрода, называются *стандартными электродными потенциалами* и приводятся во всех руководствах по электрохимии.

## § 195. Химические источники тока

Составляя электрическую цепь из двух (или нескольких) проводников 1-го рода (электродов) и электролитов, мы получаем гальванические элементы, или, иначе, химические источники тока. В таких устройствах сторонние силы (ср. § 64) возникают в результате химических реакций на электродах, а энергия, освобождаемая в реакциях, превращается в работу тока.

**Электродвижущая сила.** ЭДС можно просто вычислить только для обратимых источников тока. Именно для таких источников при отборе бесконечно слабого тока (квазистатический режим) работа тока равна максимальной работе химических реакций (ср. § 55).

Примером обратимого источника может служить элемент, показанный на рис. 332 (элемент Даниэля–Якоби). Он имеет цинковый электрод, погруженный в раствор цинкового купороса  $ZnSO_4$ , и медный электрод в растворе медного купороса  $CuSO_4$ . Оба раствора отделены друг от друга пористым стаканом, который не препятствует движению ионов, но предохраняет растворы от быстрого перемешивания. Положительным электродом является медь, отрицательным — цинк.

Если замкнуть электроды элемента, то электроны с цинка будут переходить по внешней цепи на медь и цинк станет менее отрицательным, чем нужно для электрохимического равно-

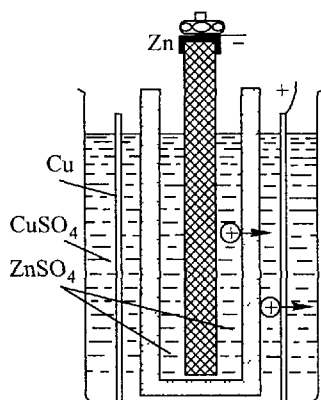
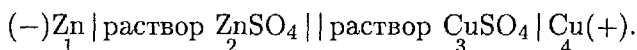


Рис. 332. Элемент Даниэля-Якоби

весия. Вследствие этого ионы  $Zn^{2+}$  будут входить в раствор и двигаться от цинка. С другой стороны, электроны, приходящие на медный электрод, будут уменьшать его положительный потенциал, и поэтому ионы  $Cu^{2+}$  из раствора будут выделяться на медном электроде. Таким образом, в замкнутом элементе положительные ионы движутся от катода к аноду (противоположно движению ионов при электролизе), а отрицательные ионы — в обратном направлении. Если же присоединить элемент к внешнему источнику тока так, чтобы медный электрод был соединен с положительным полюсом источника, а цинк — с отрицательным, то внутри элемента будет происходить электролиз и положительные ионы будут двигаться от меди к цинку. На цинковом электроде будет выделяться цинк, а медный электрод будет растворяться, т.е. процессы будут обратными по сравнению с первым случаем. В действительности этот элемент не является точно обратимым, так как оба раствора постепенно перемешиваются.

Примером необратимого элемента является элемент Вольты (цинк и медь в растворе серной кислоты).

ЭДС, т.е. разность потенциалов между электродами разомкнутого элемента, есть сумма скачков потенциала на границах веществ, его составляющих. Так, для медно-цинкового элемента с двумя жидкостями (рис. 332) мы имеем цепь:



Если  $\varphi_{21} = \varphi_2 - \varphi_1$  есть разность потенциалов между веществами 2 и 1,  $\varphi_{32} = \varphi_3 - \varphi_2$  и  $\varphi_{43} = \varphi_4 - \varphi_3$ , то ЭДС всего элемента равна

$$\mathcal{E} = \varphi_{21} + \varphi_{32} + \varphi_{43}.$$

Но  $\varphi_{21} = -V(Zn)$ , а  $\varphi_{43} = V(Cu)$ , где  $V$  — абсолютные электродные потенциалы. Поэтому, пренебрегая малым скачком потенциала  $\varphi_{32}$  на границе двух растворов, имеем

$$\mathcal{E} = V(Cu) - V(Zn).$$

Так как сюда входит только разность потенциалов, то под  $V$  можно подразумевать и потенциалы, измеренные с водородным электродом (ср. § 194). Если концентрация обоих растворов нормальная, то, согласно предыдущей таблице, получаем

$$\mathcal{E} = 0,34 - (-0,76) = 1,10 \text{ В.}$$

Отметим, что для измерения этой разности потенциалов мы должны включить в цепь соединительные провода, ведущие к вольтметру. Но на границе двух различных металлов тоже возникают скачки потенциала (гл. XIX). Поэтому, если оба провода сделаны, например, из меди, то появится еще скачок потенциала



на границе  $Zn|Cu$ . Этот скачок потенциала мы не включаем в ЭДС, хотя он и может давать вклад в показания вольтметра.

В § 67 мы видели, что ЭДС гальванического элемента можно выразить через максимальную работу химических реакций, рассчитанную на единицу заряда. Конечно, оба способа расчета ЭДС дают один и тот же результат. Положим для приближенной оценки, что максимальная работа равна полной энергии, освобождаемой при химических реакциях. Тогда

$$\mathcal{E} \approx p_1 K_1 + p_2 K_2. \quad (195.1)$$

Здесь  $p_1$  и  $p_2$  — тепловые эффекты реакции на обоих электродах (рассчитанные на 1 кг вещества электродов), а  $K_1$  и  $K_2$  — электрохимические эквиваленты вещества электродов. Представим это выражение в несколько ином виде. Пусть  $Q_1$  и  $Q_2$  — тепловые эффекты реакций на 1 моль. Тогда  $p_1 = Q_1/M_1$ ,  $p_2 = Q_2/M_2$  ( $M_1$  и  $M_2$  — атомные массы материалов электродов). Далее, в соответствии с § 189,  $K_1 = M_1/Z_1 F$ ,  $K_2 = M_2/Z_2 F$  ( $Z_1$  и  $Z_2$  — валентности,  $F$  — постоянная Фарадея). Поэтому

$$\mathcal{E} \approx \frac{1}{F} \left( \frac{Q_1}{Z_1} + \frac{Q_2}{Z_2} \right)$$

Согласно термохимическим измерениям при образовании  $ZnSO_4$  выделяется количество теплоты  $Q_1 = 4,55 \cdot 10^8$  Дж на 1 моль цинка, а выделение меди из раствора сопровождается поглощением тепла  $Q_2 = -2,33 \cdot 10^8$  Дж на 1 моль меди. Валентности цинка и меди равны  $Z_1 = Z_2 = 2$ . Поэтому

$$\mathcal{E} \approx \frac{(4,55 - 2,33) \cdot 10^8}{2 \cdot 9,65 \cdot 10^7} = 1,15 \text{ В},$$

что близко к величине, рассчитанной по электродным потенциалам, и к значению, наблюдаемому на опыте.

**Поляризация электродов.** Приведенные выше значения электродных потенциалов относятся к электрохимическому равновесию, т.е. к случаю отсутствия тока. При замыкании элемента химический состав электродов может изменяться вследствие выделения на них веществ электролита. Кроме того, может изменяться и концентрация электролита у электродов. Поэтому при наличии тока электродные потенциалы, а значит, и ЭДС всего элемента могут отличаться от их равновесных значений.

Так, если замкнуть простой элемент Вольты на внешнюю цепь, то сила тока в цепи будет уменьшаться с течением времени. Причина этого явления заключается в том, что при работе элемента положительные ионы водорода движутся внутри элемента от цинка к меди и выделяются на медном электроде. Выделяющийся водород, подобно металлам, обладает способностью посылать свои ионы обратно в раствор, отчего возникает дополнительная ЭДС, направленная противоположно ЭДС элемента. Можно сказать, что если до замыкания элемента мы имеем электроды из цинка и меди, то после длительной его работы электродами являются цинк и водород. Но электродный потенциал водорода на 0,34 В ниже потенциала меди (см. табл. 17),

поэтому ЭДС элемента по мере его работы снижается от начального значения около 1,1 В приблизительно до 0,8 В.

Изменение электродных потенциалов при наличии тока называется *поляризацией электродов*.

Вредное влияние поляризации можно предотвратить, подбирая должным образом состав электродов и электролитов. Неполяризующиеся электроды мы имеем в рассмотренном выше элементе, в котором положительный электрод из меди находится в растворе  $\text{CuSO}_4$ . На медном электроде происходит выделение той же меди, и поляризация не возникает. Цинковый же электрод (находящийся в растворе  $\text{ZnSO}_4$ ) при работе элемента постепенно растворяется, и его состав также не меняется.

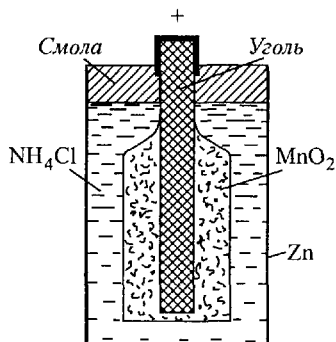
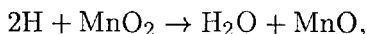


Рис 333. Гальванический элемент с химической деполяризацией

Если поляризация происходит вследствие выделения водорода на положительном электроде, то ее можно устранить, применяя электроды, являющиеся сильными окислителями (*химическая деполяризация*). Широко распространенный элемент с химической деполяризацией показан на рис. 333. Его отрицательным электродом является цинк, а положительный электрод состоит из угольного стержня, окруженного спрессованной смесью перекиси марганца  $\text{MnO}_2$  с графитом

(для увеличения электрической проводимости). Электролитом служит паста, содержащая водный раствор хлористого аммония  $\text{NH}_4\text{Cl}$ . ЭДС такого элемента несколько меньше 1,5 В. Перекись марганца является сильным окислителем и поэтому одновременно служит деполяризатором. Выделяющийся водород вступает в реакцию, в результате которой образуются молекулы воды:



а водород в свободном состоянии не выделяется.

**Топливные элементы.** В гальванических элементах энергия, выделяемая в химических реакциях, непосредственно превращается в энергию электрического тока. Этот процесс обладает гораздо большим коэффициентом полезного действия, нежели применяемый в обычных электростанциях, где теплота реакции (горение топлива) сначала превращается (с большими потерями) в механическую работу двигателя, а уже работа двигателя преобразуется в электрическую энергию.

Однако стоимость электрической энергии, получаемой от гальванических элементов, значительно выше стоимости энергии от электростанций,

так как в элементах расходуется не дешевое топливо (например, уголь), а дорогостоящие вещества (например, цинк).

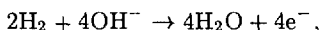
Неоднократно предпринимались попытки использовать в гальванических элементах реакцию горения угля  $2C + O_2 = 2CO$ . Эта реакция сопровождается выделением тепла  $Q = 3,87 \cdot 10^8$  Дж/кмоль и может дать ЭДС (для углерода  $Z = 4$ )

$$\mathcal{E} \approx \frac{Q}{ZF} = \frac{3,87 \cdot 10^8}{9,65 \cdot 10^7 \cdot 4} \approx 1 \text{ В}$$

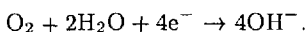
Такие попытки не привели к удовлетворительным результатам, так как уголь при обычных температурах обладает малой химической активностью. Поэтому приходится строить элементы, работающие при высоких температурах (300–1000 °С) и содержащие в качестве электролита различные расплавленные соли. На поддержание же высокой температуры нужно затрачивать большую энергию, и такие элементы оказываются в конечном счете невыгодными.

Однако, используя другие виды топлива, это можно сделать при нормальной (или слегка повышенной) температуре. Устройства, в которых энергия химической реакции между топливом и окислителем непосредственно превращается в электрическую энергию, получили название *топливных элементов*. Они отличаются от гальванических элементов тем, что реагирующие вещества хранятся не внутри устройства, а подаются в него извне во время работы.

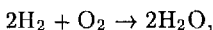
Примером электрохимического генератора может служить водородно-кислородный генератор. Он имеет пористые угольные или никелевые электроды, находящиеся в растворе КОН, через которые вводятся газообразные водород и кислород. На отрицательном (водородном) электроде протекает реакция



а на положительном (кислородном) электроде — реакция



Суммарная реакция есть



т.е. реакция сжигания водорода. ЭДС одного элемента такого генератора равна 1,23 В.

Электрохимические генераторы как безмашинные устройства с высоким КПД представляют большой принципиальный интерес. Однако они находятся еще в стадии разработки и применяются пока для специальных целей.

## § 196. Напряжение разложения электролита

Поляризация электродов происходит не только в гальванических элементах, но и при всяком электролизе, если выделяющиеся вещества отличны от материала электродов.

Поляризацию при электролизе можно наблюдать при разложении серной кислоты. Если через электролитическую ван-

ну, содержащую раствор  $H_2SO_4$  и два платиновых электрода (рис. 334 а), пропускать в течение некоторого времени ток, то на электроде, соединенном с отрицательным полюсом источника, будет осаждаться водород, а на другом электроде — кислород. По мере накопления этих газов их парциальное давление

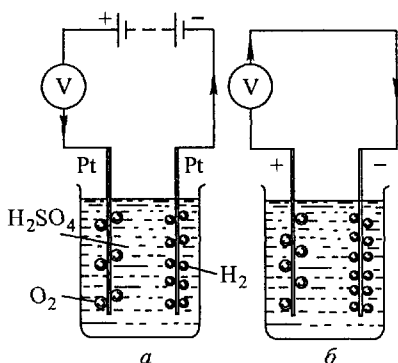


Рис. 334. Поляризация при электролизе

будет возрастать, и когда оно делается равным атмосферному давлению, начнется выделение газов в виде пузырьков. Если теперь отключить источник тока, то оба электрода окажутся покрытыми газами, и мы получим гальванический элемент, у которого один из электродов состоит из водорода, а другой — из кислорода. ЭДС такого элемента равна 1,23 В. Если теперь замкнуть электроды, то в цепи появится ток, на-

правление которого будет противоположно направлению тока при электролизе (рис. 334 б), а водород и кислород будут переходить обратно в раствор в виде ионов. Когда израсходуется накопленный запас обоих газов, ЭДС снова станет равной нулю и ток в цепи прекратится.

ЭДС поляризации влияет на процесс электролиза. Положим, например, что мы производим разложение раствора соляной кислоты  $HCl$  и пользуемся платиновыми электродами. Тогда на электродах будут выделяться газы  $H_2$  и  $Cl_2$  и появится соответствующая им ЭДС поляризации. Если приложенное напряжение невелико, то, когда ЭДС поляризации станет равной внешнему напряжению, ток в цепи прекратится и электролиз приостановится. Если постепенно повышать напряжение, то будет увеличиваться и парциальное давление газов на электродах, а вместе с ним и ЭДС поляризации. Когда парциальное давление газов достигнет атмосферного, начнется их выделение в виде пузырьков, после чего количество газов на электродах уже не будет изменяться и ЭДС поляризации достигнет своего максимального значения. Оно равно потенциалу хлора относительно водорода; согласно табл. 17 это составит +1,3 В. После достижения этого напряжения в электролите появится ток, который будет увеличиваться с увеличением напряжения, и начнется выделение веществ на электродах.

По указанным причинам зависимость силы тока через электролит от приложенного к электродам напряжения приближи-

тельно имеет вид, изображенный на рис. 335, и выражается формулой

$$i = \frac{U - V}{r}, \quad (196.1)$$

где  $r$  — сопротивление столба электролита. Пороговое значение напряжения  $V$ , начиная с которого происходит выделение веществ на электродах, называется *напряжением разложения* электролита.

В рассмотренном примере с  $\text{HCl}$  напряжение разложения равно ЭДС поляризации. Однако в некоторых случаях напряжение разложения может превышать ЭДС поляризации. Это явление получило название перенапряжения при электролизе. Так, например, разложение раствора серной кислоты (см. рис. 334) начинается не с напряжения 1,23 В, а с напряжения 1,64 В.

Явление перенапряжения объясняется особенностями процессов нейтрализации электролитических ионов на электродах. Однако мы на этом не будем останавливаться.

Таким образом, чтобы выделить ионы определенного сорта из раствора, необходимо приложить напряжение, компенсирующее их стремление перейти обратно с электрода в раствор. Для разных ионов это напряжение неодинаково, что позволяет отделять различные вещества друг от друга. Так, например, из табл. 17 видно, что ионы меди имеют меньшее стремление перейти в раствор, нежели ионы цинка. Поэтому, если в растворе имеются и ионы меди, и ионы цинка, то выделение меди начнется при меньшем напряжении. Чтобы выделить цинк после удаления меди из раствора, необходимо дополнительно увеличить напряжение на электролитической ванне. Этим обстоятельством пользуются при электролитической очистке металлов.

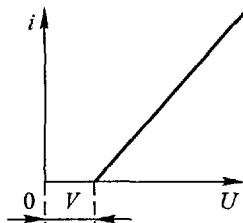
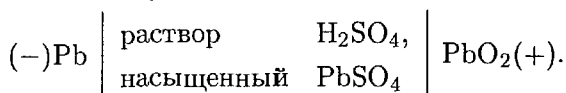


Рис. 335. Зависимость силы тока через электролитическую ванну от напряжения между электродами (схематически)

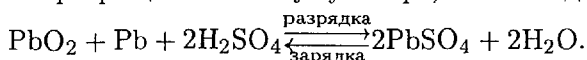
## § 197. Аккумуляторы

Электролитическая поляризация получила важное техническое применение в аккумуляторах, или, иначе, вторичных элементах. Аккумуляторы представляют собой гальванические элементы, у которых после их разрядки возможен обратный процесс зарядки с преобразованием электрической энергии в химическую, т.е. аккумуляторы пропускают в течение определенного времени ток от постороннего источника (зарядка аккумулятора).

Наибольшее распространение получил свинцовый, или кислотный, аккумулятор. В простейшем виде он состоит из двух свинцовых электродов, находящихся в растворе серной кислоты. При погружении электродов в кислоту на них образуется сернокислый свинец  $PbSO_4$  и раствор насыщается той же солью. При зарядке аккумулятора на его электроде, соединенном с положительным полюсом источника, свинец окисляется в перекись  $PbO_2$ , а второй электрод превращается в чистый свинец, в результате чего получается элемент



При разрядке аккумулятора его положительный полюс постепенно раскисляется и на нем происходит вновь образование  $PbSO_4$ , который появляется также и на отрицательном электроде. Суммарная реакция, выражающая конечные продукты химических превращений в аккумуляторе, имеет вид



При зарядке аккумулятора появляются дополнительные молекулы кислоты, поэтому концентрация кислоты увеличивается. При разрядке концентрация кислоты уменьшается.

ЭДС свинцового аккумулятора в самом конце зарядки достигает 2,7 В. При разрядке она уменьшается сначала быстро, до значения около 2,2 В, а затем очень медленно, приблизительно до 1,85 В. Дальнейшую разрядку аккумулятора производить нельзя, так как при этом его электроды покрываются толстым слоем трудно растворимого  $PbSO_4$  и аккумулятор портится.

Аккумуляторы характеризуются, помимо ЭДС, емкостью, т.е. величиной заряда, отдаваемого при разрядке. Она измеряется в ампер-часах и, очевидно, тем больше, чем больше поверхность электродов.

Для увеличения емкости электроды аккумуляторов отливают в виде пластин с многочисленными ячейками наподобие пчелиных сот и в ячейки запрессовывают окислы свинца. Затем вновь изготовленные аккумуляторы подвергают нескольким зарядкам и разрядкам (формовка аккумуляторов), отчего поверхность электродов разрыхляется. После зарядки отрицательный электрод восстанавливается до металлического свинца, а положительный электрод окисляется до  $PbO_2$ .

Наряду со свинцовыми аккумуляторами в настоящее время применяют еще железо-никелевые, или щелочные, аккумуляторы, которые отличаются меньшим весом при равной емкости. Они имеют один электрод из железа, а другой — из никеля, а электролитом служит раствор едкого калия КОН. В заряженном

состоянии анодом у этих аккумуляторов служит гидрат окиси никеля  $\text{Ni}(\text{OH})_3$ , а катодом — железо. Их ЭДС — около 1,3 В. Существуют и другие типы аккумуляторов.

## Г Л А В А XIX

### ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В КОНТАКТАХ

При соприкосновении двух проводников электроны вследствие теплового движения переходят из одного проводника в другой. Если соприкасающиеся проводники различны или если их температура в разных точках неодинакова, то оба потока диффузии электронов неодинаковы и один из проводников заряжается положительно, а другой — отрицательно. Поэтому внутри проводников и во внешнем пространстве между проводниками появляется электрическое поле. В состоянии равновесия внутри проводников устанавливается такое поле, которое как раз компенсирует разность потоков диффузии. Существованием этих электрических полей обусловлен ряд электрических явлений в контактах, которые рассматриваются в настоящей главе

#### § 198. Контактная разность потенциалов

Рассмотрим два различных проводника 1 и 2, находящихся в электрическом контакте (рис. 336). Температуру проводников будем считать сначала одинаковой. Согласно сказанному выше на обоих проводниках появляются электрические заряды, а между свободными их концами возникает электрическое поле. Разность потенциалов между любыми двумя точками  $a$  и  $b$  (рис. 336), находящимися вне проводников, но расположенными в непосредственной близости от их поверхностей, называется *внешней контактной разностью потенциалов* или просто *контактной разностью потенциалов*. В дальнейшем мы будем ее обозначать через  $U_{12} \equiv U_1 - U_2$ , где  $U_1$  — потенциал вблизи проводника 1 (в точке  $a$ ), а  $U_2$  — вблизи проводника 2 (в точке  $b$ ). Так как в отсутствие тока поверхность каждого проводника является эквипотенциальной, то эта разность потенциалов, конечно, не зависит от положения

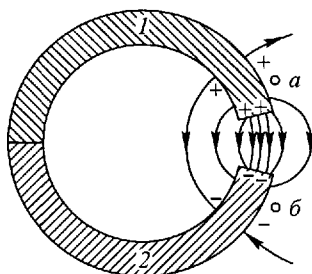


Рис 336 При соприкосновении двух различных металлов во внешнем пространстве появляется электрическое поле, а на поверхности металлов возникают заряды

точек  $a$  и  $b$ , пока одна из них находится у поверхности проводника 1, а другая — у поверхности проводника 2.

Обратимся теперь к электрическому полю внутри контактирующих проводников. Если температура в каждой точке проводника одинакова, то по закону Ома плотность тока  $j$  внутри однородного проводника есть  $j = \lambda E$ . Так как наша цепь разомкнута ( $j = 0$ ), то и электрическое поле в любой точке в толще каждого проводника равно нулю, а потенциал внутри него постоянен. Отсюда следует, что электрическое поле внутри проводников может существовать только в тонких пограничных слоях на границах проводник 1—проводник 2 и проводник 1 (или 2)—вакуум. Потенциал же на этих границах должен испытывать скачкообразное изменение. Разность потенциалов  $U_{12}^i \equiv \varphi_1 - \varphi_2$ , где  $\varphi_1$  — потенциал внутри проводника 1, а  $\varphi_2$  — внутри проводника 2, мы будем называть *внутренней контактной разностью потенциалов* или *контактным скачком потенциала*.

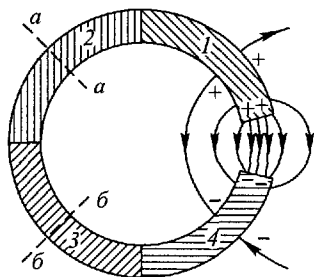


Рис 337. При соединении нескольких проводников (1, 2, 3, 4) электрическое поле между свободными концами цепи определяется только крайними проводниками (1 и 4)

Рассмотрим теперь цепь, состоящую не из двух, а из нескольких металлов 1, 2, 3, 4 (рис. 337). Если бы мы ее разрезали по  $aa$ , то между свободными концами металлов 1 и 2 была бы контактная разность

$$U_{12} = U_1 - U_2.$$

Аналогично между разрезами  $aa$  и  $bb$  была бы разность потенциалов

$$U_{23} = U_2 - U_3,$$

а у последней пары металлов

$$U_{34} = U_3 - U_4.$$

Так как в плоскостях  $aa$ ,  $bb$  и т.д. соприкасаются одинаковые металлы, то дополнительные разности потенциалов здесь не возникают; поэтому контактная разность всей цепи равна

$$\begin{aligned} U_{12} + U_{23} + U_{34} &= \\ &= (U_1 - U_2) + (U_2 - U_3) + (U_3 - U_4) = U_1 - U_4 = U_{14}, \end{aligned}$$

т.е. она такая же, как в отсутствие промежуточных металлов 2 и 3. Контактная разность определяется только крайними металлами цепи.

Для измерения контактной разности потенциалов употребляют компенсационные схемы. Одна из них показана на рис. 338. Две небольшие пластинки из исследуемых веществ располагают параллельно друг другу, одну из пластинок закрепляют непо-



движно, а другую с помощью простого механического устройства заставляют колебаться в направлении нормали с небольшой амплитудой (доли миллиметра) и частотой в несколько десятков герц. Если контактная разность равна  $U$ , а расстояние между пластинами есть  $d$ , то напряженность поля между пластинами равна  $U/d$ , а, следовательно, на каждой единице внутренней поверхности пластин имеется заряд  $\epsilon_0 U/d$ . При периодическом изменении  $d$  заряд пластин тоже изменяется периодически. Поэтому во внешней цепи появляется переменный ток, а на нагрузочном сопротивлении  $r$  развивается переменное напряжение. Последнее можно усилить усилителем  $Y$  и зарегистрировать ос-

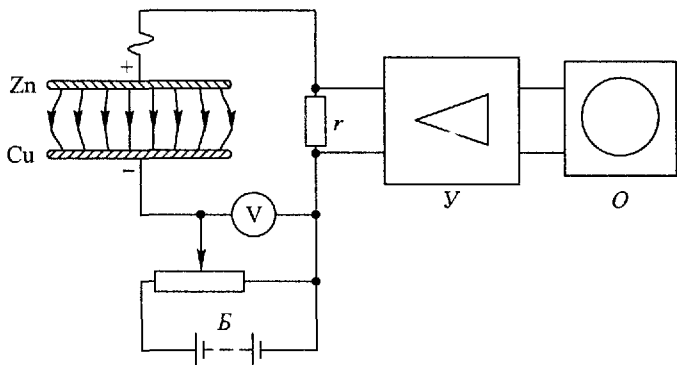


Рис 338 Измерение контактной разности потенциалов

циллографом  $O$ . Если теперь приложить к пластинам внешнюю разность потенциалов от батареи  $B$ , обратную по знаку контактной разности, и изменять ее с помощью делителя напряжения, то можно добиться, чтобы ток во внешней цепи обратился в нуль. В этом случае приложенное внешнее напряжение, очевидно, как раз равно контактной разности, которая определяется непосредственно по показанию вольтметра  $V$ .

Контактная разность потенциалов непосредственно связана с термоэлектронными работами выхода  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  контактирующих тел (см. ниже), а именно

$$eU_{12} = \Phi_2 - \Phi_1. \quad (198.1)$$

Это соотношение справедливо как для металлов, так и для полупроводников. Поэтому, если работа выхода одного из проводников уже известна (например, из опытов с термоэлектронной эмиссией), то, измеряя  $U_{12}$ , можно найти работу выхода другого проводника. Этот способ широко используют для определения работы выхода веществ с низкой температурой плавления, для которых непосредственные измерения термоэлектронной эмиссии невозможны.

Контактная разность потенциалов, так же как работа выхода электронов, сильно изменяется даже при ничтожных загрязнениях поверхностей, их окислении и т.п. Поэтому для получения верных значений контактной разности исследуемые вещества необходимо тщательно очищать и измерения вести в вакууме.

Происхождение контактной разности потенциалов и связь ее с работами выхода становятся ясными при рассмотрении энергетических диаграмм обоих проводников. Особенно прост случай двух металлов, находящихся при температуре абсолютного нуля. Их энергетические диаграммы до соприкосновения изображены на рис. 339 а. На нем  $W_0$ , как и раньше, есть

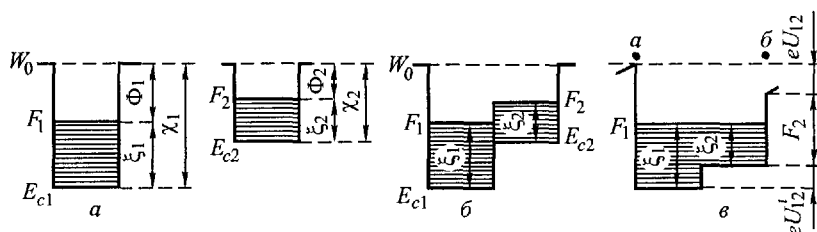


Рис. 339. Энергетическая диаграмма двух металлов: а — контакта нет; б — контакт есть, но нет равновесия; в — равновесие

энергия покоящегося электрона в вакууме. Так как оба металла не заряжены, то электрического поля между ними нет и  $W_0$  постоянно;  $E_{c1}$  и  $E_{c2}$  — энергии дна зоны проводимости;  $\chi_1 = W_0 - E_{c1}$  и  $\chi_2 = W_0 - E_{c2}$  — глубина потенциальных ям, она получила название *электронного сродства* данного вещества;  $F_1$  и  $F_2$  — уровни Ферми в каждом из металлов. Все энергии здесь можно отсчитывать от любого постоянного, но одинакового для обоих металлов уровня. Разность  $F - E_c = \xi$  называется *химическим потенциалом* электронов. В металлах при  $T = 0$  он равен максимальной кинетической энергии электронов (ср. § 155). На рис. 339 показаны также термоэлектронные работы выхода обоих металлов:

$$\Phi_1 = W_0 - F_1 = \chi_1 - \xi_1, \quad \Phi_2 = W_0 - F_2 = \chi_2 - \xi_2$$

(ср. формулу (158.2)).

После соприкосновения металлов потенциальный барьер, создававшийся в вакуумном промежутке, исчезает и распределение энергий должно было бы иметь вид, показанный на рис. 339 б. Однако при этом электроны в обоих металлах не будут находиться в равновесии друг с другом, так как электроны из металла 2 начнут «переливаться» в металл 1; последний будет заряжаться отрицательно, а металл 2 — положительно. Поэтому в металле 1 потенциальная энергия электронов, т.е. дно зоны проводимости, будет повышаться, а в металле 2 — понижаться. Так как величины  $\chi$  и  $\xi$  характеризуют вещества и не зависят от того, заряжено ли тело или не заряжено, то и уровни энергии  $F$  и  $W_0$  для металла 2 будут понижаться относительно их значений для металла 1. Электрический ток прекратится тогда, когда уровни Ферми  $F_1$  и  $F_2$  в обоих металлах окажутся равными друг другу (рис. 339 в). Это заключение, имеющее простой наглядный смысл

для двух металлов при  $T = 0$ , справедливо и в общем случае любой температуры как для металлов, так и для полупроводников. При равновесии проводников, способных обмениваться электронами, и находящихся при одинаковой температуре, уровни Ферми в этих проводниках одинаковы.

При установившемся электронном равновесии края обоих потенциальных ям уже не находятся на одинаковом уровне, а значит, потенциальная энергия электрона  $-eU_1$  у поверхности металла 1 (точка  $a$ ) не равна  $-eU_2$  у поверхности металла 2 (точка  $b$ ) (рис. 339 в). Их разность есть

$$-eU_1 - (-eU_2) = (\chi_1 - \xi_1) - (\chi_2 - \xi_2) = \Phi_1 - \Phi_2.$$

Так как  $(U_1 - U_2)$  есть контактная разность потенциалов  $U_{12}$ , то отсюда получается формула (198.1).

Из рис. 339 в видно также, что в равновесии днища потенциальных ям  $E_{c1}$  и  $E_{c2}$  находятся на разных уровнях. Это показывает, что при переходе через контактный слой внутри металлов потенциальная энергия электрона  $-e\varphi$  тоже изменяется. Контактный скачок потенциала  $U_{12}^e$  выражается так:

$$eU_{12}^e \equiv e(\varphi_1 - \varphi_2) = \xi_1 - \xi_2. \quad (198.2)$$

Он определяется разностью химических потенциалов электронов в контактирующих телах.

## § 199. Термоэлектричество

В § 198 мы видели, что на границе соприкосновения двух различных проводников имеются контактные скачки потенциала  $U^e$ , которые существуют и при разомкнутой цепи. Это значит, что в приконтактном слое возникает электродвижущая сила. Сторонние силы (§ 64) появляются в данном случае в результате давления электронного газа, которое различно в разных проводниках. Однако если температура всей цепи одинакова, то результирующая ЭДС равна нулю.

Рассмотрим в качестве примера цепь, показанную на рис. 340 и состоящую из двух разных проводников 1 и 2. Будем считать для простоты, что соединительные провода, ведущие к вольтметру, сделаны также из проводника 1, так что скачки потенциала в контактах  $A$  и  $D$  не возникают. Тогда распределение потенциала в цепи будет иметь вид, показанный на рис. 341 а.

Скачки потенциала в контактах  $B$  и  $C$

равны по модулю, но противоположны по знаку, и поэтому вольтметр, присоединенный к концам цепи  $A$  и  $D$ , не покажет напряжения. Это справедливо для любого числа проводников:

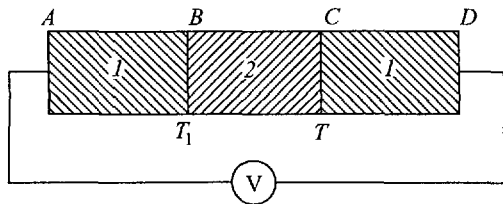


Рис. 340. Термоэлектрическая цепь

электродвижущая сила цепи, составленной из какого угодно числа электронных проводников (проводников 1-го рода), находящихся при *одинаковой температуре*, равна нулю.

Однако если температура контактов неодинакова, то полная ЭДС цепи уже не равна нулю, и при замыкании цепи в ней появляется ток. Это явление получило название *термоэлектричества*, а возникающая ЭДС называется *термоэлектродвижущей силой* (термо-ЭДС).

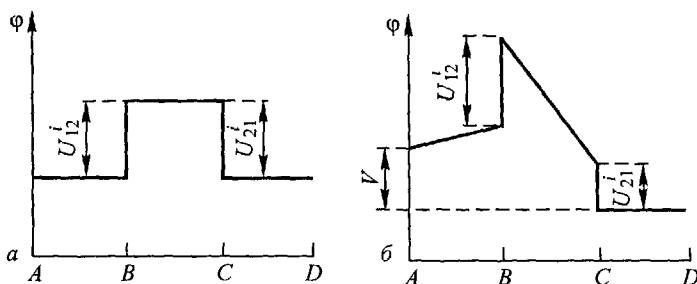


Рис. 341. Распределение потенциала в цепи, изображенной на рис. 340, при  $T_1 = T$  (а) и при  $T_1 > T$  (б)

Чтобы пояснить причины возникновения термо-ЭДС вернемся опять к простой цепи из двух проводников (см. рис. 340) и положим, что температура  $T_1$  контакта  $B$  больше температуры  $T$  контакта  $C$ . Будем также считать для простоты, что температура разомкнутых концов цепи  $A$  и  $D$  одинакова и тоже равна  $T$ . Так как тепловые скорости электронов вблизи контакта  $B$  больше, чем вблизи контакта  $C$ , то в проводнике 2 возникнет поток диффузии электронов, направленный от  $B$  к  $C$ . В случае полупроводников, в которых концентрация электронов увеличивается при повышении температуры, появится еще и дополнительный поток диффузии того же направления, вызванный различием концентраций электронов в горячем и холодном концах проводника. Поэтому в проводнике 2 (на его поверхности) возникнут электрические заряды и внутри проводника образуется электрическое поле такой величины, чтобы в установившемся состоянии вызываемый этим полем ток дрейфа компенсировал ток диффузии. Следовательно, при наличии в проводнике градиента температуры в нем возникает и градиент электрического потенциала. Сказанное полностью относится и к проводнику 1.

Однако термо-ЭДС обусловлена не только возникновением диффузии в объеме, но еще и контактными скачками потенциала  $U_{12}^i$  и  $U_{21}^i$ . Так как они зависят от температуры, то сумма их уже не равна нулю. Распределение потенциала в цепи при

неравенстве температур контактов показано на рис. 341 б. Напряжение  $V$ , регистрируемое вольтметром и равное термо-ЭДС, складывается из падения напряжения в объеме проводников и скачков потенциала в контактах.

Термоэлектричество было открыто Зеебеком еще в двадцатых годах прошлого века. Для его наблюдения достаточно присоединить к милливольтметру два куска медной проволоки и замкнуть их куском проволоки из другого материала, например железа. Пока температура обоих спаев одинакова, милливольтметр не обнаруживает никакой ЭДС. Но при нагревании одного из спаев в цепи появляется термо-ЭДС и стрелка милливольтметра отклоняется. Если нагретый спай охладить и затем нагреть другой спай, то знак термо-ЭДС изменится и стрелка милливольтметра отклоняется в другую сторону.

В табл. 18 приведены значения термо-ЭДС в милливольтцах для некоторых особенно употребительных пар металлов (температура холодного спая  $0^\circ\text{C}$ ).

Таблица 18

Температура горячего спая, $^\circ\text{C}$	Платина, платина +10% родия	Железо, константан (60% Cu, 40% Ni)	Медь, константан	Температура горячего спая, $^\circ\text{C}$	Платина, платина +10% родия	Железо, константан (60% Cu, 40% Ni)	Медь, константан
100	0,64	5	4	600	5,22	33	—
200	1,44	11	9	700	6,26	39	—
300	2,32	16	15	800	7,33	45	—
400	3,25	22	21	1000	9,57	—	—
500	4,22	27	—	1500	15,50	—	—

Термо-ЭДС цепи, составленной из двух различных проводников 1 и 2, при малой разности температур  $\Delta T$  между обоими спаями выражается формулой

$$\Delta \mathcal{E} = (\alpha_1 - \alpha_2) \Delta T, \quad (199.1)$$

где  $\alpha_1$  зависит от природы проводника 1, а  $\alpha_2$  — от природы проводника 2. Эти величины зависят также от температуры, и поэтому  $\Delta T$  в приведенной формуле должно быть мало. Формула (199.1) показывает, что термо-ЭДС цепи есть разность термо-ЭДС каждого из плеч цепи, и что в каждом из проводников возникает термо-ЭДС  $\Delta \mathcal{E}_i = \alpha_i \Delta T$  ( $i = 1, 2$ ). Величина

$$\alpha = d\mathcal{E}/dT \quad (199.2)$$

называется *дифференциальной термо-ЭДС* данного вещества. Она равна термо-ЭДС, развивающейся в данном проводнике при разности температур между его концами в 1 К.

При немалой разности температур обоих спаев термо-ЭДС равна

$$\mathcal{E} = \int_{T_1}^{T_2} (\alpha_1 - \alpha_2) dT, \quad (199.3)$$

где  $T_1$  — температура холодного спая, а  $T_2$  — горячего. Если в данном температурном интервале ( $T_2 - T_1$ ) величины  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  изменяются слабо, то вместо формулы (199.3) получаем

$$\mathcal{E} = (\alpha_1 - \alpha_2)(T_2 - T_1). \quad (199.4)$$

Здесь  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — средние значения дифференциальных термо-ЭДС в данном температурном интервале.

Чтобы определить не только величину, но и направление термоэлектрического тока, дифференциальной термо-ЭДС приписывают определенный знак. Величина  $\alpha$  считается положительной, если возникающий в проводнике термоток течет от горячего конца к холодному. Или, другими словами, в замкнутой цепи термоток течет в горячем спае от проводника с меньшим  $\alpha$  (алгебраически) к проводнику с большим  $\alpha$ .

В табл. 19 в качестве примера даны средние значения  $\alpha$  в микровольтах на градус кельвина в температурном интервале 0–100 °С для некоторых металлов, измеренные относительно платины.

Таблица 19

Металл	$\alpha - \alpha_{Pt}$ , мкВ/К	Металл	$\alpha - \alpha_{Pt}$ , мкВ/К
Висмут	-65,0	Серебро	+7,10
Константан	-34,4	Медь	+7,40
Никель	-16,4	Железо	+16,0
Палладий	-5,60	Сурьма	+47,0

Абсолютные значения  $\alpha$  получаются из приведенных в таблице прибавлением  $\alpha_{Pt} = -4,4$  мкВ/К<sup>1</sup>). Так, для сурьмы имеем:  $\alpha_{Sb} = +47,0 - 4,4 = 42,6 \approx 43$  мкВ/К.

Рассмотрим, например, термопару железо-константан. Дифференциальная термо-ЭДС этой цепи равна  $+16,0 - (-34,4) = +50,4$  мкВ/К. При разности температур спаев  $T_2 - T_1 = 100$  К термо-ЭДС этой пары будет  $+50,4 \cdot 100$  мкВ = 5,04 мВ. Ток в горячем спае будет течь от константана (-34,4) к железу (+16,0).

Из приведенных таблиц видно, что термо-ЭДС у металлов мала. Однако для полупроводников она намного больше и сильно зависит от содержащихся в них примесей. Для некоторых полупроводниковых соединений дифференциальная термо-ЭДС

<sup>1</sup>) Значение  $\alpha_{Pt}$  получено при  $T = 0$  °С

может достигать значений  $1000 \text{ мкВ/К}$  и даже больше. Поэтому в цепи, составленной из полупроводника и металла, термо-ЭДС цепи очень слабо зависит от рода металла и определяется практически только полупроводником.

## § 200. Эффект Пельтье

Опыт показывает, что кроме тепла Джоуля–Ленца, выделяемого током в объеме проводника, наблюдаются тепловые явления в контакте двух различных проводников, даже если эти проводники первоначально находятся при одинаковой температуре. В контакте, через который проходит ток, происходит, в зависимости от направления тока, выделение или поглощение тепла, и контакт либо нагревается, либо охлаждается. Это явление получило название *эффекта Пельтье*.

Для демонстрации эффекта Пельтье может служить опыт, изображенный на рис. 342. Здесь 1 и 2 — два стержня из различных проводников, соединенные между собой. Стержни герметически укреплены при помощи замазки внутри стеклянного баллона, снабженного горизонтальной трубкой  $T$ , в которой находится капля воды  $B$ . Стеклянный баллон может соединяться с атмосферой или отъединяться от нее при помощи крана  $K$  и служит в качестве газового термометра. При нагревании спая давление внутри баллона увеличивается и капля перемещается вправо; при охлаждении спая капля движется в обратном направлении. Для опыта удобно выбрать стержни из сурьмы ( $Sb$ ) и висмута ( $Bi$ ). При направлении тока от  $Sb$  к  $Bi$  спай нагревается.

Тепло Пельтье  $Q_{\text{П}}$ , выделенное или поглощенное в спаяе, пропорционально полному заряду  $q$ , прошедшему через спай, или произведению силы тока  $i$  на время  $t$ :

$$Q_{\text{П}} = Pq = Pit. \quad (200.1)$$

Коэффициент  $\Pi$  зависит от рода соприкасающихся проводников и от их температуры и называется *коэффициентом Пельтье*.

В дальнейшем мы будем считать тепло  $Q_{\text{П}}$  положительным, если оно выделяется в спаяе. Чтобы учесть в формуле (200.1) направление тока, мы будем обозначать там, где это потребуется,

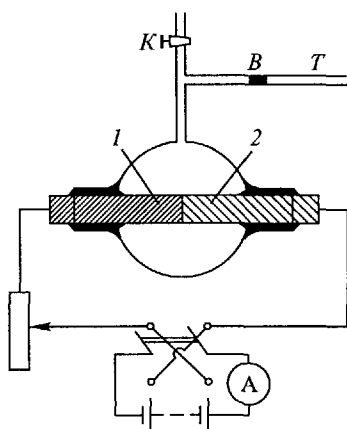


Рис 342 Наблюдение эффекта Пельтье

коэффициент Пельтье через  $\Pi_{12}$ , если ток течет от проводника 1 к проводнику 2, и через  $\Pi_{21}$ , если ток имеет противоположное направление. Так как в обоих случаях количество тепла Пельтье одинаково, но только изменяется его знак, то  $\Pi_{12} = -\Pi_{21}$ .

Отметим, что между явлением Пельтье и выделением тепла Джоуля–Ленца имеются существенные различия. Тепло Джоуля–Ленца пропорционально квадрату силы тока и не зависит от направления тока. Тепло же Пельтье пропорционально первой степени силы тока и меняет знак при перемене направления тока. Далее, тепло Джоуля–Ленца зависит от сопротивления проводника, тогда как тепло Пельтье от него не зависит.

Если в (200.1) измерить  $Q_{\Pi}$  в джоулях, а  $q$  — в кулонах, то коэффициент Пельтье  $\Pi$  будет выражен в джоулях на кулон или в вольтах. Опыт показывает, что для большинства различных пар металлов коэффициент Пельтье имеет величину порядка  $10^{-2}$  —  $10^{-3}$  В. Для полупроводников коэффициент Пельтье, так же как и термо-ЭДС, на несколько порядков больше.

В обычных условиях тепло Пельтье мало по сравнению с теплом Джоуля–Ленца. Поэтому, чтобы последнее не затухало тепло Пельтье, нужно по возможности уменьшить тепло Джоуля–Ленца, а для этого следует применять достаточно толстые проводники, обладающие малым сопротивлением.

Происхождение тепла Пельтье объясняется следующим образом. Каждый электрон при своем движении переносит не только свой заряд, но и присущую ему энергию. Поэтому при наличии электрического тока в проводнике возникает определенный поток энергии. Он существует и в том случае, когда температура во всех точках проводника одинакова и переноса энергии вследствие теплопроводности нет. Направление потока энергии совпадает с направлением движения электронов, т.е. противоположно направлению плотности тока  $\mathbf{j}$ .

При одной и той же плотности тока потоки энергии в разных проводниках различны. Поэтому энергия, приходящая к контактной плоскости в проводнике 1, не равна энергии, уходящей от контактной плоскости в проводнике 2. Разность этих энергий и есть тепло Пельтье.

Число электронов, проходящих через единичную площадку, перпендикулярную к направлению тока, в единицу времени, равно  $N = j/e$ . Энергия каждого электрона складывается из его кинетической энергии  $W_k$  и потенциальной энергии  $-e\varphi$ . Если  $\overline{W}_k$  есть средняя кинетическая энергия для рассматриваемой группы  $N$  электронов, то поток энергии равен

$$P = -\frac{j}{e} (\overline{W}_k - e\varphi). \quad (200.2)$$

Подчеркнем, что  $\overline{W}_k$  не равно просто средней кинетической энергии равновесного электронного газа, которая в классической теории есть



$(3/2)kT$ . Это объясняется тем, что в общем случае вырожденного электронного газа не все электроны могут ускоряться электрическим полем (ср. § 154). Однако явное выражение для  $\overline{W}_k$  в дальнейшем нам не понадобится.

Рассмотрим теперь два контактирующих проводника 1 и 2, находящихся при одинаковой температуре. К каждой единице поверхности контакта в проводнике 1 подводится в единицу времени энергия  $P_1$ , а отводится в проводнике 2 — энергия  $P_2$ . Значения потенциала  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  с обеих сторон контактной плоскости различны. Кроме того,  $\overline{W}_{k1}$  и  $\overline{W}_{k2}$  в обоих проводниках в общем случае не равны друг другу. Поэтому разность  $(P_1 - P_2)$  не равна нулю. Следовательно, для поддержания температуры контакта неизменной с каждой единицы его поверхности в единицу времени нужно отводить энергию  $(P_1 - P_2)$  (или подводить ее, если эта разность отрицательна). Это и означает, что выделяется (или поглощается) тепло Пельтье.

Если  $S$  есть площадь контакта, то тепло Пельтье равно

$$Q_{\text{П}} = (P_1 - P_2)St = \frac{1}{e} [(\overline{W}_{k2} - \overline{W}_{k1}) + e(\varphi_1 - \varphi_2)]it,$$

где  $i = jS$  — сила тока. Сравнивая полученное выражение с формулой (200.1), находим для коэффициента Пельтье

$$\Pi_{12} = \frac{1}{e} [(\overline{W}_{k2} - \overline{W}_{k1}) + e(\varphi_1 - \varphi_2)]. \quad (200.3)$$

Так как мы интересуемся теплом в контакте (и не рассматриваем тепло Джоуля-Ленца в объеме), то в этой формуле под  $P_1$  и  $P_2$  нужно понимать их значения у самой контактной плоскости. Поэтому  $(\varphi_1 - \varphi_2)$  есть контактный скачок потенциала  $U_{12}^i$  (§ 198).

Если электронный газ в проводниках невырожден, то ускоряться электрическим полем могут все электроны. Распределение импульсов электронов выражается законом Максвелла (§ 155); оно зависит только от температуры и поэтому одинаково в обоих проводниках. Тогда расчет показывает, что  $\overline{W}_{k1} = \overline{W}_{k2}$ , а следовательно,

$$\Pi_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) = U_{12}^i. \quad (200.3a)$$

В этом случае коэффициент Пельтье есть просто контактный скачок потенциала, а тепло Пельтье равно работе, совершаемой током вследствие перепада напряжения в контакте.

Другой крайний случай — контакт двух металлов при температуре абсолютного нуля (сильно вырожденный электронный газ). Ему соответствует энергетическая диаграмма рис. 343. Здесь все квантовые состояния в зоне проводимости с энергией, меньшей уровня Ферми  $F$ , полностью заняты электронами и ускоряться электрическим полем могут только электроны с энергией, равной  $F$ . Поэтому под  $\overline{W}_{k1}$  и  $\overline{W}_{k2}$  в формуле (200.3) следует понимать максимальные кинетические энергии электронов и положить

$$\overline{W}_{k1} = F - E_{c1} = \xi_1, \quad \overline{W}_{k2} = F - E_{c2} = \xi_2.$$

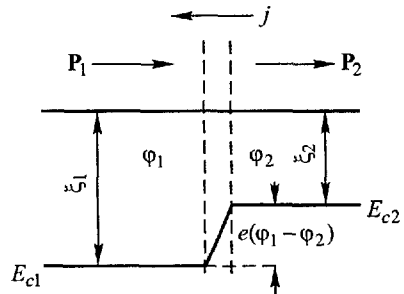


Рис. 343. К определению тепла Пельтье для двух металлов при  $T = 0$

и ускоряться электрическим полем могут только электроны с энергией, равной  $F$ . Поэтому под  $\overline{W}_{k1}$  и  $\overline{W}_{k2}$  в формуле (200.3) следует понимать максимальные кинетические энергии электронов и положить

С другой стороны, согласно формуле (198.2),  $e(\varphi_1 - \varphi_2) = \xi_1 - \xi_2$ . Поэтому формула (200.3) дает

$$\Pi_{12} = e^{-1}[(\xi_2 - \xi_1) + (\xi_1 - \xi_2)] = 0.$$

При  $T = 0$  коэффициент Пельтье равен нулю. Если же  $T \neq 0$ , то оба слагаемых в формуле (200.3) уже не компенсируют друг друга, и коэффициент Пельтье отличен от нуля.

## § 201. Эффект Томсона

Исследуя термоэлектрические явления, В. Томсон пришел к заключению, что даже в однородном проводнике, если этот проводник нагрет неравномерно, при наличии тока происходит выделение или поглощение тепла, которое либо добавляется к теплу Джоуля–Ленца, либо вычитается из него. Это явление, получившее название *эффекта Томсона*, строго говоря, не относится непосредственно к контактным явлениям. Однако его происхождение тесно связано с причинами возникновения явлений в контактах, и поэтому мы рассмотрим его в настоящей главе.

Для наблюдения эффекта Томсона может служить опыт, изображенный на рис. 344. Два одинаковых стержня 1 и 2 из одного и того же материала включены в цепь тока, а концы стержней

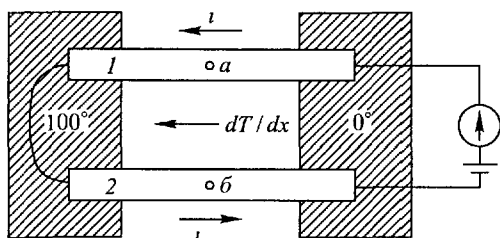


Рис. 344. Наблюдение эффекта Томсона

поддерживаются при различной температуре (например, 100 и 0°C). В стержнях возникает градиент температуры  $dT/dx$  и появляются потоки тепла. В одном из стержней направления тока и градиента температуры одинаковы, в другом — противоположны. В опыте измеряют разность температур для двух точек  $a$  и  $b$ , выбираемых таким образом, чтобы в отсутствие тока температура в них была одинакова. Для измерения разности температур в точки  $a$  и  $b$  помещают спай термопары (§ 202). При наличии тока температуры точек  $a$  и  $b$  делаются различными; это указывает на то, что в одном из стержней дополнительно к теплу Джоуля–Ленца выделяется некоторое количество тепла (тепло Томсона), а в другом стержне — поглощается.

Знак эффекта Томсона различен для различных проводников. Так, например, в висмуте и цинке наблюдается выделение

тепла, если направление потока тепла и направление тока совпадают. Но в железе, платине, сурьме при тех же условиях происходит поглощение тепла. При изменении направления тока (или направления потока тепла) у всех проводников наблюдается изменение знака эффекта, т.е. вместо выделения тепла происходит его поглощение и наоборот.

Эффект Томсона объясняется изменением свойств проводника при его нагревании. Первоначально однородный проводник при неравномерном нагревании становится неоднородным, и поэтому явление Томсона представляет собой в сущности своеобразное явление Пельтье с той только разницей, что в данном случае неоднородность вызвана не различием химического состава проводника, а различием температур.

Пусть  $Q_T$  есть тепло Томсона, выделившееся за время  $t$  в объеме проводника  $\tau$ . Тогда  $Q_T/\tau t$  представляет собой количество теплоты, выделяющееся в единице объема за единицу времени. Эта величина оказывается пропорциональной градиенту температуры  $dT/dx$  и плотности тока, и, следовательно,

$$\frac{Q_T}{\tau t} = \sigma \frac{dT}{dx} j. \quad (201.1)$$

Коэффициент пропорциональности  $\sigma$  называется *коэффициентом Томсона*. Он зависит от рода проводника и от его состояния, в частности от температуры проводника.

Формулу (201.1) (дифференциальную форму закона) можно представить в ином виде, если применить ее к отрезку проводника с длиной  $\Delta x$  и сечением  $S$ , концы которого имеют малую разность температур  $\Delta T$  (чтобы не учитывать зависимость  $\sigma$  от температуры). Тогда  $\tau = S \Delta x$ ,  $jS = i$  есть полная сила тока, а  $(dT/dx)\Delta x = \Delta T$ , и мы находим

$$Q_T = \sigma \Delta T i t. \quad (201.2)$$

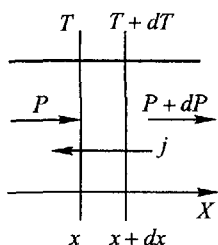
Эта формула представляет собой интегральную форму закона и дает полное количество теплоты Томсона, выделенной во всем рассматриваемом отрезке проводника.

Так же как и в эффекте Пельтье, мы будем считать тепло положительным, если оно выделяется. За положительное направление тока примем направление от холодного конца проводника к горячему (направление градиента температуры).

Значение коэффициента Томсона мало. Так, например, для висмута при комнатной температуре  $\sigma \sim 10^{-5}$  В/К.

Эффект Томсона, как и эффект Пельтье, возникает потому, что в проводнике с током существует поток энергии  $P$ , пропорциональный плотности тока  $j$  и выражаемый формулой (200.2). Конечно, при наличии градиента температуры в проводнике имеется еще и поток энергии, обусловленный теплопроводностью. Однако последний поток не зависит от тока, и поэтому мы не будем его учитывать.

Рассмотрим в однородном проводнике бесконечно тонкий слой с площадью 1, ограниченный плоскостями  $x = \text{const}$  и  $x + dx = \text{const}$  и имеющий объем  $dx$  (рис. 345). Положим, что электроны движутся вдоль оси  $X$  и обозначим температуру на выбранных плоскостях через  $T$  и  $T + dT$ , а потоки энергии — через  $P$  и  $P + dP$ . Тогда за каждую единицу времени в рассматриваемый объем будет входить энергия  $P$ , а выходить из него — энергия  $P + dP$ . Следовательно, в единице объема будет выделяться энергия



$$\frac{Q_T}{\tau t} = \frac{P(x) - P(x + dx)}{dx} = -\frac{dP(x)}{dx}.$$

Подставив теперь в эту формулу вместо  $P$  его выражение (200.2), получим

$$\frac{Q_T}{\tau t} = j \frac{1}{e} \frac{d\bar{W}_k}{dx} - j \frac{d\varphi}{dx}.$$

Рис. 345. К объяснению тепла Томсона

Здесь  $-d\varphi/dx = E$  есть напряженность электрического поля в проводнике. Величина же  $\bar{W}_k$  — функция температуры и изменяется в пространстве потому, что изменяется температура. Поэтому можно написать

$$\frac{d\bar{W}_k}{dx} = \frac{d\bar{W}_k}{dT} \frac{dT}{dx}.$$

Следовательно,

$$\frac{Q_T}{\tau t} = j \frac{1}{e} \frac{d\bar{W}_k}{dT} \frac{dT}{dx} + jE.$$

В этой формуле второе слагаемое  $jE$  есть тепло Джоуля–Ленца, рассчитанное на единицу объема и единицу времени. Первое же слагаемое показывает, что выделяется еще и дополнительная энергия, пропорциональная  $j dT/dx$ . Это и есть тепло Томсона.

## § 202. Применения термоэлектричества

Термоэлектричество широко используют для измерения температур. Для этого служат термоэлементы (термопары). Пример технической термопары схематически показан на рис. 346. Она содержит две проволоки из различных металлов 1 и 2, концы которых сварены (спай I). Обе проволоки заключены в фарфоровую трубку  $T$  для предохранения спая от химических воздействий. Второй спай (II) поддерживается при неизменной температуре. Концы цепи  $a$  и  $b$  присоединяют к милливольтметру или (при очень точных измерениях) к потенциометру для измерения термо-ЭДС компенсационным методом. Термопары обладают тем преимуществом, что позволяют измерять как очень высокие, так и очень низкие температуры, что невозможно сделать с помощью обычных жидкостных термометров.

Для увеличения ЭДС термоэлементы соединяют последовательно в термобатареи, как показано на рис. 347. При этом все четные спаи поддерживают при одной температуре, а все нечет-

ные — при другой. ЭДС такой батареи равна сумме ЭДС отдельных элементов.

Миниатюрные термобатареи, составленные из тончайших полосок двух различных металлов, с успехом применяют для измерения интенсивности света (как видимого, так и невидимого). Подобные термоэлектрические приемники излучения в соединении с чувствительным гальванометром обладают огромной чувствительностью. Они обнаруживают, например, невидимое тепловое излучение человеческой руки, удаленной на расстояние многих метров; такое излучение вызывает разность температур спаев порядка всего лишь миллионной доли градуса.

Термобатареи представляют интерес и как маломощные генераторы

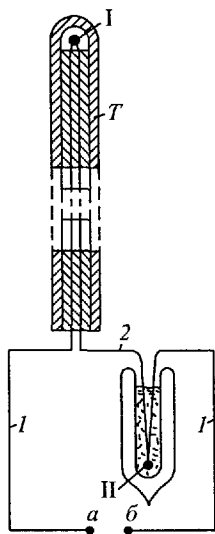


Рис. 346. Схема устройства и включения термопары

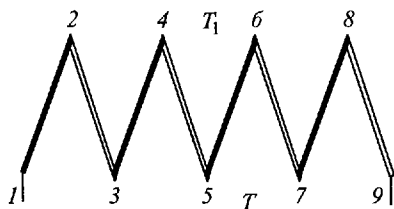


Рис. 347. Схема термобатареи

электрического тока. По сравнению с теплосиловыми установками они исключительно просты и не содержат никаких вращающихся частей. Для устройства термогенераторов в настоящее время применяют исключительно полупроводники, так как термо-ЭДС у полупроводников гораздо больше, чем у металлов.

Кроме того, теплопроводность у полупроводников меньше, чем у металлов, и поэтому бесполезный переход тепла от горячих спаев к холодным уменьшается.

Эффект Пельтье в контактах полупроводников успешно используют для устройства термоэлектрических холодильников.

### § 203. Электронно-дырочные переходы в полупроводниках

Контакты металл-полупроводник и полупроводник-полупроводник не подчиняются закону Ома. Сопротивление контак-

тов зависит от приложенного напряжения, а при одном и том же его значении может сильно изменяться при перемене направления тока.

Электронные процессы в контактах полупроводник–металл отличаются от процессов в контактах двух полупроводников. Мы, однако, ограничимся рассмотрением только контактов двух полупроводников, которые находят особенно важные технические применения.

В § 152 мы видели, что по характеру своей проводимости полупроводники могут быть электронными ( $n$ -тип) и дырочными ( $p$ -тип). В полупроводниках  $n$ -типа основными подвижными носителями заряда являются отрицательные электроны, а в полупроводниках  $p$ -типа — положительные дырки. В случае контакта двух полупроводников электроны и дырки получают возможность переходить из одного полупроводника в другой, и поэтому между полупроводниками, так же как и между металлами, возникает контактная разность потенциалов, а в тонком пограничном слое появляется контактное электрическое поле.

Если в контакте находятся два полупроводника одного и того же типа (оба электронные или оба дырочные), то оба полупроводника обмениваются одинаковыми частицами: либо электронами, либо дырками, и явления в этом случае имеют большое сходство с явлениями в двух соприкасающихся металлах. Поэтому мы остановимся только на том случае, когда один из полупроводников имеет электронную проводимость ( $n$ -тип), а другой — дырочную ( $p$ -тип). Такие контакты называют *электроно-дырочными переходами* или  $p - n$ -переходами.

Отметим, что такой контакт в чистом виде нельзя получить, прижимая друг к другу два полупроводника, так как вследствие шероховатости поверхности соприкосновение будет происходить лишь в немногих точках; между ними будут воздушные зазоры, в которых образуются пленки окислов, и контакт будет иметь сложное строение. Поэтому для получения  $p - n$ -перехода обычно в пластинку чистого полупроводника (например, германия или кремния) вводят две примеси — одну донорную (т.е. сообщающую электронную проводимость), а другую акцепторную (сообщающую дырочную проводимость), и распределяют их таким образом, чтобы в одном конце имелся избыток одной из примесей, а в другом конце — избыток другой. Тогда в одной половине пластинки возникает электронная проводимость, а в другой — дырочная, причем между обеими областями будет расположен тонкий переходный слой, в котором обе примеси компенсируют друг друга.

Рассмотрим сначала  $p - n$ -переход в отсутствие тока. Вследствие теплового движения электроны из  $n$ -области будут переходить в  $p$ -область (и там рекомбинировать с дырками), а дырки

из  $p$ -области — в  $n$ -область (и рекомбинировать с электронами). Поэтому в  $n$ -области, вблизи границы раздела, появится положительный объемный заряд, а в  $p$ -области — отрицательный объемный заряд;  $n$ -область приобретет положительный потенциал и энергия электрона в ней станет меньше (так как заряд электрона отрицателен), а потенциал  $p$ -области сделается отрицательным и энергия электрона в ней увеличится. Кривая распределения потенциальной энергии электронов  $W_э$  будет иметь вид, показанный на рис. 348 *a* сплошной кривой. Напротив, энергия положительных дырок  $W_д$  будет больше в  $n$ -области и меньше в  $p$ -области (штриховая кривая).

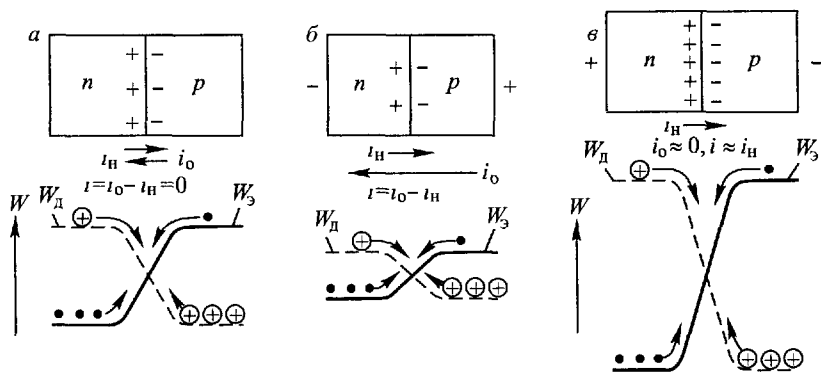


Рис. 348. Электрический ток в  $p-n$ -переходе

В состоянии равновесия полный ток через контакт равен нулю. Этот ток в отличие от металлов, где носителями заряда являются только электроны, складывается как из движения электронов, так и из движения дырок. Остановимся на этом вопросе подробнее.

Прежде всего напомним, что в любом полупроводнике, помимо основных носителей заряда (представленных в большинстве), всегда имеется еще и некоторое число неосновных носителей заряда (ср. § 152). Поэтому в электронном полупроводнике наряду с электронами проводимости (основные носители заряда) имеется еще небольшое число дырок (неосновные носители заряда), а в дырочном полупроводнике, кроме дырок, еще и некоторое число электронов. Число неосновных носителей обычно мало по сравнению с числом основных.

Обратимся опять к рис. 348. Мы видим, что контактное поле способствует движению *неосновных* носителей, которые «скатываются» с потенциального уступа. Поэтому все неосновные носители, генерируемые в приконтактной области, движутся через

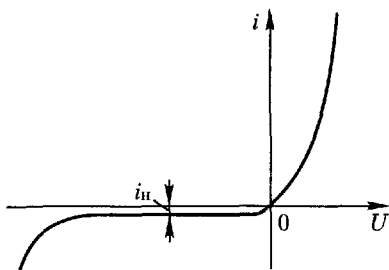
$p$  —  $n$ -переход и образуют некоторый ток силы  $i_n$ , направленный от  $n$  к  $p$ . Сила этого тока практически не зависит от разности потенциалов между  $n$ - и  $p$ -полупроводниками и определяется только числом неосновных носителей, образующихся в приконтактной области в единицу времени. Основные же носители (дырки, движущиеся справа налево, и электроны, движущиеся слева направо) образуют ток  $i_o$ , направленный противоположно, т.е. от  $p$  к  $n$ . Из рис. 348 а видно, что контактное поле препятствует движению основных носителей, которые должны преодолевать потенциальный барьер. В состоянии равновесия устанавливается такая высота потенциального барьера, при которой полный ток

$$i = i_o - i_n = 0.$$

Посмотрим теперь, что будет происходить при наличии тока через контакт. Предположим, что мы приложили к контакту напряжение такого знака, что на  $n$ -области имеется отрицательный потенциал и на  $p$ -области — положительный (рис. 348 б). Тогда энергия электронов в  $n$ -области увеличится, а в  $p$ -области уменьшится, а, следовательно, высота потенциального барьера станет меньше. При этом ток неосновных носителей  $i_n$ , как говорилось выше, не изменится. Ток же основных носителей  $i_o$  увеличится, так как теперь больше электронов сможет преодолеть потенциальный барьер и перейти слева направо и больше дырок — перейти в противоположном направлении. В результате через контакт будет идти ток  $i = i_o - i_n$ , направленный от  $p$  к  $n$ ; сила тока будет быстро нарастать с увеличением приложенного напряжения.

Иное будет происходить, если к  $n$ -области присоединен положительный полюс источника тока, а к  $p$ -области — отрицательный (рис. 348 в). В этом случае высота потенциального барьера увеличится и ток основных носителей  $i_o$  уменьшится. Уже при напряжениях порядка 1 В этот ток практически будет равен нулю, и поэтому через контакт будет течь только ток неосновных носителей,  $i_n$ , который весьма мал.

Рис 349. Вольт-амперная характеристика  $p$  —  $n$ -перехода



В силу изложенного вольт-амперная характеристика  $p$  —  $n$ -перехода имеет вид, изображенный на рис. 349. Когда ток направлен от  $p$  к  $n$ -области, сила тока велика и быстро увеличивается с на-



пряжением, а, следовательно, контакт для этого направления тока (проходное направление тока) имеет малое сопротивление. Если же ток направлен от  $n$ - к  $p$ -области, сила тока весьма мала и почти не зависит от напряжения (ток насыщения). Для этого направления тока (запорное направление) контакт имеет большое сопротивление. Таким образом,  $p$  -  $n$ -переход обладает односторонней проводимостью, или вентильным свойством, и имеет нелинейную вольт-амперную характеристику. При включении в цепь переменного тока такие контакты действуют как выпрямители. Такие вольт-амперные характеристики наблюдаются и в некоторых контактах полупроводников с металлами.

Когда приложенное обратное напряжение становится достаточно большим, в контакте происходит ряд дополнительных явлений, вызванных разогреванием контакта и действием сильного электрического поля в переходном слое. Это приводит к быстрому увеличению обратных токов, разрушающих выпрямляющий переход («пробой»).

Из сказанного следует, что электрический ток в контактах принципиально не отличается от электронной эмиссии (гл. XV). Различие заключается в том, что при обычной эмиссии электроны выходят из металла в вакуум, в случае же контактов электроны (и дырки) переходят из одного проводника в другой. Так как высота потенциального барьера в контакте значительно меньше высоты барьера на границе полупроводник-вакуум, то сильная эмиссия наблюдается уже при комнатных температурах. Прикладывая к контакту разность потенциалов, мы изменяем высоту потенциального барьера и этим управляем силой тока эмиссии.

Если изготовить электронно-дырочный переход из кристалла полупроводника, например германия, содержащего очень большое число доноров или акцепторов ( $\sim 10^{24}$  м $^{-3}$  и выше), то в таком сильно легированном кристалле ширина  $p$ - $n$ -перехода становится очень малой ( $\sim 10^{-8}$  м). При этом

возникают новые явления и начальная часть прямой ветви вольт-амперной характеристики приобретает вид, показанный на рис. 350. В некоторой области напряжений характеристика

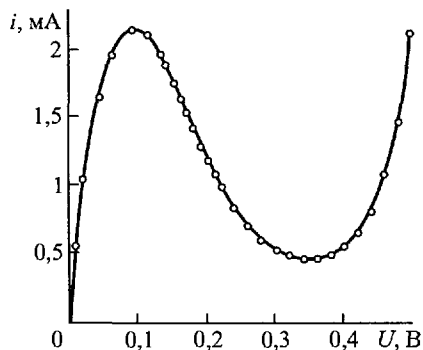


Рис. 350 Вольт-амперная характеристика очень тонкого электронно-дырочного перехода (туннельного диода)

становится падающей, т.е. сила тока уменьшается при увеличении напряжения. Такая необычная зависимость силы тока от напряжения хорошо объясняется современной квантовой теорией твердого тела и связана, с одной стороны, с особенностями энергетического спектра электронов в кристаллах, а с другой — с существованием так называемого квантовомеханического туннельного эффекта.

## § 204. Полупроводниковые диоды

Одностороннюю проводимость контактов двух полупроводников (или полупроводников с металлами) используют для устройства полупроводниковых выпрямителей, предназначенных для выпрямления и преобразования переменных токов.

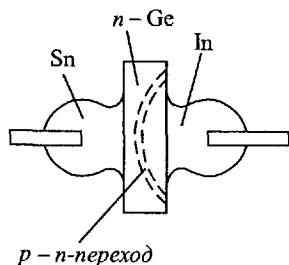


Рис. 351 Схема германиевого выпрямителя

На рис. 351 показано устройство одного из типов германиевого выпрямителя. Он состоит из пластинки германия с электронной проводимостью, в которую с одной стороны вварен шарик индия, сообщающего германию дырочную проводимость, а с другой — шарик олова. При нагревании в процессе сварки индий диффундирует в германий на некоторую

глубину, так что вблизи индиевого электрода возникает дырочная проводимость, а на некоторой глубине образуется выпрямляющий  $p-n$ -переход. Оловянный электрод служит только для включения выпрямителя в цепь тока.

Для предохранения от внешних влияний выпрямитель заключают в герметический патрон или запрессовывают в подходящее изолирующее вещество (на рисунке не показано). Подобные выпрямители при площади контакта около  $1 \text{ мм}^2$  и напряжении  $+1 \text{ В}$  дают проходные токи больше  $1 \text{ А}$ , а обратные токи обычно не превышают нескольких микроампер. При площади контакта в несколько квадратных сантиметров германиевые и кремниевые выпрямители способны пропускать токи в несколько сотен ампер, хотя их размеры настолько малы, что они легко умещаются на ладони руки. Их пробойные напряжения могут достигать многих сотен и даже нескольких тысяч вольт. На рис. 352 изображено устройство широко распространенного селенового выпрямителя. Основным выпрямляющим элементом в нем является селеновая шайба. Она состоит из железного никелированного диска, на который нанесен тонкий слой полупроводни-

ка — селена. Селен покрыт вторым металлическим электродом, состав которого различен (например, сплав Bi-Cd-Sn).

В результате специальной термической и электрической обработки в селене вблизи поверхности второго электрода образуется запирающий слой ( $p-n$ -переход), возникающий вследствие диффузии вещества электродов в селен. Так как селен обладает дырочной проводимостью, то проходное направление тока есть направление от селена к вентильному электроду. Отдельные шайбы соединяются в выпрямителе последовательно. С селеновых выпрямителей снимают прямые токи 30–50 мА на  $1 \text{ см}^2$  поверхности, а допустимые обратные напряжения равны 25–50 В на каждую шайбу.

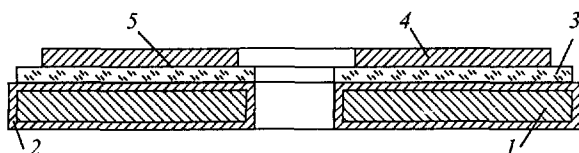


Рис. 352. Селеновая шайба: 1 — железная шайба, 2 — слой никеля (контактный переход), 3 — слой селена, 4 — слой сплава Bi-Cd-Sn (вентильный электрод), 5 — запирающий слой, возникающий на границе вентильного электрода и селена

Полупроводниковые выпрямители применяются в радиотехнике для выпрямления и преобразования электрических колебаний высокой частоты (кристаллические детекторы). Они имеют кристаллик кремния или германия, к которому прижимается тонкое металлическое острие (диаметром в несколько микрон). Такие детекторы позволяют выпрямлять быстропеременные токи, частота которых превышает  $10^{11}$  периодов в секунду, что невозможно сделать с помощью электронных ламп.

Очень тонкие  $p-n$ -переходы используют для устройства туннельных диодов, вольт-амперная характеристика которых уже была приведена на рис. 350. Такие диоды могут служить в качестве элементов с отрицательным дифференциальным сопротивлением для усиления и генерации электрических колебаний (см. § 213). Их применяют также и как быстродействующие переключатели.

## § 205. Неравновесные электроны и дырки в полупроводниках

Рассмотрим опять контакт двух полупроводников  $p$ - и  $n$ -типа и предположим, что через него идет ток в *проходном* направлении (рис. 353). Дырки в  $p$ -области движутся к  $p-n$ -переходу и,

проходя через него, вступают в  $n$ -область в качестве неосновных носителей заряда, где и рекомбинируют с электронами. То же

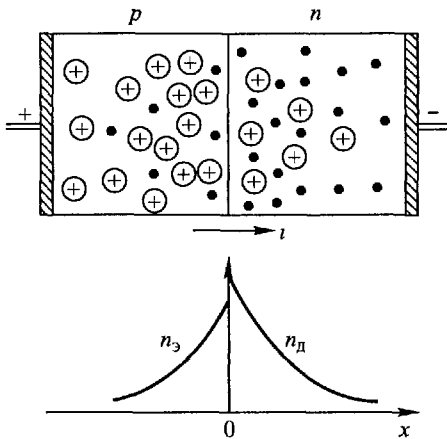


Рис. 353. Инжекция электронов и дырок в  $p-n$ -переходе

относится и к электронам в  $n$ -области, которые, переходя границу раздела, попадают в  $p$ -область и рекомбинируют с дырками. Однако эта рекомбинация происходит не мгновенно, и поэтому в  $n$ -области окажется избыточная концентрация дырок  $n_d$ , а в  $p$ -области — избыточная концентрация электронов  $n_e$ . При этом избыточные дырки в  $n$ -области будут притягивать к себе электроны, так что увеличится и концентрация электронов; объемный заряд, как и в отсутствие тока, не образуется. То же будет происходить и в  $p$ -области, где увеличение концентрации электронов повлечет за собой увеличение концентрации дырок.

Таким образом, при наличии электрического тока через  $p-n$ -переход состояние электронов и дырок в полупроводнике становится неравновесным. Их концентрация делается больше ее равновесного значения, происходит как бы «впрыскивание» дырок в  $n$ -область и электронов в  $p$ -область. Описанное явление получило название *инжекции* электронов и дырок.

Отметим, что нарушение равновесного состояния электронов и дырок можно также получить под действием освещения полупроводника, даже если последний и однороден. В этом случае изменение концентрации электронов и дырок приводит к изменению электропроводности полупроводника под действием света (явление *фотопроводимости*).

По мере движения избыточные дырки и электроны будут рекомбинировать и их концентрация будет уменьшаться. Поэтому распределение концентраций избыточных электронов и дырок в кристалле существенно зависит от скорости их рекомбинации. Остановимся на этом вопросе подробнее.

Положим, что в полупроводнике каким-либо способом (инжекцией, освещением или другим способом) была создана концентрация избыточных электронов и дырок, одинаковая во всех местах кристалла, и что эти избыточные носители заряда ис-

чезают вследствие рекомбинации. Уменьшение концентрации электронов или дырок  $-dn$  за время  $dt$  пропорционально их избыточной концентрации  $n$  и времени:  $-dn = \tau^{-1}n dt$ . Здесь  $\tau^{-1}$  — коэффициент пропорциональности, определяющий вероятность рекомбинации, а величина  $\tau$  получила название *среднего времени жизни* избыточных (или неравновесных) носителей заряда. Она зависит от рода и качества материала, от его состояния и от содержащихся в нем примесей.

Интегрируя написанное уравнение, находим

$$n = n(0) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right),$$

где  $n(0)$  — начальная концентрация избыточных носителей. Отсюда видно, что  $\tau$  есть время, через которое концентрация неравновесных носителей вследствие рекомбинации уменьшается в  $e = 2,71$  раза.

Пользуясь понятием времени жизни, мы можем сейчас вернуться к распределению электронов и дырок в пространстве (рис. 353). Для этого рассмотрим в правой части кристалла ( $n$ -области) бесконечно тонкий слой, ограниченный плоскостями, параллельными  $p$  —  $n$ -переходу и удаленными от него на расстояния  $x$  и  $x + dx$ . При малом приложенном напряжении током дрейфа в электрическом поле вблизи перехода можно пренебречь по сравнению с током диффузии. Через каждую единицу поверхности плоскости  $x$  в единицу времени вследствие диффузии внутрь слоя будет входить число дырок  $-D_d \frac{dn_d}{dx}|_x$ , где  $D_d$  — коэффициент диффузии дырок в  $n$ -области. Через плоскость  $x + dx$  будет выходить из слоя число дырок

$$-D_d \frac{dn_d}{dx} \Big|_{x+dx} = -D_d \frac{dn_d}{dx} \Big|_x - D_d \frac{d^2 n_d}{dx^2} dx.$$

Поэтому полное приращение числа дырок в единицу времени вследствие диффузии, отнесенное к единице объема, равно  $+D_d \frac{d^2 n_d}{dx^2}$ . Кроме того, внутри слоя будет происходить уменьшение числа дырок вследствие рекомбинации. Согласно сказанному выше число исчезающих дырок в единицу времени, также отнесенное к единице объема, есть  $n_d/\tau_d$ . В стационарном состоянии число поступающих дырок вследствие диффузии должно быть равно числу дырок, исчезающих вследствие рекомбинации. Поэтому для определения пространственного распределения концентрации избыточных дырок (и равной ей концентрации избыточных электронов) в  $n$ -области мы получаем уравнение

$$\frac{d^2 n_d}{dx^2} - \frac{n_d}{L_d^2} = 0,$$

где введено обозначение  $L_d \equiv \sqrt{D_d \tau_d}$ . Граничные условия задачи имеют следующий вид. При  $x = 0$   $n_d = n_{d0}$ , где  $n_{d0}$  — концентрация избыточных дырок на границе  $n$ -области. Кроме того, при  $x \rightarrow \infty$   $n_d \rightarrow 0$ , так как на достаточно большом расстоянии от перехода все избыточные дырки успевают рекомбинировать с электронами.

Решение написанного уравнения, удовлетворяющее граничным условиям, имеет вид

$$n_d = n_{d0} \exp\left(-\frac{x}{L_d}\right).$$

Оно показывает, что концентрация инжектированных дырок уменьшается с увеличением расстояния от перехода по экспоненциальному закону. Введенная нами характеристическая длина  $L_d$  есть расстояние, на котором концентрация избыточных дырок уменьшается в  $e = 2,71$  раза. Величина  $L_d$  носит название *длины диффузионного смещения* или, короче, *длины диффузии дырок*.

Совершенно аналогично концентрация инжектированных электронов в  $p$ -области будет тоже уменьшаться по экспоненциальному закону, но будет определяться длиной диффузии электронов  $L_n \equiv \sqrt{D_n \tau_n}$ , где  $D_n$  — коэффициент диффузии электронов, а  $\tau_n$  — время жизни электронов в  $p$ -области.

Значения  $L$  и  $\tau$  в различных полупроводниках изменяются в очень широких пределах. Укажем для примера, что в очень чистом германии при комнатных температурах  $\tau$  может составлять около 1 с, что соответствует длине диффузии  $L$  в несколько сантиметров. При наличии примесей (или иных структурных дефектов)  $\tau$  и  $L$  могут уменьшаться на много порядков.

## § 206. Полупроводниковые усилители

С помощью полупроводников можно производить не только выпрямление, но и усиление электрических колебаний (а значит, и генерацию колебаний, если в схему ввести обратную связь). Употребляемые для этого полупроводниковые приборы имеют не два электрода (как в выпрямителях), а три (и больше) и действуют подобно вакуумным электронным лампам с сетками. Они получили общее название *транзисторов*.

Для разъяснения принципа усиления электрических сигналов с помощью полупроводников мы рассмотрим только один из типов транзисторов, так называемый *биполярный диффузионный триод  $p-n-p$ -типа*, схематически изображенный на рис. 354 а. Он представляет собой кристалл полупроводника (обычно германия или кремния), в котором при помощи соответствующего распределения двух примесей созданы три области с

чередующимися типами проводимости: дырочной-электронной-дырочной, между которыми находятся два  $p-n$ -перехода. На эти области нанесены металлические электроды, с помощью которых триод включают в схему. Одна из возможных схем включения показана на рис. 354 а.

Как видно из рисунка, один из  $p-n$ -переходов (левый), рассматриваемый как выпрямитель, работает в проходном направлении, тогда как другой переход (правый) — в запиорном. Оконечная часть кристалла, прилегающая к первому из переходов, получила название *эмиттера*, а вторая, оконечная часть — *коллектора*. Промежуточная область называется *основанием* или *базой* триода. Ее ширина всегда мала по сравнению с длиной диффузии неосновных носителей заряда и измеряется десятками (или даже единицами) микрометров. Источник усиливаемых колебаний присоединяют между эмиттером и базой, а усиленные колебания возникают в цепи коллектора. Показанная схема включения триода называется *схемой с общей базой*.

Рассмотрим теперь, что происходит внутри триода. Основная доля электрического тока внутри эмиттера представляет собой движение дырок, которые являются основными носителями заряда. Эти дырки инжектируются в область основания и в качестве неосновных носителей заряда движутся к коллектору. Если длина диффузии дырок в области базы больше толщины базы, то значительная часть инжектированных дырок достигнет коллектора. Здесь положительные дырки захватываются полем, действующим внутри перехода (притягиваются к отрицательно заряженному коллектору), и, вступая внутрь коллектора в качестве основных носителей, изменяют ток коллектора. Таким образом, всякое изменение тока в цепи эмиттера будет вызывать изменение тока в цепи коллектора. То же будет справедливо и для напряжения на эмиттере и коллекторе.

Оказывается, что изменение напряжения, возникающее на нагрузочном сопротивлении  $r$  в цепи коллектора, можно сделать

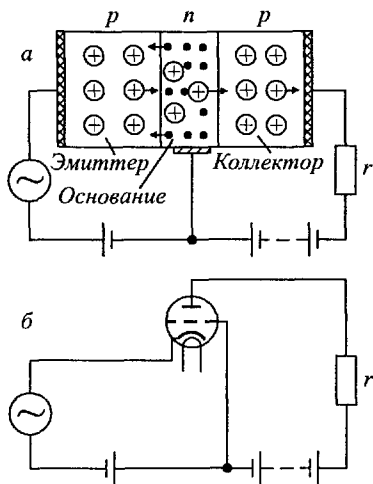


Рис 354 Сравнение работы биполярного диффузионного триода  $p-n-p$ -типа (а) с трехэлектродной лампой (б)

гораздо больше, нежели вызвавшее его изменение напряжения в цепи эмиттера, т.е. получить *усиление напряжения*. Прикладывая между эмиттером и базой переменное напряжение, мы получим в цепи коллектора переменный ток, а на нагрузочном сопротивлении — переменное напряжение. При этом мощность переменного тока, выделяемая в нагрузочном сопротивлении, может быть сделана больше мощности, расходуемой в цепи эмиттера, т.е. получится *усиление мощности*.

Из сказанного видно, что действие полупроводниковых триодов напоминает действие вакуумных трехэлектродных ламп (рис. 354 б). При этом роль катода играет эмиттер, роль анода — коллектор, а в качестве сетки служит база. Изменяя напряжение между сеткой и катодом в вакуумном триоде, мы изменяем электронный поток в лампе и получаем изменение тока в цепи анода. Аналогично, изменяя напряжение между эмиттером и базой, мы меняем поток неосновных носителей, инжектированных в область базы, и этим изменяем ток в цепи коллектора.

Помимо рассмотренного полупроводникового триода, существуют и другие типы транзисторов, так же как и иные схемы включения. Транзисторы обладают рядом преимуществ по сравнению с электронными лампами. Они не имеют накаливаемого катода и поэтому потребляют меньшую мощность. Так как, кроме того, они не требуют вакуума (который может ухудшаться при работе лампы), то их надежность и срок службы больше, чем у электронных ламп. Транзисторы имеют также гораздо меньшие размеры. Поэтому полупроводниковые приборы широко применяют вместо электронных ламп во многих радиотехнических схемах и счетно-решающих устройствах.



# ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

---

Среди различных механических движений особо важное значение имеют колебания — движения или процессы, обладающие той или иной периодичностью во времени. Такие движения мы встречаем в небесной механике (движение планет), в различных механических машинах; они лежат в основе измерения времени (часы). Механическими колебаниями объясняются также звуковые явления.

Подобно этому, среди различных электрических явлений особое место занимают электромагнитные колебания, при которых электрические величины (заряды, токи, электрические и магнитные поля) изменяются периодически. Электромагнитные колебания используют в различных важных технических устройствах и применяют для целей связи (телефонная, телеграфная и радиосвязь). Технические переменные токи также являются электрическими колебаниями. Укажем, наконец, что световые явления представляют собой не что иное, как электромагнитные колебания.

## Г Л А В А XX

### СОБСТВЕННЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

#### § 207. Собственные электрические колебания

Простейшей колебательной системой в механике является груз, подвешенный на пружине, движущийся без трения (рис. 355). При этом мы предполагаем, что массой пружины можно пренебречь по сравнению с массой груза и что вся упругость заключена в пружине (система с сосредоточенными массой и упругостью). Из механики известно, что груз, выведенный из положения равновесия, совершает гармонические колебания, при которых смещение из положения равновесия изменяется со временем по синусоидальному закону.

Когда груз находится в крайних положениях ( $a$  и  $b$  рис. 355), кинетическая энергия груза равна нулю, но потенциальная энер-

гия пружины достигает максимума. При прохождении грузом положений равновесия (*б* и *г*, рис. 355), напротив, кинетическая энергия груза имеет наибольшее значение, а потенциальная энергия пружины, которая в этом положении ни сжата, ни растянута, равна нулю. Поэтому при рассматриваемых механических колебаниях энергия системы периодически превращается из кинетической в потенциальную и обратно.

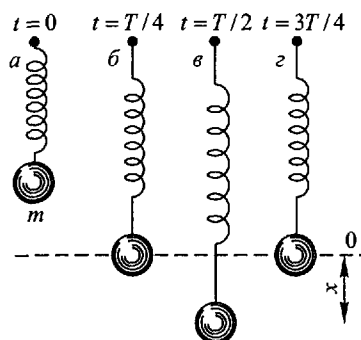


Рис. 355. Механические колебания с сосредоточенными массой и упругостью

Мы будем считать, что емкость между витками катушки весьма мала по сравнению с емкостью конденсатора, а индуктивность конденсатора и соединительных проводников мала сравнительно с индуктивностью катушки (контур с сосредоточенными емкостью и индуктивностью или закрытый колебательный контур).

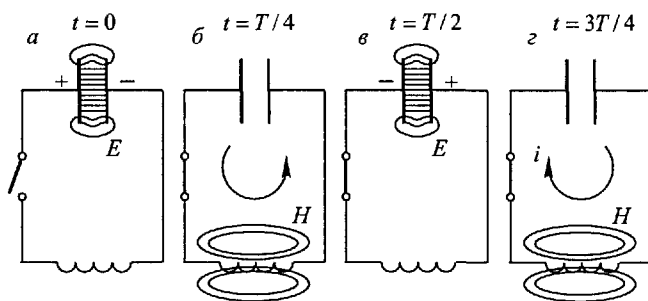


Рис. 356. Электрические колебания с сосредоточенными индуктивностью и емкостью

Предположим, что мы, разомкнув контур, зарядили конденсатор. Между пластинами конденсатора появится электрическое поле, которое будет заключать в себе определенную энергию (рис. 356 *а*). Замкнем теперь конденсатор на катушку индуктивности. Конденсатор начнет разряжаться, и его электрическое поле будет уменьшаться. При этом в контуре возникнет элек-

трическое поле, которое будет заключать в себе определенную энергию (рис. 356 *б*). При этом конденсатор будет разряжен, а катушка индуктивности будет иметь максимальное магнитное поле. При этом кинетическая энергия груза имеет наибольшее значение, а потенциальная энергия пружины, которая в этом положении ни сжата, ни растянута, равна нулю. Поэтому при рассматриваемых механических колебаниях энергия системы периодически превращается из кинетической в потенциальную и обратно.

Аналогичные процессы мы имеем при электрических колебаниях. Простейший электрический колебательный контур состоит из конденсатора и катушки индуктивности, соединенных между собой (рис. 356).

трический ток разряда конденсатора, отчего в катушке индуктивности появится магнитное поле. Через некоторое время, равное четверти периода колебания, конденсатор разрядится полностью и электрическое поле исчезнет совсем. Но магнитное поле при этом достигнет максимума, а, следовательно, энергия электрического поля превратится в энергию магнитного поля (рис. 356 б).

В дальнейшие моменты времени магнитное поле будет исчезать, так как нет токов, его поддерживающих. Исчезающее поле вызовет экстраток самоиндукции, который в соответствии с законом Ленца будет стремиться поддержать ток разряда конденсатора и будет направлен так же, как и этот последний. Поэтому конденсатор будет перезаряжаться и между его пластинами появится электрическое поле противоположного направления. Через время, равное половине периода колебания, магнитное поле исчезнет совсем, а электрическое поле достигнет максимума, и энергия магнитного поля вновь превратится в энергию электрического поля (рис. 356 в). В дальнейшем конденсатор будет снова разряжаться и в контуре возникнет ток, направленный противоположно току в предыдущей стадии процесса. Через время  $(3/4)T$  конденсатор вновь окажется разряженным, а энергия электрического поля снова превратится в энергию магнитного поля (рис. 356 г), и т.д. Через промежутки времени, равные полному периоду колебания  $T$ , электрическое состояние контура будет таким же, как и в начале колебаний (рис. 356 а).

Если сопротивление контура равно нулю, то указанный процесс периодического превращения электрической энергии в магнитную и обратно будет продолжаться неограниченно долго, и мы получим *незатухающие* электрические колебания.

Механические колебания, возникающие под действием сил, развивающихся в самой колебательной системе, называют *собственными* колебаниями. Они возникают при всяком нарушении равновесия колебательной системы. Подобно этому, электрические колебания, происходящие под действием процессов в самом колебательном контуре, получили название *собственных электрических колебаний*. Рассмотренные выше колебания являются, очевидно, собственными.

Пользуясь аналогией между механическими и электрическими колебаниями, можно просто вычислить период электрических колебаний, не прибегая к точной теории. Из механики известно, что период колебаний груза на пружине выражается формулой

$$T = 2\pi\sqrt{m/k}, \quad (207.1)$$

где  $m$  — масса груза, а  $k$  — упругость пружины. В случае электрических колебаний роль массы играет индуктивность  $L$ , а

роль упругости — величина, обратная емкости, т.е.  $1/C$  (§ 96). Заменяя в (207.1)  $m$  на  $L$ , а  $k$  на  $1/C$ , находим

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (207.2)$$

Частота незатухающих электрических колебаний (число колебаний в 1 с) равна

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}}, \quad (207.2a)$$

а круговая частота (число колебаний в  $2\pi$  с)

$$\omega = 2\pi\nu = \sqrt{1/LC}. \quad (207.26)$$

Если в (207.2)  $L$  выражать в генри, а  $C$  — в фарадах, то период  $T$  будет выражен в секундах.

## § 208. Затухание колебаний

Для исследования электрических колебаний может служить схема, изображенная на рис. 357. Колебательный контур состоит из конденсатора емкости  $C$ , катушки индуктивности  $L$  и реостата с переменным сопротивлением  $r$ . Когда переключатель  $K$  поставлен в положение 1, конденсатор заряжается от батареи  $B$ . При перебрасывании переключателя в положение 2 колебательный контур замыкается и в нем возникают колебания. Напряжение между пластинами конденсатора подается на одну из пар пластин электронного осциллографа  $O$  (§ 188), к другой паре пластин приложено пилообразное напряжение от специального генератора  $ГР$ , осуществляющее развертку во времени. Тогда электронный луч прочерчивает на экране осциллографа кривую, дающую зависимость напряжения от времени,  $U = f(t)$ . Так как это напряжение равно  $U = q/C$ , где  $q$  — мгновенное значение заряда конденсатора, то получаемая кривая выражает одновременно в некотором масштабе и изменение во времени заряда конденсатора.

Рис. 357. Схема для наблюдения электрических колебаний с помощью осциллографа

В подобных схемах удобно производить переключение конденсатора периодически много раз в секунду; для этого в качестве переключателя  $K$  можно использовать добавочную схему с электронными лампами. При этом переключатель связывают электрически с генератором развертки  $ГР$  так,

чтобы запуск генератора производился всякий раз одновременно с замыканием колебательного контура. Тогда на экране осциллографа появляются быстро следующие друг за другом тождественно расположенные кривые, которые для глаза сливаются в единую яркую кривую  $U = f(t)$ , неподвижно расположенную на экране.

Если бы сопротивление контура было равно нулю, то мы имели бы незатухающие электрические колебания. Изменение заряда конденсатора с течением времени выражалось бы кривой  $a$  рис. 358, которая, как мы увидим в § 209, есть синусоида. По такому закону изменялось бы и напряжение на конденсаторе и сила тока в контуре — колебания были бы гармоническими.

В действительности же сопротивление контура всегда не равно нулю. Вследствие этого энергия, первоначально запасенная в контуре, непрерывно расходуется на выделение тепла Джоуля-Ленца, так что интенсивность электрических колебаний постепенно уменьшается, и в конце концов колебания прекращаются вовсе. Поэтому на экране осциллографа мы видим кривую типа  $b$  рис. 358 (затухающие электрические колебания). Если увеличить сопротивление контура, то затухание колебаний увеличивается (кривая  $в$  рис. 358).

В связи с изложенным отметим, что *периодическими* мы называем такие процессы, в которых изменяющиеся физические величины (например, электрический заряд  $q$ ) через определенные промежутки времени (период колебания  $T$ ) принимают одинаковые значения:

$$q(t + T) = q(t). \quad (208.1)$$

Так, например, гармонические колебания, изображаемые кривой  $a$  рис. 358, есть периодический процесс, имеющий совершенно определенный конечный период  $T$ . Напротив, затухающие колебания, изображаемые кривыми  $b$  и  $в$  рис. 358, не имеют конечного периода ( $T = \infty$ ) и поэтому, строго говоря, не являются периодическим процессом. Тем не менее, если затухание мало, небольшие отрезки кривых  $b$  и  $в$  можно приближенно рассматривать как отрезки соответствующей синусоиды и говорить о

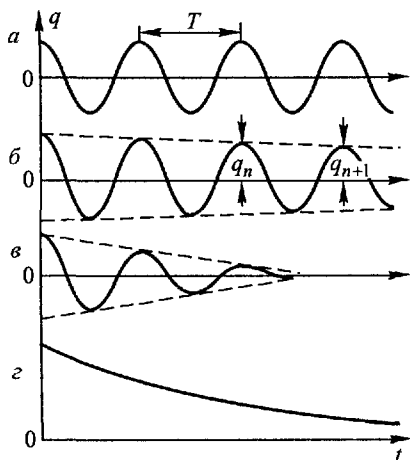


Рис. 358. Затухание электрических колебаний

затухающих колебаниях как о гармонических колебаниях, амплитуда которых постепенно уменьшается.

Для количественной характеристики затухания пользуются тем, что отношение двух последовательных амплитуд  $q_n$  и  $q_{n+1}$  (рис. 358 б) остается постоянным в течение всего процесса (§ 210). Натуральный логарифм этого отношения

$$\delta = \ln \frac{q_n}{q_{n+1}} \quad (208.2)$$

принимают за меру затухания колебаний и называют *логарифмическим декрементом затухания*.

Если постепенно увеличивать сопротивление контура  $r$ , то затухание колебаний увеличивается и логарифмический декремент растет. Когда сопротивление превышает некоторое определенное для данного контура значение  $r_k$ , колебания не возникают вовсе. При достаточном увеличении сопротивления заряд конденсатора уменьшается монотонно и асимптотически стремится к нулю (рис. 358 з).

Сопротивление  $r_k$  называется *критическим сопротивлением* контура. Оно зависит от емкости и индуктивности контура. Для возникновения электрических колебаний, следовательно, необходимо, чтобы сопротивление контура  $r$  было меньше критического сопротивления. При  $r > r_k$  происходит аperiodический разряд.

Отметим, что рассмотренные особенности разряда в электрическом колебательном контуре совершенно аналогичны особенностям механической колебательной системы, обладающей трением.

### § 209. Уравнение собственных электрических колебаний. Колебания в отсутствие затухания

Рассмотрим теперь количественно собственные колебания в контуре с сосредоточенными постоянными.

В дальнейшем мы будем считать, что электрические процессы в контуре квазистационарны (§ 73). Это значит, что мгновенное значение силы тока  $i$  одно и то же в любом месте контура и к мгновенным значениям электрических величин можно применять законы Кирхгофа.

Условимся считать заряд конденсатора  $q$  положительным, если знаки зарядов на обкладках совпадают с показанными на рис. 359, а силу тока -- положительной, если ток направлен против часовой стрелки. Согласно

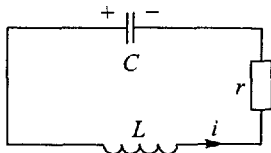


Рис. 359 К выводу уравнения электрических колебаний в контуре с сосредоточенными постоянными

второму закону Кирхгофа сумма падений напряжения в контуре равна сумме действующих в нем ЭДС. В нашем случае имеются два падения напряжения: на сопротивлении  $r$ , равное  $ri$ , и на конденсаторе  $U_C$ , которое противоположно по знаку падению  $ri$ . Кроме того, имеется ЭДС самоиндукции, равная  $-L di/dt$ . Поэтому

$$ri - U_C = -L di/dt. \quad (209.1)$$

Далее, напряжение на конденсаторе равно

$$U_C = q/C, \quad (209.2)$$

а сила тока связана с зарядом конденсатора соотношением

$$i = -dq/dt. \quad (209.3)$$

Знак минус в последнем соотношении стоит потому, что выбранное положительное направление  $i$  соответствует уменьшению (положительного) заряда конденсатора.

Из этих трех уравнений можно исключить две из трех величин  $q$ ,  $i$ ,  $U$  и получить дифференциальное уравнение, связывающее лишь одну из них и время  $t$ . Подставляя, например, выражения (209.2) и (209.3) в (209.1), находим уравнение для заряда конденсатора в виде

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + r \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0.$$

Разделим обе части этого уравнения на  $L$  и введем следующие обозначения:

$$\frac{r}{2L} = \alpha, \quad \frac{1}{LC} = \omega_0^2. \quad (209.4)$$

Тогда окончательно имеем

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\alpha \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0. \quad (209.5)$$

Мы получили линейное дифференциальное уравнение второго порядка с обыкновенными производными и с постоянными коэффициентами. Такое же точно уравнение мы получили бы для напряжения  $U$  и для силы тока  $i$ . Отметим, что колебания, описываемые линейными дифференциальными уравнениями, называются *линейными колебаниями*, а соответствующие колебательные системы — *линейными системами*.

Для того чтобы задача была определенной, необходимо еще задать начальные условия, которых, как известно, для уравнения второго порядка должно быть два. Положим, что мы начинаем отсчет времени с момента замыкания контура и обозначим начальную величину заряда конденсатора через  $q_0$ . Так как в начальный момент сила тока равна нулю, то начальные условия задачи таковы:

$$t = 0: \quad q = q_0, \quad dq/dt = 0. \quad (209.6)$$

Положим сначала, что сопротивление контура  $r = 0$ . Тогда уравнение колебаний (209.5) принимает более простой вид

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0. \quad (209.7)$$

Общее решение этого уравнения есть гармоническое колебание

$$q = A \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (209.8)$$

где постоянные  $A$  и  $\varphi$  (амплитуда и начальная фаза) могут иметь произвольные значения. В справедливости этого можно убедиться, подставляя написанное решение в (209.7). Следовательно, мы имеем гармоническое колебание с частотой  $\omega_0 = \sqrt{1/LC}$ . Этот результат мы уже получили в § 207 при помощи менее строгих рассуждений.

Постоянные  $A$  и  $\varphi$  определяются начальными условиями (209.6). Подставляя решение (209.8) в (209.6), имеем

$$A \cos \varphi = q_0, \quad A \omega_0 \sin \varphi = 0.$$

Это дает

$$\varphi = 0, \quad A = q_0,$$

после чего решение (209.8) принимает следующий окончательный вид:

$$q = q_0 \cos \omega_0 t. \quad (209.9)$$

Графическое изображение этого решения есть косинусоида, показанная на рис. 358 а.

Напряжение на конденсаторе изменяется по закону:

$$U_C = q/C = U_0 \cos \omega_0 t,$$

где  $U_0 = q_0/C$  есть амплитуда напряжения, равная начальному напряжению на конденсаторе.

Сила тока в контуре равна

$$i = -dq/dt = q_0 \omega_0 \sin \omega_0 t = i_0 \sin \omega_0 t,$$

где  $i_0 = q_0 \omega_0$  — амплитуда тока. Сила тока, также как и заряд, изменяется по гармоническому закону; однако если заряд изме-

няется по закону косинуса, то сила тока — по закону синуса. Так как  $\sin \omega_0 t = \cos(\omega_0 t - \pi/2)$ , то это значит, что между колебаниями заряда и силы тока существует разность фаз  $\pi/2$ , причем колебания силы тока отстают от фазе (рис. 360).

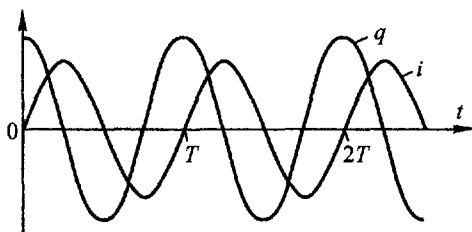


Рис. 360. Кривые колебаний заряда конденсатора и силы тока без затуханий



### § 210. Колебания при наличии затухания

Рассмотрим теперь реальный контур, сопротивление которого не равно нулю. В этом случае колебания описываются полным дифференциальным уравнением (209.5). Его решение имеет различный вид в зависимости от соотношения между коэффициентами. Положим сначала, что

$$\omega_0^2 > \alpha^2. \quad (210.1)$$

Тогда решение есть

$$q = Ae^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi). \quad (210.2)$$

Здесь  $A$  и  $\varphi$  — по-прежнему постоянные, значения которых определяются начальными условиями, величина же  $\omega$  равна

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}. \quad (210.3)$$

В том, что (210.2) совместно с (210.3) действительно является решением уравнения (209.5), проще всего убедиться, подставляя (210.2) в (209.5).

Полученное решение есть аналитическое выражение кривых затухающих колебаний  $b$  и  $v$  рис. 358. Кривая  $v$  соответствует большему значению коэффициента  $\alpha$ . С теми оговорками, которые были сделаны в § 208, формулу (210.2) можно истолковать как гармоническое колебание с круговой частотой  $\omega$  и с амплитудой

$$y = Ae^{-\alpha t},$$

которая не остается постоянной, а непрерывно уменьшается с течением времени. Показатель  $\alpha$  называется *коэффициентом затухания* колебаний.

Исследуем подробнее решение (210.2) и найдем прежде всего те моменты времени, в которые заряд  $q$  достигает максимумов и минимумов. Для этого, согласно правилу нахождения экстремумов, продифференцируем (210.2) и приравняем первую производную нулю:

$$\frac{dq}{dt} = -A\alpha e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi) - A\omega e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi) = 0,$$

или

$$\operatorname{tg}(\omega t + \varphi) = -\alpha/\omega.$$

Пусть  $t = t_1$  есть какое-либо решение этого уравнения. Тогда его решениями будут также

$$\begin{aligned} \dots, t_1 - 2T, \quad t_1 - T, \quad t_1 + T, \quad t_1 + 2T, \dots \\ \dots, t_1 - (3/2)T, \quad t_1 - (1/2)T, \quad t_1 + (1/2)T, \quad t_1 + (3/2)T, \dots, \end{aligned}$$

где

$$T = 2\pi/\omega. \quad (210.4)$$

Легко убедиться, что если при  $t = t_1$  мы имеем максимум  $q$ , то все значения  $t$ , стоящие в верхней строчке, соответствуют также максимуму ( $d^2q/dt^2 < 0$ ), а все значения нижней строчки — минимуму  $q$ . Таким образом, хотя затухающие колебания не являются периодическим процессом в строгом смысле слова, этот процесс обладает все же определенной повторяемостью в том смысле, что максимальные и минимальные значения заряда (а также тока и напряжения) достигаются через одинаковые промежутки времени  $T$ . То же относится и к значениям заряда (силы тока и напряжения), равным нулю. Этот промежуток времени  $T$  мы и называем *периодом* затухающих колебаний.

Пусть  $q_n$  и  $q_{n+1}$  — максимальные значения заряда конденсатора (см. рис. 358 б) в двух последовательных максимумах с номерами  $n$  и  $(n+1)$ . Они достигаются в моменты времени  $t_n$  и  $t_{n+1}$ , причем  $t_{n+1} = t_n + T$ . Согласно (210.2) и (210.4) имеем

$$\begin{aligned} q_n &= A \exp(-\alpha t_n) \cos(\omega t_n + \varphi), \\ q_{n+1} &= A \exp[-\alpha(t_n + T)] \cos[\omega(t_n + 2\pi/\omega) + \varphi] = \\ &= A \exp[-\alpha(t_n + T)] \cos(\omega t_n + \varphi). \end{aligned}$$

Деля почленно оба эти равенства, находим

$$q_n/q_{n+1} = e^{\alpha T}.$$

Мы видим, что отношение двух последовательных максимальных значений заряда не зависит от номера максимумов. Введенный нами в § 208 логарифмический декремент затухания  $\delta$ , следовательно, имеет значение

$$\delta = \ln(q_n/q_{n+1}) = \alpha T; \quad (210.5)$$

он равен произведению коэффициента затухания на период колебаний.

Логарифмический декремент затухания  $\delta$  можно определить еще иначе. Обозначим через  $t_1$  время, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз. Тогда

$$e^{-\alpha t_1} = 1/e,$$

а, следовательно,

$$\alpha t_1 = 1.$$

Деля почленно (210.5) на полученное соотношение, имеем

$$T/t_1 = 1/N = \delta.$$

Здесь  $N$  — число полных колебаний, происходящих за время  $t_1$ . Таким образом, логарифмический декремент есть величина, обратная числу колебаний, по истечении которых амплитуда уменьшается в  $e$  раз.

Для характеристики затухания колебательных контуров часто пользуются (особенно в радиотехнике) еще другой величиной, называемой *добротностью* контура и обозначаемой обычно  $Q$ .

Она связана с логарифмическим декрементом соотношением

$$Q = \pi/\delta. \quad (210.6)$$

Так как  $\delta = 1/N$ , то

$$Q = \pi N. \quad (210.6a)$$

Добротность контура есть умноженное на  $\pi$  число полных колебаний, по истечении которых амплитуда уменьшается в  $e$  раз. Добротность контура, следовательно, тем выше, чем меньше затухание колебаний в нем.

Формула (210.3) показывает, что частота электрических колебаний  $\omega$  зависит от коэффициента затухания  $\alpha$  и не равна частоте колебаний  $\omega_0$  того же контура при сопротивлении  $r = 0$  ( $\alpha = 0$ ). С увеличением сопротивления контура частота  $\omega$  уменьшается, а период колебаний  $T$  увеличивается. Предположим теперь, что сопротивление контура велико, так что

$$\omega_0^2 < \alpha^2.$$

Тогда частота  $\omega$ , выражаемая формулой (210.3), будет мнимой. Это значит, что решение (210.2) уже несправедливо, а, следовательно, электрических колебаний в контуре не будет. В таком случае решение основного уравнения (209.5) имеет вид

$$q = A_1 \exp(-k_1 t) + A_2 \exp(-k_2 t), \quad (210.7)$$

где

$$k_1 = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}, \quad k_2 = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2},$$

а  $A_1$  и  $A_2$  — произвольные постоянные. Подставляя (210.7) в (209.5), можно убедиться, что уравнение при этом удовлетворяется тождественно, а, следовательно, (210.7) есть действительно искомого решения. Так как  $\omega_0^2 < \alpha^2$ , то  $k_1$  и  $k_2$  вещественны и положительны.

Значения постоянных  $A_1$  и  $A_2$  определяются начальными условиями задачи. Если таковыми являются условия (209.6), то

$$q|_{t=0} = A_1 + A_2 = q_0, \quad dq/dt|_{t=0} = -A_1 k_1 - A_2 k_2 = 0.$$

Это дает

$$A_1 = -q_0 k_2 / (k_1 - k_2), \quad A_2 = q_0 k_1 / (k_1 - k_2),$$

после чего решение (210.7) принимает вид

$$q = \frac{q_0}{k_1 - k_2} (k_1 \exp(-k_2 t) - k_2 \exp(-k_1 t)).$$

Если сопротивление контура очень велико, так что  $\alpha^2 \gg \omega_0^2$ , то  $k_1 \gg k_2$ , и в последнем выражении можно пренебречь вторым слагаемым по сравнению с первым, а в знаменателе —  $k_2$  по сравнению с  $k_1$ . Тогда

$$q = q_0 \exp(-k_2 t).$$

Этот случай соответствует рис. 358 з.

Из сказанного видно, что для возникновения электрических колебаний необходимо, чтобы выполнялось условие (210.1). Подставляя вместо  $\alpha$  и  $\omega_0$  их значения (209.4), находим это условие в виде

$$\frac{1}{LC} > \frac{r^2}{4L^2}, \quad r < 2\sqrt{\frac{L}{C}} = r_k. \quad (210.8)$$

## § 211. Поддержание колебаний. Искровой контур

Всякий реальный колебательный контур обладает всегда некоторым сопротивлением. Поэтому возникшие в нем электрические колебания затухают и через некоторое время, зависящее от добротности контура, прекращаются совсем. Но для технического использования электрических колебаний необходимо, чтобы они существовали как можно дольше, а для этого необходимо их поддерживать.

Простейший и наиболее старый способ поддержания колебаний заключается в применении искрового контура, изображенного на рис. 361. Он состоит из конденсатора  $C$ , катушки индуктивности  $L$  и искрового разрядника, соединенных последовательно.

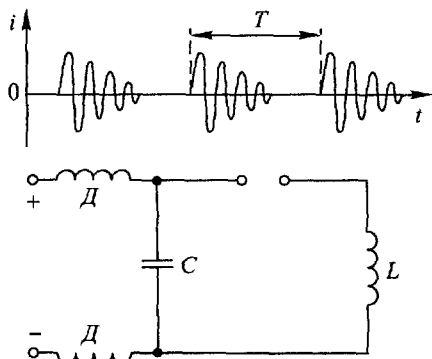


Рис. 361. Искровой колебательный контур

После включения источника напряжения конденсатор заряжается и напряжение между его обкладками увеличивается. Когда оно достигает напряжения пробоя искрового разрядника, через разрядник проскакивает искра, замыкающая колебательный контур, и в контуре возникает цуг затухающих колебаний. Эти колебания продолжают до тех пор, пока амплитуда напряжения на конденсаторе не делается равной напряжению гашения искры, после чего искровой разряд прекращается и колебания обрываются. Затем конденсатор начинает опять заряжаться, его напряжение увеличивается, и через некоторое время искровой промежуток опять пробивается, отчего в контуре возникает новый цуг затухающих колебаний и т.д. Чтобы возникающие колебания не закорачивались на источник тока, последний присоединен к конденсатору через катушки самоиндукции (дрессели)  $D$ . Они представляют

собой большое сопротивление для быстропеременных токов, но не препятствуют прохождению более медленно меняющегося тока от источника.

Основное достоинство искрового контура заключается в его исключительной простоте. Его недостатками являются сильный шум, издаваемый искрой, обгорание электродов разрядника и, самое главное, существенное отличие получаемых колебаний от синусоидальных (гармонических). Поэтому искровые контуры в настоящее время применяются редко.

## § 212. Автоколебательные системы

Для получения длительно существующих электрических (и механических) колебаний большое значение имеют так называемые *автоколебательные* системы. Устройства, объединяемые под этим общим названием, характеризуются следующими отличительными свойствами.

Автоколебательные системы способны генерировать незатухающие колебания. Эти колебания могут быть гармоническими (синусоидальными) или более сложной формы, но они могут продолжаться неограниченно долго, до тех пор, пока не вышли из строя элементы, образующие систему.

Автоколебательные системы отличаются от рассмотренного в § 207 колебательного контура с сопротивлением, равным нулю. Такой контур представляет собой предельный случай, недостижимый на практике. Автоколебательные же системы суть реальные устройства, сопротивление которых не равно нулю.

В автоколебательных системах незатухающие колебания возникают под влиянием процессов, происходящих внутри системы, и для их поддержания не требуется никаких внешних воздействий. В этом отношении автоколебания радикально отличаются от вынужденных колебаний, которые также могут быть незатухающими, но для своего существования требуют периодических внешних воздействий (в механике — внешних сил, в электричестве — приложенных извне напряжений).

В состав автоколебательных систем входит источник энергии (в случае механических колебаний — сжатая пружина, поднятый груз и т.д., в случае электрических — батарея или иной источник тока). Этот источник периодически включается самой системой и вводит в нее определенную энергию, компенсирующую потери на выделение тепла Джоуля-Ленца, что и делает колебания незатухающими.

Так как колебания в автоколебательных системах устанавливаются под влиянием процессов, происходящих внутри системы, то они возникают самопроизвольно (самовозбуждение), под действием случайных малых воздействий, выводящих систему

из равновесия (флуктуации). Возникшие малые колебания самопроизвольно нарастают, и в конце концов в системе образуются установившиеся колебания, свойства которых (частота, интенсивность, форма) определяются параметрами системы и не зависят от начальных условий.

Хорошим примером автоколебательной системы в механике могут служить известные всем часы, в которых незатухающие колебания маятника поддерживаются с помощью анкера.

Процессы в любой автоколебательной системе описываются обязательно нелинейными дифференциальными уравнениями. Так как теория нелинейных колебаний значительно более сложна, нежели теория колебаний линейных, рассмотренных в § 209, 210, мы ограничимся в дальнейшем только разъяснением принципов действия некоторых электрических автоколебательных систем.

### § 213. Использование отрицательных сопротивлений

Мы уже говорили, что некоторые проводники обладают падающей вольт-амперной характеристикой (напряжение уменьшается при возрастании тока), и поэтому дифференциальное сопротивление  $R_1 = dU/di$  таких проводников отрицательно (§ 176).

Если ввести в колебательный контур, обладающий сопротивлением  $r$ , проводник с падающей вольт-амперной характеристикой, то затухание контура уменьшается. При определенном соотношении между параметрами контура и включенным отрицательным сопротивлением затухание может исчезнуть совсем, и тогда в таком контуре возникают незатухающие колебания.

На рис. 362 изображена автоколебательная система, в которой отрицательным сопротивлением служит дуговой разряд. Постоянное напряжение от источника тока подводится к электродам дуги через дроссели  $D$ . Если емкость

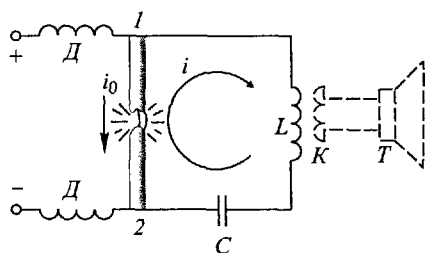


Рис. 362. Получение незатухающих колебаний с помощью отрицательного сопротивления

$C$  и индуктивность  $L$  подобраны так, что частота колебаний попадает в область звукового спектра, то появление колебаний приводит к звучанию дуги; описанная схема получила поэтому название *поющей дуги*. Появление звука объясняется тем, что через дугу протекает переменный ток электрических коле-

баний, который вызывает переменное нагревание дуги и вследствие этого ее пульсацию, так что в окружающем воздухе возникает звуковая волна. Этот звук можно значительно усилить, если вблизи катушки индуктивности  $L$  расположить вторую катушку  $K$ , соединенную с громкоговорителем  $T$ . Тогда в катушке  $K$  будет наводиться вследствие электромагнитной индукции переменный ток и громкоговоритель будет издавать звук, высота которого будет соответствовать частоте колебаний в контуре. Изменяя емкость и индуктивность, можно убедиться, что при увеличении  $L$  или  $C$  высота звука понижается, т.е. частота колебаний уменьшается.

В этой схеме вместо дуги мы могли бы использовать туннельный диод. Однако падающий участок его характеристики расположен в области малых напряжений и токов (ср. рис. 350), и, следовательно, амплитуда колебаний в этом случае была бы слабее.

Рассмотрим теперь подробнее, каким образом здесь возникают автоколебания. Припишем току и напряжению определенные знаки и будем считать ток контура положительным, если он направлен по часовой стрелке (см. рис. 362), а напряжение  $U$  между точками  $1$  и  $2$  положительным в том случае, если потенциал точки  $1$  выше потенциала точки  $2$ . Следовательно, положительное напряжение между  $1$  и  $2$  вызывает в контуре ток положительного направления. Обозначим через  $i_0$  постоянный ток, существующий в дуге в отсутствие колебаний, и предположим, что вследствие каких-либо случайных причин в контуре возникли колебания и появился переменный ток  $i$ . Этот ток будет проходить и через дугу и алгебраически складываться с током  $i_0$ . Так как положительное направление тока  $i$  противоположно направлению  $i_0$  (см. рис. 362), то колебания полного тока дуги будут изображаться кривой  $I = i_0 + i$ , минимумы которой совпадают с максимумами кривой  $i(t)$ , и наоборот (рис. 363 б).

Колебания тока  $I$  вызовут переменное напряжение и между точками  $1$  и  $2$ , которое можно найти из вольт-амперной характеристики дуги (рис. 363 а). Это напряжение изображается кривой  $U$  (рис. 363 в), которая имеет постоянную составляющую  $U_0$  и переменную составляющую  $u$ . Сравним теперь переменные составляющие тока ( $i$ ) и напряжения ( $u$ ). Из рис. 363 б, в видно, что они находятся в фазе, т.е. положительные значения  $u$  соответствуют положительным значениям  $i$  и наоборот. Но это значит, что переменное напряжение способствует переменному току, его «подталкивает», или, иными словами, что в контур вводится определенная энергия за счет источника тока. Если эта энергия больше расходуемой на выделение тепла Джоуль-Ленца, то амплитуда колебаний будет нарастать. При этом будут расти и потери энергии в контуре, и когда они станут равны

энергии, вводимой в контур, установятся незатухающие колебания постоянной амплитуды.

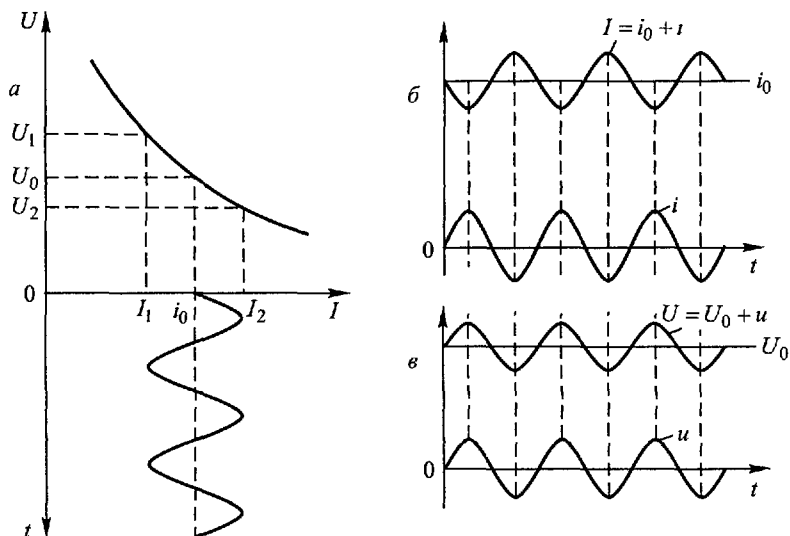


Рис. 363. Возникновение незатухающих колебаний в контуре с отрицательным сопротивлением

Условия самовозбуждения колебаний в цепи, содержащей проводник с отрицательным дифференциальным сопротивлением, рассмотрены в Добавлении 9.

## § 214. Ламповые генераторы. Обратная связь

В настоящее время почти исключительно применяют автоколебательные схемы с электронными лампами или полупроводниковыми приборами. Они обладают большой надежностью в работе и позволяют широко варьировать частоту, интенсивность и форму колебаний.

Мы рассмотрим принцип работы таких устройств на примере лампового генератора, одна из простейших схем которого изображена на рис. 364. Колебательный контур, содержащий емкость  $C$  и индуктивность  $L$ , включен в цепь сетки электронной лампы. В цепи анода, кроме питающей батареи, имеется еще катушка  $K$ , расположенная в непосредственной близости к катушке  $L$ , так что между обеими катушками существует индуктивная связь.

Принцип действия генератора заключается в следующем. Когда в колебательном контуре возникают колебания (при



включении батареи или под влиянием каких-либо случайных причин), то между обкладками конденсатора появляется переменное напряжение. Такое же напряжение возникает между сеткой и катодом лампы, так как они присоединены к обкладкам конденсатора. Вследствие этого в цепи анода появляется переменный ток  $i_a$ . Но катушки  $K$  и  $L$  индуктивно связаны между собой, и поэтому переменный ток  $i_a$  вызывает в катушке  $L$  переменную ЭДС взаимной индукции  $\mathcal{E} = -M di_a/dt$  ( $M$  — коэффициент взаимной индуктивности). Эта ЭДС, в зависимости от взаимного направления витков катушек  $K$  и  $L$ , может либо препятствовать колебаниям тока в контуре, либо способствовать им. Очевидно, что, пересоединяя в случае необходимости концы катушки  $K$ , можно всегда добиться того, чтобы возникающая ЭДС  $\mathcal{E}$  была того же знака, что и ток  $i$  в контуре. Тогда работа этой ЭДС будет положительна, и колебательный контур будет получать энергию за счет источника тока, так что затухание контура уменьшится. Если связь между катушками достаточно велика, получаемая энергия может стать больше той, которая затрачивается в контуре. В этом случае амплитуда колебаний будет нарастать до тех пор, пока получаемая энергия не сделается равной потерям, после чего установятся незатухающие колебания.

Рисунок 365 более детально разъясняет сказанное. Будем считать заряд конденсатора положительным, если на сетке возникает положительный потенциал относительно катода, а за положительное направление тока контура  $i$  (и ЭДС  $\mathcal{E}$ ) примем направление, указанное на рис. 364. Тогда, если сеточное напряжение  $u_c$  изменяется в соответствии с кривой рис. 365 б, то ток контура  $i$  изображается кривой в. Переменный ток  $i_a$  в цепи анода, вызываемый колебаниями сеточного напряжения  $u_c$ , можно найти при помощи сеточной характеристики триода (рис. 365 а). Ее «рабочая точка»  $A$  выбрана в средней части, где характеристика близка к линейной. Так как положительный потенциал сетки вызывает положительный ток  $i_a$ , то изменения  $i_a$  изображаются кривой г. Кривые д и е дают изменения ЭДС взаимной индукции  $\mathcal{E}$  при двух возможных направлениях витков катушки  $K$ . Сравнивая эти кривые с кривой в, мы видим, что в случае кривой е колебания ЭДС и тока находятся в противофазе: при положительном токе  $i$  возникает отрицательная ЭДС  $\mathcal{E}_2$  и нао-

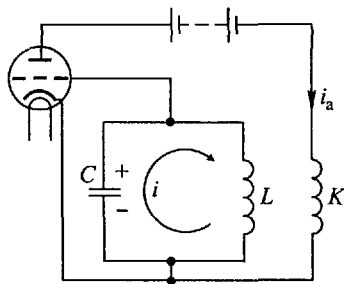


Рис. 364. Ламповый генератор с колебательным контуром в цепи сетки

борот. В последнем случае ЭДС взаимной индукции препятствует колебаниям, и затухание контура увеличится. В случае  $d$ , напротив, колебания ЭДС и тока находятся в фазе и ЭДС способствует колебаниям тока, отчего затухание контура уменьшится. При достаточно сильной связи в этом случае в контуре возникают незатухающие колебания.

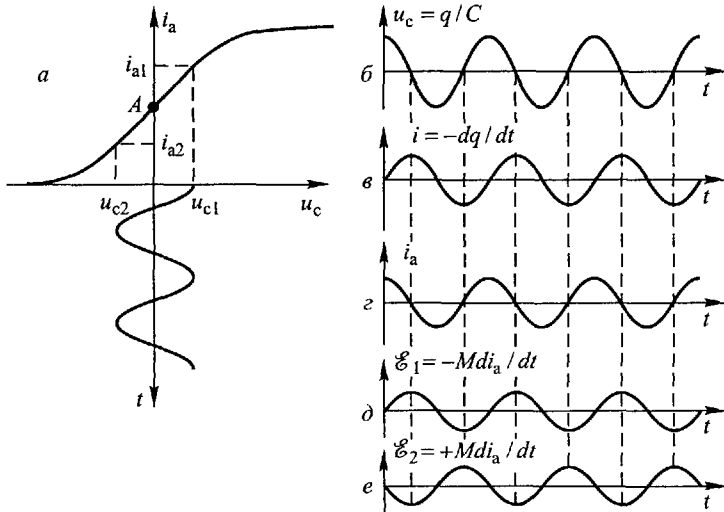


Рис. 365. Возникновение незатухающих колебаний в ламповом генераторе

Наиболее характерной особенностью рассмотренной схемы лампового генератора является то, что колебательный контур воздействует на другую цепь, содержащую источник тока (в нашем случае — на анодную цепь лампы), а эта последняя оказывает обратное действие на колебательный контур, которое и поддерживает колебания. Такой прием получил название *обратной связи* и широко применяется в различных механических и электрических автоколебательных системах.

Так, например, обратную связь мы имеем в часах. Если бы в часах не было анкера и ходового колеса, то закрученная пружина (или гири) действовала бы на маятник с постоянной силой и сообщала бы ему одностороннее движение. Подобно этому, если в ламповом генераторе устранить катушку обратной связи  $K$  и лампу и замкнуть контур непосредственно на батарею, то в контуре будет лишь постоянный ток. В часах колеблющийся маятник с помощью анкера и ходового колеса управляет силой, действующей на него самого, и превращает постоянную силу пружины в периодические толчки. В ламповом генераторе колебательный контур с помощью лампы и катушки обратной связи управляет ЭДС взаимной индукции, действующей в нем самом, и делает эту ЭДС периодической.

Помимо разобранный, известны многочисленные другие автоколебательные схемы с электронными лампами. Мы ограничимся только еще одним примером, показанным на рис. 366. В этой схеме колебательный контур находится в цепи анода, а катушка обратной связи — в цепи сетки. Анодная батарея включена параллельно лампе (на рисунке не показана), а не последовательно с ней, как на рис. 364. Чтобы батарея не закорачивалась на индуктивность  $L$ , в анодную цепь введен разделительный конденсатор  $C_p$ , который не препятствует прохождению

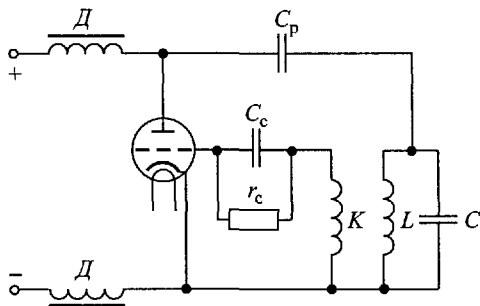


Рис. 366. Ламповый генератор с колебательным контуром в цепи анода

быстропеременного тока электрических колебаний, но не пропускает постоянный ток батареи. Для того чтобы, с другой стороны, токи электрических колебаний не уходили в батарею, последняя подключена через дроссели  $D$ . В схеме показаны также сеточный конденсатор  $C_c$  и утечка сетки  $r_c$  (не изображенные на рис. 364), которые позволяют поддерживать на сетке небольшой отрицательный потенциал и тем самым устранять бесполезный ток сетки. Принцип действия этой схемы — такой же, как и разобранный выше.

## § 215. Условие самовозбуждения

Посмотрим теперь, какому количественному условию должны удовлетворять параметры лампового генератора (сопротивление контура  $r$ , коэффициент взаимной индуктивности  $M$  и т.д.) для того, чтобы были возможны автоколебания.

Обратимся опять к схеме рис. 364. Колебательный контур генератора можно изобразить эквивалентной схемой (рис. 367), в которой действие обратной связи представлено некоторым генератором с переменной ЭДС  $\mathcal{E} = -M di_a/dt$ . Применяя к этому контуру второй закон Кирхгофа и рассуждая так же, как и в § 209, получим

$$ri - U_C = -L \frac{di}{dt} - M \frac{di_a}{dt},$$

причем, как и прежде,

$$U_C = q/C, \quad i = -dq/dt.$$

Исключая из этих уравнений  $U_C$  и  $i$ , находим

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + r \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} - M \frac{di_a}{dt} = 0.$$

Здесь анодный ток  $i_a$  есть функция сеточного напряжения  $u_c$  (выражаемая сеточной характеристикой лампы), которое в свою очередь зависит от заряда  $q$ . Но сеточная характеристика лампы нелинейна. Поэтому и написанное уравнение есть нелинейное уравнение, а, следовательно, автоколебания являются нелинейными колебаниями.

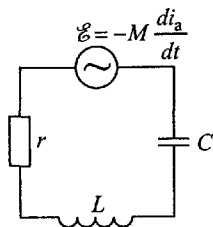


Рис. 367. Эквивалентная схема генератора, изображенного на рис. 364

Однако для решения поставленного вопроса задачу можно упростить. Положим, что мы имеем малые колебания и что рабочая точка выбрана в средней части характеристики (как на рис. 365). Тогда малый отрезок характеристики можно считать отрезком прямой линии и уравнение колебаний сделается линейным. Кроме того, будем считать для простоты, что проницаемость сетки лампы очень мала, так что  $i_a$  зависит практически только от потенциала сетки  $u_c$  (но не от потенциала анода  $u_a$ ). Тогда

$$i_a = A + S u_c = A + \frac{S}{C} q,$$

где  $S$  — крутизна сеточной характеристики. Поэтому

$$\frac{di_a}{dt} = \frac{S}{C} \frac{dq}{dt}.$$

Подставляя это выражение в уравнение колебаний и деля обе части его на  $L$ , находим

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \left( \frac{r}{L} - \frac{SM}{LC} \right) \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0. \quad (215.1)$$

Это уравнение имеет тот же вид, что и (209.5), и его решение есть

$$q = A e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi). \quad (215.2)$$

Но в данном случае коэффициент затухания  $\beta$  равен

$$\beta = \frac{1}{2} \left( \frac{r}{L} - \frac{SM}{LC} \right). \quad (215.3)$$

Он меньше, чем коэффициент затухания в отсутствие обратной связи:  $\alpha = r/2L$ , и поэтому можно сказать, что действие обратной связи эквивалентно введению в контур отрицательного сопротивления (при этом везде предполагается, что направление витков в катушке обратной связи соответствует кривой  $\partial$  рис. 365).

Из (215.3) видно, что при известных условиях коэффициент затухания  $\beta$  может сделаться равным нулю или даже отрицательным, что соответствует возникновению автоколебаний. Это будет в случае

$$SM/C > r. \quad (215.4)$$

Написанное условие есть условие самовозбуждения лампового генератора.

Если выполняется условие (215.4), то  $\beta < 0$ , и решение (215.2) выражает нарастающие колебания, амплитуда которых увеличивается с течением времени до бесконечности. Причина этого странного результата заключается в том, что мы заменили нелинейное уравнение колебаний приближенным линейризованным уравнением (215.1), которое пригодно только для малых колебаний (начальной стадии процесса), но не для описания всех свойств

генератора. В действительности же, после самовозбуждения, амплитуда нарастающих колебаний будет стремиться к некоторому конечному пределу, определяемому свойствами генератора и не зависящему от начальных условий.

## § 216. Релаксационные колебания

В рассмотренных автоколебательных схемах существенной частью был колебательный контур, содержащий индуктивность и емкость. Такие генераторы ( $LC$ -генераторы) подобны механическим колебательным системам, в которых колебания возникают вследствие наличия массы (индуктивность) и упругости (емкость).

Однако одновременное наличие индуктивности и емкости не обязательно для получения колебаний. На рис. 368 *a* показана колебательная схема, в которой индуктивность не играет никакой роли. Здесь конденсатор  $C$ , параллельно которому присоединена неоновая лампа  $НЛ$ , заряжается от источника постоянного тока через большое сопротивление  $r$ . Если бы неоновой лампы не было, то напряжение конденсатора  $U_C$  увеличивалось

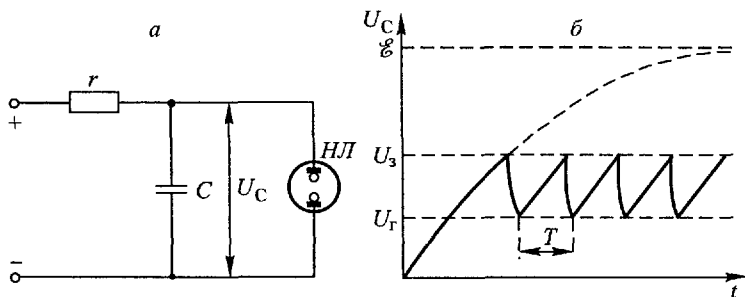


Рис. 368. Релаксационные электрические колебания

бы с течением времени согласно штриховой кривой (рис. 368 *б*) и стремилось бы асимптотически к ЭДС источника  $\mathcal{E}$ . Уравнение этой кривой выражается формулой (74.1), а ее начальную часть приближенно можно представить прямой линией:

$$U_C = \frac{\mathcal{E}}{rC} t.$$

При наличии неоновой лампы происходит иное. Когда напряжение  $U_C$  достигает напряжения зажигания  $U_3$ , в лампе возникает газовый разряд и конденсатор начинает быстро разряжаться (так как сопротивление неоновой лампы значительно меньше сопротивления  $r$ ). Когда напряжекие  $U_C$  уменьшается до напря-

жения гашения разряда  $U_r$ , разряд в лампе обрывается и конденсатор начинает опять заряжаться, отчего его напряжение вновь увеличивается. Затем в определенный момент времени в лампе снова зажигается разряд и описанные процессы повторяются периодически. В результате возникают колебания напряжения  $U_C$ , выражаемые пилообразной сплошной кривой (рис. 368 б). По такому же закону изменяется и заряд конденсатора.

Предположим для простоты, что время разрядки конденсатора весьма мало по сравнению со временем зарядки. Тогда период колебаний есть время, в течение которого напряжение повышается от значения  $U_r$  до значения  $U_3$ . Он равен

$$T = \frac{U_3 - U_r}{g} rC.$$

Мы видим, что в рассматриваемом случае электрические колебания возникают потому, что существует определенное время релаксации контура (§ 73)  $\tau = rC$ , причем период колебаний определяется этим временем. Поэтому колебания рассмотренного типа получили название *релаксационных колебаний*.

Напомним, что с релаксационными колебаниями мы встречаемся часто и в механике. Механическими релаксационными колебаниями объясняются вибрация тормозов трамвая, звучание струн в смычковых музыкальных инструментах и другие явления.

В рассмотренной выше схеме (см. рис. 368) колебания напряжения изображаются пилообразной кривой и сильно отличаются от синусоидальных (гармонических) колебаний. Однако это не значит, что нельзя получить релаксационные колебания синусоидальной формы в других схемах. Оказывается, что, комбинируя несколько конденсаторов и сопротивлений с электронными лампами, можно создать практически гармонические релаксационные колебания. Такие *RC-генераторы* получили широкое распространение в радиотехнике и применяются в различных измерительных устройствах. Они особенно удобны для изменения частоты в широких пределах (от нескольких герц до многих килогерц) и не требуют громоздких катушек индуктивности, необходимых для получения низких частот в *LC-генераторах*.

## Г Л А В А XXI

### ВЫНУЖДЕННЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ. ПЕРЕМЕННЫЕ ТОКИ

Рассмотрим теперь электрические колебания, возникающие в том случае, если в цепи имеется генератор, электродвижущая

сила которого изменяется периодически. Они подобны механическим колебаниям тела, вызываемым периодической внешней силой.

В настоящей главе мы ограничимся только цепями с сосредоточенными емкостями и индуктивностями и будем считать переменные токи, как и в гл. XX, квазистационарными. Иными словами, мы будем предполагать, что время  $\tau$ , в течение которого электрические величины принимают установившиеся значения, мало по сравнению с периодом колебаний  $T$ , и поэтому будем применять к мгновенным значениям всех электрических величин законы постоянного тока.

Далее, мы будем рассматривать только такие токи, сила которых меняется по синусоидальному закону

$$i = i_0 \sin(\omega t + \varphi).$$

Это объясняется несколькими причинами. Во-первых, как мы знаем (гл. XII), все технические генераторы переменного тока имеют ЭДС, изменяющуюся по закону, очень близкому к синусоидальному, и потому создаваемые ими токи практически являются синусоидальными. Во-вторых, теория синусоидальных токов особенно проста, и поэтому на примере таких токов можно легко выяснить основные особенности электрических колебаний.

Правда, в некоторых случаях на практике приходится встречаться и с колебаниями более сложной формы. Однако легко показать, что всякое несинусоидальное колебание можно представить в виде суммы синусоидальных, гармонических, колебаний (теорема Фурье), и поэтому исследование более сложных колебаний можно свести к исследованию колебаний синусоидальных. Таким образом, синусоидальные, или гармонические, колебания являются одновременно и самым важным, и самым простым типом колебаний.

Наконец, везде в дальнейшем мы будем считать, что колебания являются установившимися. Иными словами, будем предполагать что с момента начала колебаний прошло достаточно большое время, так что амплитуды тока и напряжения уже достигли постоянного значения (ср. § 222).

## § 217. Сопротивление в цепи переменного тока

Рассмотрим сначала частный случай, когда генератор переменного тока замкнут на внешнюю цепь, имеющую настолько малые индуктивность и емкость, что ими можно пренебречь. Положим, что в цепи имеется переменный ток

$$i = i_0 \sin \omega t,$$

и найдем, по какому закону изменяется напряжение между концами цепи  $a$  и  $b$  (рис. 369). Применяя к участку  $arб$  закон Ома, имеем

$$U = ir = i_0 r \sin \omega t.$$

Таким образом, напряжение на концах участка изменяется также по закону синуса, причем разность фаз между колебаниями тока и напряжения равна нулю. Напряжение и ток одновременно

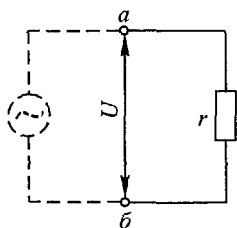


Рис. 369. Сопротивление в цепи переменного тока

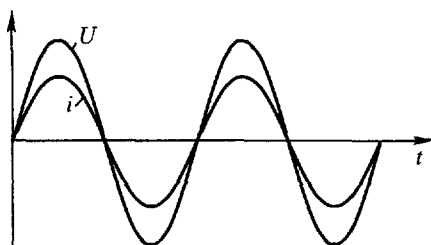


Рис. 370. Колебания тока и напряжения на сопротивлении

но достигают максимальных значений и одновременно обращаются в нуль (рис. 370). Максимальное значение напряжения есть

$$U_0 = i_0 r.$$

В § 129 мы показали, что гармонически изменяющиеся величины можно наглядно изображать при помощи векторных диаграмм.

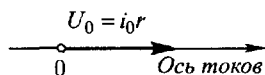


Рис. 371. Векторная диаграмма напряжения на сопротивлении

Применим этот способ к нашему случаю. Выберем ось диаграммы таким образом, чтобы вектор, изображающий колебания тока, был направлен вдоль этой оси. В дальнейшем мы будем называть ее *осью токов*. Тогда вектор, изображающий колебания напряжения, будет направлен вдоль оси токов, так

как разность фаз между током и напряжением равна нулю (рис. 371). Длина этого вектора равна амплитуде напряжения  $i_0 r$ .

## § 218. Емкость в цепи переменного тока

Положим теперь, что участок цепи содержит конденсатор емкости  $C$ , причем сопротивлением и индуктивностью участка можно пренебречь, и посмотрим, по какому закону будет изменяться напряжение на концах участка в этом случае. Обозначим разность потенциалов точек  $a$  и  $b$  (рис. 372) через  $U = U_a - U_b$  и будем считать заряд конденсатора  $q$  и силу тока  $i$  положи-



тельными, если они соответствуют рис. 372. Тогда  $U = q/C$ . Но  $i = dq/dt$ , и, следовательно,

$$q = \int i dt.$$

Если сила тока в цепи изменяется по закону

$$i = i_0 \sin \omega t, \quad (218.1)$$

то заряд конденсатора равен

$$q = \int i_0 \sin \omega t dt = -\frac{i_0}{\omega} \cos \omega t + q_0.$$

Постоянная интегрирования  $q_0$  здесь обозначает произвольный постоянный заряд конденсатора, не связанный с колебаниями тока, и поэтому мы положим  $q_0 = 0$ . Следовательно,

$$U = -\frac{i_0}{\omega C} \cos \omega t = \frac{i_0}{\omega C} \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right). \quad (218.2)$$

Сравнивая (218.1) и (218.2), мы видим, что при синусоидальных колебаниях тока в цепи напряжение на конденсаторе изменяется также по закону синуса, однако колебания напряжения на конденсаторе отстают по фазе от колебаний тока на  $\pi/2$ . Изменения тока и напряжения во времени изображены графически на рис. 373.

Полученный результат имеет простой физический смысл. Напряжение на конденсаторе в какой-либо момент времени определяется существующим зарядом конденсатора. Но этот заряд был образован током, протекавшим предварительно в более ранней стадии колебаний. Поэтому и колебания напряжения запаздывают относительно колебаний тока. Так, например, когда в момент времени  $t = 0$  си-

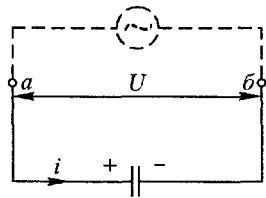


Рис. 372. Конденсатор в цепи переменного тока

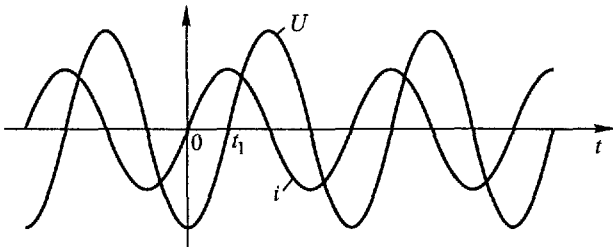


Рис. 373. Колебания тока в цепи напряжения на конденсаторе

ла тока равна нулю (рис. 373), то на конденсаторе еще имеется отрицательный заряд, перенесенный током в предыдущий период времени, и напряжение не равно нулю. Для обращения в

нуль этого заряда нужно, чтобы некоторое время  $t_1$  проходил ток положительного направления, и поэтому, когда заряд конденсатора (а значит, и напряжение) станет равным нулю, сила тока уже не будет равна нулю.

Формула (218.2) показывает, что амплитуда напряжения на конденсаторе равна

$$U_0 = i_0 / \omega C.$$

Сравнивая это выражение с законом Ома для участка цепи с постоянным током ( $U = ir$ ), мы видим, что величина

$$r_C = 1 / \omega C \quad (218.3)$$

играет роль сопротивления участка цепи. Поэтому она получила название *кажущегося сопротивления емкости*.

Если в (218.3) выразить  $C$  в фарадах, а  $\omega$  — в секундах в минус первой степени, то  $r_C$  получится в омах.

Найденные результаты можно представить в виде векторной диаграммы (рис. 374). Здесь вектор, изображающий колебания

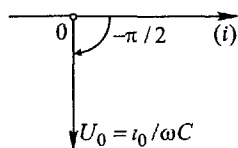


Рис. 374. Векторная диаграмма напряжения на конденсаторе

напряжения, уже не совпадает с осью токов. Он повернут в отрицательном направлении (по часовой стрелке) на угол  $\pi/2$ . Длина этого вектора равна амплитуде напряжения  $i_0 / \omega C$ .

Из формулы (218.3) видно, что сопротивление емкости  $r_C$  зависит также от частоты  $\omega$ . Поэтому при очень высоких частотах даже малые емкости могут представлять совсем небольшое сопротивление для переменного тока. Этим объясняются многие весьма неожиданные на первый взгляд явления.

На рис. 375 изображена схема опыта, иллюстрирующего влияние малых емкостей при больших частотах. Экспериментатор стоит на изолирующей скамейке со стеклянными ножками и держит лампочку накаливания, касаясь рукой ее нарезного цоколя. Второй контакт лампочки касается одного из выводов высоковольтного источника переменного напряжения с частотой в несколько миллионов колебаний в секунду; второй вывод источника заземлен (в качестве источника можно использовать, например, резонансный трансформатор, описанный в § 236). Следовательно, цепь разомкнута для постоянного тока (она разрывается изолирующей скамейкой). Тем не менее в цепи проходит ток силой в несколько ампер и нить лампочки ярко накаляется. Это объясняется тем, что тело экспериментатора и Земля образуют обкладки конденсатора, а конденсаторы, как мы видели, пропускают переменные токи. Поэтому цепь, разомкнутая для постоянного тока, оказывается замкнутой для быстропеременного тока: токи проводимости в металлических проводах за-

мыкаются токами смещения (§ 136) внутри конденсатора. Так как частота  $\omega$  очень велика, то уже при ничтожной емкости конденсатора (десятки пикофарад) сопротивление  $r_C$  становится настолько малым, что в цепи появляются сильные токи.

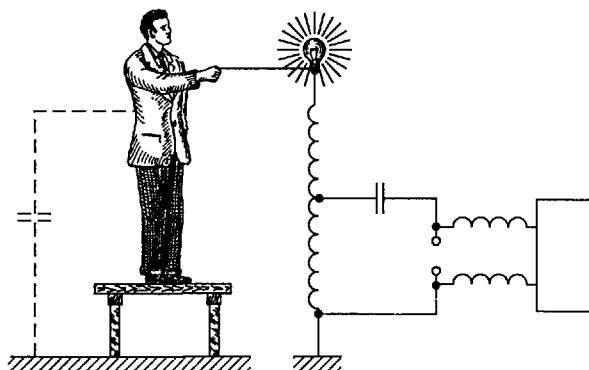


Рис. 375. Схема опыта для демонстрации тока смещения при большой частоте

Этот опыт хорошо демонстрирует также существование скин-эффекта, или вытеснение переменных токов на поверхность проводника (§ 134). Через тело экспериментатора проходят токи силой в несколько ампер, которые в случае постоянного тока вызывали бы сильное физиологическое действие и были бы очень опасны для жизни. Однако в описанном опыте экспериментатор не ощущает эти токи, так как они протекают только в тонком поверхностном слое и не заходят в глубь тела.

## § 219. Индуктивность в цепи переменного тока

Рассмотрим, наконец, третий частный случай, когда участок цепи содержит только индуктивность. Обозначим по-прежнему через  $U = U_a - U_b$  разность потенциалов точек  $a$  и  $b$  (рис. 376) и будем считать ток  $i$  положительным, если он направлен от  $a$  к  $b$ . При наличии переменного тока в катушке индуктивности возникнет ЭДС самоиндукции, и поэтому мы должны применить закон Ома для участка цепи с ЭДС (§ 68):

$$U = ir - \mathcal{E}.$$

В нашем случае  $r = 0$ , а ЭДС самоиндукции

$$\mathcal{E} = -L di/dt.$$

Поэтому

$$U = L di/dt.$$

Если сила тока в цепи изменяется по закону

$$i = i_0 \sin \omega t, \quad (219.1)$$

то

$$U = i_0 \omega L \cos \omega t = i_0 \omega L \sin (\omega t + \pi/2). \quad (219.2)$$

Сравнивая (219.1) и (219.2), мы видим, что колебания напряжения на индуктивности опережают по фазе колебания тока на  $\pi/2$ . Когда сила тока, возрастая, проходит через нуль, напряжение уже достигает максимума, после чего начинает уменьшаться; когда сила тока становится максимальной, напряжение проходит через нуль, и т.д. (рис. 377).

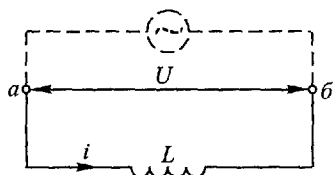


Рис. 376. Индуктивность в цепи переменного тока

Физическая причина возникновения этой разности фаз заключается в следующем. Если сопротивление участка равно нулю, то приложенное напряжение в точности уравнивает ЭДС

самоиндукции и поэтому равно ЭДС самоиндукции с обратным знаком. Но эта последняя пропорциональна не мгновенному значению тока, а скорости его изменения, которая будет наибольшей в те моменты, когда сила тока проходит через нуль. Поэтому максимумы напряжения совпадают с нулями тока и наоборот.

Из (219.2) следует, что амплитуда напряжения равна

$$U_0 = i_0 \omega L,$$

и, следовательно, величина

$$r_L = \omega L \quad (219.3)$$

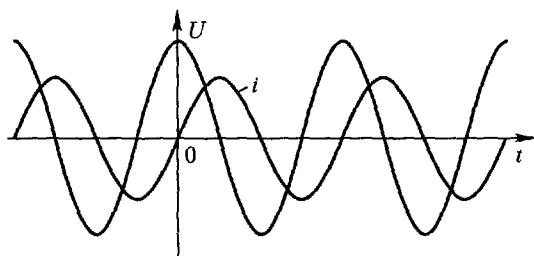


Рис. 377. Колебания тока и напряжения на индуктивности

играет ту же роль, что и сопротивление участка. Поэтому  $r_L$  называют *кажущимся сопротивлением индуктивности*.

Если в формуле (219.3)  $L$  выражено в генри, а  $\omega$  — в секундах в минус первой степени, то  $r_L$  будет выражено в омах.

Так же, как и выше, найденные результаты можно представить векторной диаграммой. Она показана на рис. 378. Вектор, изображающий колебания напряжения, повернут относительно оси токов в положительном направлении (против часовой стрелки) на угол  $\pi/2$ , а его длина, равная амплитуде напряжения, есть  $i_0 \omega L$ .

Кажущееся сопротивление индуктивности используют для устройства дросселей. Они представляют собой проволочные катушки (с железом или без него), вводимые в цепи переменного тока для регулирования силы тока. По сравнению с реостатом дроссели имеют то важное преимущество, что увеличение сопротивления цепи с их помощью не сопровождается увеличением тепла Джоуля-Ленца, а следовательно, не приводит к бесполезной затрате энергии. Кроме того, так как индуктивное сопротивление существует только для переменных токов, дроссели позволяют разделять постоянные и переменные токи. Примеры такого применения дросселей мы уже имели в схемах, изображенных на рисунках 361, 362 и 366.

Формула (219.3) показывает, что индуктивное сопротивление  $r_L$  пропорционально частоте переменного тока  $\omega$ , и поэтому

при очень больших частотах даже малые индуктивности могут представлять значительное сопротивление для переменных токов. Это можно продемонстрировать при помощи эффектного опыта, изображенного на рис. 379. Толстый медный стержень (диаметром около 5 мм) изогнут в виде дуги  $ab\bar{c}d$  длиной около 1 м и его концы присоединены к источнику быстросменного тока с частотой в несколько миллионов колебаний в секунду (как в опыте, показанном на рис. 375). Параллельно участку дуги  $b\bar{c}$  присоединена обычная лампа накаливания. Сопротивление дуги (для постоянного тока) равно

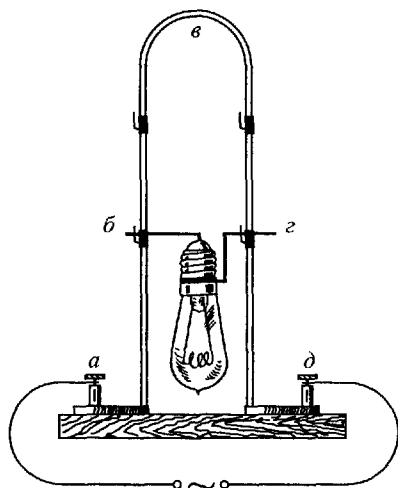


Рис. 379. Влияние индуктивности при большой частоте

около 0,001 Ом, а сопротивление лампы — около 100 Ом. Если бы к концам дуги был присоединен источник постоянного тока, то дуга осуществляла бы короткое замыкание и практически весь ток устремился бы в дугу, не заходя в лампу. Однако для быстросменного тока наблюдается совсем другое. Так

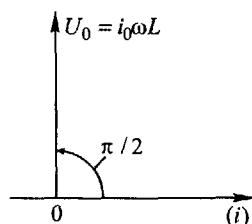


Рис. 378. Векторная диаграмма напряжения на индуктивности

как дуга обладает некоторой, хотя и малой, индуктивностью, она имеет еще индуктивное сопротивление. При указанных условиях последнее становится настолько большим, что, напротив, ток практически не ответвляется в дугу, а целиком проходит через лампу, отчего ее нить ярко накаляется.

## § 220. Закон Ома для переменных токов

Пользуясь результатами, полученными в § 217–219, можно найти соотношение между колебаниями тока и напряжения в любой цепи.

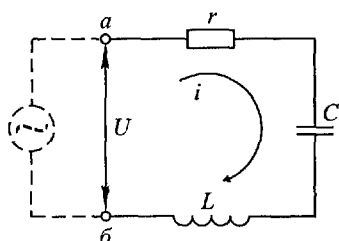


Рис. 380. Последовательное соединение сопротивления, емкости и индуктивности

Рассмотрим сначала последовательное соединение сопротивления, емкости и индуктивности (рис. 380). Положим по-прежнему, что ток в цепи изменяется по закону

$$i = i_0 \sin \omega t, \quad (220.1)$$

и вычислим напряжение между концами цепи. Так как при последовательном соединении проводников складываются напряжения, то искомое напряжение и

есть сумма трех напряжений: на сопротивлении, на емкости и на индуктивности, причем каждое из этих напряжений, как мы видели в § 217–219, изменяется во времени по закону синуса.

Для сложения этих трех гармонических колебаний мы воспользуемся векторной диаграммой напряжений (рис. 381). Колебания напряжения на сопротивлении изображаются на ней вектором, направленным вдоль оси токов и имеющим длину  $U_a = i_0 r$ , колебания же напряжения на индуктивности и емкости — векторами, перпендикулярными к оси токов, с длинами  $i_0 \omega L$  и  $i_0 / \omega C$ . Складывая два последних колебания, мы получим одно гармоническое колебание, изображаемое вектором, перпендикулярным к оси токов и имеющим длину

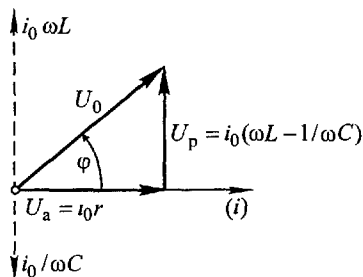


Рис. 381. Векторная диаграмма напряжений для цепи, изображенной на рис. 380

$$U_p = i_0(\omega L - 1/\omega C).$$

Таким образом, полное напряжение между концами цепи  $a$  и  $b$  можно рассматривать как сумму двух гармонических колебаний: напряжения  $U_a$ , совпадающего по фазе с током, и напряжения  $U_p$ , отличающегося по фазе на  $\pi/2$ . Первое из них ( $U_a$ ) получило название *активной* составляющей напряжения, а второе ( $U_p$ ) — *реактивной* составляющей. Оба эти колебания, складываясь, дают также гармоническое колебание

$$U = U_0 \sin(\omega t + \varphi). \quad (220.2)$$

Согласно сказанному в § 129 оно изображается векторной суммой, причем длина результирующего вектора равна амплитуде напряжения  $U_0$ , а угол, образованный результирующим вектором с осью токов, — сдвигу фазы  $\varphi$ . Из треугольника напряжений на рис. 381 получаем

$$U_0 = i_0 \sqrt{r^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}. \quad (220.3)$$

Далее из рис. 381 видно, что

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{r}. \quad (220.4)$$

Формула (220.3) имеет сходство с законом Ома в том смысле, что амплитуда напряжения  $U_0$  пропорциональна амплитуде тока  $i_0$ . Поэтому формулу (220.3) иногда называют *законом Ома для переменного тока*. Однако нужно помнить, что эта формула относится только к *амплитудам*, но не к мгновенным значениям  $U$  и  $i$ .

В случае постоянного тока отношение напряжения к силе тока называют сопротивлением проводника. Подобно этому при переменном токе отношение амплитуды полного напряжения к амплитуде тока

$$R = U_0/i_0 = \sqrt{r^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} \quad (220.5)$$

называют сопротивлением цепи для переменного тока.

Аналогично отношение амплитуды активной составляющей напряжения  $U_a$  к амплитуде тока  $i_0$

$$X = U_a/i_0$$

называется *активным сопротивлением* цепи. В рассмотренной цепи оно равно сопротивлению для постоянного тока. Активное сопротивление всегда приводит к выделению тепла Джоуля-Ленца.

Отношение же

$$Y = U_p/i_0 = \omega L - 1/\omega C$$

есть *реактивное сопротивление* цепи. Для данного случая оно равно разности кажущихся сопротивлений индуктивности и емкости. Наличие реактивного сопротивления не сопровождается

выделением тепла (ср. § 223). Из (220.5) видно, что активное и реактивное сопротивления цепи складываются геометрически.

Во всех приведенных выше рассуждениях мы рассматривали участок цепи и понимали под  $U$  напряжение, приложенное к концам участка  $a$  и  $b$  (рис. 380). Однако все полученные формулы можно применять и к замкнутой цепи ( $arCLba$ , рис. 380), включающей в себя генератор. Действительно, для всех наших рассуждений было безразлично, в каком именно месте цепи сосредоточены емкость, индуктивность и сопротивление. Поэтому в замкнутой цепи рис. 380 мы можем считать, что  $r$  представляет собой суммарное активное сопротивление цепи, включая и внутреннее сопротивление генератора, а  $C$  и  $L$  — емкость и индуктивность цепи, и заменить реальный генератор воображаемым, у которого внутреннее сопротивление равно нулю. При этом напряжение  $U$  между точками  $a$  и  $b$  будет равно ЭДС генератора  $\mathcal{E}$ . Отсюда следует, что формулы (220.1)–(220.5) справедливы и для замкнутой цепи переменного тока, если под  $r$ ,  $C$  и  $L$  понимать их значения для всей цепи и заменить во всех формулах  $U$  на ЭДС генератора  $\mathcal{E}$ .

### § 221. Резонанс напряжений

Положим, что в цепи, содержащей последовательно соединенные емкость  $C$  и индуктивность  $L$  и обладающей активным сопротивлением  $r$ , действует переменная ЭДС, изменяющаяся по закону

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t.$$

Тогда, согласно сказанному в § 220, в цепи будет протекать переменный ток

$$i = i_0 \sin(\omega t - \varphi),$$

амплитуда которого  $i_0$  связана с амплитудой ЭДС  $\mathcal{E}_0$  законом Ома для переменного тока

$$i_0 = \mathcal{E}_0 / R. \quad (221.1)$$

Здесь  $R$  есть сопротивление всей цепи:

$$R = \sqrt{r^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}, \quad (221.2)$$

а фазовый угол  $\varphi$ , на который колебания тока отстают от колебаний напряжения, определяется формулой

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{Y}{X} = \frac{\omega L - 1/\omega C}{r}. \quad (221.3)$$

Допустим теперь, что мы изменяем частоту колебаний  $\omega$ . Как показывают формулы (221.1)–(221.3), это вызовет изменение и амплитуды тока  $i_0$ , и сдвига фазы  $\varphi$ .



Остановимся сначала на изменениях амплитуды тока. Если  $\omega = 0$ , то  $1/\omega C = \infty$ . Тогда сопротивление  $R$  обращается в бесконечность, а  $i_0$  равно нулю. Это и понятно, так как при  $\omega = 0$  мы имеем постоянный ток, а постоянный ток не проходит через конденсатор. При увеличении  $\omega$  квадрат реактивного сопротивления  $(\omega L - 1/\omega C)^2$  сначала уменьшается. Поэтому и сопротивление  $R$  уменьшается, а  $i_0$  увеличивается. При частоте  $\omega = \omega_0$ , определяемой условием

$$\omega_0^2 = 1/LC, \quad (221.4)$$

реактивное сопротивление  $(\omega L - 1/\omega C)$  обращается в нуль, а сопротивление цепи  $R$  становится наименьшим, равным активному сопротивлению цепи:

$$R_{\text{мин}} = r.$$

Сила тока достигает при этом максимума. При  $\omega > \omega_0$  квадрат реактивного сопротивления  $(\omega L - 1/\omega C)^2$  снова не равен нулю и увеличивается с возрастанием  $\omega$ . В соответствии с этим сопротивление  $R$  увеличивается, а амплитуда тока  $i_0$  уменьшается, асимптотически приближаясь к нулю при увеличении  $\omega$ .

Зависимость  $i_0$  от  $\omega$ , выражаемая формулами (221.1) и (221.2), графически изображена на рис. 382, где показаны три кривые, соответствующие трем различным значениям активного сопротивления  $r$ . Чем меньше  $r$  (т.е. чем меньше декремент затухания  $\delta$  или чем больше добротность контура  $Q$ ), тем больше при прочих равных условиях  $i_0$  и тем острее максимумы кривых.

Обратимся теперь к сдвигу фаз  $\varphi$  между током и ЭДС. Из (221.3) видно, что при очень малых частотах, когда  $\omega L \ll \ll 1/\omega C$ ,  $\text{tg } \varphi$  очень велик и отрицателен, а, следовательно,  $\varphi \approx -\pi/2$ . В этом случае ток опережает напряжение и цепь имеет емкостной характер. При

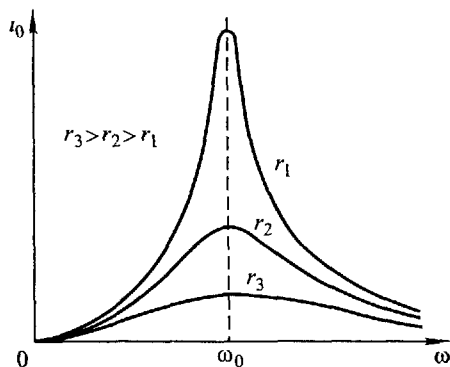


Рис 382 Резонансные кривые

возрастании частоты  $\omega$  реактивное сопротивление  $(\omega L - 1/\omega C)$ , оставаясь отрицательным, уменьшается по абсолютной величине и разность фаз  $\varphi$  уменьшается. Когда  $\omega = \omega_0$ , формула (221.3) дает  $\text{tg } \varphi = 0$ , а значит,  $\varphi = 0$ . При дальнейшем увеличении  $\omega$  реактивное сопротивление становится положительным

и увеличивается с возрастанием  $\omega$ . Поэтому  $0 < \operatorname{tg} \varphi < +\infty$  и  $0 < \varphi < +\pi/2$ . Следовательно, при  $\omega > \omega_0$  ток отстает от напряжения и цепь приобретает индуктивный характер, причем угол  $\varphi$  асимптотически стремится к предельному значению  $+\pi/2$  при увеличении частоты  $\omega$ .

Зависимость сдвига фаз  $\varphi$  от частоты колебаний изображена графически на рис. 383. Так же как и  $i_0$ ,  $\varphi$  зависит еще от активного сопротивления контура  $r$ . Чем меньше  $r$ , тем быстрее изменяется  $\varphi$  вблизи  $\omega = \omega_0$ , и в предельном случае  $r = 0$  изменение фазы приобретает скачкообразный характер.

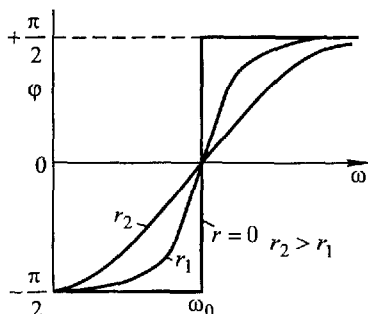


Рис. 383. Изменение сдвига фаз колебаний тока при изменении частоты внешнего напряжения

важный случай вынужденных колебаний называется *резонансом напряжений*.

Отметим, что частота  $\omega_0$ , при которой наступает резонанс, не равна частоте собственных колебаний контура  $\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$  (формула (210.3)). Однако в подавляющем большинстве практических случаев  $\alpha^2 \ll \omega_0^2$ , и потому с хорошим приближением этим различием можно пренебречь.

Выше мы предполагали, что изменяется частота ЭДС  $\omega$ , а параметры контура остаются неизменными. Однако ясно, что для получения резонанса можно поступать и иначе: изменять у контура индуктивность или емкость (т.е. изменять  $\omega_0$ ), оставляя частоту  $\omega$  постоянной.

Найдем теперь, чему равны амплитуды напряжения на конденсаторе и на катушке индуктивности при резонансе. Амплитуда тока при резонансе достигает максимума:

$$i_0 = \mathcal{E}_0 / r.$$

Поэтому амплитуда напряжения на конденсаторе

$$U_{0C} = r_C i_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{r \omega_0 C}.$$

Полученное выражение можно преобразовать иначе. Учитывая (221.4), имеем

$$\frac{1}{r\omega_0 C} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\pi}{(r/2L)2\pi\sqrt{LC}}.$$

Но  $r/2L$  есть коэффициент затухания  $\alpha$  (§ 209),  $2\pi\sqrt{LC}$  — период колебания  $T$ , соответствующий резонансу, а значит, знаменатель написанной формулы есть логарифмический декремент затухания  $\delta = \alpha T$ . Поэтому (см. формулу (210.6))

$$\frac{1}{r\omega_0 C} = Q,$$

где  $Q$  — добротность контура. Следовательно,

$$U_{0C} = \mathcal{E}_0 Q. \quad (221.5)$$

Аналогично амплитуда напряжения на индуктивности есть

$$U_{0L} = i_0 \omega L = \mathcal{E}_0 \frac{1}{r} \sqrt{\frac{L}{C}} = \mathcal{E}_0 Q. \quad (221.6)$$

Таким образом, колебания напряжения на конденсаторе и на индуктивности при резонансе имеют одинаковые амплитуды. Однако одно из них ( $U_C$ ) отстает от колебаний тока на  $\pi/2$ , а другое ( $U_L$ ) опережает их на  $\pi/2$ , так что оба колебания имеют разность фаз  $\pi$ . Поэтому их сумма равна нулю, и остаются только колебания напряжения на активном сопротивлении. Соотношение между тремя колебаниями напряжения  $U_r$ ,  $U_C$  и  $U_L$  при резонансе изображено при помощи векторной диаграммы на рис. 384. Так как добротность обычных колебательных контуров больше единицы, то амплитуды напряжения  $U_{0C}$  и  $U_{0L}$  больше амплитуды напряжения на концах всей цепи.

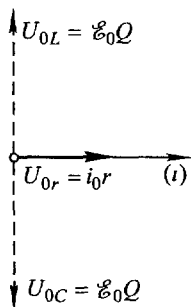


Рис. 384. Векторная диаграмма напряжений при резонансе

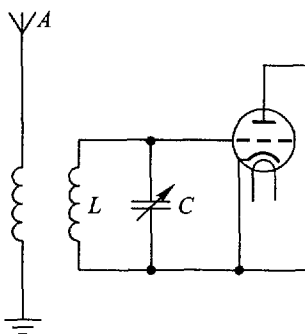


Рис. 385. Входной контур радиоприемника (схематически)

Резонанс напряжений широко применяют в радиотехнике и используют в тех случаях, когда нужно усилить колебания на-

пряжения какой-либо определенной частоты. В качестве примера укажем на устройство входной части радиоприемника (рис. 385). В ней имеется колебательный контур  $LC$  с высокой добротностью, а напряжение с конденсатора контура подается на вход первой лампы усилителя. Приходящие радиосигналы вызывают в антенне  $A$  быстропеременный ток, который наводит в катушке  $L$  ЭДС взаимной индукции с некоторой амплитудой  $\mathcal{E}_0$ . Вследствие резонанса на конденсаторе, а значит, и на входе лампы возникает напряжение с амплитудой  $\mathcal{E}_0 Q$ , которая значительно больше амплитуды ЭДС  $\mathcal{E}_0$ . Это усиление напряжения имеет место только для узкого интервала частот вблизи резонансной частоты контура  $\omega_0$ , что позволяет выделить из многих сигналов различных радиостанций только одно колебание определенной частоты («настроиться» на определенную станцию).

## § 222. Установление колебаний

Вынужденные колебания устанавливаются не сразу, а лишь по прошествии некоторого времени после включения внешней ЭДС. Выясним подробнее, в чем заключается процесс установления колебаний.

Положим, что ЭДС генератора изменяется по-прежнему по закону

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t,$$

и будем следить за колебаниями заряда  $q$  конденсатора. Вынужденные колебания заряда, как мы знаем, имеют вид

$$q_{\text{в}} = C \sin(\omega t + \varphi),$$

где амплитуда  $C$  и начальная фаза  $\varphi$  зависят от параметров контура (емкости, индуктивности и сопротивления).

Однако при замыкании цепи в ней возникнут еще и собственные колебания, отчего на конденсаторе появится дополнительный заряд, который, согласно формуле (210.2), будет изменяться по закону

$$q_{\text{с}} = Ae^{-\alpha t} \sin(\omega_1 t + \psi).$$

Здесь  $\alpha$  есть коэффициент затухания контура, а  $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$  — собственная частота колебаний контура. (В этой формуле вместо  $\cos$  (как в § 210) мы пишем  $\sin$ , что, однако, не играет никакой роли, так как начальная фаза  $\psi$  нами пока еще не определена.) Поэтому в первые моменты времени после замыкания цепи будут возбуждаться колебания сложной формы, представляющие собой сумму собственных и вынужденных колебаний, происходящих с различными частотами  $\omega$  и  $\omega_1$ .

С течением времени собственные колебания будут затухать, и когда они практически прекратятся вовсе, мы получим устано-

вившиеся вынужденные колебания. Таким образом, время установления колебаний есть время, в течение которого затухают собственные колебания контура. Оно тем больше, чем меньше коэффициент затухания  $\alpha$ .

Остановимся теперь специально на случае резонанса, когда частота генератора  $\omega = \omega_0$ . Будем считать, что затухание контура невелико, так что можно положить частоту собственных колебаний  $\omega_1 \approx \omega_0$ . Тогда колебания заряда будут иметь вид

$$q = q_c + q_b = Ae^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t + \psi) + C \sin(\omega_0 t + \varphi). \quad (222.1)$$

В этой формуле амплитуда собственных колебаний  $A$  и начальная фаза  $\psi$  зависят от начальных условий процесса (ср. § 210). Положим, что мы замыкаем цепь в момент времени  $t = 0$ , причем до замыкания заряда на конденсаторе не было. Тогда начальные условия будут

$$t = 0: \quad q = 0, \quad i = dq/dt = 0. \quad (222.2)$$

Подставляя первое из начальных условий в (222.1), имеем

$$A \sin \psi + C \sin \varphi = 0. \quad (222.3)$$

Второе начальное условие дает

$$-A\alpha \sin \psi + A\omega_0 \cos \psi + C\omega_0 \cos \varphi = 0.$$

Если, как было предположено выше,  $\alpha \ll \omega_0$ , то первым членом в этом уравнении можно пренебречь по сравнению со вторым членом, и поэтому

$$A \cos \psi + C \cos \varphi = 0. \quad (222.4)$$

Из уравнений (222.3) и (222.4) получаем

$$A = C, \quad \psi = \varphi + \pi.$$

Подставляя эти значения  $A$  и  $\psi$  в (222.1), находим закон временного изменения заряда конденсатора после замыкания цепи в виде

$$q = C(1 - e^{-\alpha t}) \sin(\omega_0 t + \varphi). \quad (222.5)$$

Эта зависимость изображена графически на рис. 386. При резонансе в контуре возникают колебания с возрастающей амплитудой, которая асимптотически приближается к установившемуся значению. Время, в течение которого практически достигается это значение, тем больше, чем меньше коэффициент затухания  $\alpha$  контура. Аналогичные кривые мы получили бы, рассматривая напряжение на конденсаторе и на индуктивности или силу тока в контуре.

В § 221 мы видели, что при резонансе напряжений амплитуда установившихся колебаний тока равна  $i_0 = \mathcal{E}_0/r$ . Отсюда получается, что если активное сопротивление цепи  $r \rightarrow 0$ , то  $i_0 \rightarrow \infty$ . Физический смысл этого, на первый взгляд, странного результата заключается в следующем. Когда сопротивление контура неограниченно уменьшается, то и затухание контура стремится к нулю, а, следовательно, время установления колебаний неограниченно увеличивается. Поэтому в действительности в контуре будут колебания конечной амплитуды, которая, однако, будет непрерывно возрастать в процессе колебаний.

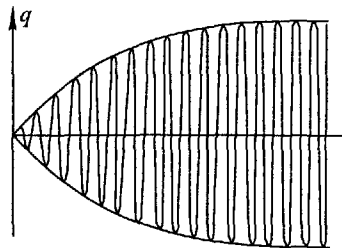


Рис. 386. Установление колебаний при резонансе

### § 223. Работа и мощность переменного тока

Рассмотрим теперь, чему равна работа, совершаемая в цепи при наличии в ней переменного тока.

Положим сначала, что цепь имеет только активное сопротивление. В этом случае вся работа тока целиком превращается в тепло.

Пусть напряжение на концах цепи ( $a$  и  $b$  на рис. 369) есть

$$U = U_0 \sin \omega t.$$

Так как в случае активного сопротивления сдвига фаз между током и напряжением нет, то сила тока изменяется по закону

$$i = i_0 \sin \omega t.$$

В течение малого промежутка времени переменный ток можно рассматривать как ток постоянный, и поэтому мгновенная мощность переменного тока

$$P_t = iU = i_0 U_0 \sin^2 \omega t.$$

Изменение мгновенной мощности с течением времени в случае чисто активного сопротивления изображено на рис. 387 *a*. Здесь же даны кривые колебаний тока  $i$  и напряжения  $U$  тоже для случая активного сопротивления.

Обычно необходимо знать не мгновенное значение мощности, а ее среднее значение за большой период времени, охватывающий много периодов колебаний. Так как мы имеем дело с периодическим процессом, то для нахождения

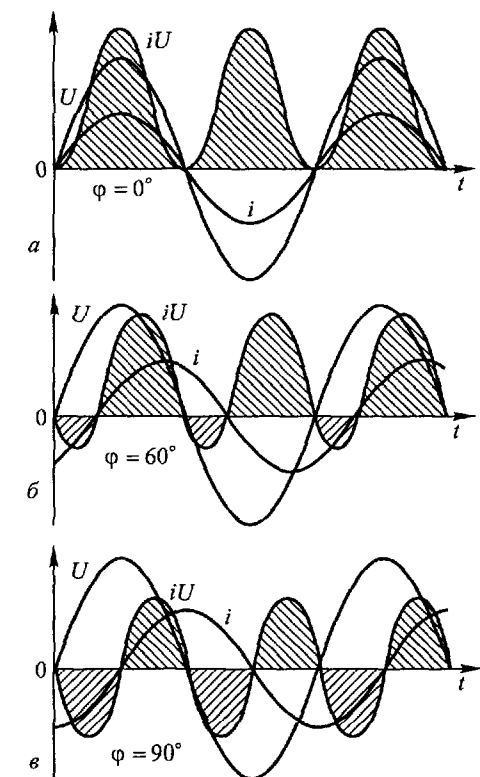


Рис. 387 Колебания мгновенной мощности переменного тока

этого среднего значения достаточно, очевидно, вычислить среднее значение мощности за один полный период. Работа переменного тока за малое время  $dt$  есть

$$P_t dt = i_0 U_0 \sin^2 \omega t dt,$$

а, следовательно, работа  $A_T$  за время полного периода колебаний  $T$  выражается формулой

$$A_T = i_0 U_0 \int_0^T \sin^2 \omega t \, dt.$$

Но

$$\int_0^T \sin^2 \omega t \, dt = \frac{1}{2} \int_0^T \left(1 - \cos \frac{4\pi}{T} t\right) dt = \frac{1}{2} T.$$

Поэтому

$$A_T = i_0 U_0 T / 2.$$

Отсюда для средней мощности получается

$$P = A_T / T = i_0 U_0 / 2.$$

Так как  $U_0 = r i_0$ , то можно также написать

$$P = i_0 U_0 = r i_0^2 = U_0^2 / 2r.$$

Обозначим через  $i_e$  и  $U_e$  силу и напряжение постоянного тока, который выделяет в сопротивлении  $r$  то же количество теплоты, что и данный переменный ток. Тогда

$$P = i_e U_e = r i_e^2 = U_e^2 / r. \quad (223.1)$$

Сравнивая эти выражения с выражениями для мощности переменного тока, имеем

$$i_e = i_0 / \sqrt{2}, \quad U_e = U_0 / \sqrt{2}. \quad (223.2)$$

Сила тока  $i_e$  называется *эффективной* силой переменного тока, а  $U_e$  — *эффективным* напряжением. Пользуясь эффективными значениями, можно выразить среднюю мощность переменного тока теми же формулами (223.1), что и мощность постоянного тока.

Перейдем теперь к общему случаю, когда цепь содержит не только активное сопротивление, но и реактивное. Теперь между током и напряжением существует разность фаз, и это существенно меняет дело. Обратимся к рис. 387 б, где изображены кривые колебаний тока  $i$  и напряжения  $U$  при сдвиге фаз  $\varphi = 60^\circ$ , а также кривая изменения мгновенной мощности  $P_t = iU$ . В течение времени от 0 до  $T/6$  ток и напряжение имеют разные знаки и их произведение  $iU$  отрицательно. В последующий промежуток времени, от  $T/6$  до  $T/2$ ,  $i$  и  $U$  имеют одинаковые знаки и мгновенная мощность положительна. Начиная с момента  $T/2$ , мощность снова становится отрицательной, и т.д. Мы имеем, следовательно, колебания мгновенной мощности с переменной знака.

Изменение знака мгновенной мощности имеет простой физический смысл. В § 125 мы видели, что, когда генератор посылает ток во внешнюю цепь, в его обмотке развиваются электродинамические силы, тормозящие вращение ротора. Для их преодоления двигатель, вращающий генератор, производит определенную работу, и именно за счет этой работы двигателя во внешней цепи совершается работа тока. Данный случай соответствует положительной мгновенной мощности — происходит передача энергии от генератора во внешнюю цепь. Напротив, когда мгновенная мощность отрицательна, ток имеет противоположное направление, и электродинамические силы в генераторе способствуют вращению ротора. В эти промежутки времени мы могли бы отсоединить двигатель от генератора, причем вращение последнего поддерживалось бы самим током. При этом энергия из внешней цепи (запасенная в электрическом поле конденсатора и в магнитном поле катушек) переходит в генератор. Таким образом, периодическое изменение знака мгновенной мощности означает, что часть энергии колеблется между генератором и внешней цепью, а, следовательно, среднее значение мощности в этом случае уменьшается.

Вычислим среднюю мощность переменного тока при наличии разности фаз. Работа, совершенная во внешней цепи за время  $dt$ , равна

$$P_t dt = iU dt.$$

Напряжение  $U$ , согласно сказанному в § 220 (см. рис. 381), мы можем разложить на две составляющие: активную

$$U_a = U_0 \cos \varphi \sin \omega t,$$

колеблющуюся в фазе с током, и реактивную

$$U_p = U_0 \sin \varphi \sin (\omega t \pm \pi/2),$$

смещенную по фазе относительно тока на  $\pm \pi/2$ . Соответственно этому при вычислении работы за полный период  $T$  получим тоже два слагаемых. Одно из них, обусловленное реактивной составляющей напряжения, равно нулю, так как

$$\int_0^T \sin \omega t \sin (\omega t \pm \pi/2) dt = \pm \int_0^T \sin \omega t \cos \omega t dt = 0.$$

Следовательно, полная работа за период определяется только активной составляющей напряжения:

$$A_T = i_0 U_0 \cos \varphi \int_0^T \sin^2 \omega t dt = \frac{1}{2} i_0 U_0 T \cos \varphi.$$



Поэтому средняя мощность есть

$$P = A_T/T = i_0 U_0 \cos \varphi / 2.$$

Вводя сюда эффективные значения  $i_e$  и  $U_e$ , находим окончательно

$$P = i_e U_e \cos \varphi. \quad (223.3)$$

Полученная формула отличается от (223.1) наличием дополнительного множителя  $\cos \varphi$ , который в электротехнике называют *коэффициентом мощности*. Она показывает, что в общем случае выделяемая в цепи мощность зависит не только от силы тока и напряжения, но еще и от сдвига фаз между напряжением и током.

Если сдвиг фаз между напряжением и током  $\varphi = 90^\circ$ , то  $\cos \varphi = 0$  и средняя мощность равна нулю, как бы ни были велики ток и напряжение. В этом случае энергия, передаваемая за четверть периода от генератора во внешнюю цепь, в точности равна энергии, передаваемой из внешней цепи в генератор в течение следующей четверти периода, и вся энергия колеблется между генератором и внешней цепью (рис. 387 в).

Зависимость мощности от  $\cos \varphi$  всегда учитывают при проектировании линий электропередачи на переменном токе. Когда питаемые нагрузки имеют большое реактивное сопротивление (например, моторы, обладающие большой индуктивностью), то  $\varphi \neq 0$  и  $\cos \varphi$  может быть заметно меньше единицы. В этих случаях для передачи нужной мощности (при данном напряжении генератора) необходимо увеличивать силу тока  $i_e$ , что либо приводит к возрастанию бесполезного тепла Джоуля–Ленца, выделяемого в линии, либо требует увеличения сечения проводов (а следовательно, и веса дорогостоящей меди), что повышает стоимость сооружения линии. Поэтому на практике всегда стремятся распределить нагрузки (лампы, моторы, печи и т.д.) таким образом, чтобы  $\cos \varphi$  был по возможности близок к единице.

Формула (223.3) позволяет также полнее понять явление электрического резонанса (§ 221). Мы видели, что при вынужденных электрических колебаниях сила тока и  $\cos \varphi$  зависят от частоты генератора  $\omega$ . При резонансе ( $\omega = \omega_0$ ) сила тока достигает максимума, а  $\cos \varphi$  имеет также наибольшее значение, равное единице. Следовательно, резонанс характеризуется еще и тем, что энергия, передаваемая в контур от генератора, имеет наибольшее значение.

## § 224. Разветвление переменных токов

Выше (§ 220, 221) мы рассматривали цепь, в которой активные и реактивные сопротивления были соединены последовательно. Посмотрим теперь, каким образом можно найти соотно-

шение между напряжением и током в цепи, состоящей из ветвей, соединенных параллельно, в которой, следовательно, происходит разветвление переменного тока.

Пусть цепь состоит из двух ветвей (рис. 388), одна из которых содержит конденсатор емкости  $C$ , а другая — катушку индуктивности  $L$ . Так как проволочные катушки всегда обладают некоторым сопротивлением, то в этой последней ветви мы будем еще учитывать наличие активного сопротивления  $r$ . К концам цепи  $a$  и  $b$  приложено переменное напряжение, изменяющееся по закону

$$U = U_0 \sin \omega t. \quad (224.1)$$

Требуется определить колебания силы полного тока в цепи (т.е. тока, обнаруживаемого амперметром  $A_1$ , включенным в подводящие провода).

В случае простой неразветвленной цепи общей для всех элементов цепи ( $L, C, r$ ) была сила тока и задача сводилась к сложению колебаний напряжения на индуктивности, емкости и сопротивлении. Для этой цели мы пользовались векторными диаграммами напряжения. В рассматриваемом случае, напротив, общим является напряжение между точками  $a$  и  $b$ , а сила тока в ветвях  $i_C$  и  $i_L$  различна. Полная сила тока равна

$$i = i_L + i_C, \quad (224.2)$$

и поэтому задача сводится к сложению колебаний тока. Используя и здесь метод векторных диаграмм, мы должны будем строить векторные диаграммы токов.

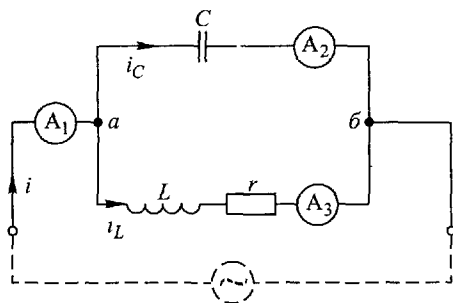


Рис. 388. Разветвление переменных токов

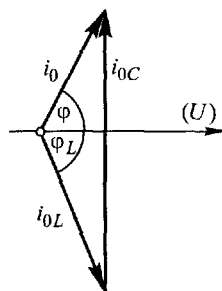


Рис. 389. Векторная диаграмма токов для цепи, показанной на рис. 388

Пусть колебания напряжения между точками  $a$  и  $b$  изображаются вектором, направленным вдоль линии  $U$  (рис. 389, ось напряжений). Тогда колебания тока в катушке индуктивности изображаются вектором, длина которого (амплитуда тока), со-

гласно формуле (220.3), в которой нужно положить  $C = \infty$ , равна

$$i_{0L} = \frac{U_0}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}}. \quad (224.3)$$

Этот вектор повернут относительно оси напряжений на угол  $\varphi_L$  в отрицательном направлении (так как ток в катушке отстает по фазе от напряжения), причем (см. (220.4))

$$\operatorname{tg} \varphi_L = \omega L / r. \quad (224.4)$$

Колебания тока в конденсаторе изображаются вектором, повернутым относительно оси напряжений на угол  $+\pi/2$ ; его длина (амплитуда тока) равна (см. (220.3),  $L = r = 0$ )

$$i_{0C} = U_0 \omega C. \quad (224.5)$$

Колебания полного тока определяются векторной суммой обоих этих векторов. Его длина есть амплитуда полного тока, а угол  $\varphi$ , образованный с осью напряжений, — угол, на который колебания тока опережают по фазе колебания напряжения. Таким образом, колебания полного тока выражаются формулой

$$i = i_0 \sin(\omega t + \varphi). \quad (224.6)$$

Так как амплитуды токов  $i_{0L}$  и  $i_{0C}$  и угол  $\varphi$  определены формулами (224.3)–(224.5), то из треугольника рис. 389 можно найти  $i_0$  и  $\varphi$ , а следовательно, определить и колебания полного тока в цепи.

## § 225. Резонанс токов

Если в цепи, изображенной на рис. 388, изменять  $L$  и  $C$  или частоту генератора  $\omega$ , то изменяются и амплитуда полного тока, и сдвиг фаз между током и напряжением. При некотором соотношении между  $L$ ,  $C$  и  $\omega$  сдвиг фаз  $\varphi$  становится равным нулю и, следовательно, контур ведет себя как чисто активное сопротивление. Этот частный случай вынужденных колебаний в разветвленной цепи называется *резонансом токов*. Векторная диаграмма токов, соответствующая резонансу, изображена на рис. 390.

Обычно в катушках индуктивности  $\omega L \gg r$ , и угол  $\varphi_L$  очень близок к  $-\pi/2$ . Так как ток  $i_C$  в другой ветви опережает напряжение на угол  $+\pi/2$ , то оба тока  $i_L$  и  $i_C$  обладают разностью фаз, близкой к  $\pi$ , т.е. находятся в противофазах. Поэтому полный ток  $i$  равен приблизительно разности токов  $i_L$  и  $i_C$ . При резонансе полный

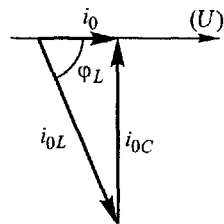


Рис. 390. Векторная диаграмма токов при резонансе

ток становится наименьшим (ср. рисунки 389 и 390), а следовательно, сопротивление контура достигает наибольшего значения. Это сопротивление, однако, в отличие от случая резонанса напряжений (§ 221), не равно активному сопротивлению  $r$ , включенному в контур, и зависит еще от  $L$  и  $C$  (см. ниже).

Если бы сопротивление  $r$  было равно нулю, то разность фаз между токами  $i_L$  и  $i_C$  была бы точно равна  $\pi$  и оба тока при резонансе точно компенсировали бы друг друга. В этом случае ток в подводящих проводах был бы равен нулю, хотя каждый из токов  $i_L$  и  $i_C$  мог бы иметь весьма большие значения. Сопротивление же контура при резонансе было бы равно бесконечности.

Для наблюдения резонанса токов можно воспользоваться схемой, изображенной на рис. 388, если включить в нее, помимо амперметра  $A_1$ , измеряющего полный ток, еще амперметры  $A_2$  и  $A_3$  в каждую из ветвей. Источником переменного напряжения может служить осветительная сеть переменного тока. В качестве индуктивности удобно взять дроссель с подвижным железным сердечником, причем максимальная индуктивность дросселя должна быть больше той, которая необходима для резонанса. Тогда можно наблюдать следующее. Вначале ток  $i_L$  (показания амперметра  $A_3$ ) значительно меньше тока  $i_C$  (показаний  $A_2$ ) и амперметр  $A_1$  указывает на существование полного тока  $i$  заметной силы (это соответствует рис. 389). При уменьшении индуктивности дросселя ток  $i_L$  увеличивается (ток  $i_C$  остается по-прежнему постоянным), а полный ток  $i$ , равный приблизительно разности  $i_C - i_L$ , уменьшается. При некотором значении индуктивности ток  $i$  становится наименьшим (резонанс). При этом амперметры  $A_2$  и  $A_3$  дают мало отличающиеся показания, которые намного больше показаний амперметра  $A_1$ . Отсюда следует, что оба тока  $i_C$  и  $i_L$  почти противоположны по фазам. При дальнейшем уменьшении индуктивности ток  $i_L$  становится больше тока  $i_C$  и полный ток  $i$  начинает снова увеличиваться.

Найдем условие, при котором наступает резонанс токов. Из рис. 390 видно, что при резонансе

$$i_{0C} = i_{0L} \sin \varphi_L. \quad (225.1)$$

Но из (224.4) следует, что

$$\sin \varphi_L = \omega L / \sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}, \quad \cos \varphi_L = r / \sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}.$$

Амплитуды же токов  $i_{0C}$  и  $i_{0L}$  имеют значения

$$i_{0L} = U_0 / \sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}, \quad i_{0C} = U_0 \omega C.$$

Подставляя эти выражения в (225.1) и считая, что  $\omega^2 L^2 \gg r^2$ , находим условие резонанса токов:

$$\omega = 1/\sqrt{LC} = \omega_0. \quad (225.2)$$

Таким образом, для резонанса токов, так же как и для резонанса напряжений, частота колебаний  $\omega$  внешнего напряжения должна совпадать с частотой  $\omega_0$  собственных колебаний контура в отсутствие затухания.

Вычислим теперь амплитуду  $i_0$  полного тока при резонансе. Из рис. 390 следует, что

$$i_0 = i_{0L} \cos \varphi_L. \quad (225.3)$$

В том же приближении, что и выше ( $\omega^2 L^2 \gg r^2$ ), имеем

$$i_0 = \frac{U_0}{\sqrt{r^2 + \omega_0^2 L^2}} \frac{r}{\sqrt{r^2 + \omega_0^2 L^2}} \approx U_0 \frac{r}{\omega_0^2 L^2} = U_0 \frac{rC}{L}.$$

Поэтому при резонансе

$$R = \frac{U_0}{i_0} = \frac{L}{rC}. \quad (225.4)$$

Если  $r \rightarrow 0$ , то  $R \rightarrow \infty$ . Этот результат уже был получен выше с помощью качественных рассуждений.

Отношение резонансного сопротивления  $R$  контура к его активному сопротивлению  $r$  равно квадрату добротности  $Q$  контура (ср. выражение для добротности в § 221):

$$\frac{R}{r} = \frac{L}{r^2 C} = Q^2.$$

Так как на радиочастотах легко добиться добротности порядка  $10^2$ , то отношение  $R/r$  можно сделать порядка  $10^4$  и выше.

Таким образом, для переменного тока с частотой  $\omega_0$  (точнее, для узкой полосы частот вблизи  $\omega_0$ , тем более узкой, чем выше добротность контура) колебательный контур представляет большое сопротивление, тогда как для всех других частот его сопротивление мало. Это позволяет использовать резонанс токов для выделения одного определенного колебания из сигнала сложной формы, чем и пользуются широко на практике. В качестве примера укажем на устройство резонансного усилителя, одна из схем которого (в упрощенном виде) показана на рис. 391. В анодной цепи имеется колебательный контур, настраиваемый на частоту сигнала, который нужно усилить. Для резонансной частоты контур представляет большое сопротивление, и колебания анодного тока лампы вызывают на его концах появление переменного напряжения. Для этой частоты (точнее, для узкой полосы частот) резонансный усилитель действует так же, как и усилитель на сопротивлениях, рассмотренный в § 161, причем роль анодного сопротивления играет колебательный контур. Для всех же других частот, заметно отличающихся от резонансной, контур практически осуществляет короткое замыкание анодной цепи, и поэтому напряжение получается близким к нулю.

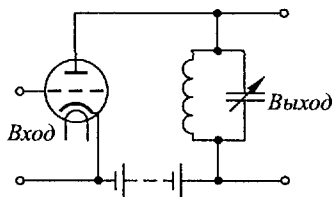


Рис. 391. Резонансный усилитель

Как уже разъяснялось, при резонансе токов силу токов в обеих ветвях контура можно сделать намного больше силы тока

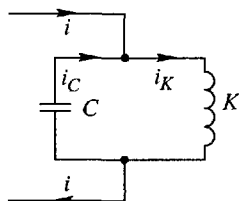


Рис. 392. Схема нагревающего контура индукционной цепи

в подводящих проводах. Это обстоятельство используют при устройстве индукционных печей, в которых нагревание металлов производится вихревыми токами (§ 132). А именно, параллельно нагревающей катушке  $K$  (рис. 392) присоединяют конденсатор  $C$  и подбирают его емкость таким образом, чтобы получить на частоте питающего генератора резонанс токов. Тогда через генератор и подводящие провода протекает только разностный ток  $i \approx i_K - i_C$ , который может быть намного меньше тока  $i_K$  в нагревательной катушке.

## § 226. Параметрический резонанс

При изучении электрического резонанса (напряжений и токов) мы рассматривали действие периодической ЭДС генератора на колебательный контур. Однако оказывается, что аналогичные явления наблюдаются и при внешних воздействиях других типов, причем возникающие колебания, так же как и при действии ЭДС, существенно зависят от частоты воздействий на контур. Поэтому понятие резонанса можно обобщить и распространить на более широкий класс явлений.

Положим, что внешнее воздействие изменяет один из параметров колебательной системы, и рассмотрим сначала простой механический пример. Пусть имеется маятник, длину которого можно изменять (рис. 393), подтягивая конец нити, перекинутой через блок, или, наоборот, его отпуская. Будем периодически изменять длину маятника, подтягивая нить (уменьшая длину) всякий раз, когда маятник будет находиться вблизи положения равновесия (0), и отпуская нить (увеличивая длину) при крайних положениях маятника (1 и 2), т.е. с частотой, равной удвоенной частоте собственных колебаний маятника. Мы найдем, что маятник начнет совершать колебания с возрастающей амплитудой, которая

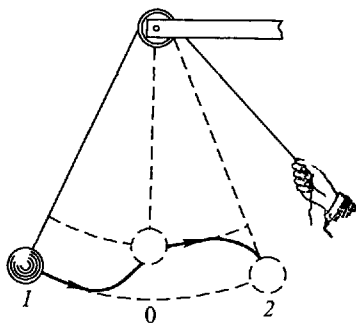


Рис. 393. Параметрический резонанс в механике

Будем периодически изменять длину маятника, подтягивая нить (уменьшая длину) всякий раз, когда маятник будет находиться вблизи положения равновесия (0), и отпуская нить (увеличивая длину) при крайних положениях маятника (1 и 2), т.е. с частотой, равной удвоенной частоте собственных колебаний маятника. Мы найдем, что маятник начнет совершать колебания с возрастающей амплитудой, которая

будет увеличиваться до тех пор, пока нить не соскочит с блока. Это будет наблюдаться и в том случае, если частота изменения длины не равна удвоенной собственной частоте, но близка к ней.

В этом опыте мы имеем нарастающие колебания, как и в случае резонанса под действием периодической внешней силы, однако они возникают в результате периодического изменения одного из параметров системы (длины). Поэтому описанное явление получило название *параметрического резонанса*.

Причину нарастания колебаний можно объяснить, исходя из энергетических соображений. Когда мы укорачиваем нить в положении 0 (рис. 393), то внешняя сила (сила руки) совершает работу не только против силы тяжести, но и против центробежной силы, так как, проходя через положения равновесия 0, маятник имеет наибольшую скорость. При удлинении нити работу совершает маятник. Однако эта работа производится только за счет силы тяжести, так как в положениях 1 и 2 центробежная сила равна нулю (скорость равна нулю), и поэтому она меньше работы при укорочении нити. Таким образом, в колебательную систему (маятник) непрерывно вводится энергия за счет работы внешней силы, что и приводит к нарастанию колебаний.

Аналогичные явления параметрического резонанса наблюдаются и в электрических колебательных контурах, если параметры контура (емкость или индуктивность) изменяются периодически. Рассмотрим, например, колебательный контур  $LC$  (рис. 394), имеющий конденсатор с подвижной пластиной, которую можно периодически приближать ко второй пластине или удалять от нее. Положим, далее, что в контуре в силу каких-либо случайных причин возникли колебания и что в момент времени, когда заряд конденсатора проходит через нуль, мы сближаем пластины. Это не будет сопровождаться никакой работой, так как заряд конденсатора равен нулю, а значит, и сила притяжения между пластинами также равна нулю. Через время, равное четверти периода собственных колебаний  $T/4$ , заряд конденсатора будет наибольшим. Если в этот момент раздвинуть пластины, то внешние силы совершат работу, затрачиваемую на преодоление взаимного притяжения пластин. Тогда емкость конденсатора уменьшится, а напряжение между его обкладками возрастет, способствуя колебаниям в контуре. Если затем опять через время  $T/4$  сблизить пластины, то энергия контура не изменится, так как заряд конденсатора в этот момент снова равен нулю. При последующем разведении пластин в контур снова будет введена определенная энергия, и т.д. Поэтому,

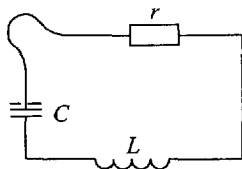


Рис. 394. Колебательный контур с изменяемой емкостью

изменяя достаточно сильно емкость конденсатора с частотой, равной удвоенной частоте собственных колебаний (или близкой к ней), мы получим в контуре электрические колебания с возрастающей амплитудой, которая будет увеличиваться до тех пор, пока конденсатор не будет пробит.

Отметим, что начальные малые колебания и в механических, и в электрических системах всегда возникают под влиянием случайных внешних воздействий, или флуктуаций. Поэтому при достаточно сильном периодическом изменении параметров наблюдается самовозбуждение колебаний. Правильное соотношение между фазой колебаний и фазой изменения параметра осуществляется при этом автоматически, так как усиливаются только те колебания, которые имеют нужную начальную фазу.

Описанный опыт с электрическим параметрическим резонансом был впервые осуществлен Л.И. Мандельштамом и Н.Д. Папалекси в 1933 г. Построенная ими емкостная параметрическая машина имела вращающийся конденсатор, содержащий две системы пластин, снабженных радиальными вырезами, одна из которых была неподвижна, а другая приводилась во вращение с помощью электромотора. Такая машина развивала напряжения до многих тысяч вольт.

Явление параметрического резонанса можно использовать для технического получения переменных токов.

## § 227. Комплексные величины

Для сложения колебаний тока и напряжения в различных сетях переменного тока особенно удобно пользоваться символическим методом, в котором гармонические колебания разных физических величин представляют в виде комплексных величин. Этот метод значительно упрощает все вычисления, и поэтому его широко применяют не только в теории переменных токов, но и при исследовании любых механических и электрических колебаний.

Известно, что

$$\exp(j\alpha) = \cos \alpha + j \sin \alpha.$$

Здесь  $\alpha$  — вещественное число, а  $j = \sqrt{-1}$ . Поэтому всякое комплексное число

$$z = x + jy$$

можно представить в показательной форме

$$z = \rho \exp(j\alpha).$$

При этом вещественную и мнимую части  $x$  и  $y$  комплексного числа  $z$  можно выразить через  $\rho$  и  $\alpha$ :

$$x = \rho \cos \alpha, \quad y = \rho \sin \alpha,$$



и, наоборот,  $\rho$  и  $\alpha$  можно выразить через  $x$  и  $y$ :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = y/x.$$

Напомним, что  $\rho$  называется *модулем* комплексного числа  $z$ , а  $\alpha$  — его *аргументом*.

Положим теперь, что  $\alpha$  изменяется со временем по закону

$$\alpha = \omega t + \varphi.$$

Тогда  $x$  и  $y$  будут представлять два гармонических колебания:

$$x = \rho \cos(\omega t + \varphi), \quad y = \rho \sin(\omega t + \varphi), \quad (227.1)$$

происходящих с круговой частотой  $\omega$  и имеющих амплитуду  $\rho$  и начальную фазу  $\varphi$ . Согласно сказанному выше, оба эти колебания можно выразить при помощи одного комплексного выражения

$$z = \rho \exp[j(\omega t + \varphi)] = \rho \exp(j\varphi) \exp(j\omega t). \quad (227.2)$$

Если мы условимся заранее брать только вещественную часть комплексного выражения (227.2), то мы получим первое из колебаний (227.1); если же мы будем употреблять только мнимую его часть, то получим второе колебание.

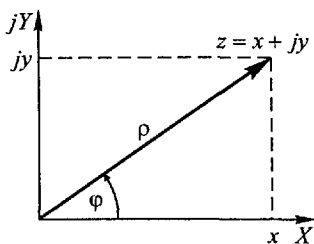
Таким образом, гармонические колебания можно описывать либо с помощью тригонометрических функций  $\cos$  и  $\sin$ , либо с помощью комплексных выражений. Последний способ имеет, однако, большое преимущество в тех случаях, когда приходится складывать несколько колебаний, так как правила сложения комплексных чисел гораздо проще, нежели правила сложения тригонометрических функций.

Если частота  $\omega$  одинакова для всех рассматриваемых колебаний, то множитель  $\exp(j\omega t)$  можно не выписывать. В этих случаях мы вполне определим гармоническое колебание, если зададим лишь величину

$$s = \rho \exp(j\varphi), \quad (227.3)$$

которая называется *комплексной амплитудой*. Ее модуль  $\rho$  дает фактическую амплитуду гармонического колебания, а аргумент  $\varphi$  — начальную фазу колебания.

Представление колебаний с помощью комплексных выражений тесно связано с векторными диаграммами. Действительно, если на



плоскости (рис. 395) ввести две взаимно перпендикулярные оси и по одной из них ( $X$ ) откладывать вещественную часть  $x$  комплексного числа  $z$ , а по другой ( $Y$ ) — мнимую часть  $jy$ , то число  $z$  будет изображаться на этой плоскости некоторым вектором.

Рис. 395. Изображение комплексного числа при помощи вектора

Длина этого вектора  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  есть модуль комплексного числа  $z$ , а угол  $\varphi = \operatorname{arctg}(y/x)$ , составленный с вещественной осью  $X$ , равен аргументу  $z$ . Поэтому, задавая комплексную амплитуду колебания  $s$  (формула (227.3)), мы определяем вектор, длина которого равна амплитуде колебаний, а угол поворота — начальной фазе, т.е. поступаем так же, как и при построении векторной диаграммы колебаний. Различие заключается лишь в том, что в случае векторной диаграммы мы изображаем этот вектор графически, а пользуясь комплексным выражением, задаем его аналитически.

Вернемся теперь к переменным токам и положим, что сила тока в цепи равна  $i = i_0 \sin \omega t$ . Пользуясь комплексными величинами, это колебание можно записать в виде

$$i = i_0 \exp(j\omega t).$$

Тогда колебания напряжения на чисто активном сопротивлении (§ 217) будут выражаться формулой

$$U_r = i_0 r \exp(j\omega t).$$

Комплексная амплитуда в данном частном случае оказывается вещественной:

$$U_{0r} = i_0 r, \quad (227.4)$$

что, согласно сказанному выше, обозначает отсутствие сдвига фаз между напряжением и током.

Колебания напряжения на индуктивности (§ 219) опережают по фазе колебания тока на  $\pi/2$ , и поэтому

$$U_L = i_0 \omega L \exp[j(\omega t + \pi/2)].$$

Комплексная амплитуда этих колебаний

$$U_{0L} = i_0 \omega L \exp(j\pi/2).$$

Входящий сюда множитель  $\exp(j\pi/2)$  изображается на комплексной плоскости (см. рис. 395) вектором, имеющим длину 1 и направленным вдоль мнимой оси  $jY$ . Поэтому  $\exp(j\pi/2) = j$  и, следовательно,

$$U_{0L} = i_0 j \omega L. \quad (227.5)$$

Наконец, для колебаний напряжения на конденсаторе, которые отстают от колебаний тока на  $\pi/2$  (§ 218), получим

$$U_C = (i_0/\omega C) \exp[j(\omega t - \pi/2)].$$

Комплексная амплитуда напряжения на конденсаторе равна

$$U_{0C} = (i_0/\omega C) \exp(-j\pi/2),$$

или, так как  $\exp(-j\pi/2) = -j = 1/j$ ,

$$U_{0C} = \frac{i_0}{j\omega C}. \quad (227.6)$$

Рассмотрим теперь, как можно производить сложение колебаний, пользуясь комплексными выражениями. При этом мы везде предполагаем, что речь идет о колебаниях скалярных величин (каковыми являются сила тока, заряд конденсатора, напряжение и т.д.).

Суммой комплексных чисел

$$z_1 = x_1 + jy_1, \quad z_2 = x_2 + jy_2, \dots,$$

по определению, называют комплексное число

$$Z = X + jY,$$

у которого вещественная ( $X$ ) и мнимая ( $Y$ ) части суть суммы соответственно вещественных и мнимых частей слагаемых:

$$X = x_1 + x_2 + x_3 + \dots, \quad Y = y_1 + y_2 + y_3 + \dots$$

Если  $z_1, z_2, \dots$  — комплексные выражения гармонических колебаний, то величины  $x_1, x_2, x_3, \dots$  и соответственно  $y_1, y_2, y_3, \dots$  представляют собой гармонические колебания (одно из которых описывается функцией  $\cos$ , а другое —  $\sin$ ). Поэтому комплексное выражение  $Z$  будет соответствовать сумме складываемых колебаний. Если по-прежнему все колебания имеют одинаковую частоту  $\omega$ , то и здесь общий множитель  $\exp(j\omega t)$  можно не выписывать, а достаточно сложить лишь комплексные амплитуды суммируемых колебаний.

Таким образом, мы приходим к следующему правилу: *для сложения нескольких колебаний одинаковой частоты достаточно сложить комплексные амплитуды этих колебаний. Модуль полученного комплексного выражения дает фактическую амплитуду результирующего колебания, а его аргумент — начальную фазу.*

Отметим, что на комплексной плоскости ( $X, jY$ ) сложение комплексных чисел изображается суммированием векторов, представляющих эти комплексные числа, а комплексное число  $Z$ , выражающее искомую сумму, является замыкающим вектором (векторной суммой). Поэтому данное выше правило в точности соответствует построению векторной диаграммы результирующего колебания.

Поясним сказанное на примере. Рассмотрим опять цепь, содержащую последовательно соединенное сопротивление, индуктивность и емкость, и найдем напряжение на концах этой цепи. Оно представляет собой сумму трех напряжений, комплексные амплитуды которых выражаются формулами (227.4)–(227.6). Поэтому комплексная амплитуда полного напряжения есть

$$i_0 r + i_0 j \omega L + \frac{i_0}{j \omega C} = i_0 r + i_0 j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right).$$

Отсюда получаем выражения для фактической амплитуды напряжения (модуль) и для начальной фазы напряжения (аргумент):

$$U_0 = i_0 \sqrt{r^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2},$$

$$\varphi = \arctg \frac{\omega L - 1/\omega C}{r},$$

что совпадает с формулами (220.3), (220.4).

## § 228. Комплексные сопротивления

Применение комплексных величин для расчетов цепей переменного тока можно еще значительно упростить, если ввести понятие о комплексном сопротивлении. Пусть  $i_0$  есть амплитуда силы тока в каком-либо участке цепи, а  $u_0$  — комплексная амплитуда напряжения. Тогда комплексное сопротивление  $z$  этого участка определяется соотношением

$$u_0 = z i_0. \quad (228.1)$$

Таким образом, комплексное сопротивление участка есть отношение комплексной амплитуды напряжения к амплитуде силы тока.

Если мы умножим обе части формулы (228.1) на  $\exp(j\omega t)$ , то слева мы получим мгновенное значение напряжения  $u = u_0 \exp(j\omega t)$ , справа же вместо  $i_0$  войдет  $i = i_0 \exp(j\omega t)$ , т.е. мгновенная сила тока. Поэтому для мгновенных значений напряжения и тока справедлива формула, аналогичная (228.1):

$$u = z i. \quad (228.2)$$

Найдем, чему равны комплексные сопротивления в различных частных случаях. Пусть участок цепи имеет только активное сопротивление  $r$ . Тогда, если амплитуда тока есть  $i_0$ , то амплитуда напряжения (см. (227.4)) равна  $u_{0r} = i_0 r$  и

$$z_r = r. \quad (228.3)$$

В этом частном случае комплексное сопротивление не имеет мнимой части и равно активному сопротивлению участка.

Если участок цепи содержит только катушку индуктивности  $L$ , то, согласно (227.5),  $u_{0L} = i_0 j\omega L$ , поэтому

$$z_L = j\omega L. \quad (228.4)$$

Совершенно так же находим, что в случае конденсатора (формула (227.6)) комплексное сопротивление равно

$$z_C = \frac{1}{j\omega C}. \quad (228.5)$$

Представим себе теперь, что мы имеем какую-нибудь цепь переменного тока, которая может быть сколь угодно сложной. Так как мы рассматриваем только квазистационарные токи, то для мгновенных значений электрических величин справедливы те же законы Кирхгофа, что и для постоянных токов. Поэтому для любого замкнутого контура (например, контура 1-2-3-4-5, рис. 396) мы имеем (второе правило Кирхгофа)

$$\sum_k z_k i_{0k} \exp(j\omega t) = \sum_k e_{0k} \exp(j\omega t),$$

где  $e_{0k}$  — комплексные амплитуды ЭДС генераторов. Сокращая обе части на  $\exp(j\omega t)$ , получим соответствующее уравнение для амплитуд

$$\sum_k z_k i_{0k} = \sum_k e_{0k}. \quad (228.6)$$

Точно так же для любой точки разветвления цепи справедливо первое правило Кирхгофа, которое после сокращения на общий множитель  $\exp(j\omega t)$  имеет вид

$$\sum_p i_{0p} = 0. \quad (228.7)$$

Таким образом, мы видим, что законы постоянного тока применимы не к обычным фактическим амплитудам тока, напряжения и ЭДС, но к комплексным амплитудам этих величин, причем под сопротивлениями отдельных участков цепи нужно понимать их комплексные сопротивления. Поэтому решение задачи о любой цепи переменного тока можно получить из соответствующего решения для постоянного тока, если силу тока, напряжение и ЭДС заменить их комплексными амплитудами, а сопротивление участков — их комплексными сопротивлениями.

Отсюда, в частности, получается следующее простое правило для вычисления сопротивления цепей: чтобы найти сопротивление цепи для переменного тока, нужно в этой цепи мысленно заменить каждую индуктивность  $L$  на ее комплексное сопротивление  $j\omega L$ , каждую емкость  $C$  — на  $1/(j\omega C)$ , а все активные сопротивления оставить без изменений. Затем с указанными комплексными сопротивлениями нужно произвести те же операции, что и при вычислении сопротивления для постоянного тока, складывая при последовательном соединении сопротивления, а при параллельном — их обратные величины (проводимости). Полученная в результате этого комплексная величина  $Z = X + jY$  и будет представлять собой полное комплексное сопротивление цепи. Эта величина получила название *импеданса цепи*. Ее вещественная часть  $X$  есть активное сопротивление цепи, а мнимая часть  $Y$  — реактивное сопротивление. Модуль импеданса  $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$  дает сопротивление цепи для переменного тока и определяет амплитуду силы тока при заданной амплитуде напряжения на концах цепи:

$$i_0 = U_0/R.$$

Аргумент импеданса дает угол  $\varphi$ , на который напряжение опережает ток в цепи:

$$\operatorname{tg} \varphi = Y/X.$$

Рассмотренный метод комплексных сопротивлений весьма удобен для практических расчетов и поэтому широко применяется в электротехнике. Он исключительно прост и не требует вычисления сдвигов фаз (что необходимо при построении векторных диаграмм), так как они уже учтены в

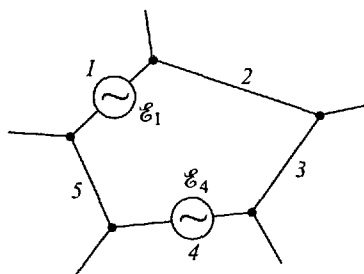


Рис. 396. Разветвленная цепь переменного тока

комплексных сопротивлений. По сравнению с векторными диаграммами этот метод обладает еще и тем преимуществом, что позволяет вести расчеты с какой угодно точностью, тогда как векторные диаграммы, как и всякий графический метод, отличаются большей наглядностью, но не обеспечивают точности.

Для иллюстрации метода комплексных сопротивлений рассмотрим некоторые простейшие примеры.

**Пример 1.** Цепь содержит последовательно соединенные активное сопротивление  $r$  и индуктивность  $L$  (рис. 397 а).

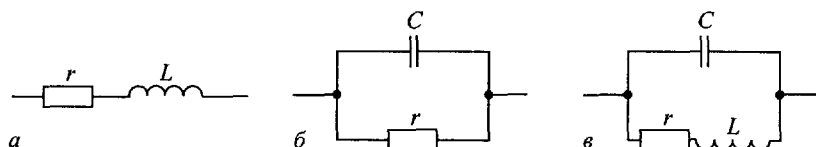


Рис. 397. Примеры простых цепей

Так как при последовательном соединении складываются сопротивления, то импеданс цепи есть

$$Z = r + j\omega L.$$

Поэтому сопротивление всей цепи равно

$$R = \sqrt{r^2 + \omega^2 L^2},$$

а напряжение опережает ток по фазе на угол

$$\varphi = \arctg(\omega L/r).$$

**Пример 2.** Цепь состоит из конденсатора емкостью  $C$ , параллельно которому присоединено активное сопротивление  $r$  (конденсатор с уточкой, рис. 397 б).

При параллельном соединении складываются проводимости участков. Поэтому, если  $Z$  есть импеданс цепи, то

$$1/Z = 1/r + j\omega C.$$

Отсюда

$$Z = \frac{1}{1/r + j\omega C}.$$

Чтобы привести это выражение к виду  $Z = X + jY$ , умножим и разделим правую часть на  $1/r - j\omega C$ . Тогда

$$Z = \frac{1/r - j\omega C}{1/r^2 + \omega^2 C^2} = \frac{r - j\omega r^2 C}{1 + \omega^2 r^2 C^2} = X + jY.$$

Сопротивление цепи равно

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = r/\sqrt{1 + \omega^2 r^2 C^2},$$

а напряжение опережает ток по фазе на угол

$$\varphi = \arctg(Y/X) = -\arctg(\omega r C).$$

В данном случае угол  $\varphi$  оказывается отрицательным, а, значит, напряжение отстает по фазе от тока (как и должно быть при емкостном характере цепи).

**П р и м е р 3.** Рассмотрим цепь, которая обсуждалась при изучении резонанса токов (рис. 397 в).

В этом случае мы должны найти сначала импеданс  $Z_1$  ветви, содержащей индуктивность. Так как  $r$  и  $L$  соединены здесь последовательно, то

$$Z_1 = r + j\omega L.$$

Обе же ветви цепи соединены между собой параллельно. Поэтому для импеданса  $Z$  всей цепи имеем

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{r + j\omega L} + j\omega C.$$

Выражая отсюда  $Z$  и уничтожая мнимость в знаменателе, находим после несложных преобразований, что

$$Z = \frac{r + j\omega[L(1 - \omega^2 LC) - Cr^2]}{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 r^2}.$$

Найдем условие, при котором мнимая часть импеданса (реактивное сопротивление) обращается в нуль. Этот случай вынужденных колебаний, как мы знаем (§ 225), называется *резонансом токов*. Искомое условие есть

$$L(1 - \omega^2 LC) - Cr^2 = 0.$$

Считая, как и раньше,  $\omega^2 L^2 \gg r^2$ , находим, что резонанс токов наступит при частоте  $\omega_0$ , равной

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}.$$

Подставляя это значение в выражение для  $Z$  и учитывая, что  $(1 - \omega_0^2 LC) = 0$ , получаем резонансное сопротивление контура

$$Z_{\text{рез}} = L/Cr.$$

Приведенные выше результаты мы уже получили раньше (§ 225) другим способом.

**П р и м е р 4.** Для измерения емкости конденсаторов употребляют мостовую схему, работающую на переменном токе (рис. 398). Она подобна схеме моста на постоянном токе, но отличается от нее тем, что в два плеча схемы включены конденсаторы вместо сопротивлений. К двум противоположным точкам схемы (например, к  $a$  и  $b$ , рис. 398) присоединен миниатюрный генератор переменной ЭДС (зуммер), а к двум другим ( $v$  и  $z$ ) — индикатор переменного тока (например, телефон  $T$ ). Процесс измерения заключается в том, что, меняя сопротивления двух других плеч  $r_3$  и  $r_4$ , добиваются такого положения, чтобы между точками  $v$  и  $z$  колебания напряжения были равны нулю (равновесие моста), т.е. в телефоне не было слышно звука. Найдем условие равновесия моста.

Если бы мы имели ток постоянный, а вместо конденсаторов  $C_1$  и  $C_2$  были включены сопротивления  $r_1$  и  $r_2$ , то при равновесии мы имели бы

$$r_1/r_2 = r_3/r_4.$$

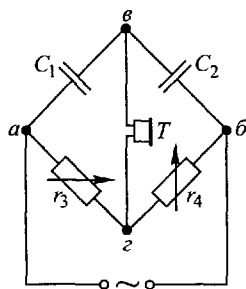


Рис. 398. Мост для измерения емкости

В случае переменного тока, как мы знаем, нужно пользоваться комплексными сопротивлениями, т.е. заменить  $r_1$  на  $1/(j\omega C_1)$ , а  $r_2$  — на  $1/(j\omega C_2)$ . Поэтому условие равновесия моста на переменном токе есть

$$C_2/C_1 = r_3/r_4.$$

Измеряя на опыте отношение  $r_3/r_4$ , необходимое для равновесия моста, и зная емкость одного из конденсаторов, отсюда можно определить неизвестную емкость другого конденсатора.

Отметим, что при расчетах мы предполагали, что активные сопротивления плеч моста, содержащих конденсаторы, малы по сравнению с емкостными сопротивлениями, что обычно и имеет место на практике.

**П р и м е р 5.** При помощи схемы моста на переменном токе можно измерять не только емкости, но и индуктивности. Однако так как катушки индуктивности обычно обладают заметным сопротивлением, то здесь уже нельзя пренебрегать активным сопротивлением плеч моста, содержащих катушки,

по сравнению с их индуктивным сопротивлением.

Схема моста для измерения индуктивностей изображена на рис. 399. Она содержит четыре переменных (безындукционных) сопротивления  $r_1, r_2, r_3$  и  $r_4$ , причем под  $r_1$  и  $r_2$  мы будем понимать в дальнейшем полные активные сопротивления плеч 1 и 2, включая и сопротивления катушек.

Комплексное сопротивление плеча 1 (ср. пример 1) есть  $r_1 + j\omega L_1$ , а для плеча 2 оно соответственно равно  $r_2 + j\omega L_2$ . Поэтому условие равновесия моста на переменном токе есть

$$(r_1 + j\omega L_1)/(r_2 + j\omega L_2) = r_3/r_4,$$

Рис. 399. Мост для измерения индуктивностей

$$r_1 + j\omega L_1 = (r_3/r_4)(r_2 + j\omega L_2).$$

Но для равенства двух комплексных выражений необходимо, чтобы были равны их вещественные и мнимые части порознь. Поэтому мы получаем два условия

$$r_1/r_2 = r_3/r_4, \quad L_1/L_2 = r_3/r_4.$$

Наличие двух условий соответствует тому физическому обстоятельству, что для равновесия моста необходимо, чтобы колебания потенциала в точках  $a$  и  $b$  (рис. 399) имели не только одинаковые амплитуды, но и одинаковые фазы, ибо только в этом случае можно добиться того, чтобы разность потенциалов точек  $b$  и  $z$  была равна нулю в любой момент времени, что необходимо для исчезновения звука в телефоне.

Первое условие есть условие равновесия моста при постоянном токе. Следовательно, равновесие при переменном токе возможно только в том случае, если одновременно мост уравновешен и для постоянного тока.

В соответствии с этим при измерении индуктивностей к точкам  $a$  и  $b$  мостовой схемы (рис. 399) прикладывают попеременно либо постоянное напряжение (заменяя при этом телефон  $T$  на гальванометр), либо переменное напряжение и, изменяя все четыре сопротивления  $r_1, r_2, r_3$  и  $r_4$ , добиваются, чтобы мост был в равновесии в обоих случаях. Тогда из второго условия равновесия можно определить отношение индуктивностей, а если одна из индуктивностей известна, то можно найти и значение второй неизвестной индуктивности.



## Г Л А В А XXII

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ ВДОЛЬ  
ПРОВОДОВ

## § 229. Распределенные системы

До сих пор мы имели дело с простыми колебательными контурами, в которых емкость практически была сосредоточена в одном определенном месте контура (конденсаторе), а индуктивность — в другом (катушке). Рассмотрим теперь системы, в которых емкость и индуктивность распределены непрерывно.

Такие *распределенные* системы можно рассматривать как предельный случай систем с сосредоточенными постоянными. Простому контуру (рис. 400 а) соответствует в механике материальная точка, движущаяся в определенном направлении под действием упругой силы. Она имеет единственную степень свободы и может совершать собственные колебания с одной определенной частотой.

Подобно этому простой электрический контур характеризуется единственной собственной частотой  $\omega_0$ .

Рассмотрим теперь два простых контура, связанных между собой общей емкостью (рис. 400 б). Соответствующая механическая система состоит из двух материальных точек и обладает двумя степенями свободы. В ней возможны два разных типа собственных колебаний, происходящих с различной частотой. Аналогично в двух связанных электрических контурах возможны два различных собственных электрических колебания с двумя частотами:  $\omega_{01}$  и  $\omega_{02}$ .

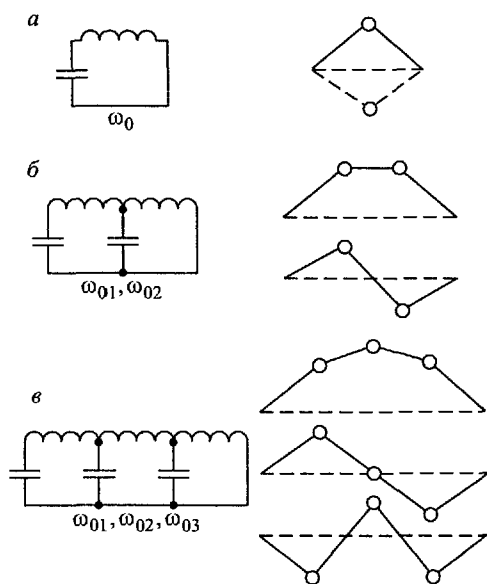


Рис. 400. Колебания с одной (а), двумя (б) и тремя (в) степенями свободы

В случае контура, изображенного на рис. 400 в, мы имеем дело с тремя степенями свободы, и здесь возможны три различных колебания с тремя частотами:  $\omega_{01}$ ,  $\omega_{02}$  и  $\omega_{03}$ .

Представим себе теперь, что в контуре, изображенном на рис. 400, мы неограниченно увеличиваем число звеньев и соответственно уменьшаем индуктивности и емкости каждого звена. Тогда в пределе мы получим двухпроводную линию, в которой индуктивность и емкость непрерывно распределены по всей длине. В механике ей соответствует резиновый шнур или струна с непрерывно распределенными массой и упругостью. Число степеней свободы струны равно бесконечности и поэтому в ней возможно бесконечное число собственных колебаний. То же мы имеем и в электрических распределенных системах: число различных собственных колебаний в таких системах равно бесконечности.

Из механики известно, что колебательные движения струны (как и всякой механической распределенной системы) представляют собой механические волны. Различные собственные колебания ограниченной струны суть не что иное, как возможные в струне стоячие волны. Аналогично электрические колебания в распределенных электрических системах представляют собой электромагнитные волны, к рассмотрению которых мы и обратимся.

### § 230. Электромагнитный импульс вдоль проводов

Рассмотрим двухпроводную линию, неограниченно простирающуюся в обе стороны, и положим, что источник переменного тока создает в какой-либо точке  $O$  линии (рис. 401 а) электрическое поле  $E$ . Опыт показывает, что электрическое поле распространяется вдоль линии. Поставим теперь вопрос: посредством каких процессов происходит это распространение поля?

Один из способов передачи электрического поля нам уже известен — он заключается в возникновении токов проводимости. При этом электроны в проводах перемещаются вдоль линии и при движении переносят свой электрический заряд, а вместе с ним и электрическое поле.

Однако наряду с этим существует и другой процесс передачи поля, который в очень многих явлениях играет главную роль. Он был открыт Максвеллом и состоит в распространении электромагнитных волн.

Рассмотрим сначала это явление качественно. Положим, что в данный момент времени электрическое поле  $E$  увеличивается. Согласно основному положению теории Максвелла (§ 136) изменяющееся электрическое поле, т.е. ток смещения, вызывает появление магнитного поля. Модуль и направление этого маг-

нитного поля соответствуют току с плотностью  $\mathbf{j} = \partial \mathbf{D} / \partial t = \epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$  (мы будем предполагать, что линия находится в вакууме или же, что практически то же, в атмосферном воздухе). Так как поле  $\mathbf{E}$  увеличивается, то  $\partial \mathbf{E} / \partial t > 0$  и направление тока смещения  $\mathbf{j}$  совпадает с направлением  $\mathbf{E}$ . Применяя правило правого буравчика, мы находим, что магнитное поле  $\mathbf{H}$  направлено так, как показано на рис. 401 а.

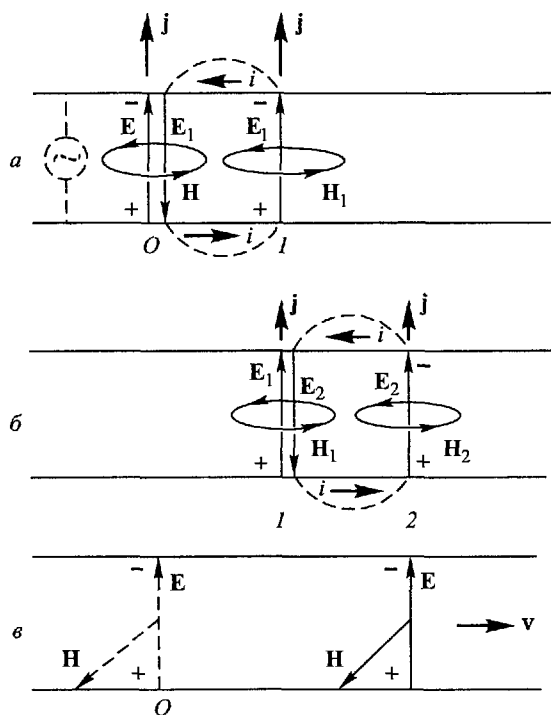


Рис. 401. Распространение электромагнитного импульса вдоль проводов

Но согласно второму основному положению теории Максвелла (§ 131) изменяющееся магнитное поле вызывает появление вихревого электрического поля. Поэтому в последующий момент времени возникнет электрическое поле  $\mathbf{E}_1$ . Оно будет направлено так же, как и индукционный ток, который возник бы в замкнутом проводнике под действием возрастающего поля  $\mathbf{H}$  (рис. 401 а).

Если бы проводов линии не было, то линии поля содержали бы участки, отмеченные на рисунке штрихом. При наличии проводов в них возникнет ток проводимости  $i$  (рис. 401 а). Если провода сделаны из хорошо проводящего материала (металл),

то напряженность электрического поля в них будет весьма мала и штриховых участков линий напряженности поля практически не будет.

Возрастающее электрическое поле  $\mathbf{E}_1$  представляет собой ток смещения, который вызовет появление магнитного поля  $\mathbf{H}_1$ . Из рис. 401 *a* видно, что поле  $\mathbf{E}_1$  в точке  $O$  направлено противоположно полю  $\mathbf{E}$ , а следовательно, будет уничтожать это последнее, а поле  $\mathbf{H}_1$  будет уничтожать поле  $\mathbf{H}$ . Поэтому первоначальное поле  $\mathbf{E}$  и вызванное им поле  $\mathbf{H}$  исчезнут, но зато появятся поля  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{H}_1$  в соседней точке линии 1 (рис. 401 *б*).

В последующие моменты времени явления будут происходить аналогично. Возрастающее поле  $\mathbf{H}_1$  вызовет появление вихревого электрического поля  $\mathbf{E}_2$ , а это последнее, увеличиваясь, приведет к возникновению магнитного поля  $\mathbf{H}_2$ . Поля  $\mathbf{E}_2$  и  $\mathbf{H}_2$  уничтожат поля  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{H}_1$  в точке 1 и проявятся в соседней точке 2, еще более удаленной от места первоначального возмущения (рис. 401 *б*). Поэтому электрические и магнитные поля, взаимно превращаясь и поддерживая друг друга, будут распространяться вдоль линии (рис. 401 *в*). Этот процесс вполне подобен распространению механического импульса вдоль резинового шнура или струны и может быть назван распространением *электромагнитного импульса*.

Для правильного понимания описанных явлений нужно иметь в виду, что точки  $O$ , 1, 2 и т.д. (см. рис. 401) находятся бесконечно близко друг к другу. Поэтому поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{H}_1$  и т.д. относятся к одной и той же точке. Следовательно, там, где электрическое поле  $\mathbf{E}$  имеет максимум, там имеет максимум и магнитное поле  $\mathbf{H}$ ; в тех же точках, где поле  $\mathbf{E}$  равно нулю, нет и поля  $\mathbf{H}$ . Это обстоятельство нам придется неоднократно учитывать в дальнейшем.

Из рис. 401 видно, что направления полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  перпендикулярны друг другу и в свою очередь перпендикулярны к скорости распространения  $\mathbf{v}$ :

$$\mathbf{E} \perp \mathbf{H} \perp \mathbf{v}.$$

Эти три вектора связаны правилом буравчика: направление  $\mathbf{v}$  совпадает с направлением поступательного движения буравчика с правой нарезкой, если его рукоятка вращается в направлении от  $\mathbf{E}$  к  $\mathbf{H}$ .

Отметим, наконец, что выше мы рассматривали только половину линии, находящуюся справа от точки  $O$ . Очевидно, что такие же явления будут происходить и в левой части линии, и поэтому поля будут распространяться в обе стороны от места первоначального возмущения.

Таким образом, существуют два различных процесса передачи поля: с помощью *токов проводимости* и при помощи *то-*

ков смещения (электромагнитных волн). Если быстрота изменения полей мала (малые частоты), то токами смещения можно пренебречь по сравнению с токами проводимости и последние играют основную роль. В этом случае электрические явления существенно зависят от сопротивления линии и, следовательно, от материала проводов. Если же поля изменяются быстро (большие частоты), то основную роль играют токи смещения и электрические явления определяются электромагнитными волнами. При этом, как мы видели, основные процессы происходят между проводами, в окружающей среде, и электрические явления практически не зависят от свойств материала проводов.

### § 231. Электромагнитные волны

Положим теперь, что в точке  $O$  (рис. 402) безграничной линии электрическое поле изменяется по гармоническому закону

$$E = E_0 \sin \omega t.$$

Электромагнитное поле будет распространяться вдоль линии, и, следовательно, в какой-либо точке линии, удаленной на расстоя-

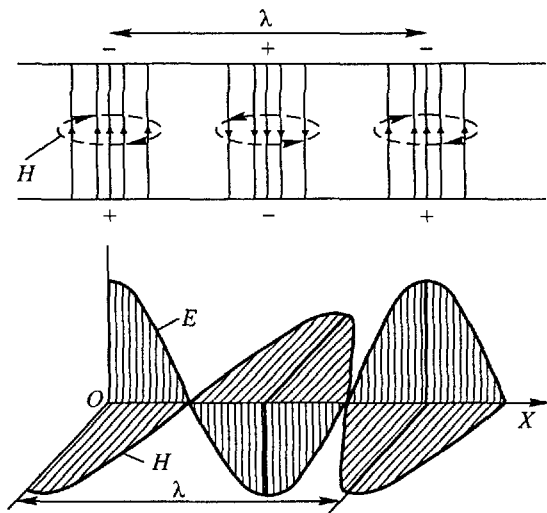


Рис. 402. Распределение электрического и магнитного полей в распространяющейся волне

ние  $x$  от точки  $O$ , также возникнут гармонические колебания поля. Однако распространение поля происходит с конечной скоростью  $v$ , так что колебания в точке  $x$  будут запаздывать относительно колебаний в  $O$  на время распространения импульса

$\tau = x/v$ . Следовательно, колебания электрического поля в точке  $x$  запишутся в виде

$$E = E_0 \sin [\omega(t - x/v)]. \quad (231.1)$$

В § 230 мы видели, что максимумы электрического поля при распространении электромагнитного импульса совпадают с максимумами магнитного поля. Поэтому колебания магнитного поля в точке  $O$  будут  $H = H_0 \sin \omega t$ , а в точке  $x$

$$H = H_0 \sin [\omega(t - x/v)]. \quad (231.1a)$$

Формулы (231.1) и (231.1a) выражают закон изменения электрического и магнитного полей в волне, распространяющейся в одном определенном направлении, а именно в направлении положительной оси  $X$ . Они называются *уравнением волны*. Если волна распространяется в противоположном направлении (вдоль отрицательной оси  $X$ ), то уравнение волны будет

$$E = E_0 \sin [\omega(t + x/v)], \quad H = H_0 \sin [\omega(t + x/v)]. \quad (231.2)$$

Мгновенное распределение электрических и магнитных полей в электромагнитной волне изображено на рис. 402. Для данного момента времени электрическое и магнитное поля достигают максимума в одних и тех же точках и в одних и тех же точках проходят через нуль. Если же следить за изменениями полей в какой-либо определенной точке линии, то оба поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  будут одновременно проходить через максимумы и одновременно через нулевые значения. Или иначе: *в распространяющейся электромагнитной волне колебания электрического и магнитного полей находятся в фазе*. Отметим, что аналогичные фазовые соотношения мы имеем и в механических волнах, где колебания деформации и скорости (потенциальной и кинетической энергии) также находятся в фазе.

Расстояние между двумя точками, в которых колебания отличаются по фазе на  $2\pi$  (например, между двумя соседними максимумами, рис. 402), есть *длина электромагнитной волны*  $\lambda$ . Она равна расстоянию, на которое распространяется волна за время одного периода колебания  $T$ . Если  $v$  — скорость распространения электромагнитных волн (скорость распространения фазы колебаний), то

$$\lambda = vT. \quad (231.3)$$

Пользуясь соотношением (231.3) и учитывая, что  $\omega = 2\pi/T$ , уравнения волны (231.1) и (231.2) можно записать и в следующем виде:

$$E = E_0 \sin [2\pi(t/T \mp x/\lambda)] = E_0 \sin (\omega t \mp kx), \quad (231.4)$$

где  $k = 2\pi/\lambda$  — *волновое число*. Такая же формула справедлива и для магнитного поля.

Уравнение волны в комплексной форме имеет вид

$$E = E_0 \exp [j(\omega t \mp kx)].$$

Следовательно, комплексная амплитуда колебаний в волне равна

$$E_0 \exp (\mp jkx). \quad (231.5)$$

В предыдущих формулах мы считали, что амплитуды колебаний электрического и магнитного полей  $E_0$  и  $H_0$  постоянны, т.е. волна распространяется без затухания. Однако при наличии электромагнитной волны в линии появляются токи проводимости (см. рис. 401). Так как сопротивление реальной линии не равно нулю, то в ней развивается тепло Джоуля–Ленца, которое выделяется за счет энергии электромагнитного поля. Поэтому в действительности амплитуды  $E_0$  и  $H_0$  по мере продвижения электромагнитной волны постепенно уменьшаются. Написанные формулы справедливы точно при условии, что сопротивление линии равно нулю. Их можно приближенно применять и для реальной линии, если рассматривать лишь участок линии такой длины, что затухание волны на нем невелико.

## § 232. Стоячие электромагнитные волны

Распространяющиеся электромагнитные волны возникают в очень длинных линиях, которые практически можно рассматривать как неограниченные. Во многих случаях, однако, приходится иметь дело с короткими линиями, на длине которых укладывается сравнительно небольшое число длин волн. В этих случаях существенную роль играет отражение электромагнитных волн от концов линии. Отраженные волны складываются между собой и с первоначальной волной, в результате чего возникают более сложные формы электромагнитных колебаний — *стоячие электромагнитные волны*, подобные стоячим механическим волнам в упругом шнуре или струне.

Для выяснения основных особенностей стоячих электромагнитных волн достаточно рассмотреть только две волны: первичную и одну отраженную от конца линии. Введем координатную ось  $X$ , направленную вдоль линии (рис. 403), и положим, что колебания электрического поля пер-

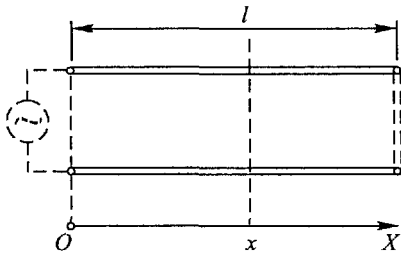


Рис. 403. Ограниченная двухпроводная линия

(рис. 403), и положим, что колебания электрического поля пер-

вичной волны в точке линии  $O$  имеют вид

$$E_1 = E_0 \sin \omega t. \quad (232.1)$$

Тогда колебания в точке линии  $x$  будут

$$E_1 = E_0 \sin (\omega t - kx). \quad (232.2)$$

Считая, что волна отражается полностью, колебания поля отраженной волны в той же точке  $x$  можно представить формулой

$$E_2 = E_0 \sin (\omega t + kx - \varphi). \quad (232.3)$$

Здесь знак  $+$  у слагаемого  $kx$  выражает то, что отраженная волна распространяется в отрицательном направлении оси  $X$  (справа налево, рис. 403). Угол же  $\varphi$  имеет следующий смысл. Полагая в формуле (232.3)  $x = 0$  и сравнивая ее с (232.1), мы видим, что  $\varphi$  есть запаздывание по фазе колебаний поля отраженной волны в точке  $O$  по сравнению с колебаниями первичной волны в той же точке. Это запаздывание имеет две причины. Во-первых, до возвращения в точку  $O$  волна должна дважды пройти всю длину линии  $l$ , отчего возникает отставание по фазе  $2\pi \cdot 2l/\lambda$ . Во-вторых, как мы увидим ниже, возможно изменение фазы колебаний при самом отражении. Для учета этих обоих явлений мы и ввели в (232.3) угол  $\varphi$ , точное значение которого для нас пока не важно.

Складываясь, обе волны дают результирующее поле

$$E = E_1 + E_2 = E_0 [\sin (\omega t - kx) + \sin (\omega t + kx - \varphi)].$$

Применяя известную формулу тригонометрии о сумме синусов и учитывая еще, что  $\cos (-\alpha) = \cos \alpha$ , находим

$$E = 2E_0 \cos (kx - \varphi/2) \sin (\omega t - \varphi/2). \quad (232.4)$$

Формула (232.4) показывает, что в линии будут происходить гармонические колебания поля с частотой первичной волны  $\omega$  и с начальной фазой  $-\varphi/2$ . Однако амплитуда этих колебаний

$$E_a = 2E_0 \cos (kx - \varphi/2) \quad (232.5)$$

оказывается зависящей от координаты  $x$  и потому различна в разных точках линии. В определенных точках  $E_a$  достигает максимума. Эти точки называются *пучностями* электрического поля. Их координаты  $x_{\Pi}$  определяются условием

$$kx_{\Pi} - \varphi/2 = 0, \pi, 2\pi, \dots, n\pi.$$

Для расстояния  $\Delta x$  между двумя соседними пучностями имеем

$$k \Delta x = \pi.$$

Так как  $k = 2\pi/\lambda$ , то

$$\Delta x = \lambda/2. \quad (232.6)$$

В точках, называемых *узлами* электрического поля, амплитуда  $E_a$  обращается в нуль. Координаты узлов  $x_y$  можно найти



из условия

$$kx_y - \varphi/2 = \pi/2, 3\pi/2, \dots, (2n + 1)\pi/2.$$

Следовательно, два соседних узла отстоят друг от друга на расстоянии

$$\Delta x = \pi/k = \lambda/2.$$

Расстояние между соседними узлами и пучностями одинаково и равно половине длины волны  $\lambda/2$ .

Рисунок 404 поясняет характер колебаний поля в стоячей электромагнитной волне; вдоль горизонтальной оси отложены перемещения  $x$  вдоль линии, а по вертикальной оси — амплитуда колебаний поля  $E_a$ . Во всех точках между двумя соседними узлами (0-1, 1-2 и т.д.) колебания происходят с одинаковой начальной фазой, так что  $E$  во всех точках одновременно достигает максимума и одновременно обращается в нуль (в соответствии с формулой (232.4)). Но при переходе через каждый узел  $\cos(kx - \varphi/2)$  изменяет знак, что соответствует изменению фазы колебаний на  $\pi$ .

Выше мы рассматривали только колебания электрического поля. Обратимся теперь к магнитному полю.

В § 231 мы видели, что в распространяющейся волне колебания электрического и магнитного полей ( $E$  и  $H$ ) находятся в фазе. В стоячей электромагнитной волне это уже не имеет места, и между колебаниями  $E$  и  $H$  существует разность фаз, а пучности электрического поля не совпадают с пучностями магнитного поля.

Причина этого различия заключается в том, что при отражении электромагнитной волны от конца линии происходит изменение фазы колебаний. Необходимость этого явления ясна из следующих рассуждений. Мы знаем (§ 230), что направления векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  связаны с направлением скорости распространения  $\mathbf{v}$  правилом правого буравчика. Положим, что волна (первичная) движется слева направо и что расположение векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в волне в конце линии таково, как показано на рис. 405 а. Чтобы скорость волны изменилась на противоположную, нужно, чтобы один из векторов,  $\mathbf{E}$  или  $\mathbf{H}$ , изменил знак (рис. 405 б и в).

Но изменение знака поля обозначает изменение фазы колебаний на  $\pi$ . Поэтому при отражении фаза колебаний одного из полей должна обязательно изменяться скачкообразно на  $\pi$ . При этом если изменяется фаза электрического поля, то фаза магнитно-

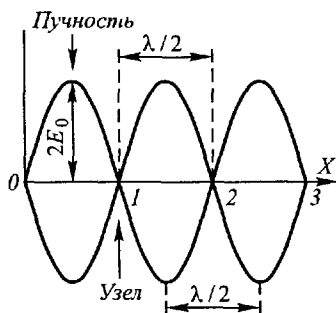


Рис. 404. Колебания электрического поля в стоячей волне

го поля остается без изменений, и наоборот, если скачок фазы испытывает магнитное поле, то фаза электрического поля не изменяется.

Явление изменения фазы при отражении можно строго обосновать при помощи уравнений Максвелла, которые позволяют также определить, какое именно из полей,  $\mathbf{E}$  или  $\mathbf{H}$ , меняет фазу

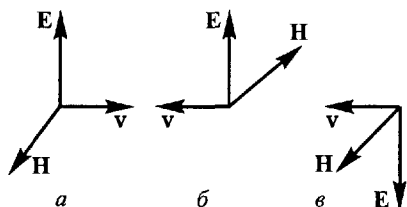


Рис 405. Взаимная ориентировка электрического и магнитного векторов до (а) и после (б и в) отражения электромагнитной волны

при данных условиях на конце линии. Однако мы ограничимся более простыми качественными рассуждениями.

Положим, что линия на конце разомкнута. В этом случае переменные токи, возникающие в проволоках, будут вызывать на конце линии наибольшие колебания зарядов. Здесь, следовательно, будет расположе-

на одна из пучностей электрического поля (напряжения). Это значит, что электрическое поле в отраженной волне направлено так же, как и в падающей, т.е. оно не изменяет фазы. Но при тех же условиях, так как проволоки граничат с диэлектриком, амплитуда тока на конце линии будет равна нулю. Здесь будет узел тока, а значит, и узел магнитного поля. Следовательно, магнитное поле в отраженной волне направлено противоположно полю падающей волны, т.е. оно изменяет фазу на  $\pi$ .

Если линия замкнута на конце проводящим мостиком, то будет происходить обратное. Так как концы проводов замкнуты, то напряжение между ними всегда равно нулю и на конце линии будет расположен узел напряжения и электрического поля. Напротив, амплитуда тока в проводящем мостике будет наибольшая и на конце линии образуется пучность тока. Здесь же находится и пучность магнитного поля.

Таким образом, в стоячей электромагнитной волне узлы электрического поля (напряжения) совпадают с пучностями магнитного поля (тока) и наоборот. Распределение амплитуд колебаний электрического и магнитного полей в стоячей волне изображено на рис. 406.

Отметим в заключение, что указанные свойства электромагнитных волн аналогичны свойствам механических волн. Во всякой механической волне (например, в струне) имеются колебания двух видов энергии: потенциальной, обусловленной деформациями, и кинетической, связанной со скоростью отдельных элементов среды; подобно этому, в электромагнитной волне мы имеем колебания электрической и магнитной энергии. В рас-

пространяющейся механической волне колебания деформации и скорости находятся в фазе; в распространяющейся электромагнитной волне фазы колебаний электрического и магнитного полей также совпадают. Наконец, в стоячей механической волне

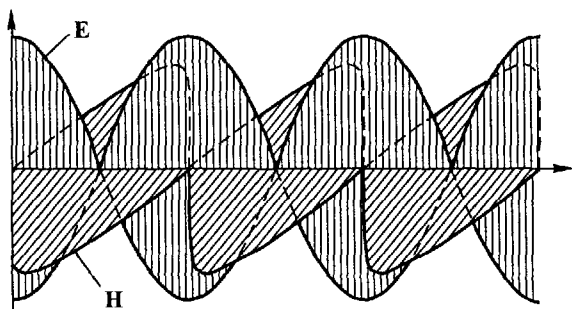


Рис. 406 Пространственное распределение амплитуд электрического и магнитного полей в стоячей волне

узлы деформации совпадают с пучностями скорости и наоборот; аналогично в стоячей электромагнитной волне узлы электрического поля совпадают с пучностями магнитного поля и обратно.

### § 233. Собственные колебания двухпроводной линии

Для того чтобы в двухпроводной линии могли возникнуть стоячие волны, длина электромагнитной волны должна иметь определенные значения, зависящие от длины линии. Рассмотрим линию длины  $l$  и положим, что она разомкнута на обоих концах. Мы знаем (§ 232), что на концах такой линии всегда должны быть расположены пучности напряжения (электрического поля) и узлы тока (магнитного поля). Поэтому в линии будут возможны только такие стоячие волны, которые удовлетворяют этим условиям на границе. А тогда, очевидно, необходимо, чтобы длина волны  $\lambda$  удовлетворяла соотношению

$$l = \lambda n / 2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (233.1)$$

На рис. 407 изображены две возможные стоячие волны, соответствующие  $n = 1$  и  $n = 2$ . Первая из них (1), называемая *основным* колебанием, имеет один узел напряжения  $U$  и одну пучность тока  $i$ , расположенные на середине линии. Вторая (2) имеет два узла напряжения и две пучности тока. В обоих случаях на концах линии находятся пучности напряжения и узлы тока в соответствии с граничными условиями. Помимо указанных двух стоячих волн, возможно еще бесконечное количество других, которые соответствуют  $n = 3, 4, \dots$

Так как длина волны  $\lambda$ , частота колебаний  $\nu$  и скорость электромагнитной волны  $v$  связаны между собой соотношением

$$v = \nu\lambda,$$

то из (233.1) можно найти частоты  $\nu_n$  различных стоячих волн:

$$\nu_n = (v/2l)n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (233.2)$$

Очевидно, что формулы (233.1) и (233.2) мы получим и тогда, когда оба конца линии будут замкнуты проводящим мостиком. Различие будет заключаться лишь в том, что во втором случае на концах линии будут находиться узлы напряжения (а не пучности) и пучности тока (вместо узлов).

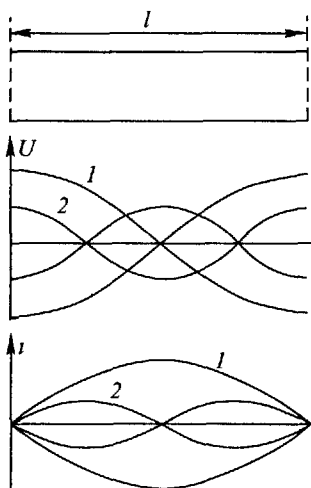


Рис. 407. Два первых собственных колебания двухпроводной линии, разомкнутой на концах

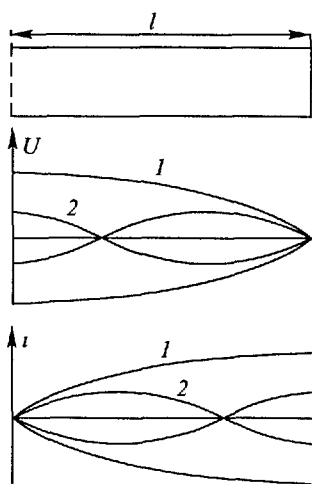


Рис. 408. Два первых собственных колебания двухпроводной линии, замкнутой на одном конце проводящим мостиком

Положим теперь, что линия замкнута проводящим мостиком на одном из концов (рис. 408). В этом случае на разомкнутом конце линии всегда будет находиться пучность напряжения (и узел тока), а на замкнутом — узел напряжения (и пучность тока). Поэтому в линии будут возможны волны только такого типа, как показано на рис. 408. Их длина удовлетворяет условиям  $l = \lambda/4$  (кривая 1, основное колебание),  $l = 3\lambda/4$  (кривая 2),  $l = 5\lambda/4$  и вообще

$$l = (2n - 1)\lambda/4, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (233.3)$$

Так как  $\lambda = v/\nu$ , то частота этих стоячих волн равна

$$\nu_n = (v/4l)(2n - 1), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (233.4)$$

Сравнивая (233.2) и (233.4), мы видим, что частоты колебаний в обоих случаях получаются различными. Частота основного колебания ( $n = 1$ ) в первом случае (оба конца разомкнуты) равна  $\nu_1 = v/2l$ , а во втором (один конец разомкнут)  $\nu_1 = v/4l$ , т.е. при замыкании одного из концов частота основного колебания уменьшается вдвое.

Таким образом, в ограниченной двухпроводной линии возможны только определенные стоячие волны, которые удовлетворяют условиям на границах линии. Эти стоячие волны суть *собственные колебания* линии. Формулы (233.2) и (233.4) показывают, что собственные колебания имеют разрывный (дискретный) набор частот (*спектр частот*). Число различных собственных колебаний линии равно бесконечности в соответствии с тем, что линия как распределенная система обладает бесконечно большим числом степеней свободы.

Чтобы возбудить в линии одно из собственных колебаний, генератор, питающий линию, должен иметь частоту, совпадающую с одной из собственных частот линии  $\nu_n$ . Если же это условие не будет выполнено, то различные волны, отраженные от концов линии, складываясь друг с другом (интерферируя), дадут изменяющиеся и сложные колебания, а устойчивой стоячей волны не получится.

Разумеется, в линии можно одновременно возбудить не только одно из собственных колебаний, но и какое угодно их число. При этом разные стоячие волны, накладываясь друг на друга, образуют колебания более сложной формы. И обратно, можно показать, что любое сложное колебание линии можно представить в виде суммы различных собственных колебаний с определенным образом подобранными амплитудами и начальными фазами.

### § 234. Экспериментальное исследование стоячих электромагнитных волн

Стоячие электромагнитные волны в линии легко получить на опыте. Один из способов их возбуждения показан на рис. 409. Выход генератора соединен с проводами линии через конденсаторы (емкостная связь). При работе генератора между проводами появляются колебания напряжения, а следовательно, и электрического поля, и в линии возникает электромагнитная волна.

Связь между линией и генератором можно сделать также индуктивной. Для этого конец линии замыкают небольшим

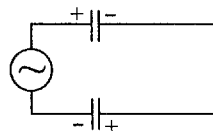


Рис. 409. Емкостная связь двухпроводной линии с генератором

числом витков проволоки (один-два) и помещают их вблизи катушки колебательного контура генератора (рис 410). Возникающая в витках линии ЭДС взаимной индукции вызывает на конце линии колебания тока (и магнитного поля), которые, так же как и колебания напряжения (электрического поля), дают начало электромагнитной волне.



Рис 410 Индуктивная связь двухпроводной линии с генератором

Для обнаружения колебаний напряжения можно пользоваться газоразрядной трубкой, включенной между проводами.

В подобных опытах можно убедиться, что стоячие волны в линии возникают только при определенных частотах генератора, совпадающих с частотами собственных колебаний линии.

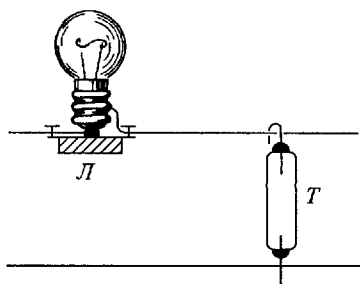


Рис 411 Обнаружение колебаний тока с помощью лампы накаливания ( $L$ ) и колебаний напряжения с помощью газоразрядной трубки ( $T$ )

Для скорости электромагнитных волн величину, совпадающую со скоростью распространения света, которая для воздуха округленно равна  $3 \cdot 10^8$  м/с.

Еще до того, как электромагнитные волны были впервые получены на опыте, Максвелл, исходя из своей теории электромагнитного поля (гл. XIII), вычислил их скорость. Скорость электромагнитных волн в вакууме выражается формулой

$$c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с} \quad (234.1)$$

(эта формула будет получена в § 240). Здесь  $\epsilon_0 = 1/(4\pi \cdot 9 \times 10^9)$  Ф/м — электрическая постоянная, а  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м — магнитная постоянная. Таким образом, теория Максвелла предсказала, что скорость распространения электромагнитных волн

Исследуя на опыте стоячие волны, можно определить скорость распространения электромагнитных волн. Действительно, измеряя расстояние  $\Delta x$  между двумя соседними узлами или пучностями в стоячей волне, мы определяем половину длины электромагнитной волны  $(1/2)\lambda$ . С другой стороны,  $\lambda = v/\nu$ . Поэтому, измеряя еще частоту генератора  $\nu$ , можно найти скорость распространения  $v$ . Такие измерения дают

должна равняться скорости света, а факт совпадения обеих скоростей явился одним из первых указаний на то, что свет имеет электромагнитную природу.

В § 230 мы видели, что основные процессы при распространении волн вдоль проводов происходят не в самих проводах, а в окружающей их среде. Поэтому при изменении среды, окружающей провода, скорость электромагнитных волн изменяется, а длина волны при той же частоте генератора становится другой. Из теории Максвелла следует (§ 240), что скорость (фазовая) электромагнитной волны в какой-либо среде равна

$$v = c/\sqrt{\epsilon\mu}, \quad (234.2)$$

где  $c$  — скорость в вакууме, а  $\epsilon$  и  $\mu$  — относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды. В этом легко убедиться на опыте, если часть двухпроводной линии, которая раньше находилась в воздухе, погрузить в воду. Так как для воды  $\mu \approx 1$ , а  $\epsilon > 1$ , то скорость электромагнитных волн в воде меньше, чем в воздухе, и поэтому расстояние между соседними узлами (или пучностями) уменьшается. Отметим, что  $\epsilon$  и  $\mu$  зависят от частоты. Поэтому при вычислении  $v$  по формуле (234.2) нужно брать их значения, соответствующие частоте колебаний в данной электромагнитной волне.

### § 235. Открытый вибратор

Представим себе двухпроводную линию, замкнутую на одном из концов, и раздвинем свободные концы проволок. Тогда в

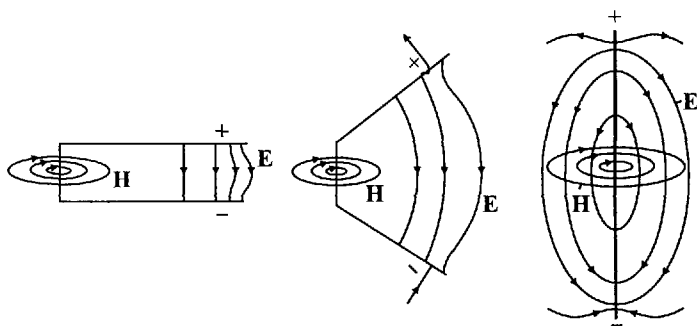


Рис 412 Переход от двухпроводной линии к открытому вибратору

пределе мы получим отрезок прямой проволоки, или *открытый вибратор* (рис 412).

Длина возможных в нем стоячих электромагнитных волн определяется длиной вибратора  $l$  и условиями на концах. Ес-

ли оба конца вибратора граничат с диэлектриком, то на них должны быть расположены узлы тока и пучности напряжений.

Поэтому возможные длины волн  $\lambda$  определяются условием

$$l = \frac{n\lambda}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (235.1)$$

Частота колебаний  $\nu$  в различных стоячих волнах равна

$$\nu = v/\lambda = \frac{v}{2l} n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (235.2)$$

Стоячая волна, соответствующая  $n = 1$ , называется *основным* колебанием вибратора. Распределение амплитуд напряжения и тока в ней показано на рис. 413 а.

Если один из концов вибратора заземлить, то на этом конце будет расположен узел напряжения

Рис. 413. Основные колебания незаземленного (а) и заземленного (б) вибратора

и, следовательно, пучность тока. Поэтому основное колебание заземленного вибратора имеет вид, изображенный на рис. 413 б. Из рисунка видно, что при заземлении вибратора длина волны его основного колебания увеличивается, а частота уменьшается в два раза.

### § 236. Стоячие волны в катушках

Проволочные катушки, как и двухпроводные линии, обладают определенными индуктивностью и емкостью на каждую единицу длины, т.е. представляют собой электрические распределенные системы. Поэтому в них возможны также стоячие электромагнитные волны.

Тесла использовал стоячие волны в катушках для устройства *резонансного трансформатора*. Его первичная обмотка  $L_1$  (рис. 414) имеет небольшое число витков и входит в состав колебательного контура, например искрового контура, содержащего конденсатор  $C$  и

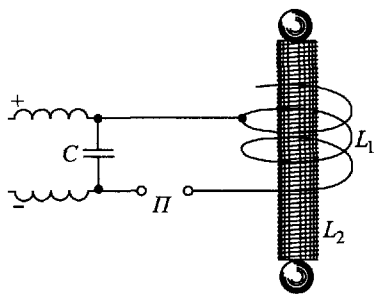


Рис. 414. Схема трансформатора Теслы

искровой промежуток  $\Pi$ . Вторичной обмоткой служит проволочная катушка  $L_2$ .



Когда в первичной цепи возникают электрические колебания, то внутри катушки  $L_1$  появляется переменное магнитное поле и во вторичной катушке  $L_2$  наводится переменная ЭДС. Если подобрать частоту колебаний в первичной цепи так, чтобы она совпала с частотой одного из собственных колебаний (стоячих волн) катушки  $L_2$  (обычно — основного колебания), то вследствие резонанса в этой последней возникнет интенсивная стоячая волна и между концами катушки появится высокое переменное напряжение. При резонансе из концов вторичной катушки можно извлекать длинные искры, а электрическое поле вблизи катушки настолько сильно, что вызывает свечение газоразрядных трубок даже на значительном расстоянии от установки.

Если расположить катушку  $L_2$  рядом с катушкой  $L_1$ , то можно исследовать распределение напряжения вдоль катушки и убедиться, что действительно в ней возникает стоячая волна. Извлекая, например, из разных мест катушки искры с помощью заземленного металлического стержня, можно видеть, что наиболее длинные искры получаются у концов катушки (пучности напряжения), а вблизи середины катушки искры не возникают вовсе (узел напряжения).

Высокочастотные резонансные трансформаторы применяются иногда в лабораторной практике там, где нужно получить очень высокие напряжения при малой мощности.

## Г Л А В А XXIII

### СВОБОДНЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

#### § 237. Образование свободных электромагнитных волн

Мы знаем, что основные процессы в электромагнитных волнах, распространяющихся вдоль проводов, происходят в среде, окружающей провода (§ 230). Сами же провода играют вспомогательную роль, задавая лишь определенное направление распространения волн. Поэтому электромагнитные волны могут существовать и без всяких проводов (свободные электромагнитные волны).

Происходящие при этом процессы по существу такие же, как и в случае волн, распространяющихся вдоль проводов. Представим себе, что в некоторой точке  $O$  (рис. 415) внутри безграничной непроводящей среды создано каким-либо способом электрическое поле  $E$ . Если нет электрических зарядов, поддерживающих это поле, то оно будет исчезать. Но убывающее поле  $E$ , согласно Максвеллу, вызывает магнитное поле  $H$ . Так

как поле  $\mathbf{E}$  убывает, то плотность тока смещения  $\mathbf{j} = \epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$  направлена противоположно  $\mathbf{E}$  и линии индукции магнитного поля направлены по часовой стрелке (вид сверху, рис. 415).

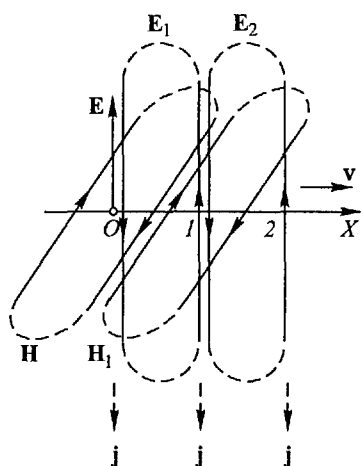


Рис. 415. Свободные электромагнитные волны

Так как в среде нет постоянных токов, поддерживающих поле  $\mathbf{H}$ , то последнее в свою очередь будет исчезать и вызовет вихревое электрическое поле  $\mathbf{E}_1$ . Линии напряженности этого поля будут направлены против часовой стрелки, как показано на рис. 415. Поле  $\mathbf{E}_1$  уничтожит первоначальное поле  $\mathbf{E}$  в точке  $\theta$ , но зато проявится в соседней точке  $1$ . Исчезая в точке  $1$ , электрическое поле  $\mathbf{E}_1$  приведет к появлению магнитного поля  $\mathbf{H}_1$ , которое будет направлено, как и поле  $\mathbf{H}$ , по часовой стрелке. Поле  $\mathbf{H}_1$  уничтожит поле  $\mathbf{H}$  и обнаружится в более удаленной точке. Исчезая, оно вызовет вихревое электрическое поле  $\mathbf{E}_2$ , которое уничтожит поле  $\mathbf{E}_1$  в точке  $1$ , но проявится в точке  $2$ , и т.д. Таким образом, вместо первоначального поля  $\mathbf{E}$  мы получим и электрическое и магнитное поля, взаимно связанные друг с другом и распространяющиеся в пространстве, т.е. электромагнитную волну.

Из рис. 415 также видно, что  $\mathbf{E}$  перпендикулярно к  $\mathbf{H}$ , причем оба они перпендикулярны к скорости распространения волны  $\mathbf{v}$ . Все три вектора связаны между собой правилом правого буравчика: если вращать буравчик с правой нарезкой так, чтобы его рукоятка перемещалась от вектора  $\mathbf{E}$  к вектору  $\mathbf{H}$ , то направление поступательного движения буравчика будет совпадать с направлением  $\mathbf{v}$ .

Выше мы рассматривали электромагнитные волны качественно. Однако теория Максвелла не только предсказала существование электромагнитных волн, но и позволила в точной, количественной форме установить все основные их свойства. Обратимся сейчас к более строгому исследованию этих явлений.

### § 238. Волновое уравнение

Положим, что некоторая физическая величина  $s$  распространяется в направлении  $X$  со скоростью  $v$ . Величина  $s$  может обозначать смещение или скорость отрезков резинового шнура при

наличии в нем механической волны. В случае электромагнитных волн под  $s$  можно подразумевать напряженность электрического или магнитного поля и т.д. Нетрудно видеть, что общая форма записи этого процесса есть

$$s = f(t - x/v). \quad (238.1)$$

Здесь  $t$  обозначает время,  $x$  — координату рассматриваемой точки, а  $f$  — символ произвольной функции. Иными словами, любая произвольная функция, если только она зависит от аргумента  $(t - x/v)$ , выражает волнообразный процесс.

Чтобы убедиться в этом, предположим, что наблюдатель движется в положительном направлении оси  $X$  со скоростью  $v$ . Тогда для него  $x = x_0 + vt$ . Подставляя это выражение в (238.1), находим

$$s = f\left(t - \frac{x_0 + vt}{v}\right) = f\left(-\frac{x_0}{v}\right) = \text{const},$$

т.е.  $s$  не зависит от времени. Такой движущийся наблюдатель, следовательно, будет находить возле себя одно и то же значение величины  $s$ , а это и значит, что  $s$  распространяется со скоростью  $v$ .

Подобным же образом можно убедиться, что соотношение

$$s = f(t + x/v) \quad (238.2)$$

выражает то обстоятельство, что величина  $s$  распространяется в отрицательном направлении оси  $X$ .

Полагая в (238.1) или (238.2)  $t = 0$ , мы получим

$$s = f(\mp x/v).$$

Это выражение представляет распределение  $s$  в момент времени  $t = 0$ . Если  $s$  обозначает смещение точек резинового шнура, то написанная формула дает начальную деформацию шнура (его изгиб). Если  $s$  есть напряженность электрического поля в электромагнитной волне, то последняя формула выражает распределение поля в пространстве в начальный момент времени. Следовательно, вид функции  $f$  зависит от начальных условий процесса. В частности, если  $f$  обозначает  $\sin$  или  $\cos$ , то (238.1) переходит в уже знакомое нам уравнение гармонической волны (231.1). Таким образом, формулы (238.1) и (238.2) представляют собой общее выражение волны, распространяющейся в направлении оси  $X$ .

Функция  $s$  удовлетворяет простому дифференциальному уравнению. Чтобы найти его, продифференцируем формулы (238.1) и (238.2) (которые мы объединим, вводя двойной знак  $\mp$ ) два раза по координате:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} f'',$$

где штрихами обозначено дифференцирование по всему аргументу ( $t \mp x/v$ ). Вторая же частная производная по времени равна

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = f''.$$

Сравнивая эти выражения, мы видим, что искомое дифференциальное уравнение есть

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}. \quad (238.3)$$

Оно называется *волновым уравнением*.

Мы предполагали, что волна распространяется в одном определенном направлении, которое считали совпадающим с направлением оси  $X$  (или ему противоположным). Если волна распространяется во всех направлениях, то волновое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = v^2 \left( \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} \right). \quad (238.4)$$

Таким образом, если какая-либо физическая величина распространяется волнообразно, то она удовлетворяет волновому уравнению. И обратно, если удастся показать, что рассматриваемая величина подчиняется волновому уравнению, то можно утверждать, что возможно ее распространение в виде волны. При этом непосредственно получается и скорость распространения волны, которая равна квадратному корню из коэффициента при  $\partial^2 s / \partial x^2$ .

### § 239. Плоские электромагнитные волны

Обратимся теперь к уравнениям Максвелла (§ 138). Будем считать, что среда представляет собой однородный диэлектрик. Тогда в уравнениях (138.1) нужно положить  $j_x = j_y = j_z = 0$ .

Далее мы ограничимся особенно простым случаем электромагнитного поля, когда  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  зависят от одной координаты ( $x$ ) и от времени (одномерная задача). Это значит, что все пространство можно разбить на бесконечно тонкие плоские слои, внутри которых  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  имеют одно и то же значение во всех точках (рис. 416).

У всяких волн (и механических, и электромагнитных) поверхность, во всех точках которой колебания имеют одинаковую фазу, называют *фронтом* волны. В зависимости от того, какую форму имеет волновой фронт, мы говорим о *плоских* волнах (волновой фронт плоский), *сферических*, *цилиндрических* и т.д. Рассматриваемая одномерная задача соответствует, очевидно, плоским электромагнитным волнам.

Для одномерного случая уравнения Максвелла сильно упрощаются. Так как все производные по  $y$  и  $z$  равны нулю, то прежде всего из первого уравнения группы (138.1) следует, что  $\partial D_x / \partial t = 0$ , а из первого уравнения группы (138.2) — что  $\partial B_x / \partial t = 0$ . Это значит, что составляющие полей  $D_x$  и  $B_x$  не зависят от времени. Далее из (138.3) и (138.4) получается, что  $\partial D_x / \partial x = 0$  и  $\partial B_x / \partial x = 0$ , а значит,  $D_x$  и  $B_x$  не зависят также и от координаты. Поэтому

$$D_x = \text{const}, \quad B_x = \text{const}.$$

Остающиеся уравнения группы (138.1) теперь принимают вид

$$\frac{\partial D_y}{\partial t} = -\frac{\partial H_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial D_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x},$$

а уравнения группы (138.2) — вид

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x}.$$

Эти четыре уравнения можно сгруппировать в две независимые группы, одна из которых связывает  $y$ -составляющие электрического поля и  $z$ -составляющие магнитного поля

$$\frac{\partial D_y}{\partial t} = -\frac{\partial H_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x},$$

а другая —  $z$ -составляющие электрического поля и  $y$ -составляющие магнитного поля

$$\frac{\partial D_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}.$$

Отсюда следует, что меняющееся во времени электрическое поле  $E_y$  вызывает появление только магнитного поля  $H_z$ , направленного вдоль оси  $Z$ , а переменное во времени магнитное поле  $H_z$  влечет появление электрического поля  $E_y$ , целиком направленного вдоль оси  $Y$ . Или, иначе, в электромагнитном поле электрическое и магнитное поля перпендикулярны друг к другу. Такой же вывод вытекает и из второй пары уравнений.

Найденный результат позволяет положить без нарушения общности, что все электрическое поле направлено вдоль одной из осей, например вдоль оси  $Y$ , а магнитное поле — вдоль оси  $Z$  (рис. 416). Поэтому в последних уравнениях можно положить  $E_y = E$ ,  $E_z = 0$ ,  $H_z = H$ ,  $H_y = 0$ , и мы находим окончательно уравнения Максвелла для одномерного случая в следующем простом виде:

$$\frac{\partial D}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\partial E}{\partial x}. \quad (239.1)$$

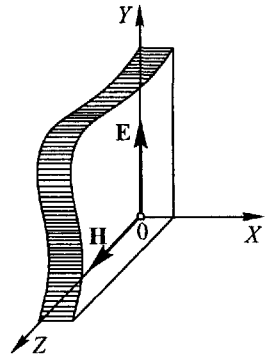


Рис. 416. Плоская электромагнитная волна

### § 240. Свойства электромагнитных волн

Покажем теперь, исходя из уравнений Максвелла, необходимость существования электромагнитных волн и выясним некоторые важные их свойства.

Исключим из уравнений Максвелла (239.1) магнитное поле  $H$ . Для этого умножим первое из уравнений на  $\mu_0\mu$  и про дифференцируем обе его части по  $t$ :

$$\epsilon\epsilon_0\mu_0\mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\mu_0\mu \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial t}.$$

Второе уравнение про дифференцируем по  $x$ :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -\mu_0\mu \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial t}.$$

Так как правые части этих уравнений одинаковы, то, следовательно, равны и левые части, т.е.

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0\epsilon\mu_0\mu} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}. \quad (240.1)$$

Такое же уравнение мы получили бы и для  $H$ , если бы из (239.1) исключили электрическое поле  $E$ .

Уравнение (240.1) есть волновое уравнение, рассмотренное в § 238. Отсюда следует, что поля  $E$  и  $H$  могут распространяться в пространстве, т.е. могут существовать электромагнитные волны. Поэтому можно положить

$$E = \varphi(t \mp x/v), \quad H = \psi(t \mp x/v), \quad (240.2)$$

где  $v$  — скорость распространения электромагнитной волны.

Далее, согласно сказанному в § 238, коэффициент при  $\partial^2 E/\partial x^2$  в (240.1) есть квадрат скорости распространения волн:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}, \quad (240.3)$$

где  $c$  есть скорость распространения при  $\epsilon = \mu = 1$ , т.е. в вакууме. Мы получили, таким образом, выражение для скорости распространения электромагнитных волн (*закон Максвелла*), о котором мы уже говорили в § 234 и которое, как мы видели, соответствует опыту.

Как уже упоминалось (§ 237), электрическое и магнитное поля в электромагнитной волне взаимно связаны друг с другом. Поэтому между мгновенными значениями  $E$  и  $H$  в любой точке существует определенное соотношение, которое также можно найти из уравнений Максвелла. Для этого мы воспользуемся общими выражениями (240.2) для  $E$  и  $H$  (выбирая в них какой-либо определенный знак, скажем минус) и подставим их в одно из уравнений Максвелла (239.1), например в первое. Так как

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \varphi', \quad \frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{1}{v} \psi'$$

(где по-прежнему штрих обозначает дифференцирование по все-му аргументу), то указанная подстановка дает

$$\epsilon_0 \epsilon \varphi' = \frac{1}{v} \psi'.$$

Переходя от производных к самим функциям, получим

$$\epsilon_0 \epsilon \varphi = \frac{1}{v} \psi + C,$$

где  $C$  обозначает постоянную интегрирования. Так как нас интересуют электромагнитные волны, т.е. только переменные поля, то  $C$ , которое выражает произвольное постоянное поле, можно не учитывать. Заменяя еще  $v$  его выражением (240.3), находим окончательно

$$\sqrt{\epsilon_0 \epsilon} E = \sqrt{\mu_0 \mu} H. \quad (240.4)$$

Эта формула показывает, что в распространяющейся электромагнитной волне  $E$  и  $H$  пропорциональны друг другу.

Из (240.4) следует, что  $E$  и  $H$  одновременно достигают максимума и одновременно обращаются в нуль, т.е. находятся в фазе. Тот же результат мы получили уже в § 231 при помощи качественных рассуждений.

### § 241. Экспериментальное исследование электромагнитных волн

Для образования электромагнитных волн необходимо создать в пространстве достаточно быстро изменяющееся электрическое поле (ток смещения) или соответственно быстро изменяющееся магнитное поле. Очевидно, что для этой цели непригодны электрические колебательные контуры с сосредоточенными емкостью и индуктивностью (закрытые контуры), рассмотренные в гл. XX. В таких контурах все электрическое поле сосредоточено в узком зазоре конденсатора, а все магнитное поле — внутри индуктивности, а в окружающем пространстве электрическое поле практически равно нулю.

Иное мы имеем для открытого вибратора, или электрического диполя (§ 235). В этом случае линии электрического и магнитного полей выходят далеко за пределы вибратора (см. рис. 412), и поэтому последний хорошо излучает электромагнитные волны.

Свободные электромагнитные волны были впервые получены на опыте Генрихом Герцем в 1888 г. Для изучения электромагнитных волн Герц использовал собственные электрические колебания открытого вибратора, который состоял из двух одинаковых металлических стержней  $BB$  (рис. 417), разделенных искровым промежутком. Обе половины вибратора заряжались от источника высокого напряжения. Когда разность потенциалов достигала пробойного значения, в разряднике проскакивала

искра, замыкавшая обе половины вибратора, и в нем возникали затухающие электрические колебания высокой частоты. Чтобы быстропеременные токи не уходили из вибратора в источник напряжения, между вибратором и источником были включены дроссели  $D$ .

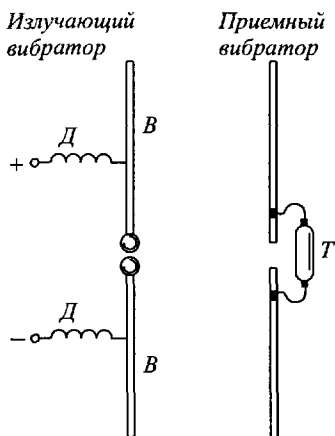


Рис 417. Опыт Г Герца

Для обнаружения электромагнитных волн Герц применял вибраторы различной формы. Наиболее простым является прямой открытый вибратор, тождественный по форме и размерам с излучающим вибратором (рис. 417). Под действием переменного электрического поля проходящей электромагнитной волны электроны внутри вибратора начинают совершать вынужденные колебания, отчего в вибраторе появляется быстропеременный ток, а между обеими половинами вибратора — переменное напряжение. Если длина приемного вибратора равна длине излучающего, то собственные частоты обоих диполей совпадают и электрические колебания в приемном диполе усиливаются вследствие резонанса. Появление переменного напряжения Герц обнаруживал по возникновению электрической искорки в микроскопическом зазоре в середине вибратора или по свечению миниатюрной газоразрядной трубки  $T$ , включенной между обеими половинами вибратора.

В настоящее время для генерирования электромагнитных волн пользуются почти исключительно ламповыми генераторами, которые позволяют получать электрические колебания практически любой мощности и притом правильной синусоидальной формы. Для возбуждения колебаний в вибраторе можно между обеими его половинами  $ВВ$  включить один или несколько витков связи (рис. 418) и расположить их вблизи катушки индуктивности  $K$  лампового генератора  $\Gamma$  (магнитная связь). Существуют и другие способы связи между вибраторами и генератором. Чтобы усилить колебания в вибраторе, используют явление резонанса, для чего частоту генератора делают равной одной из

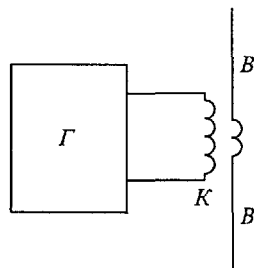


Рис 418 Возбуждение диполя при помощи лампового генератора



собственных частот вибратора, обычно частоте основного его колебания.

Для обнаружения электрических колебаний в приемном вибраторе можно пользоваться небольшой электрической лампой  $L$  (рис. 419 *a*), включенной в его середине  $BB$  (в пучности тока). Этот способ удобен для демонстрационных целей, когда расстояние между приемным и излучающим вибраторами невелико, и поэтому колебания в приемном вибраторе достаточно сильны. В случае более слабых колебаний в вибратор можно включить кристаллический детектор  $D$  (рис. 419 *б*) и к его концам присоединить гальванометр постоянного тока. Так как сопротивление детектора зависит от направления тока (§ 203), то напряжение на детекторе различно в разные полупериоды колебаний: оно велико, если ток течет в заперном направлении, и мало при токе противоположного направления. Поэтому появляется постоянная составляющая напряжения на детекторе и в гальванометре возникает постоянный ток.

Если поместить приемный вибратор (диполь), например изображенный на рис. 419 *a*, вблизи излучающего диполя, то можно видеть, что лампа сильнее всего накаливается в том случае, когда оба диполя параллельны. Если же приемный диполь ориентирован перпендикулярно к излучающему, то лампа не накаливается совсем. Так как электрические колебания в приемном диполе могут появиться только в том случае, если электрическое поле электромагнитной волны имеет составляющую вдоль диполя, то такой опыт показывает, что электрическое поле в электромагнитной волне параллельно оси диполя. Это справедливо для всех точек плоскости, перпендикулярной к оси диполя и проходящей через его середину. Отметим, что волны (механические и электрические), в которых колебания происходят параллельно какому-либо определенному направлению, называют *линейно поляризованными*.

Встречая на своем пути достаточно большие (по сравнению с длиной волны) проводящие поверхности, электромагнитные

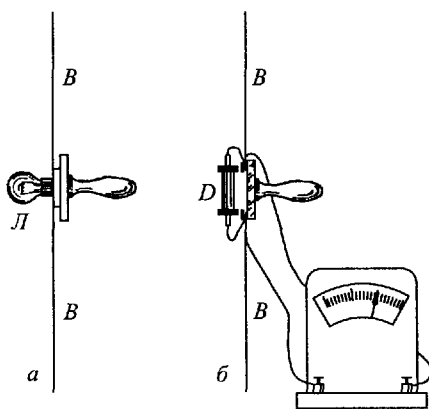


Рис 419 Приемный диполь для обнаружения электромагнитных волн индикатором является лампа накаливания (*a*), кристаллический детектор с гальванометром (*б*)

волны отражаются от них. Пользуясь этим, можно получить направленные электромагнитные волны, подобные параллельному пучку света. Это можно сделать, например, помещая небольшой излучающий диполь в фокус металлического параболического зеркала.

Встречая границу двух различных диэлектриков, электромагнитные волны, подобно свету, преломляются. Закон преломления электромагнитных волн имеет такой же вид, как и для света. Если волна, распространяющаяся в вакууме (практически — в воздухе), встречает поверхность диэлектрика под углом падения  $i$ , то

$$\sin i / \sin r = n,$$

где  $r$  — угол преломления,  $n$  — показатель преломления диэлектрика, не зависящий от углов  $i$  и  $r$ . При этом направления падающей и преломленной волн и направление нормали к границе лежат в одной плоскости.

Нетрудно получить на опыте свободные стоячие электромагнитные волны, подобные рассмотренным в § 232, но существующие без направляющих проводов. Если направить электромагнитную волну из параболического рефлектора нормально на металлический лист, то между листом и рефлектором появятся падающая и отраженная волны, распространяющиеся в противоположных направлениях. Эти волны, складываясь, образуют стоячую волну с равноотстоящими друг от друга пучностями и узлами. Для обнаружения пучностей и узлов электрического поля может служить диполь, расположенный параллельно излучающему диполу и имеющий ту же длину, что и последний. Перемещая его вдоль нормали к зеркалу, можно видеть, что отклонения гальванометра, соединенного с детектором, периодически достигают максимума (пучности электрического поля) и минимума (узлы электрического поля), причем у поверхности металлического листа находится узел электрического поля. Измеряя расстояние  $\Delta x$  между соседними узлами или пучностями, можно определить длину волны  $\lambda$ , а отсюда, зная частоту колебаний генератора, найти и скорость распространения свободных электромагнитных волн (ср. § 234).

Указанные свойства электромагнитных волн были установлены еще Герцем. Дальнейшие опыты показали, что электромагнитным волнам присущи не только эти, но и все другие свойства света. Особое место среди этих исследований занимают опыты П. Н. Лебедева (1895 г.) по распространению электромагнитных волн в анизотропных кристаллах (сера), диэлектрическая проницаемость которых зависит от направления электрического поля. Так как большие кристаллы получить трудно, а размеры кристаллов должны быть велики по сравнению с длиной волны, то Лебедев разработал способ получения весьма коротких электромагнитных волн с длиной всего около 6 мм, которые излучались миниатюрным искровым вибратором

В этих опытах Лебедев получил двойное преломление электромагнитных волн и воспроизвел все основные явления, наблюдаемые при прохождении света сквозь кристаллы.

### § 242. Энергия электромагнитных волн

Мы видели (§ 241), что электромагнитные волны способны производить различные действия: они накаливают нить лампы, включенной в диполь, вызывают отклонение стрелки гальванометра, соединенного с детектором, и т.п. Это показывает, что электромагнитные волны переносят определенную энергию.

Рассмотрим в поле электромагнитной волны произвольную площадку  $S$  (рис. 420) и вычислим энергию  $\Delta W$ , переносимую электромагнитной волной через эту площадку за малое вре-

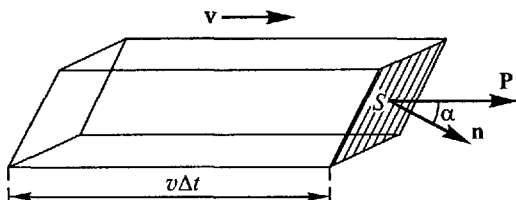


Рис. 420. К вычислению потока энергии электромагнитных волн

мя  $\Delta t$ . Для этого построим на площадке  $S$ , как на основании, параллелепипед, ребра которого параллельны скорости распространения волн  $\mathbf{v}$  и имеют длину  $v\Delta t$ . Объем этого параллелепипеда равен

$$\Delta\tau = Sv\Delta t \cos\alpha,$$

где  $\alpha$  — угол между нормалью  $\mathbf{n}$  к площадке  $S$  и скоростью  $\mathbf{v}$ . Так как за время  $\Delta t$  волна проходит расстояние  $v\Delta t$ , то очевидно, что через нашу площадку пройдет энергия  $\Delta W$ , заключенная внутри указанного параллелепипеда. Поэтому, если  $u$  есть энергия единицы объема поля (объемная плотность энергии), то

$$\Delta W = u\Delta\tau = uSv\Delta t \cos\alpha.$$

Объемная плотность энергии электромагнитной волны складывается из энергии электрического поля  $\epsilon\epsilon_0 E^2/2$  и энергии магнитного поля  $\mu\mu_0 H^2/2$ :

$$u = (\epsilon\epsilon_0 E^2 + \mu\mu_0 H^2)/2.$$

Напряженности  $E$  и  $H$  в электромагнитной волне связаны соотношением  $\sqrt{\epsilon\epsilon_0} E = \sqrt{\mu\mu_0} H$ . Поэтому можно также написать

$$u = \epsilon\epsilon_0 E^2 = \mu\mu_0 H^2 = \sqrt{\epsilon\mu} \sqrt{\epsilon_0\mu_0} EH.$$

Учитывая еще, что  $v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu} \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ , имеем

$$\Delta W = EHS \cos \alpha \cdot \Delta t.$$

Следовательно, энергия, проходящая через площадку  $S$  в единицу времени, или  $\partial W/\partial t$ , равна

$$\partial W/\partial t = EHS \cos \alpha.$$

Полученный результат можно представить в более удобной форме. Введем вектор потока электромагнитной энергии, определяемый следующим образом:

$$\mathbf{P} = [\mathbf{E}\mathbf{H}]. \quad (242.1)$$

В электромагнитной волне  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  перпендикулярны друг к другу, и поэтому поток электромагнитной энергии  $P = EH$ . Направление же вектора  $\mathbf{P}$  перпендикулярно к  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , т.е. совпадает с направлением скорости распространения волны  $\mathbf{v}$ . Тогда (242.1) можно представить в виде

$$\partial W/\partial t = P_n S. \quad (242.2)$$

Здесь  $P_n = P \cos \alpha$  есть проекция вектора  $\mathbf{P}$  на направление нормали  $\mathbf{n}$  к площадке  $S$ .

Таким образом, движение энергии в электромагнитном поле можно вполне охарактеризовать при помощи потока энергии  $\mathbf{P}$ . Его направление дает направление движения энергии. Модуль же потока энергии равен энергии, проходящей за единицу времени через поверхность с площадью, равной единице, перпендикулярную к направлению движения энергии.

Понятие вектора потока энергии было введено Н.А. Умовым в работах о движении энергии в различных средах, а выражение (242.1) для специального случая электромагнитного поля было получено Пойнтингом. Поэтому вектор потока электромагнитной энергии  $\mathbf{P}$  называют *вектором Умова–Пойнтинга* или *вектором Пойнтинга*.

Если мы представим себе линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора  $\mathbf{P}$  (линии вектора потока энергии), то эти линии укажут нам пути, вдоль которых распространяется энергия электромагнитного поля. С другой стороны, линии, вдоль которых движется энергия света, в оптике называют *лучами*. Так как свет представляет собой также электромагнитные волны, то лучи света суть не что иное, как линии вектора потока энергии световых электромагнитных волн.

Приведенный вывод выражения (242.2) не строг, так как мы везде предполагали, что фазовая скорость распространения волн  $\mathbf{v}$  совпадает со скоростью движения энергии. Однако в общем случае это заведомо не так. Тем не менее выражение (242.2), полученное нами путем нестрогих рассуждений,

оказывается справедливым для всех случаев. Исходя из уравнений Максвелла, можно совершенно строго доказать следующую важную теорему о движении энергии в электромагнитном поле (*теорема Пойнтинга*). Выделим внутри произвольной среды некоторый объем  $\tau$ , ограниченный поверхностью  $S$  (рис. 421). Обозначим далее полную энергию, заключенную внутри объема  $\tau$ , через  $W$ . Тогда

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = \int_S P_n dS. \quad (242.3)$$

Здесь  $P_n$  — нормальная к поверхности составляющая вектора Умова-Пойнтинга, выражаемого формулой (242.1), а интегрирование производится по всей замкнутой поверхности  $S$ . При этом положительным считается направление внешней нормали  $\mathbf{n}$  (рис. 421), т.е. поток  $\int_S P_n dS$  считается по-

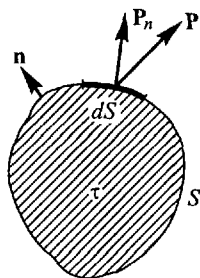


Рис. 421. К формулировке теоремы Пойнтинга

ложительным, если линии потока энергии  $\mathbf{P}$  выходят изнутри объема наружу.

Величина  $-\partial W/\partial t$  есть уменьшение полной энергии внутри объема  $\tau$  за единицу времени. Согласно закону сохранения энергии она должна равняться той энергии, которая выходит через поверхность  $S$  за единицу времени наружу. Отсюда следует, что энергия, выходящая через поверхность  $S$  за единицу времени, выражается потоком вектора  $\mathbf{P}$  через замкнутую поверхность  $S$ , ограничивающую рассматриваемый объем. Величину же  $P_n$  можно истолковать как энергию, которая проходит через единицу поверхности в единицу времени.

Рассмотрим некоторые примеры вычисления потока электромагнитной энергии.

**Пример 1.** *Распространяющаяся электромагнитная волна.* Пусть имеется плоская электромагнитная волна, распространяющаяся в вакууме вдоль оси  $X$ . Тогда напряженности полей  $E$  и  $H$  в какой-либо точке  $x$  выражаются формулами (§ 231)

$$E = E_0 \sin(\omega t - kx), \quad H = H_0 \sin(\omega t - kx),$$

где  $k = 2\pi/\lambda$ . Поэтому мгновенное значение вектора Умова-Пойнтинга равно

$$P = E_0 H_0 \sin^2(\omega t - kx).$$

Однако на опыте мы имеем дело не с мгновенным значением потока энергии, а со средним его значением во времени  $\bar{P}$ . Так как среднее значение  $\sin^2 \alpha = 1/2$  и, кроме того, для вакуума ( $\epsilon = \mu = 1$ )  $\sqrt{\epsilon_0} E_0 = \sqrt{\mu_0} H_0$ , то

$$P = \sqrt{\epsilon_0/\mu_0} E_0^2/2.$$

Это есть средняя энергия, проходящая через единицу поверхности в единицу времени, или *интенсивность* волны. Полученный результат показывает, что энергия, переносимая электромагнитной волной, пропорциональна квадрату амплитуды колебаний.

**Пример 2.** *Стоячая электромагнитная волна.* Вычислим теперь вектор Умова-Пойнтинга для стоячей волны. Согласно сказанному в § 232, колебания полей  $E$  и  $H$  в стоячей волне можно представить формулами

$$E = 2E_0 \cos(kx - \varphi_E/2) \sin(\omega t - \varphi_E/2),$$

$$H = 2H_0 \cos(kx - \varphi_H/2) \sin(\omega t - \varphi_H/2).$$

В этих выражениях  $\varphi_E$  и  $\varphi_H$  обозначают запаздывания по фазе отраженной волны электрического и магнитного полей:

$$\varphi_E = 2\pi \cdot 2l/\lambda + \psi, \quad \varphi_H = 2\pi \cdot 2l/\lambda + \eta.$$

Здесь  $\psi$  и  $\eta$  — изменения фазы при отражении, равные либо  $\pi$ , либо нулю, а  $l$  — длина линии (в случае свободных волн  $l$  есть расстояние между излучателем и отражающей поверхностью). Введем обозначения

$$2E_0 \cos(kx - \varphi_E/2) = E_1,$$

$$2H_0 \cos(kx - \varphi_H/2) = H_1;$$

тогда колебания в какой-либо данной точке можно записать короче:

$$E = E_1 \sin(\omega t - \varphi_E/2),$$

$$H = H_1 \sin(\omega t - \varphi_H/2),$$

где  $E_1$  и  $H_1$  не зависят от времени. Но в § 232 мы видели, что если  $\psi = \pi$ , то  $\varphi = 0$  и наоборот. Полагая, например,  $\psi = \pi$ , имеем

$$E = E_1 \cos(\omega t - 2\pi l/\lambda), \quad H = H_1 \sin(\omega t - 2\pi l/\lambda).$$

Поэтому для потока электромагнитной энергии получаем

$$P = E_1 H_1 \sin(\omega t - 2\pi l/\lambda) \cos(\omega t - 2\pi l/\lambda) = (E_1 H_1/2) \sin(2\omega t - 4\pi l/\lambda).$$

В этом случае значение  $P$  колеблется с частотой  $2\omega$  и периодически изменяет знак. Поэтому среднее по времени

$$P = 0,$$

а следовательно, в стоячей волне течения энергии нет (чем и объясняется название этого типа колебаний). Периодические изменения знака  $P$  показывают, что направление движения энергии периодически изменяется. Энергия лишь колеблется между пучностями электрического и пучностями магнитного полей. Этот процесс напоминает колебания энергии между индуктивностью и емкостью в закрытом колебательном контуре.

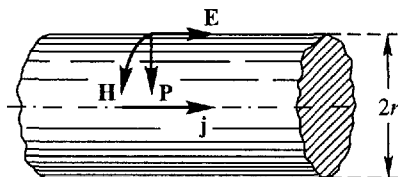


Рис. 422. Движение энергии в случае проводника с током

в котором имеется постоянный ток с плотностью  $j$  (рис. 422). Электрическое поле  $E$  и магнитное поле  $H$  у поверхности проводника направлены так, как

**Пример 3.** *Провод с постоянным током.* Рассмотрим цилиндрический проводник радиуса  $r$ , в котором имеется постоянный ток с плотностью  $j$  (рис. 422). Электрическое поле  $E$  и магнитное поле  $H$  у поверхности проводника направлены так, как

показано на рис. 422, и поэтому вектор Умова–Пойнтинга направлен внутрь проводника, перпендикулярно к его боковой поверхности. Это показывает, что энергия непрерывно втекает в проводник из окружающего пространства.

Вычислим эту энергию. Если  $\rho$  — удельное сопротивление вещества проводника, то, согласно закону Ома,

$$E = \rho j.$$

Напряженность магнитного поля у поверхности равна

$$H = i/(2\pi r) = jr/2.$$

Поэтому

$$P = EH = \rho r j^2/2.$$

Энергия, втекающая через всю боковую поверхность отрезка проводника длиной  $l$  за 1 с, получается равной

$$W/t = P \cdot 2\pi r l = \rho j^2 \pi r^2 l.$$

Но  $\rho j^2$ , согласно закону Джоуля–Ленца (в дифференциальной форме), есть количество теплоты, выделяющейся в единице объема за единицу времени, а  $\pi r^2 l$  — объем проводника. Поэтому мы находим, что энергия, втекающая в проводник, равна количеству теплоты Джоуля–Ленца, как и должно быть по закону сохранения энергии. Приведенный пример показывает, что электромагнитная энергия, за счет которой выделяется тепло, входит в проводник через его боковую поверхность, а не вдоль его оси, как это кажется на первый взгляд.

## § 243. Элементарный диполь

Среди различных электрических систем, излучающих электромагнитные волны, особо важное значение имеет электрический диполь. В § 237 мы уже встречались с применением диполя для излучения электромагнитных волн. Однако там мы говорили о так называемом полуволновом диполе, длина которого равна половине длины волны. Сейчас же мы рассмотрим диполь, длина которого мала по сравнению с длиной волны (элементарный диполь).

Простейшим примером элементарного диполя являются два металлических шара, заряжаемые от какого-либо генератора электрических колебаний, если расстояние между шарами  $l \ll \lambda$  (рис. 423). Момент такого диполя есть  $p = ql$ . Если генератор создает гармонические колебания, то  $q = q_0 \sin \omega t$  и момент диполя изменяется со временем также по гармоническому закону

$$p = p_0 \sin \omega t. \quad (243.1)$$

Здесь  $p_0 = q_0 l$  есть амплитуда электрического момента диполя. Ее можно выразить также через амплитуду силы тока  $i_0$ . Действительно, сила тока в диполе равна  $i = dq/dt = q_0 \omega \cos \omega t$ , а

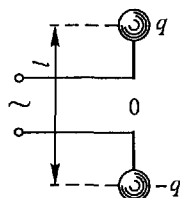


Рис. 423. Элементарный диполь

амплитуда тока  $i_0 = q_0\omega$ . Поэтому  $q_0 = i_0/\omega$ , а следовательно,

$$p_0 = \frac{l}{\omega} i_0. \quad (243.2)$$

С элементарными диполями нам приходится встречаться весьма часто. Самым важным примером элементарных диполей являются электроны внутри атомов. Круговое (и эллиптическое) движение электронов, обращающихся вокруг положительного ядра, можно разложить на два прямолинейных гармонических колебания. Но электрон, совершающий прямолинейные гармонические колебания, совместно с положительным ядром (не принимающим участия в излучении) представляет собой диполь, момент которого изменяется согласно формуле (243.1). Так как длины волн, излучаемых атомом (для видимого света округленно  $5 \cdot 10^{-5}$  см), намного больше размеров атомов ( $\sim 10^{-8}$  см), то рассматриваемые диполи можно считать с большой точностью элементарными.

**Излучение элементарного диполя.** Рассмотрим теперь, какой характер имеют электромагнитные волны, излучаемые элементарным диполем. Мы не будем приводить строгий вывод выражений для электромагнитного поля из уравнений Максвелла, а ограничимся лишь качественными результатами.

Характер электромагнитного поля диполя существенно зависит от того, на каком расстоянии расположена рассматриваемая точка. Если расстояние  $r$  от центра диполя до этой точки мало по сравнению с длиной волны ( $r \ll \lambda$ ), то справедливы те же формулы, что и для постоянных электрического и магнитного полей. Электрическое поле диполя выражается формулами (25.5) и (25.6) и убывает с расстоянием пропорционально  $1/r^3$ . Магнитное же поле диполя выражается той же формулой (79.2), что и поле элемента тока, и пропорционально  $1/r^2$ .

На больших расстояниях от диполя ( $r \gg \lambda$ ) закон изменения полей становится совсем другим. Эта так называемая *волновая область* представляет основной интерес, и поэтому мы остановимся на ней подробнее. Выясним, какой вид имеет волновой фронт электромагнитной волны диполя. Так как электромагнитное возмущение распространяется во все стороны от диполя с одинаковой скоростью  $c$  (мы предполагаем, что диполь находится в вакууме), то время прохождения волны до всех точек, удаленных от диполя на одно и то же расстояние  $r$ , одинаково. Поэтому во всех точках сферы, центр которой совпадает с центром диполя, фаза колебаний одинакова, т.е. мы имеем сферический волновой фронт, и, следовательно, волна, излучаемая диполем, есть сферическая волна.

Так как электрическое поле  $\mathbf{E}$  в волне перпендикулярно к направлению распространения, то вектор  $\mathbf{E}$  в различных точках



перпендикулярен к радиус-векторам (рис. 424 *a*) Это поле периодически изменяется, и поэтому, перемещаясь вдоль радиус-вектора, мы будем находить поля взаимно противоположного

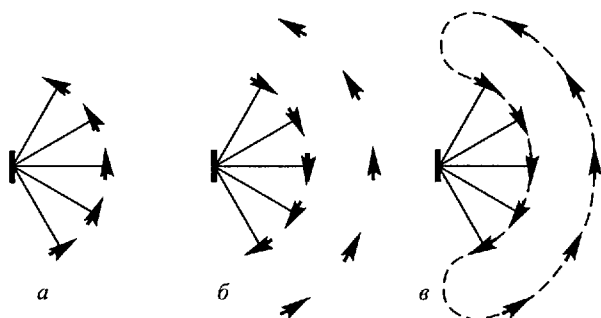


Рис 424 Форма линий напряженности поля излучающего диполя

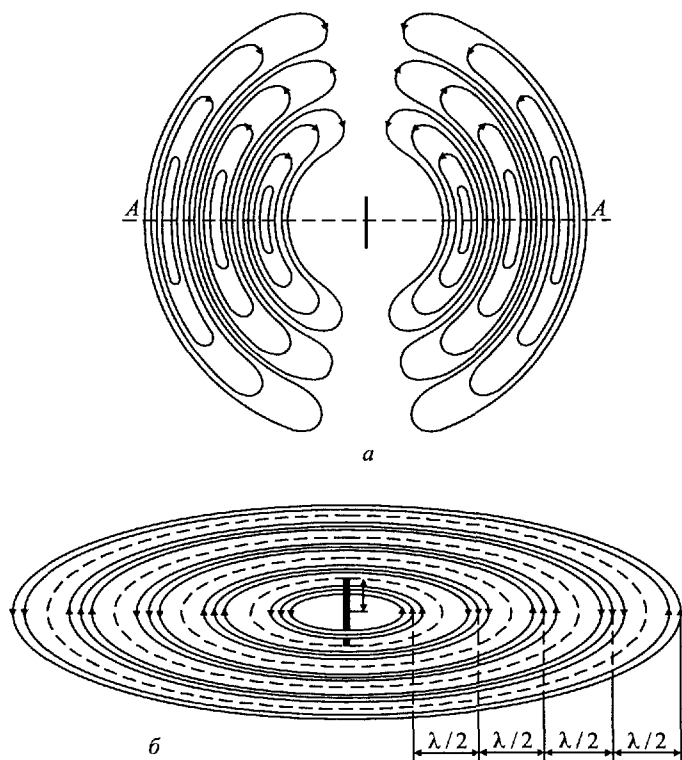


Рис 425 Линии напряженности (*a*) и индукции (*б*) в шаровой электромагнитной волне диполя

направления (рис. 424 б). Соединяя на рис. 424 б стрелки штриховой линией, мы получим одну из линий напряженности (рис. 424 в). Полная картина линий напряженности в электромагнитной волне диполя показана на рис. 425 а. Линии напряженности представляют собой замкнутые кривые в соответствии с вихревым характером электрического поля.

Направление магнитного поля  $\mathbf{H}$  в каждой точке перпендикулярно к  $\mathbf{E}$  и к направлению распространения. Поэтому линии индукции представляют собой концентрические окружности, лежащие в плоскостях, перпендикулярных к диполю, и имеющие центр на оси диполя (рис. 425 б; подробнее см. Добавление 11).

### § 244. Давление электромагнитных волн

Электромагнитные волны, встречая на своем пути какие-либо тела, оказывают на них давление.

Легко понять происхождение этого давления. Положим, что электромагнитная волна падает на плоскую поверхность тела

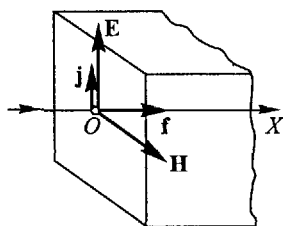


Рис. 426. Возникновение давления электромагнитных волн

перпендикулярно к этой поверхности (рис. 426). Электрическое поле  $\mathbf{E}$  волны параллельно поверхности, и потому оно не вызывает сил давления (в рассматриваемом случае нормального падения). Однако это поле создает внутри тела токи плотностью  $\mathbf{j}$ . Так как в волне, кроме электрического, имеется еще и магнитное поле  $\mathbf{H}$ , то на токи будет действовать сила  $\mathbf{f}$ , перпендикулярная к  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{H}$ , т.е. в направлении распространения волны. Среднее значение этой силы, отнесенное к единице поверхности тела, и есть давление электромагнитной волны.

Максвелл, впервые вычисливший давление электромагнитных волн, нашел, что если тело полностью поглощает падающую на него энергию, то давление равно

$$p = \bar{u}, \quad (244.1)$$

где  $\bar{u}$  — среднее значение объемной плотности энергии в падающей электромагнитной волне (см. Добавление 12). Если же тело частично отражает волну, то, кроме поля падающей волны, будет присутствовать еще поле отраженной волны, и давление будет равно

$$p = (1 + k)\bar{u}, \quad (244.2)$$

где  $k$  — коэффициент отражения (интенсивности). Следовательно, для абсолютно отражающего ( $k = 1$ ) тела  $p = 2\bar{u}$ .

Давление электромагнитной волны можно выразить также через ее интенсивность  $I$  (среднее значение вектора потока энергии). Так как  $I = \bar{u}c$ , то вместо (244.2) можно написать

$$p = \frac{I}{c} (1 + k). \quad (244.3)$$

Наконец, если волна падает на поверхность тела наклонно, под углом  $\vartheta$  к нормали, то

$$p = \frac{I \cos \vartheta}{c} (1 + k). \quad (244.4)$$

Так как свет представляет собой электромагнитные волны, то он оказывает давления на тела, поставленные на пути его распространения. Световое давление очень мало. Оценим это давление для лучей солнечного света. Интенсивность солнечного излучения примерно равна  $10^3$  Вт/м<sup>2</sup>. Поэтому для давления солнечных лучей на абсолютно отражающее зеркало ( $k = 1$ ) имеем

$$p = \frac{2I}{c} \approx \frac{2 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^8} \approx 1 \cdot 10^{-5} \text{ Па.}$$

Несмотря на ничтожное световое давление, экспериментальное доказательство существования давления электромагнитных волн было впервые получено именно на волнах света в классических опытах П.Н. Лебедева, который в 1900 г. доказал существование светового давления на твердые тела, а в 1910 г. — и на газы. Световое давление оказалось соответствующим формуле Максвелла (244.4).

## § 245. Импульс и масса электромагнитного поля

Факт существования давления электромагнитных волн с необходимостью приводит к выводу, что электромагнитному полю присущ определенный механический импульс.

Действительно, представим себе, что на плоскую поверхность  $S$  абсолютно поглощающего тела падает электромагнитная волна. Вследствие существования давления электромагнитной волны на тело действует сила  $F = uS$ . Но, согласно второму закону Ньютона, сила равна импульсу, полученному телом за единицу времени. Отсюда можно заключить, что излучение переносит с собой определенный импульс.

Найдем, чему равен импульс электромагнитного поля. За единицу времени тело получает импульс поля, заключенный в параллелепипеде с основанием  $S$  и высотой, равной скорости распространения поля  $c$ . Если  $g$  есть импульс единицы объема поля (плотность импульса), то импульс, получаемый телом, равен  $gSc$ . Поэтому  $gSc = uS$ , а следовательно,  $g = u/c$ . Выражая  $u$  через поток электромагнитной энергии  $P$  по формуле  $P = uc$  и

учитывая еще, что плотность импульса есть вектор, мы находим окончательно

$$\mathbf{g} = \mathbf{P}/c^2. \quad (245.1)$$

Полный импульс всего электромагнитного поля  $\mathbf{G}_\Pi$  есть интеграл от плотности импульса по всему объему, занятому полем:

$$\mathbf{G}_\Pi = \int_V \frac{\mathbf{P}}{c^2} d\tau. \quad (245.2)$$

В 1899 г. А.А. Садовский предсказал, что электромагнитные волны, если они поляризованы по кругу, должны обладать еще и моментом импульса, т.е. по механическим свойствам электромагнитные волны могут быть в известной степени подобны вращающимся телам. Это явление было действительно обнаружено на волнах света и на радиоволнах сантиметрового диапазона.

Полученные важные результаты позволяют обобщить законы механики Ньютона на электромагнитные явления. Они показывают, что, кроме импульса  $\mathbf{G}_T$ , связанного с движущимися телами, существует импульс  $\mathbf{G}_\Pi$  электромагнитного поля. Второй закон Ньютона

$$d\mathbf{G}/dt = \mathbf{F}$$

относится, строго говоря, не к импульсу тел  $\mathbf{G}_T$ , но к полному импульсу  $\mathbf{G}$ :

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_T + \mathbf{G}_\Pi. \quad (245.3)$$

Если в системе тел действуют только внутренние силы, т.е. система *изолирована*, то полный импульс системы остается постоянным. Закон сохранения импульса можно записать в следующей общей форме, охватывающей не только механические, но и электромагнитные явления:

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_T + \mathbf{G}_\Pi = \text{const}. \quad (245.4)$$

Отсюда следует, что если какое-либо первоначально покоившееся тело испускает в определенном направлении электромагнитные волны, то это тело получает импульс  $\mathbf{G}_T = -\mathbf{G}_\Pi$ , направленный в сторону, противоположную излучению, и равный импульсу, унесенному излучением. Это явление подобно «отдаче» ружья при выстреле.

Импульс (количество движения) какого-либо тела есть произведение массы этого тела на его скорость. Или, иначе, масса тела равна его импульсу, деленному на скорость. Так как электромагнитное поле имеет импульс и распространяется с конечной скоростью, то отсюда можно заключить, что ему присуща также определенная масса.

Пусть  $d$  есть масса единицы объема, т.е. плотность электромагнитного поля. Тогда импульс единицы объема поля есть  $g = cd$ . С другой стороны, согласно формуле (245.1), та же плотность импульса равна  $g = P/c^2$ . Следовательно,

$$cd = P/c^2.$$

Но поток электромагнитной энергии  $P$  можно выразить через объемную плотность энергии  $u$ :

$$P = uc.$$

Отсюда получаем соотношение

$$u = c^2 d,$$

которое выражает плотность электромагнитного поля  $d$  через объемную плотность энергии  $u$ . Это соотношение между массой и энергией справедливо, очевидно, не только для единицы объема, но и для какого угодно объема поля. Если  $m$  — масса поля, а  $W$  — его энергия, то

$$W = mc^2, \quad (245.5)$$

где  $c$  — скорость света в вакууме.

Так как скорость света очень велика, то даже весьма значительной энергии поля соответствует очень малая масса. Однако принципиальное значение соотношения (245.5) от этого, разумеется, нисколько не уменьшается.

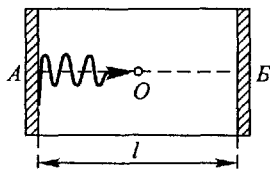
Рассмотрим пример: вычислим массу, соответствующую энергии, излученной очень мощной радиостанцией мощностью 500 кВт =  $5 \cdot 10^5$  Вт в течение 1 часа.

Имеем

$$W = 5 \cdot 10^5 \cdot 3,6 \cdot 10^3 = 18 \cdot 10^8 \text{ Дж},$$

и из (245.5) находим

$$m = \frac{18 \cdot 10^8}{(3 \cdot 10^8)^2} = 2 \cdot 10^{-8} \text{ кг} = 0,02 \text{ мг}.$$



Приведем другой вывод соотношения между массой и энергией электромагнитного поля. Представим себе, что тело  $A$  (рис. 427), находящееся в первоначально неподвижном ящике, испускает очень короткий дуг электромагнитных волн с энергией  $W$ , которые падают на второе тело  $B$  и полностью в нем поглощаются. Во время излучения тело  $A$  испытывает отдачу и получает импульс  $gSt$ , направленный справа налево ( $S$  — поверхность тела,  $t$  — время излучения). Так как  $g = P/c^2$ , то этот импульс равен также  $W/c$ , где  $W = PSt$  есть излученная энергия. Под действием импульса отдачи ящик приобретет некоторую скорость  $v$  и будет двигаться справа налево до тех пор, пока излучение не достигнет тела  $B$ . При поглощении излучения ящик получит импульс, направленный слева направо, и остановится,

Рис. 427. К выводу соотношения между массой и энергией электромагнитного поля

так что в результате произойдет перемещение центра массы ящика  $O$  на некоторое расстояние  $x$ . Но это противоречит закону сохранения импульса, согласно которому при действии только внутренних сил центр массы должен оставаться неизменным. Для устранения этого противоречия имеется только единственный выход, а именно — заключить, что увеличение энергии тела  $B$  сопровождается увеличением его массы и притом как раз таким, что положение центра массы  $O$  остается неизменным.

Отсюда нетрудно найти соотношение между массой и энергией в количественной форме. Предполагая для упрощения расчетов, что масса излучения  $m$  весьма мала по сравнению с массой ящика  $M$ , имеем

$$Mv = W/c, \quad v = W/Mc.$$

За время  $t = l/c$ , в течение которого излучение доходит от  $A$  до  $B$ , ящик передвинется на расстояние

$$x = vt = Wl/Mc^2.$$

Так как масса  $M$  перемещается на расстояние  $x$ , а масса излучения  $m$  — на расстояние  $l$ , то для неизменности центра масс необходимо, чтобы выполнялось соотношение

$$Mx = ml.$$

Подставляя сюда вместо  $x$  его выражение, мы находим

$$W = mc^2. \quad (245.6)$$

Мы вывели соотношение (245.5) для электромагнитного поля. Однако, согласно специальной теории относительности Эйнштейна, оно имеет совершенно общее значение и справедливо для любых тел независимо от их внутреннего строения и состояния. Оно выражает то обстоятельство, что всякое изменение энергии  $\Delta W$  любого тела или системы тел всегда связано с изменением массы  $\Delta m = \Delta W/c^2$  независимо от того, какие именно превращения энергии происходят в данном теле или системе тел. Поэтому результаты, полученные в данном параграфе, можно рассматривать как частный случай применения общего соотношения к электромагнитному полю.

Мы уже отмечали, что вследствие весьма большой величины  $c$  даже очень большие изменения энергии сопровождаются лишь ничтожными изменениями массы. Однако существуют и такие явления, в которых изменением массы пренебрегать никак нельзя. Наиболее важными из них являются различные процессы расщепления и превращения атомных ядер, в которых выделяются огромные энергии, и поэтому соответствующие изменения массы частиц, участвующих в этих процессах, оказываются вполне ощутимыми и доступными для очень точных измерений. Это позволило проверить соотношение между массой и энергией на большом числе различных ядерных реакций и убедиться, что оно действительно очень хорошо оправдывается на опыте.

## § 246. Электромагнитная масса движущегося заряда

Рассмотрим движущийся электрический заряд. Он создает в окружающем пространстве не только электрическое поле  $\mathbf{E}$ , но и магнитное поле  $\mathbf{H}$ , т.е. вокруг заряда образуется электромагнитное поле. Это поле обладает определенным импульсом (§ 245). Поэтому полный импульс движущегося заряженного тела, а следовательно, и масса тела будут больше, чем в отсутствие заряда. Эта дополнительная масса, связанная с электромагнитным полем, называется *электромагнитной массой* тела.

Электромагнитная масса зависит от скорости движения заряженного тела, увеличиваясь с увеличением скорости. Чтобы найти эту зависимость, воспользуемся соотношением (245.5). Положим, что скорость тела увеличилась на  $dv$ , отчего энергия тела возросла на  $dW$ , а масса — на  $dm$ . Тогда, согласно (245.5),

$$dW = c^2 dm. \quad (246.1)$$

По второму закону Ньютона (в форме, учитывающей зависимость массы от скорости)

$$d(mv) = F dt \quad (246.2)$$

или, иначе,

$$m dv + v dm = F dt.$$

Наконец, по определению энергии

$$dW = F dx + Fv dt. \quad (246.3)$$

Поэтому

$$m dv + v dm = dW/v = c^2 dm/v,$$

или

$$\frac{dm}{m} = \frac{1}{2} \frac{d(v^2/c^2)}{1 - v^2/c^2}.$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (246.4)$$

где через  $m_0$  обозначена постоянная интегрирования. При  $v^2/c^2 \rightarrow 0$ ,  $m \rightarrow m_0$ , т.е.  $m_0$  имеет смысл покоящейся электромагнитной массы. При очень быстрых движениях ( $v^2/c^2 \sim 1$ ) электромагнитная масса увеличивается с возрастанием скорости и как раз по тому закону, который получается из опытов с быстрыми электронами (ср., например, § 183).

Необходимость существования электромагнитной массы, следующая из классической электродинамики Максвелла, привела Дж.Дж. Томсона еще в конце прошлого века к предположению, что вся масса электрона имеет электромагнитное происхождение, т.е. что инерция электрона обусловлена инерцией создаваемого им поля.

Впоследствии теории электромагнитной массы электрона развивались рядом крупных физиков. В качестве одного из важных аргументов в пользу правильности гипотезы об электромагнитной природе массы электрона рассматривали зависимость массы от скорости (246.4), хорошо оправдывающуюся на опыте. Однако в действительности этот аргумент совершенно не доказателен, так как формула (246.4) получается в теории относительности как универсальное соотношение, не зависящее от физической природы массы.

Далее, следует помнить, что у нас не имеется никаких оснований отождествлять  $m_0$  в формуле (246.4) с массой электрона. Ведь при выводе этого выражения мы исходим из соотношения (245.5), полученного нами для электромагнитного поля, и поэтому  $m_0$  есть масса *поля* покоящегося электрона, которая совсем не обязательно равняется массе самого электрона.

В принципе проверка гипотезы об электромагнитной природе массы электрона могла бы состоять в том, чтобы найти энергию поля электрона  $W$  и вычислить  $m$  с помощью соотношения  $W = mc^2$ . Сравнивая затем найденное теоретическое значение  $m$  с экспериментально найденной массой электрона, мы могли бы определить, составляет ли электромагнитная масса всю массу электрона или только ее часть. К сожалению, такую проверку сделать нельзя.

В связи со сказанным выше остановимся еще на одном вопросе. Предположим, что вся масса электрона имеет электромагнитное происхождение, и будем представлять себе электрон в виде шарика с радиусом  $a$ , находящегося в вакууме и имеющего заряд  $e$ , распределенный равномерно по поверхности. Тогда электрическое поле отлично от нуля только вне шарика. Будем считать, что электрон покоится (магнитного поля нет), и найдем полную энергию  $W$  электрического поля, создаваемого шариком. Учитывая, что объемная плотность энергии поля (§ 37) есть  $u = \epsilon_0 E^2/2$ , где напряженность поля  $E = e/(4\pi\epsilon_0 r^2)$ , и выбирая (вследствие сферической симметрии поля) элемент объема в виде  $d\tau = 4\pi r^2 dr$ , получаем

$$W = \int_{\tau} u d\tau = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \int_a^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a}. \quad (246.5)$$

Приравнивая эту энергию  $m_0 c^2$ , получаем связь между  $m_0$  и  $a$ :

$$m_0 = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 c^2 a}. \quad (246.6)$$

Отметим, что полученный результат слабо зависит от характера распределения заряда шарика. Так, например, если бы заряд был распределен равномерно по объему шарика, то в форму-



лах (246.5) и (246.6) появился бы только дополнительный множитель  $6/5$ , близкий к единице.

В системе СГС вместо формулы (246.6) мы имеем

$$m_0 = \frac{1}{2} \frac{e^2}{c^2 a}. \quad (246.6a)$$

Из полученных соотношений между  $m_0$  и  $a$  нельзя определить массу покоящегося электрона, так как неизвестно, какое значение  $a$  нужно брать в нашей «модели» электрона в виде шарика. Однако можно поступить наоборот. А именно, из формул (246.6) или (246.6a) можно найти, какой радиус  $a$  должен иметь заряженный шарик, чтобы его электромагнитная масса была равна массе покоящегося электрона. Так как здесь речь идет только об определении порядка величины, то множитель  $1/2$  в формуле (246.6a) принято опускать. Тогда в системе СГС получается

$$a = \frac{e^2}{m_0 c^2}. \quad (246.7)$$

В системе СИ выражение для  $a$  имеет вид

$$a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m_0 c^2}. \quad (246.7a)$$

Величина  $a$  получила название *классического радиуса электрона*. Подставляя в последнюю формулу  $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$  Кл,  $m_0 = 9,11 \cdot 10^{-31}$  кг,  $c = 3,00 \cdot 10^8$  м/с и  $\epsilon_0 = (4\pi \cdot 9 \cdot 10^9)^{-1}$  Ф/м, находим  $a = 2,82 \cdot 10^{-15}$  м  $\sim 10^{-13}$  см.

Классический радиус электрона, конечно, никоим образом нельзя рассматривать как некоторую величину, характеризующую «размеры» электрона. Его смысл заключается в том, что он дает некоторую характерную длину, определяющую порядок величины нижнего предела области применимости классической электродинамики. Так как  $m_0$  есть *максимальное* возможное значение электромагнитной массы электрона (вся масса электрона равна его электромагнитной массе), то  $a$  есть *минимальная* длина. На расстояниях, меньших этой длины, классическая электродинамика *принципиально* не может быть справедлива. Напряженность электрического поля электрона на расстоянии классического радиуса равна

$$E = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a^2} = 4\pi\epsilon_0 \frac{m_0^2 c^4}{e^3} = 1,8 \cdot 10^{20} \text{ В/м} \sim 10^{20} \text{ В/м}.$$

Это и есть максимальное поле, при котором может быть применима классическая электродинамика.

Однако на самом деле область применимости классической электродинамики меньше, чем показывают приведенные оценки, так как при больших энергиях заряженных частиц возникают различные *квантовые* явления. Их рассмотрение выходит за

пределы настоящей книги. Поэтому мы только укажем, что учет квантовых явлений увеличивает указанную выше характерную длину на два порядка по сравнению с классическим радиусом электрона. Предельная напряженность электрического поля  $E$  при этом уменьшается тоже примерно на два порядка.

## Г Л А В А XXIV

### ПРИМЕНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ДЛЯ ЦЕЛЕЙ СВЯЗИ

#### § 247. Принцип радиосвязи

Одним из самых замечательных технических применений электромагнитных волн является их использование для целей связи. Изобретением радио мы обязаны преподавателю физики офицерских минных классов в Кронштадте, а впоследствии — профессору физики Петербургского электротехнического института А.С. Попову, который в 1895 г. продемонстрировал на заседании Русского физико-химического общества передачу и прием сигналов с помощью электромагнитных волн и созданный им радиоприемник. Начатые около того же времени опыты итальянского инженера Маркони, поставленные в широком промышленном масштабе, положили начало внедрению радио в практику. В последующий период времени радиотехника была превращена трудами многих выдающихся ученых и инженеров в чрезвычайно широкую и разностороннюю область техники.

Как мы знаем, для излучения мощных электромагнитных волн необходимо создать достаточно сильные токи смещения, т.е. быстро изменяющееся электрическое поле. Поэтому в радиотехнике применяют электрические колебания высокой частоты. Частоты колебаний, используемые для радиовещания, лежат примерно в пределах от  $10^5$  до  $10^8$  Гц, что соответствует длинам волн от 3 км до 3 м. Для решения специальных задач, где существенно получение остро направленного излучения (например, в радиолокации), применяют дециметровые и сантиметровые волны; для этого оказывается необходимым генерировать колебания с громадной частотой, вплоть до  $10^{10}$  Гц и выше.

Схема радиосвязи изображена на рис. 428. На передающей станции имеется генератор электрических колебаний, который возбуждает в антенне (металлических проводах, подвешенных высоко над землей) интенсивные вынужденные колебания. Для усиления этих колебаний используют явление резонанса: частоту генератора делают равной одной из собственных частот ан-

тенны (обычно — частоте основного колебания). Так как антенна представляет собой открытый вибратор, то она излучает электромагнитные волны, которые, распространяясь, достигают антенны приемной станции. Под действием переменного электрического поля волны электроны в приемной антенне приходят в колебательное движение, т.е. в ней появляется электрический ток высокой частоты. Для усиления этих вынужденных колебаний приемная антенна также настраивается в резонанс с входящими колебаниями. Отметим, что для настройки антенны можно включать конденсатор последовательно с ней. В этом случае общая емкость антенного контура (как при всяком последовательном соединении емкостей) уменьшается, благодаря чему собственная частота антенны увеличивается, а длина волны уменьшается. В случае же параллельного соединения (рис. 428) общая емкость увеличивается, а следовательно, длина волны, соответствующая резонансу, становится больше.

Таким образом, принцип радиосвязи заключается в том, что токи проводимости передатчика сначала превращаются в токи смещения, не требующие для своего распространения проводников, а затем эти токи смещения снова преобразуются в токи проводимости в приемнике.

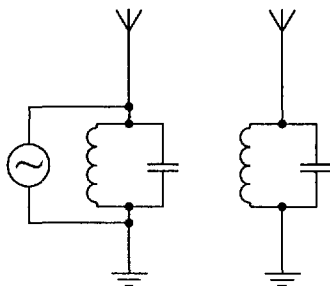


Рис 428 Схема радиосвязи

## § 248. Модуляция колебаний

Схема, изображенная на рис. 428, еще недостаточна для передачи сигналов. Для этого необходимо желаемым образом изменять колебания в соответствии с частотой и силой сигнала.

На первый взгляд может показаться, что для передачи сигнала достаточно превратить его в электрические колебания и создать в антенне переменный ток с частотой и силой, соответствующими сигналу. Так, например, желая передать речь или музыку, мы можем с помощью микрофона получить изменяющийся ток и после надлежащего его усиления послать в антенну. Однако в действительности этим способом передать сигналы нельзя. Дело в том, что все сигналы, с которыми приходится иметь дело на практике, представляют собой колебания низкой частоты. При передаче речи и музыки — это частоты примерно от 100 до  $10^4$  Гц, при передаче телеграфных знаков — еще значительно ниже. Для излучения же радиоволн необходимы высокие

частоты. так как только с быстрыми колебаниями можно получить сильные токи смещения. Поэтому, направляя токи сигнала непосредственно в антенну, мы не получим практически никакой излученной мощности.

Это противоречие устраняется в радиотехнике весьма остроумным способом, состоящим в том, что для передачи энергии употребляют высокочастотные колебания, а колебания низкой частоты сигнала используют лишь для изменения высокочастотных колебаний, или, как принято говорить, для их модуляции. На приемной станции из этих сложных колебаний с помощью специальных методов вновь выделяют колебания низкой частоты сигнала, которые после усиления используют по назначению (в громкоговорителе, в телеграфном аппарате и т.п.). Этот процесс восстановления сигнала называется демодуляцией.

Модуляцию колебаний можно производить, изменяя их амплитуду, частоту или фазу. Мы остановимся только на амплитудной модуляции, применяемой наиболее часто.

Когда из студии радиостанции не производится передача, немодулированные колебания тока в антенне имеют вид

$$i = i_0 \sin \omega t. \quad (248.1)$$

Они изображены графически на рис. 429 а. При наличии сигнала (речь и музыка перед микрофоном) эти колебания с помощью

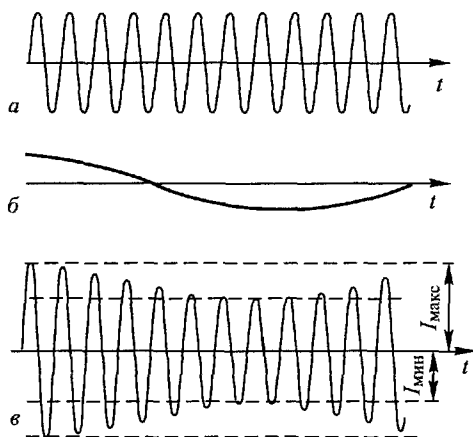


Рис. 429. Амплитудная модуляция колебания

приемов, описываемых в § 249, превращаются в более сложные:

$$i = i_0(1 + f(t)) \sin \omega t, \quad (248.2)$$

где  $f(t)$  — «модулирующая функция», зависящая от типа сигнала, причем  $|f(t)| < 1$ .

Простейший тип модуляции мы имеем при передаче чистого музыкального тона (камертон перед микрофоном). В этом случае ток в цепи микрофона изменяется по гармоническому закону и модулирующая функция (рис. 429 б) имеет вид

$$f(t) = k \sin \Omega t.$$

Колебания же тока в антенне описываются формулой

$$i = i_0(1 + k \sin \Omega t) \sin \omega t. \quad (248.3)$$

(Мы полагаем везде начальную фазу равной нулю, что не имеет принципиального значения.) Так как частота модуляции  $\Omega \ll \omega$ , то это колебание можно приближенно рассматривать как гармоническое, имеющее амплитуду  $i_0(1 + k \sin \Omega t)$ , периодически изменяющуюся во времени (рис. 429 в). Ее максимальное и минимальное значения:  $I_{\max} = i_0(1 + k)$ ,  $I_{\min} = i_0(1 - k)$ . Величина

$$k = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

называется *глубиной модуляции*. Пользуясь известной формулой:

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2},$$

легко убедиться, что

$$\begin{aligned} i &= i_0(1 + k \sin \Omega t) \sin \omega t = \\ &= i_0 \sin \omega t + \frac{1}{2} k i_0 \cos(\omega - \Omega)t - \frac{1}{2} k i_0 \cos(\omega + \Omega)t. \end{aligned}$$

Следовательно, модулированное колебание (248.3), выражаясь точно, представляет собой три гармонических колебания, происходящих с частотами  $\omega$ ,  $(\omega + \Omega)$  и  $(\omega - \Omega)$  (рис. 430 б). Основная частота передатчика  $\omega$  называется в радиотехнике *несущей* частотой, а дополнительные частоты  $(\omega + \Omega)$  и  $(\omega - \Omega)$ , возникающие при модуляции, — *верхней и соответственно нижней боковыми частотами*.

Если сигнал представляет собой не гармоническое колебание, но имеет более сложную форму, то вместо одной определенной частоты модуляции  $\Omega$  мы будем иметь много частот. Поэтому и вместо двух боковых частот мы получим целую совокупность частот, лежащих слева и справа от несущей частоты и образующих боковые полосы частот (рис. 430 в).

Если наконец, мы передаем телеграфные знаки по азбуке Морзе, то амплитуда колебаний изменяется так, как показано на

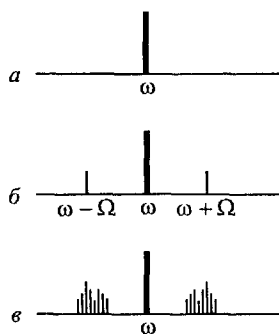


Рис. 430. Спектры колебаний

рис. 431 а. Она постоянна, когда телеграфный ключ замкнут, и равна нулю при разомкнутом ключе. Колебания тока в антенне при этом имеют вид прерывистых дугов различной длительности (рис. 431 б); короткие дуги соответствуют точкам, длинные — тире.

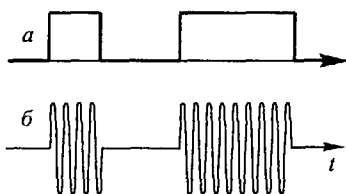


Рис. 431. Модулирующая функция (а) и модулированное колебание (б) при телеграфной передаче

Таим образом, модулируя колебания, мы при помощи низкочастотного сигнала превращаем одно-единственное гармоническое колебание передатчика в несколько гармонических колебаний, которые, однако, все являются высокочастотными (так как  $\Omega \ll \omega$ ) и поэтому пригодны для излучения радиоволн. В этом и заключается основная идея модуляции колебаний в радиотехнике.

Чтобы при демодуляции получить опять сигнал неискаженной формы, необходимо, очевидно, чтобы в приемник попали колебания всех частот, возникших при модуляции. А для этого нужно, чтобы настройка приемника хотя и была очень острой, но все же такой, чтобы ширина резонансной кривой охватывала, по возможности, все боковые частоты.

## § 249. Радиопередатчик

Для осуществления модуляции колебаний в радиотехнике разработаны различные приемы. Так, например, переменное напряжение сигнала можно подать на сетку генераторной лампы («модуляция на сетку»). Тогда при изменении сеточного напряжения будет изменяться амплитуда колебаний, и мы получим колебания генератора, модулированные в соответствии с напряжением сигнала.

Простейшая схема радиотелефонного передатчика с модуляцией на сетку показана на рис. 432. Часть схемы, обозначенная цифрой I, есть уже знакомый нам ламповый генератор (см. рис. 364). Модулирующее напряжение возникает в части схемы II. Оно появляется в цепи микрофона  $M$  и усиливается трансформатором  $T$ . Отметим, что сеточный конденсатор  $C_c$  представляет малое сопротивление для переменных токов высокой частоты генератора, а вторичная обмотка трансформатора вследствие ее индуктивности — большое сопротивление. Поэтому эти переменные токи не ответвляются в микрофонную цепь и генератор практически работает так же, как и в отсутствие модулирующей цепи II. Для микрофонных же токов низкой частоты конденсатор  $C_c$  обладает большим сопротивлением,

и поэтому напряжение трансформатора  $T$  оказывается целиком приложенным между сеткой и катодом лампы. Модулированные

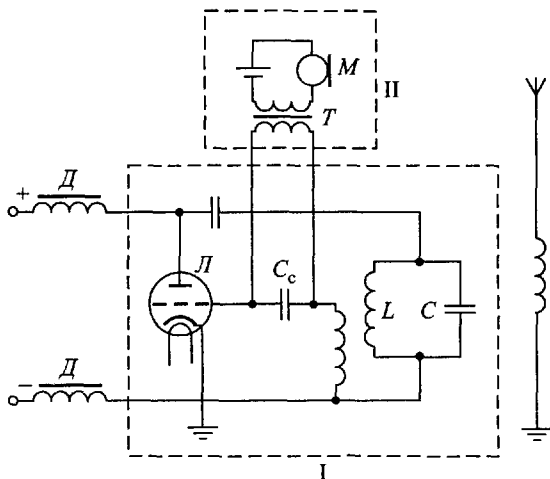


Рис. 432. Модуляция на сетку

колебания передаются в антенный контур с помощью катушки, связанной индуктивно с катушкой  $L$  колебательного контура генератора.

Модулирующее напряжение можно прикладывать и к аноду генераторной лампы («модуляция на анод»). Схема такого пере-

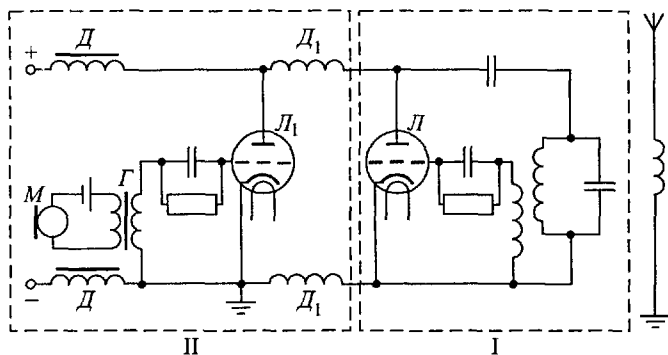


Рис. 433. Модуляция на анод

датчика (также в одном из простейших вариантов) изображена на рис. 433. Колебания напряжения, возникающие в цепи микрофона  $M$ , подаются через трансформатор  $T$  на сетку лампы  $L_1$  и усиленные затем прикладываются между анодом и катодом лам-

пы  $L$  генераторного контура I. Разделение низкочастотных колебаний (модулирующих) и высокочастотных (модулируемых) производится дросселями  $D_1$  (без железа). Их индуктивность подбирается такой, что они свободно пропускают низкочастотные колебания из цепи II в генератор I, но не пропускают обратно высокочастотные токи. Дроссели же  $D$  (с железом) препятствуют низкочастотным токам цепи II закоротиться на источник питания.

В приведенных выше схемах модуляция осуществлялась в той же самой лампе ( $L$ ), которая служила для генерации колебаний. В мощных передатчиках модуляцию колебаний производят в специальной части схемы (называемой модулируемым блоком). Общая схема (блок-схема) радиопередатчика приведена на рис. 434.

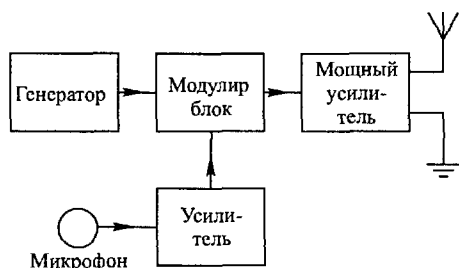


Рис 434. Блок-схема радиопередатчика

Отметим в заключение, что для модуляции колебаний электронная лампа должна обязательно работать в таком режиме, чтобы ее вольт-амперная характеристика была нелинейной. Действительно, анодный ток лампы  $i$  есть функция двух переменных напряжений: высокочастотного  $U_1$  и модулирующего  $U_2$ :

$$i = f(U_1, U_2). \quad (249.1)$$

Разлагая эту функцию в ряд Тейлора и ограничиваясь только степенями не выше второй, имеем

$$i = a + bU_1 + cU_2 + (eU_1^2 + gU_2^2 + hU_1U_2) + \dots \quad (249.2)$$

Если бы характеристика была линейной, то члены, заключенные в скобки, отсутствовали бы и мы получили бы сумму обоих колебаний. Модулированное же колебание (формула (248.3)) есть произведение двух колебаний. Оно выражается членом разложения  $hU_1U_2$ , который появляется только при нелинейной характеристике.

## § 250. Демодуляция колебаний. Радиоприемник

Под действием электромагнитной волны передатчика в антенне приемника возникают модулированные токи высокой частоты, тождественные с токами в антенне передатчика, но только гораздо более слабые.



Однако эти токи еще не пригодны для непосредственного получения сигнала. Если, скажем, при радиотелефонной передаче мы направим их, даже после предварительного усиления, в громкоговоритель, то мы не услышим никакого звука. Это происходит, во-первых, потому, что телефонная мембрана обладает большой инерционностью и поэтому не может совершать такие быстрые колебания с заметной амплитудой. Во-вторых, и это самое главное, если бы мы и воспользовались малоинерционным телефоном (что можно сделать), то получили бы воздушные волны с радиотехнической частотой ( $10^5 - 10^8$  Гц), тогда как наше ухо слышит звуки только при частоте, не превышающей примерно  $2 \cdot 10^4$  Гц.

Поэтому высокочастотные колебания в приемнике снова превращаются в колебания низкой частоты, соответствующие сигналу. Эта демодуляция колебаний (или детектирование) осуществляется тем, что модулированные колебания выпрямляются с помощью какого-нибудь нелинейного устройства (кристаллический детектор, электронная лампа) и затем сглаживаются цепью, обладающей подходящей постоянной времени.

Поясним сказанное более подробно. Рассмотрим простейший демодулятор (рис. 435), состоящий из кристаллического детектора  $D$  и конденсатора  $C$ , шунтированного сопротивлением  $r$ . Положим, что на входе демодулятора имеется модулированное напряжение  $U_{вх}$ , соответствующее прямоугольным телеграфным сигналам (рис. 436 а). Если бы конденсатора не было, то вследствие выпрямительного действия детектора на сопротивлении  $r$  появилось бы пульсирующее напряжение одного знака (рис. 436 б). При наличии конденсатора этот последний будет заряжаться. Если постоянная времени  $\tau = Cr$  велика по сравнению с периодом  $T$  несущего колебания, то за время между двумя последовательными пиками напряжения конденсатор не будет заметно разряжаться, его напряжение будет увеличиваться, пока не достигнет некоторого постоянного значения, пропорционального амплитуде входного напряжения. После прекращения колебаний конденсатор будет разряжаться через сопротивление  $r$  и, если  $\tau = Cr$  значительно меньше интервала  $t_1$  между двумя последовательными сигналами, успеет полностью разрядиться задолго до прихода следующего сигнала. Если при этом  $\tau$  еще намного меньше длительности  $t_2$  самого сигнала, то на выходе демодулятора мы получим напряжение  $U_{вых}$  в виде импульсов, очень близких к прямоугольным.

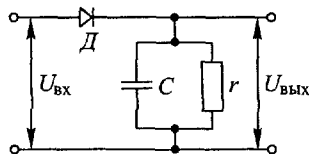


Рис. 435. Демодулятор с кристаллическим детектором

Они изображаются огибающей кривой рис. 436 б и воспроизводят сигнал передающей радиостанции (рис. 436 в).

Из сказанного ясно, что для получения неискаженного сигнала при демодуляции нужно, чтобы постоянная времени демодулятора  $\tau$  была велика по сравнению с периодом несущего колебания, но мала сравнительно с периодом самого сигнала.

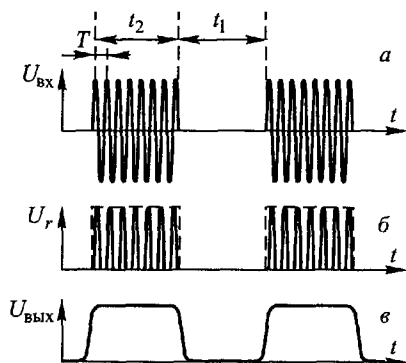


Рис. 436. Демодуляция радиотелеграфных сигналов

напряжение, изображаемое огибающей модулированного колебания, т.е. низкочастотный сигнал передатчика.

Для выпрямления колебаний при демодуляции вместо кристаллического детектора можно использовать вакуумный диод, включаемый в схему рис. 435. Однако чаще всего для демодуляции применяют трехэлектродную лампу, которая одновременно и усиливает колебания. Соответствующая схема показана на рис. 437 («сеточная демодуляция»). Для того чтобы лампа в этой схеме обладала выпрямительным свойством, нужно, очевидно, чтобы рабочая точка лежала в нелинейной части ее характеристики, например у нижнего излома характеристики.

Изложенное позволяет понять действие радиоприемника. Высокочастотные колебания, возникающие в антенне приемника, попадают сначала в ламповый усилитель высокой частоты. Входной контур этого усилителя делают настраиваемым (ср. рис. 385), чтобы можно было выделить волну какой-либо радиостанции. Усиленные колебания высокой частоты попадают затем в демодулятор, где превращаются в колебания низкой частоты сигнала. Эти колебания снова

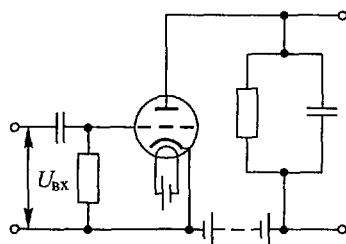


Рис. 437. Демодулятор с трехэлектродной лампой

усиливаются и подаются в соответствующий индикатор, например в громкоговоритель. Приемник, работающий по этому принципу, называют приемником прямого усиления. Его блок-схема показана на рис. 438. Однако радиовещательные приемники чаще всего строят по несколько иной схеме (супергетеродинные приемники, § 252).

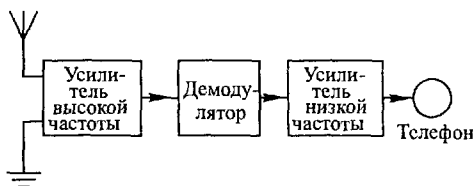


Рис. 438. Блок-схема радиоприемника прямого усиления

### § 251. Гетеродинный прием

Телеграфные сигналы — тире и точки — часто принимают с помощью телефона на слух. Для этой цели импульсы высокочастотных токов не подвергают демодуляции, а превращают их в колебания звуковой частоты, отчего в телефоне появляется свист. Короткий свисток обозначает точку, а длинный — тире.

Это преобразование частоты сигнала осуществляется следующим образом. На одну из ламп приемника подают два переменных напряжения: высокочастотное напряжение сигнала  $U = a \sin \omega t$  и переменное напряжение  $U_1 = a_1 \sin \omega_1 t$  от местного маломощного генератора, имеющегося в приемнике (так называемого *гетеродина*). В § 249 мы видели, что если лампа работает в нелинейном режиме, то в ее анодной цепи появляются комбинационные колебания и, в частности, колебание, пропорциональное произведению  $UU_1$ . Но

$$UU_1 = aa_1 \sin \omega t \sin \omega_1 t = \frac{1}{2} aa_1 [\cos(\omega - \omega_1)t - \cos(\omega + \omega_1)t]$$

и, следовательно, в приемнике появляются колебания с разностной  $(\omega - \omega_1)$  и суммарной  $(\omega + \omega_1)$  частотами. Частоту гетеродина  $\omega_1$  делают близкой к несущей частоте  $\omega$ , но с таким расчетом, чтобы разность  $(\omega - \omega_1)$  лежала в пределах звуковых частот. Тогда колебание с разностной частотой  $(\omega - \omega_1)$  вызывает в телефоне появление звука и телеграфные сигналы становятся слышимыми.

### § 252. Супергетеродинный приемник

Приемник прямого усиления, описанный в § 250, имеет тот недостаток, что при очень высоких частотах (коротких волнах) не позволяет получать большое усиление сигнала. Одна из причин, затрудняющих усиление, заключается в неизбежных паразитных емкостях приемника (емкость электродов ламп, емкость соединительных проводов и т.п.), которые при очень

высоких частотах представляют малые сопротивления, шунтирующие лампы. Кроме того, имеются и другие причины, связанные с процессами внутри самих ламп. Применить же демодуляцию в первой лампе приемника, отказавшись вовсе от усиления высокой частоты, невозможно, так как в этом случае вместе с сигналом будут усиливаться также неизбежные помехи, которые особенно велики на низких частотах.

От указанного недостатка в значительной степени свободен супергетеродинный приемник, являющийся в настоящее время

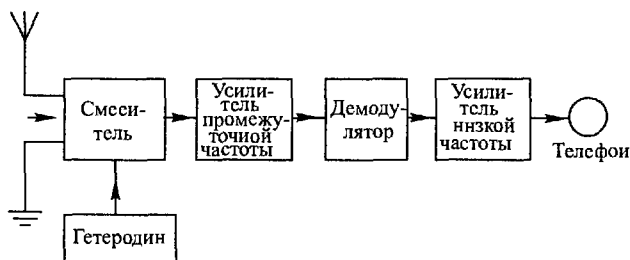


Рис. 439. Блок-схема супергетеродинного приемника

самым распространенным. Его блок-схема показана на рис. 439. Модулированные колебания высокой частоты

$$U = a[1 + f(t)] \sin \omega t$$

из антенны попадают в этом приемнике на один из электродов специальной лампы, а на другой электрод этой лампы действует напряжение местного гетеродина

$$U_1 = a_1 \sin \omega_1 t.$$

В результате, так же как и в гетеродинном приемнике, на выходе лампы возникает колебание разностной частоты, пропорциональное

$$[1 + f(t)] \cos (\omega - \omega_1)t,$$

модулированное той же функцией  $[1 + f(t)]$ , что и первоначальное колебание в антенне. Этот процесс преобразования частоты в радиотехнике называется *смешиванием* частот, а лампа, служащая для этой цели, — *смесительной* лампой. Однако, в отличие от простого гетеродинного приемника, частоту  $(\omega - \omega_1)$  (так называемую промежуточную частоту) делают достаточно высокой (неслышимой). Колебания промежуточной частоты затем выделяют и усиливают резонансным усилителем и подвергают демодуляции обычным способом. Полученный таким образом сигнал, уже звуковой частоты, еще дополнительно усиливают и подают в громкоговоритель.

В таких приемниках при настройке на разные станции одновременно с изменением емкости входного контура изменяется и емкость колебательного контура гетеродина, так что промежуточная частота ( $\omega - \omega_1$ ) при перестройке приемника остается постоянной. Для этого подвижные пластины обоих конденсаторов (входного контура и гетеродина) насаживают на общую ось.

Выше мы говорили о демодуляции колебаний и смешивании частот с помощью сеточных электронных ламп. Очевидно, что то же можно сделать, используя вместо вакуумных ламп транзисторы.

### § 253. Полусвободные электромагнитные волны

До сих пор мы рассматривали электромагнитные волны двух типов: волны вдоль проводов и свободные электромагнитные волны. В первом случае линии напряженности заканчивались на проводах линии (замыкались ими, см. рис. 401), а во втором — замыкались в диэлектрике (см. рис. 415). В радиотехнике мы встречаемся еще с электромагнитными волнами промежуточного типа.

Свободные волны возникают в том случае, если излучающий диполь находится целиком в диэлектрике (в воздухе) и достаточно удален от всех окружающих предметов. Это имеет место при излучении коротких волн (несколько метров и меньше), когда размеры диполя малы и он высоко приподнят над поверхностью земли. Для излучения длинных волн (сотни и тысячи метров), напротив, всегда применяют антенны, заземленные на одном конце, отчего характер электромагнитной волны изменяется.

В § 235 мы видели, что при заземлении вибратора (диполя) его длина волны увеличивается в два раза, а картина распределения тока и напряжения представляет собой половину картины соответствующего распределения для незаземленного диполя (см. рис. 413 а). Поэтому и картина распределения поля в волне заземленной антенны изображается верхней половиной рис. 425, лежащей над плоскостью симметрии АА. Она показана на рис. 440. Линии напряженности электрического поля в этом случае замыкаются в воздухе только с одной стороны, а с другой стороны замыкаются через Землю. Такие волны можно назвать *полусвободными*. Распространяясь, полусвободные волны следуют за кривизной Земли, подобно тому как волны вдоль проводов следуют за изгибами линии, и огибают земную поверхность.

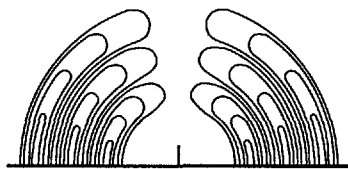


Рис. 440. Полусвободные электромагнитные волны

Явление огибания волнами различных препятствий, т.е. дифракция волн, играет огромную роль в радиосвязи. Именно вследствие дифракции радиоволн возможна устойчивая радиосвязь между удаленными пунктами, разделенными между собой выпуклостью Земли, несмотря на то что сама Земля, сравнительно хорошо проводящая электричество, непрозрачна для электромагнитных волн (рис. 441).

Однако дифракция сильно зависит от длины волны и выражена тем сильнее, чем больше длина волны. Поэтому способностью хорошо огибать земную поверхность обладают только длинные волны (сотни и тысячи метров). Такие волны можно заставить обойти вокруг земного шара и можно принять их в том же пункте, из которого они были отправлены. Время, необходимое для этого электромагнитным волнам, примерно равно  $40\,000/300\,000 = 0,13$  с.

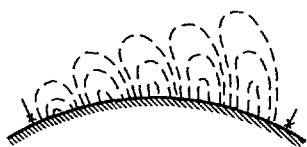


Рис 441. Огибание земной поверхности длинными электромагнитными волнами

Напротив, очень короткие волны (несколько метров и меньше) почти не огибают Землю, и поэтому устойчивая связь на коротких волнах возможна только на небольших расстояниях, немногим больших пределов прямой видимости. Этот случай мы имеем, в частности, в телевидении, где необходимо применять короткие волны (не длиннее нескольких метров).

Исследования распространения коротких волн обнаруживают другие интересные явления. Попадая в верхние сильно ионизованные слои атмосферы (в так называемую ионосферу), радиоволны отражаются этими проводящими слоями, действуя подобно металлическим зеркалам, и возвращаются опять на Землю. Поэтому и короткие волны могут достигать очень удаленных пунктов земной поверхности. Однако радиосвязь на коротких волнах гораздо менее устойчива, нежели на длинных. Изучение особенностей распространения радиоволн позволяет получить ценные сведения о строении верхних слоев атмосферы.

Укажем в заключение, что в настоящее время электромагнитные волны применяются для обнаружения и точного определения положения предметов (самолетов в воздухе, кораблей в море и т.п.) (радиолокация), для передачи неподвижных и движущихся изображений (фототелеграфия, телевидение), для вождения кораблей и самолетов (радионавигация), для точного измерения расстояний на земной поверхности (радиогеодезия), в астрофизике для исследования радиоизлучения небесных тел (радиоастрономия); радиотехника лежит в основе устройства электронных счетных машин.

## ДОБАВЛЕНИЯ

### 1. Теория опытов Кавендиша и Максвелла (к § 28)

Максвелл рассчитал, каким образом распределились бы заряды между сферами, расположенными так, как описано в опытах § 28, если бы существовало отклонение от закона Кулона, и показал, как можно вычислить по данным опыта возможное значение этого отклонения.

Предположим, что закон Кулона несправедлив и напряженность поля  $E$  точечного заряда  $q$  выражается формулой

$$E = q/r^n,$$

где  $n$  отлично от 2. Мы не выписываем справа постоянный множитель  $1/(4\pi\epsilon_0)$ , который все равно выпадает из окончательного результата (формула (9)). Тогда потенциал в поле точечного заряда будет

$$U = \frac{q}{n-1} \frac{1}{r^{n-1}}.$$

Вычислим теперь потенциал  $U_i$ , создаваемый равномерно заряженной сферой в какой-либо точке  $C$ , находящейся внутри сферы на расстоянии  $\xi$  от ее центра (рис. 442). Пусть  $a$  — радиус сферы,  $\sigma$  — поверхностная плотность заряда на ней, а  $q = 4\pi a^2 \sigma$  — полный заряд сферы. Тогда

$$U_i(\xi) = \frac{\sigma}{n-1} \int_0^\pi \frac{2\pi a^2 \sin \vartheta d\vartheta}{r^{n-1}},$$

где  $2\pi a^2 \sin \vartheta d\vartheta = dS$  — элемент поверхности сферы в сферических координатах. Так как

$$r^2 = a^2 + \xi^2 - 2a\xi \cos \vartheta,$$

то

$$U_i(\xi) = \frac{\sigma}{n-1} 2\pi a^2 \int_0^\pi \frac{\sin \vartheta d\vartheta}{(a^2 + \xi^2 - 2a\xi \cos \vartheta)^{(n-1)/2}}$$

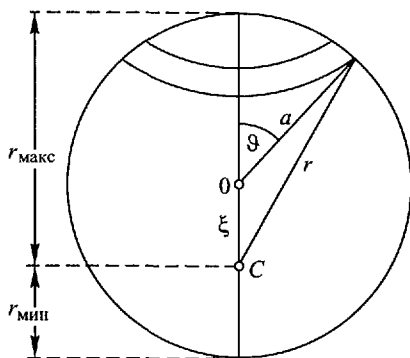


Рис. 442. К вычислению потенциала, создаваемого равномерно заряженной сферой

Вводя новую переменную  $x = \cos \vartheta$ , получаем

$$\begin{aligned} U_1(\xi) &= \frac{q}{n-1} \cdot \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(a^2 + \xi^2 - 2a\xi x)^{(n-1)/2}} = \\ &= \frac{q}{(n-1)(n-3)} \cdot \frac{1}{2a\xi} (a^2 + \xi^2 - 2a\xi x)^{-(n-3)/2} \Big|_{-1}^{+1} = \\ &= \frac{q}{(n-1)(n-3)} \frac{1}{2a\xi} [(a-\xi)^{3-n} - (a+\xi)^{3-n}] = \frac{q}{(n-1)(n-3)} \frac{1}{2a\xi} (r_{\min}^{3-n} - r_{\max}^{3-n}). \end{aligned}$$

Здесь  $r_{\min} = a - \xi$  есть минимальное расстояние рассматриваемой точки до сферы, а  $r_{\max} = a + \xi$  — максимальное расстояние.

Если точка, где разыскивают потенциал, находится вне сферы на расстоянии  $\xi > a$  от ее центра, то  $r_{\min} = \xi - a$ ,  $r_{\max} = \xi + a$ . Поэтому потенциал  $U_a(\xi)$  во внешней точке есть

$$U_a(\xi) = \frac{q}{(n-1)(n-3)} \cdot \frac{1}{2a} [(\xi - a)^{3-n} - (\xi + a)^{3-n}].$$

Положим теперь  $n = 2 - \delta$  (где  $\delta$  может быть как положительным, так и отрицательным). Величина  $\delta$  характеризует отклонение от закона Кулона, а при  $\delta = 0$  мы получаем закон Кулона точно. Из опытов Кулона можно заключить, что  $\delta$  если и не равно нулю, то очень мало. Поэтому положим  $\delta \ll 1$ , разложим полученные выражения для потенциала в ряд Тейлора по степеням  $\delta$  и ограничимся только членами первого порядка малости. Тогда

$$U = U_{n-2} - \left( \frac{dU}{dn} \right)_{n-2} \delta.$$

Это дает

$$U_1(\xi) = \frac{q}{a} - \delta \frac{q}{2a\xi} [(a-\xi) \ln(a-\xi) - (a+\xi) \ln(a+\xi)], \quad (1)$$

$$U_a(\xi) = \frac{q}{\xi} - \delta \frac{q}{2a\xi} [(\xi-a) \ln(\xi-a) - (\xi+a) \ln(\xi+a)]. \quad (2)$$

Полагая в найденных выражениях  $\xi = a$  и раскрывая получающиеся неопределенности, мы получим значение потенциала на самой сфере в виде

$$U(a) = U_1(a) = U_a(a) = \frac{q}{a} + \delta \frac{q}{a} \ln 2a \quad (3)$$

После этих подготовительных расчетов перейдем к опытам Кавендиша и Максвелла. Пусть  $A$  — радиус внутренней сферы,  $B$  — радиус внешней сферы,  $q_1$  — заряд внутренней сферы,  $q_2$  — заряд внешней сферы. Тогда потенциал  $U_1$  внутренней сферы ( $A$ ) есть

$$\begin{aligned} U_1 &= U(A) + U_1(A) = \\ &= \frac{q_1}{A} + \delta \frac{q_1}{A} \ln 2A + \frac{q_2}{B} - \delta \frac{q_2}{2BA} [(B-A) \ln(B-A) - (B+A) \ln(B+A)]. \end{aligned} \quad (4)$$

Для потенциала  $U_2$  внешней сферы аналогично имеем

$$\begin{aligned} U_2 &= U(B) + U_a(B) = \\ &= \frac{q_2}{B} + \delta \frac{q_2}{B} \ln 2B + \frac{q_1}{B} - \delta \frac{q_1}{2AB} [(B-A) \ln(B-A) - (B+A) \ln(B+A)]. \end{aligned} \quad (5)$$



Когда мы соединяем обе сферы металлической проволокой, то их потенциалы принимают одинаковое значение  $U_0$ , которое измеряют на опыте (потенциал, до которого заряжают первоначально обе соединенные друг с другом сферы). Поэтому

$$U_1 = U_2 = 0$$

Подставляя сюда выражения для  $U_1$  и  $U_2$  из (4) и (5), получаем два уравнения

$$U_0 = q_1 f(A) + q_2 \Phi, \quad U_0 = q_2 f(B) + q_1 \Phi,$$

где введены обозначения:

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\delta}{x} \ln 2x, \quad (6)$$

$$\Phi = \frac{1}{B} - \frac{\delta}{2AB} [(B-A) \ln(B-A) - (B+A) \ln(B+A)].$$

Из этих уравнений мы можем исключить заряд  $q_2$  внешней сферы и выразить заряд  $q_1$  внутренней сферы через известный из опыта первоначальный общий потенциал сфер  $U_0$ . Это дает

$$q_1 = U_0 \frac{f(B) - \Phi}{f(A)f(B) - \Phi^2}. \quad (7)$$

Полученное выражение показывает, что если только  $\delta \neq 0$ , то  $q_1 \neq 0$ , т.е. на внутренней сфере будет некоторый заряд. И, наоборот, если  $\delta = 0$  (закон Кулона точно выполняется), то из (6) имеем:  $f(B) = 1/B$ ,  $\Phi = 1/B$ , откуда  $q_1 = 0$ .

Однако, присоединяя к внутренней сфере электрометр, мы измеряем не ее заряд, а потенциал. Поэтому вычислим еще потенциал внутренней сферы после того, как внешняя сфера будет удалена. В этом случае потенциал  $U$  внутренней сферы ( $A$ ) создается только зарядом  $q_1$ , находящимся на самой этой сфере. Поэтому, согласно формулам (3) и (7), имеем

$$U = \frac{q_1}{A} (1 + \delta \ln 2A) = \frac{U_0}{A} \frac{f(B) - \Phi}{f(A)f(B) - \Phi^2} (1 + \delta \ln 2A). \quad (8)$$

Подставляя сюда вместо  $f$  и  $\Phi$  их выражения (6) и ограничиваясь только членами со степенями  $\delta$  не выше первой, для числителя формулы (8) имеем

$$[f(B) - \Phi](1 + \delta \ln 2A) \approx$$

$$\approx \frac{1}{B} \left\{ \ln 2B + \frac{1}{2A} [(B-A) \ln(B-A) - (B+A) \ln(B+A)] \right\} \delta.$$

Так как эта величина уже имеет порядок  $\delta$ , то знаменатель в формуле (8) можно взять при  $\delta = 0$

$$f(A)f(B) - \Phi^2 \approx 1/AB - 1/B^2.$$

Подставляя эти выражения в (8) и выполняя несложные преобразования, получаем окончательно

$$U = \frac{1}{2} \frac{B}{B-A} U_0 \delta \left[ \ln \frac{4B^2}{B^2 - A^2} + \frac{B}{A} \ln \frac{B-A}{B+A} \right] \quad (9)$$

Зная, до какого потенциала  $U_0$  были заряжены первоначально обе сферы, и подставляя для  $U$  наименьшее значение потенциала, которое еще может обнаружить электрометр, по этой формуле можно определить наибольшее возможное значение  $\delta$ . Таким образом и был получен верхний предел для  $\delta$ , приведенный в § 28.

## 2. Ориентировка полярных молекул в электрическом поле (к § 48)

Для вычисления поляризации, создаваемой в электрическом поле молекулами с постоянным дипольным моментом, будем пользоваться полярными координатами. Рассмотрим сферу произвольного радиуса  $R$  и направим через центр этой сферы полярную ось, параллельно электрическому полю  $E'$ . Построим, далее, два конуса с вершинами в центре сферы, оси которых совпадают с направлением поля, а образующие составляют с ним углы  $\alpha$  и соответственно  $\alpha + d\alpha$ . Эти конусы вырежут на сфере круговую полоску шириной  $Rd\alpha$ , с площадью  $dS = 2\pi R \sin \alpha \cdot Rd\alpha = 2\pi R^2 \sin \alpha d\alpha$ . Телесный угол, ограниченный этими конусами, есть  $d\Omega = dS/R^2 = 2\pi \sin \alpha d\alpha$ . В отсутствие электрического поля направления электрических моментов молекул  $p$  распределены хаотично. Поэтому число молекул  $dn$  в единице объема, моменты которых лежат в интервале углов  $\alpha$  и  $\alpha + d\alpha$ , пропорционально телесному углу  $d\Omega$ , а следовательно,

$$dn = A \sin \alpha d\alpha. \quad (1)$$

Здесь  $A$  — некоторая постоянная.

Для получения распределения диполей по направлениям в электрическом поле нужно воспользоваться теоремой Больцмана классической статистики (см. «Молекулярную физику»), согласно которой закон распределения молекул в состоянии термодинамического равновесия при наличии силового поля можно получить из закона их распределения в отсутствие поля, умножая это распределение на  $\exp(-W/kT)$ , где  $W$  — потенциальная энергия молекулы в данном поле,  $T$  — термодинамическая температура, а  $k$  — постоянная Больцмана. Потенциальная энергия диполя в электрическом поле (§ 15) равна  $W = -p_0 E' \cos \alpha$ . Поэтому вместо распределения (1) мы получаем

$$dn = A \exp(a \cos \alpha) \sin \alpha d\alpha, \quad a \equiv p_0 E' / kT. \quad (2)$$

Легко видеть, что при обычных условиях  $a \ll 1$ . Действительно, полагая  $p_0 \sim 10^{-30}$  Кл·м (ср. § 49),  $T = 300$  К и учитывая значение  $k = 1,38 \times 10^{-23}$  Дж/К, находим, что даже в сильном электрическом поле  $E' \sim 10^4$  В/см =  $10^6$  В/м величина  $a \sim 10^{-3} \ll 1$ . Тогда экспоненту в формуле (2) можно разложить в ряд и ограничиться первыми двумя членами разложения:

$$dn = A(1 + a \cos \alpha) \sin \alpha d\alpha. \quad (3)$$

Значение постоянной  $A$  определяется условием, что сумма всех молекул с любым значением угла  $d$  равна полному числу молекул  $n$  в единице объема диэлектрика:

$$A \int_0^\pi (1 + a \cos \alpha) \sin \alpha d\alpha = n. \quad (4)$$

Написанный интеграл вычисляется непосредственно и равен 2, а следовательно,  $A = n/2$ .

Найдем теперь поляризованность  $P$  (дипольный момент единицы объема диэлектрика). Она равна

$$P = \int dn \cdot p_0 \cos \alpha = \frac{np_0}{2} \int_0^\pi (1 + a \cos \alpha) \cos \alpha \sin \alpha d\alpha. \quad (5)$$

Входящий сюда интеграл распадается на два интеграла. Первый из них равен нулю. Второй вычисляется тоже элементарно и дает

$$\frac{2a}{3} = \frac{2p_0 E'}{3kT}.$$

Поэтому поляризованность равна

$$P = \frac{np_0^2 E'}{3kT}. \quad (6)$$

Следовательно, среднее значение проекции дипольного момента молекул на направление поля есть

$$\bar{p}_E \equiv \frac{P}{n} = \frac{p_0^2}{3kT} E',$$

что совпадает с формулой (48.1).

### 3. Линии напряженности и линии тока (к § 61)

Согласно уравнению непрерывности (§ 54)

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (1)$$

Если мы имеем постоянный ток, то все электрические величины не зависят от времени и  $\partial \rho / \partial t = 0$ . В этом случае

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = 0. \quad (2)$$

Но для однородной проводящей среды, согласно закону Ома,

$$j_x = \lambda E_x, \quad j_y = \lambda E_y, \quad j_z = \lambda E_z,$$

где  $\lambda$  постоянно. Поэтому из формулы (2) следует, что

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0.$$

Мы видим, что поле  $\mathbf{E}$  в проводящей среде удовлетворяет тому же уравнению (ср. § 14), что и электростатическое поле  $\mathbf{E}_{\text{ст}}$  в вакууме в отсутствие объемных зарядов ( $\rho = 0$ )

Однако чтобы показать совпадение  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{E}_{\text{ст}}$ , нужно еще доказать, что для обоих полей одинаковы условия на границе электродов. В общем случае эти граничные условия различны, так как  $\mathbf{E}_{\text{ст}}$  всегда перпендикулярно к поверхности проводника, а поле  $\mathbf{E}$  этому условию может и не удовлетворять. Но для электродов многих форм поле  $\mathbf{E}$  также перпендикулярно к поверхности электродов. Примерами могут служить сферический и цилиндрический конденсаторы, для которых это очевидно из соображений симметрии. Поле будет также всегда перпендикулярно к поверхности электродов любой формы, если удельная электропроводность среды намного меньше электропроводности вещества электродов, так как в этом случае потенциал во всех точках каждого электрода будет практически одинаковым. А это и есть обычно наиболее интересные случаи. Поэтому можно принять, что оба поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{E}_{\text{ст}}$  не только удовлетворяют одинаковому дифференциальному уравнению, но и одинаковым граничным условиям, а значит, оба поля совпадают.

#### 4. Метод контурных токов (к § 70)

Для уменьшения числа уравнений системы, к которой приводят правила Кирхгофа, пользуются различными вспомогательными приемами. Рассмотрим один из них, известный под названием *метода контурных токов*.

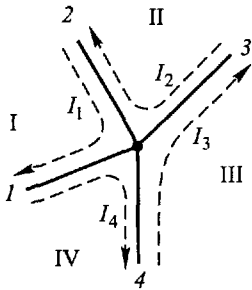


Рис. 443. К методу контурных токов

Пусть в какой-либо точке разветвления  $a$  (рис. 443) сложной цепи сходятся  $n$  участков цепи  $1, 2, 3$  и т.д., образующих стороны простых контуров I, II, III и т.д. (т.е. таких, которые не имеют разветвлений). Охарактеризуем каждый из простых контуров определенным током постоянной силы вдоль всего контура. Эти токи будем называть *контурными токами* и припишем им определенное положительное направление, например будем их считать направленными по часовой стрелке в каждом контуре. Силу контурных токов определим таким образом, чтобы сила тока в любом участке была равна разности двух соседних контурных токов. Если обозначить контурные токи через  $I_1, I_2, \dots, I_n$ , а фактические токи в участках цепи  $1, 2, \dots$  — через  $i_1, i_2, \dots, i_n$ , то это значит, что мы полагаем (рис. 443)

$$i_1 = I_n - I_1, \quad i_2 = I_1 - I_2, \quad \dots, \quad i_n = I_{n-1} - I_n. \quad (1)$$

Складывая почленно эти равенства, находим

$$\sum i_k = 0.$$

Это будет справедливым для каждой точки разветвления. Мы видим, что введение контурных токов, согласно формуле (1), приводит автоматически к удовлетворению первой системы уравнений Кирхгофа. Поэтому остается решить только вторую систему уравнений, написанную для контурных токов. Найдя же контурные токи, мы можем определить по формулам (1) и фактические токи во всех участках цепи. Этот метод позволяет снизить число уравнений системы на столько единиц, сколько независимых уравнений дает первое правило Кирхгофа.

Поясним применение метода на примере схемы моста. Эту схему мы уже рассматривали в § 58, однако ограничились частным случаем уравновешенного моста. Теперь мы рассмотрим общий случай.

Выделим в схеме моста (рис. 444) три простых контура: I ( $1, 3, 5$ ), II ( $2, 4, 5$ ) и III ( $3, 4$ ), на которые распадается эта схема, и введем контурные токи  $I_1, I_2$  и  $I_3$ , направленные по часовой стрелке. Тогда вторая система уравнений

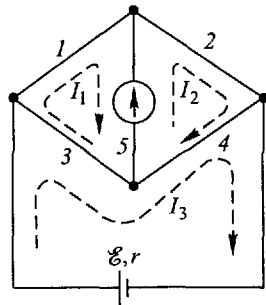


Рис. 444. Введение контурных токов в схему моста

Кирхгофа, записанная для контурных токов, будет

$$\begin{aligned} r_1 I_1 + r_5(I_1 - I_2) + r_3(I_1 - I_3) &= 0, \\ r_2 I_2 + r_4(I_2 - I_3) + r_5(I_2 - I_1) &= 0, \\ r I_3 + r_3(I_3 - I_4) + r_4(I_3 - I_2) &= \mathcal{E}. \end{aligned}$$

Или

$$\begin{aligned} (r_1 + r_3 + r_5)I_1 - r_5 I_2 - r_3 I_3 &= 0, \\ -r_5 I_1 + (r_2 + r_4 + r_5)I_2 - r_4 I_3 &= 0, \\ -r_3 I_1 - r_4 I_2 + (r + r_3 + r_4)I_3 &= \mathcal{E}. \end{aligned}$$

Отметим, что мы получили всего три уравнения, тогда как непосредственное применение обоих правил Кирхгофа привело бы нас к шести уравнениям, соответственно шести участкам схемы моста. Определитель этой системы равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} r_1 + r_3 + r_5 & -r_5 & -r_3 \\ -r_5 & r_2 + r_4 + r_5 & -r_4 \\ -r_3 & -r_4 & r + r_3 + r_4 \end{vmatrix}.$$

Найдем контурные токи. Пользуясь обычным правилом решения системы алгебраических линейных уравнений, имеем

$$\begin{aligned} I_1 &= \mathcal{E} \frac{r_4 r_5 + r_3(r_2 + r_4 + r_5)}{\Delta}, & I_2 &= \mathcal{E} \frac{r_3 r_5 + r_4(r_1 + r_3 + r_5)}{\Delta}, \\ I_3 &= \mathcal{E} \frac{(r_1 + r_3 + r_5)(r_2 + r_4 + r_5) + r_5^2}{\Delta}. \end{aligned}$$

Ток в ветви гальванометра

$$i_5 = I_1 - I_2 = \mathcal{E} \frac{r_2 r_3 - r_1 r_4}{\Delta}.$$

Если мост уравновешен, то  $i_5 = 0$ . Это дает

$$r_2 r_3 - r_1 r_4 = 0, \quad \text{или} \quad r_1 / r_2 = r_3 / r_4,$$

что совпадает с результатом § 58.

Величину  $\Delta$  можно найти по правилу вычисления определителя третьего порядка

$$\begin{aligned} \Delta &= r_5[(r_1 + r_2 + r_3 + r_4)r + (r_1 + r_2)(r_3 + r_4)] + \\ &\quad + r(r_2 + r_4)(r_1 + r_3) + r_1 r_2 (r_3 + r_4) + r_3 r_4 (r_1 + r_2). \end{aligned}$$

## 5. Максвелловское время релаксации (к § 73)

Пусть объемная плотность возникшего заряда в какой-либо точке среды равна  $\rho$ ; тогда вызванное им электрическое поле  $\mathbf{E}$  определяется уравнением Пуассона (14.1). Полагая в нем  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}$  и учитывая, что в однородной среде  $\epsilon$  не зависит от координат, имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{E} \equiv \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon}. \quad (1)$$

Это поле вызывает электрические токи, плотность  $\mathbf{j}$  которых по закону Ома равна

$$\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}. \quad (2)$$

Появляющиеся токи уменьшают заряд  $\rho$ . Быстрота уменьшения заряда выражается уравнением непрерывности (54.2). Подставляя в него для  $\mathbf{j}$  выражение (2) и учитывая, что в однородной среде  $\lambda$ , как и  $\epsilon$ , постоянно, получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (3)$$

Так как левые части уравнений (1) и (3) одинаковы, то равны и правые их части. Поэтому для любой фиксированной точки среды справедливо уравнение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\lambda}{\epsilon_0 \epsilon} \rho. \quad (4)$$

Интегрируя это уравнение при начальных условиях  $t = 0$ ,  $\rho = \rho_0$ , находим

$$\rho = \rho_0 \exp(-t/\tau_M), \quad (5)$$

где

$$\tau_M = \frac{\epsilon_0 \epsilon}{\lambda} \quad (6)$$

есть максвелловское время релаксации.

## 6. Взаимная энергия двух токов (произвольные контуры) (к § 99)

Пусть имеются два произвольных контура 1 и 2 (рис. 445) и в контуре 2 установлен ток  $i_2$ , создаваемый источником тока с ЭДС  $\mathcal{E}_2$ . Замкнем теперь контур 1 на источник тока с ЭДС  $\mathcal{E}_1$ . В контуре начнет устанавливаться ток  $i_1$ . Если бы ток  $i_2$  оставался постоянным, то в контуре 1 возникла бы дополнительно только ЭДС самоиндукции. Работа источника  $\mathcal{E}_1$  против этой ЭДС и есть вычисленная нами в § 96 собственная энергия тока 1, равная  $L_1 i_1^2/2$ .

Однако вследствие магнитной связи в контуре 2 возникнет еще ЭДС взаимной индукции  $-L_{12} di_1/dt$ . Чтобы сделать ток  $i_2$  постоянным, мы должны были бы включить в контур 2 компенсирующую переменную ЭДС

$$\tilde{\mathcal{E}}_2 = +L_{12} \frac{di_1}{dt}.$$

Рис. 445. К вычислению взаимной энергии двух токов

Она совершила бы за время установления тока  $i_1$  определенную работу, которая возникает только потому, что между обоими контурами имеется магнитная связь. Работа ЭДС  $\tilde{\mathcal{E}}_2$  и равна взаимной энергии обоих контуров.

Отсюда получается, что увеличение взаимной энергии за время  $dt$

$$dW_{12} = \tilde{\mathcal{E}}_2 i_2 dt = L_{12} \frac{di_1}{dt} i_2 dt = L_{12} i_2 di_1$$

(где  $i_2 = \text{const}$ ), а полная взаимная энергия

$$W_{12} = L_{12}i_2 \int di_1 = L_{12}i_2i_1.$$

Мы получили формулу (99.2) для случая произвольных контуров.

Если бы мы предположили, что сначала имеется установившийся ток  $i_1$  и в присутствии этого тока создается ток  $i_2$ , то в нашем мысленном опыте потребовалось бы включение в контур 1 компенсирующей переменной ЭДС

$$\tilde{\mathcal{E}}_1 = +L_{21} \frac{di_2}{dt},$$

и мы получили бы

$$W_{12} = L_{21}i_1i_2.$$

Но совершенная работа в обоих случаях должна быть одинакова, так как в результате мы получаем одно и то же магнитное поле. Отсюда следует, что

$$L_{12} = L_{21}.$$

В учении о магнетизме часто пользуются представлением о постоянных магнитах. Примером постоянного магнита может служить намагниченный кусок стали. Абсолютно жестким постоянным магнитом называют такое намагниченное тело, которое создает неизменное магнитное поле, не зависящее от воздействия других окружающих магнитов или токов. Легко видеть, что взаимная энергия абсолютно жесткого магнита и контура с током равна нулю. Действительно, если в контуре в присутствии магнита устанавливается ток, то никакого индукционного воздействия контура на магнит не будет. Поэтому магнитное поле, создаваемое магнитом, будет оставаться неизменным и не потребует включения компенсирующей переменной ЭДС, работа которой и представляет взаимную энергию.

## 7. Теорема Лармора (к § 115)

Рассмотрим доказательство теоремы Лармора. Пусть в отсутствие магнитного поля на заряженную частицу действует центральная сила  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ . Тогда уравнение движения частицы есть

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}(\mathbf{r}). \quad (1)$$

Предположим теперь, что мы включили внешнее магнитное поле с индукцией  $\mathbf{B}$  и ввели новую систему координат, которая равномерно вращается с угловой скоростью  $\Omega$ , параллельной направлению  $\mathbf{B}$ . Уравнение движения частицы изменится. На нее, во-первых, будет действовать благодаря магнитному полю сила (§ 88)

$$\mathbf{F} = q[\mathbf{v}\mathbf{B}].$$

Во-вторых, во вращающейся системе координат мы должны ввести еще дополнительные силы инерции, а именно силу Кориолиса

$$\mathbf{F}_K = 2m[\mathbf{v}\Omega]$$

и центробежную силу

$$\mathbf{F}_c = m\Omega^2 \mathbf{r}.$$

Для достаточно малого  $\Omega$  центробежной силой (пропорциональной  $\Omega^2$ ) можно пренебречь по сравнению с силой Кориолиса (пропорциональной  $\Omega$ ). Так как по условию  $\mathbf{B}$  и  $\Omega$  параллельны, то при должном выборе величины  $\Omega$  можно сумму  $\mathbf{F} + \mathbf{F}_K$  сделать равной нулю. Это будет, если

$$qvB \sin(\mathbf{v}, \mathbf{B}) + 2mv\Omega \sin(\mathbf{v}, \mathbf{B}) = 0,$$

$$\Omega = -qB/2m.$$

Таким образом, в рассматриваемой вращающейся системе координат уравнение движения частицы будет иметь прежний вид (1), а следовательно, действие магнитного поля в первом приближении (пока можно пренебречь центробежной силой) сводится к наложению дополнительного равномерно вращения с угловой скоростью  $\Omega$ . Если движущаяся частица есть электрон, то  $q = -e$ , и мы получаем формулу (115.2).

## 8. Закон Богуславского–Лэнгмюра (к § 157)

Рассмотрим вывод закона Богуславского–Лэнгмюра для случая плоско-диода. Распределение потенциала между катодом и анодом при наличии пространственного заряда можно найти из уравнения Пуассона (§ 26)

$$\frac{d^2U}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{ne}{\epsilon_0}. \quad (1)$$

Здесь  $U$  — значение потенциала в произвольной точке на расстоянии  $x$  от катода,  $\rho$  — объемная плотность пространственного заряда в той же точке,  $n$  — концентрация электронов,  $e$  — абсолютное значение заряда электрона,  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная.

Далее, плотность тока  $j$  через диод равна

$$j = nev, \quad (2)$$

где  $v$  — скорость электрона.

Наконец, скорость электронов  $v$  в любой точке определяется значением потенциала  $U$  в этой точке. Действительно, так как в диоде имеется высокий вакуум, то электроны движутся без соударений, и поэтому их кинетическая энергия равна работе сил поля. Если начальная скорость электронов мала по сравнению со скоростью, приобретаемой под действием поля, то ею можно пренебречь, и тогда

$$\frac{mv^2}{2} = eU. \quad (3)$$

Исключая из этих трех уравнений концентрацию  $n$  и скорость  $v$ , мы приходим к следующему уравнению, определяющему распределение потенциала:

$$\frac{d^2U}{dx^2} = aU^{-1/2}, \quad (4)$$

где введено обозначение

$$a = \frac{j}{\epsilon_0 \sqrt{2e/m}}.$$

Так как мы отсчитываем потенциалы от потенциала катода, то

$$U = 0 \quad \text{при} \quad x = 0. \quad (5)$$

Это условие представляет собой первое граничное условие задачи. Чтобы сформулировать второе граничное условие, будем считать, что во всем интервале изменения потенциала ток ограничивается только пространственным зарядом, т.е. что эмиссионная способность катода бесконечно велика. Чтобы при этом условии плотность тока через диод была конечной, нужно, чтобы напряженность поля  $-dU/dx$  у катода была бесконечно малой. Это дает второе граничное условие в виде

$$\frac{dU}{dx} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0. \quad (6)$$



Решение уравнения (4), удовлетворяющее граничным условиям, имеет вид

$$U = \alpha x^\beta, \quad (7)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — постоянные.

Значения  $\alpha$  и  $\beta$  можно определить, подставляя выражение (7) в уравнение (4). Это дает

$$\alpha\beta(\beta - 1)x^{\beta-2} = a\alpha^{-1/2}x^{-\beta/2}.$$

Приравнивая между собой показатели степени и коэффициенты в обеих частях равенства, находим

$$\beta = 4/3, \quad \alpha = (9a/4)^{2/3}.$$

Таким образом, распределение потенциала выражается формулой

$$U = (9a/4)^{2/3} x^{4/3}. \quad (8)$$

При значении  $x = d$  потенциал равен потенциалу анода  $U_a$ . Поэтому

$$U_a = (9a/4)^{2/3} d^{4/3}. \quad (9)$$

Подставляя в это выражение вместо  $a$  его значение и разрешая полученное уравнение относительно плотности тока  $j$ , находим окончательно

$$j = \frac{4}{9} \frac{\varepsilon_0}{d^2} \sqrt{\frac{2e}{m}} U_a^{3/2}, \quad (10)$$

что совпадает с формулами (157.1) и (157.2), приведенными в тексте.

## 9. Устойчивость электрических разрядов (к § 176, 213)

Рассмотрим электрическую цепь, показанную на рис. 446 а, содержащую источник постоянной ЭДС  $\mathcal{E}$ , нагрузочное сопротивление  $r$  (включающее и внутреннее сопротивление источника), емкость  $C$ , индуктивность  $L$

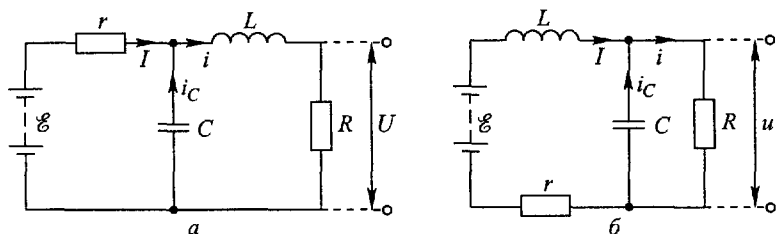


Рис. 446. К вопросу устойчивости электрических зарядов

и проводник  $R$  с нелинейной вольт-амперной характеристикой  $U = f(i)$ . Выберем положительные направления токов так, как показано на рисунке, и применим к нашей цепи правила Кирхгофа. Тогда для контура  $\mathcal{E}Cr\mathcal{E}$  получаем

$$rI = -u + \mathcal{E},$$

где  $u$  — напряжение на конденсаторе, а для контура  $CRLC$

$$f(i) = u - L \frac{di}{dt}.$$

Кроме того, имеем

$$I + i_C = i, \quad u = q/C, \quad i_C = -dq/dt,$$

где  $q$  — мгновенное значение заряда конденсатора. Исключая из написанных уравнений  $I$  и  $i_C$ , получаем два дифференциальных уравнения первого порядка относительно  $i$  и  $u$ :

$$L \frac{di}{dt} = u - f(i), \quad rC \frac{du}{dt} = \mathcal{E} - ri - u. \quad (1)$$

Эти уравнения нелинейны, так как для проводников, не подчиняющихся закону Ома, функция  $f(i)$  нелинейна.

В стационарном состоянии разряда  $di/dt = du/dt = 0$ , и поэтому стационарные значения тока  $i_0$  и напряжения  $u_0$  определяются соотношениями

$$u_0 = f(i_0), \quad u_0 = \mathcal{E} - ri_0, \quad (2)$$

которые мы уже получили и обсудили в § 176.

Чтобы выяснить, является ли данное состояние разряда устойчивым, поступим в соответствии с общим методом исследования устойчивости движений, разработанным Ляпуновым, а именно, предположим, что стационарные значения тока и напряжения изменились на малые величины  $x$  и  $y$  так, что

$$i = i_0 + x, \quad u = u_0 + y.$$

Далее, для малых изменений тока и напряжения малый участок вольт-амперной характеристики можно заменить отрезком прямой линии и положить

$$f(i) = f(i_0) + R_1 x,$$

где  $R_1$  — дифференциальное сопротивление проводника в рассматриваемой точке характеристики. Подставляя это в уравнения (1) и принимая во внимание условия стационарности (2), мы получаем для  $x$  и  $y$  два линейных уравнения:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{R_1}{L} x + \frac{1}{L} y, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{C} x - \frac{1}{rC} y, \quad (3)$$

которые допускают уже простое исследование.

Исключая из уравнений (3) переменную  $y$ , получаем линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad (4)$$

где

$$2\alpha = \frac{R_1}{L} + \frac{1}{rC}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \left(1 + \frac{R_1}{r}\right). \quad (5)$$

Такое же точно уравнение получается и для  $y$ . С уравнением (4) мы уже встречались в § 210 при исследовании собственных электрических колебаний. Мы видели, что при  $\omega_0^2 > \alpha^2$  оно описывает затухающие колебания с коэффициентом затухания  $\alpha$ . При  $\omega_0^2 < \alpha^2$  получается аperiodический процесс

$$x = A_1 e^{-k_1 t} + A_2 e^{-k_2 t}, \quad (6)$$

где

$$k_1 = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}, \quad k_2 = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}. \quad (7)$$

Чтобы случайные отклонения  $x$  и  $y$  затухали с течением времени, т.е. чтобы состояние разряда было устойчивым, очевидно, необходимо, чтобы либо было  $\alpha > 0$  (если  $\omega_0^2 > \alpha^2$ ), либо  $k_1$  и  $k_2$  были оба положительны (если  $\omega_0^2 < \alpha^2$ ). Если же хотя бы одна из величин,  $k_1$  или  $k_2$ , будет отрицательна, то случайные изменения тока и напряжения будут нарастать с течением времени и состояние разряда будет неустойчивым.

Если  $R_i > 0$ , то все величины в (5) положительны и  $\alpha > 0$ ,  $\omega_0 > 0$ . При этом  $\alpha > \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$  и, следовательно,  $k_1$  и  $k_2$  всегда положительны. Отсюда видно, что в проводниках с положительным дифференциальным сопротивлением стационарные состояния разряда всегда устойчивы.

Положим теперь, что дифференциальное сопротивление  $R_i < 0$ . Тогда

$$2\alpha = \frac{1}{rC} - \frac{|R_i|}{L}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \left( 1 - \frac{|R_i|}{r} \right), \quad (8)$$

где  $|R_i|$  — абсолютное значение дифференциального сопротивления. Чтобы и в этом случае  $k_1$  и  $k_2$  были оба положительны, необходимо, чтобы было по-прежнему  $\alpha > 0$  и  $\omega_0^2 > 0$ . А для этого необходимо выполнение двух условий:

$$r > |R_i|, \quad L > |R_i|rC, \quad (9)$$

которые и есть условия устойчивости разряда.

Если в схему рис. 446 а включена электрическая дуга (или другой проводник с характеристикой  $S$ -типа), то первое из условий (9), как мы знаем (§ 176), означает, что при любом значении ЭДС  $\mathcal{E}$  имеется только одно стационарное состояние разряда, а следовательно, не будет скачков тока.

Если цепь содержит еще достаточно большую индуктивность, так что выполняются и второе условие (9), то все состояния разряда будут устойчивы, и мы сумеем получить на опыте всю вольт-амперную характеристику.

Напротив, для получения незатухающих колебаний (§ 213) необходимо, чтобы при данных ЭДС  $\mathcal{E}$  и параметрах схемы существовало тоже только одно стационарное состояние, однако это состояние должно быть неустойчивым. Поэтому при выполнении первого из условий (9) и нарушения второго условия (9) цепь рис. 446 а, содержащая электрическую дугу, будет самовозбуждаться и в ней установятся незатухающие колебания.

Условия устойчивости разряда зависят, конечно, от типа схемы, в которую входит проводник с отрицательным дифференциальным сопротивлением. Поэтому в качестве второго практически интересного примера мы рассмотрим еще схему, показанную на рис. 446 б, в которой  $R$  есть нелинейный проводник с характеристикой  $N$ -типа, например туннельный диод (§ 203). Применяя к этой схеме правила Кирхгофа, мы получим два дифференциальных уравнения первого порядка

$$L \frac{dI}{dt} = \mathcal{E} - rI - u, \quad C \frac{du}{Dt} = I - i, \quad (10)$$

где ток  $i$  через диод связан с напряжением  $u$  и на диоде заданным уравнением вольт-амперной характеристики  $i = \varphi(u)$ . Поступая дальше в точности так же, как и в первом примере, легко пайти, что условия устойчивости разряда для схемы рис. 446 б имеют вид

$$r < |R_i|, \quad L < |R_i|rC. \quad (11)$$

Первое из этих условий для туннельного диода (и любого проводника с характеристикой  $N$ -типа) совпадает с условием единственности стационарного состояния (ср. § 176). Поэтому при нарушении этого условия будут наблюдаться скачки напряжения. Если же первое условие будет выполнено, но нарушено второе условие (11), в схеме будет единственное, но неустойчивое стационарное состояние, и схема будет самовозбуждаться.

## 10. К объяснению циклотронного резонанса (к § 185)

Количественная теория циклотронного резонанса имеет особенно простой вид для свободных электронов, движущихся без соударений. В этом случае уравнение движения электрона есть

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e\mathbf{E} + e[\mathbf{v}\mathbf{B}_0]. \quad (1)$$

Направим координатную ось  $X$  параллельно электрическому полю  $\mathbf{E}$ , а ось  $Z$  — параллельно магнитной индукции  $\mathbf{B}_0$  (см. рис. 314). Тогда  $E_x = E$ ,  $E_y = E_z = 0$ ,  $B_z = B_0$ ,  $B_x = B_y = 0$ , и написанное векторное уравнение распадается на два скалярных уравнения

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{e}{m} E + \omega_c v_y, \quad \frac{dv_y}{dt} = -\omega_c v_x. \quad (2)$$

Здесь по-прежнему  $\omega_c$  обозначает циклотронную частоту, определяемую формулой (185.1). Исключим из этих двух уравнений скорость  $v_y$ , для чего продифференцируем первое уравнение один раз по времени, умножим второе уравнение на  $\omega_c$  и сложим оба уравнения почленно. Тогда получим

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} = \frac{e}{m} \frac{dE}{dt} - \omega_c^2 v_x. \quad (3)$$

Аналогично, исключая из обоих уравнений  $v_x$ , найдем

$$\frac{d^2 v_y}{dt^2} = -\frac{e}{m} \omega_c E - \omega_c^2 v_y. \quad (4)$$

Положим теперь, что электрическое поле изменяется по синусоидальному закону

$$E = E_0 \sin \omega t, \quad (5)$$

и будем искать установившиеся вынужденные колебания электрона. Так как вынужденные колебания гармонического осциллятора происходят с той же частотой, что и колебания внешней силы, то мы будем искать решения в виде

$$v_x = v_{x0} \sin(\omega t + \alpha), \quad v_y = v_{y0} \sin(\omega t + \beta), \quad (6)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — пока неизвестные разности фаз между колебаниями составляющих скорости и колебаниями электрического поля. Подставляя выражения (5) и (6) в уравнения (3) и (4), выражая из этих последних скорости электрона  $v_x$  и  $v_y$  и приравнявая коэффициенты при  $\sin \omega t$  и  $\cos \omega t$ , получаем четыре уравнения для определения  $v_{x0}$ ,  $v_{y0}$ ,  $\alpha$  и  $\beta$ . Это дает  $\alpha = -\pi/2$ ,  $\beta = 0$ ,

$$v_x = \frac{e}{m} \frac{\omega}{\omega^2 - \omega_c^2} E_0 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right), \quad v_y = \frac{e}{m} \frac{\omega_c}{\omega^2 - \omega_c^2} E_0 \sin \omega t. \quad (7)$$

Вследствие вынужденных колебаний электронов в электронном газе возникают переменные токи, плотность которых равна

$$j_x = env_x, \quad j_y = env_y, \quad (8)$$

где  $n$  — концентрация электронов. Электрическое поле совершает над движущимися электронами определенную работу, которая совершается за счет уменьшения энергии электромагнитной волны.

Мгновенная мощность, выделяемая в единице объема, есть

$$w = j_x E = \frac{e^2 n}{m} \frac{\omega}{\omega^2 - \omega_c^2} E_0^2 \sin \omega t \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right).$$

В рассматриваемом случае отсутствия столкновений эта мощность оказывается знакопеременной, а среднее ее значение за период колебаний  $\bar{w} = 0$ , так как

$$\overline{\sin \omega t \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right)} = 0.$$

При условии  $\omega \neq \omega_c$  электроны при установившихся вынужденных колебаниях не поглощают энергию электромагнитной волны.

При резонансе ( $\omega = \omega_c$ ), как видно из формул (7), амплитуды колебаний скорости стремятся к бесконечности. Это значит, что электроны все время будут двигаться по неустановившейся траектории, непрерывно увеличивая свою энергию, а электромагнитная волна будет поглощаться.

В реальном газе электронов, движущихся со столкновениями, поглощение электромагнитной волны происходит и при  $\omega \neq \omega_c$ , но при некоторой частоте имеет максимум.

Положим, что при каждом столкновении электрона он целиком передает решетке кристалла свой импульс  $m v$ . Если  $\tau$  есть среднее время свободного пробега электрона, то за единицу времени он будет испытывать  $1/\tau$  столкновений и передавать импульс  $m v/\tau$ . Но приращение механического импульса тела за единицу времени есть сила, действующая на это тело. Поэтому влияние столкновений можно описать как действие некоторой силы трения

$$F_{\text{тр}} = -m v/\tau. \quad (9)$$

Соответственно вместо уравнений (2) мы получим уравнения движения

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{e}{m} E + \omega_c v_y - \frac{v_x}{\tau}, \quad \frac{dv_y}{dt} = -\omega_c v_x - \frac{v_y}{\tau}. \quad (10)$$

Чтобы найти интересующую нас составляющую скорости  $v_x$  в направлении электрического поля, мы воспользуемся представлением колебаний в виде комплексных чисел (§ 227), так как это чрезвычайно упростит последующие расчеты. А именно, мы положим

$$E = E_0 \exp(i\omega t), \quad v_x = v_{x0} \exp(i\omega t), \quad v_y = v_{y0} \exp(i\omega t), \quad (11)$$

где  $i = \sqrt{-1}$ , а  $E_0$ , как и раньше, будем считать вещественным. Амплитуды же  $v_{x0}$  и  $v_{y0}$  могут быть комплексными, так как между колебаниями скорости и поля может быть разность фаз.

Подставляя выражения (11) в уравнения движения (10), мы получаем два алгебраических уравнения

$$i\omega v_x = \frac{e}{m} E + \omega_c v_y - \frac{v_x}{\tau}, \quad i\omega v_y = -\omega_c v_x - \frac{v_y}{\tau}. \quad (12)$$

Исключая из этой системы скорость  $v_y$ , находим

$$v_x = bE \frac{1 + i\omega\tau}{(1 + i\omega\tau)^2 + \omega_c^2\tau^2}. \quad (13)$$

Здесь  $b = (e/m)\tau$  есть подвижность электронов (ср. формулу (147.4)). Освобождаясь, далее, от мнимой величины в знаменателе и вычисляя плотность

тока  $j_x = env_x$ , мы находим, что  $j_x$  состоит из двух слагаемых — вещественного  $\text{Re } j_x$  и чисто мнимого  $i \text{Im } j_x$ :

$$j_x = \text{Re } j_x + i \text{Im } j_x. \quad (14)$$

При этом

$$\text{Re } j_x = \lambda_0 E \frac{1 + (\omega_c \tau)^2 + (\omega \tau)^2}{[1 + (\omega_c \tau)^2 - (\omega \tau)^2]^2 + 4(\omega \tau)^2}, \quad (15)$$

$$\text{Im } j_y = -\lambda_0 E \frac{\omega \tau [1 - (\omega_c \tau)^2 + (\omega \tau)^2]}{[1 + (\omega_c \tau)^2 - (\omega \tau)^2]^2 + 4(\omega \tau)^2}, \quad (16)$$

а  $\lambda_0 = enb$  есть удельная электрическая проводимость для постоянного тока ( $\omega = 0$ ) и без магнитного поля ( $\omega_c = 0$ ).

Так как  $i = \exp(i\pi/2)$ , то чисто мнимая составляющая описывает колебания тока, смещенные по фазе на  $\pi/2$  относительно колебаний поля. Поэтому среднее значение мощности, обусловленной этой составляющей, равно нулю. Следовательно, средняя мощность, выделяемая в единице объема, равна

$$\bar{w} = \overline{\text{Re } j_x \cdot E}. \quad (17)$$

Возвратимся теперь к вещественной записи колебаний. Полагая  $E = E_0 \sin \omega t$ , используя для  $\text{Re } j_x$  выражение (15) и учитывая еще, что  $\sin^2 \omega t = 1/2$ , находим окончательно

$$\bar{w} = \frac{1}{2} \lambda_0 E_0^2 \frac{1 + (\omega_c \tau)^2 + (\omega \tau)^2}{[1 + (\omega_c \tau)^2 - (\omega \tau)^2]^2 + 4(\omega \tau)^2}. \quad (18)$$

Полученный результат показывает, что вследствие столкновений электронов с решеткой кристалла поглощение электромагнитной волны отлично от нуля при любой частоте  $\omega$ . Это происходит потому, что электроны, ускоряющиеся полем между двумя последовательными столкновениями, передают затем накопленную энергию решетке при столкновениях, и поэтому все время происходит перекачка энергии из волны в решетку. Далее, исследование выражения (18), на котором мы не останавливаемся, показывает, что  $\bar{w}$  достигает при некоторой частоте  $\omega_{\text{макс}}$  максимума. Однако этот максимум имеет заметную величину только при условии  $\omega \tau \gtrsim 1$ , и он тем резче, чем больше  $\omega \tau$  по сравнению с единицей. Это и понятно, так как для резонанса необходимо, чтобы электронный газ обладал характерной для него частотой колебаний, а для этого нужно, чтобы за время  $\tau$  электрон успел совершить хотя бы несколько полных оборотов в магнитном поле. При условии  $\omega \tau \gg 1$  максимум поглощения лежит при частоте  $\omega_{\text{макс}} \approx \omega_c$ .

## 11. Электромагнитное поле диполя (к § 243)

Рассмотрим подробнее, какой вид имеет электромагнитное поле диполя в волновой области.

Мы знаем, что заряд, движущийся с постоянной скоростью, вызывает только постоянное магнитное поле  $H$ . С другой стороны, согласно основному положению теории Максвелла, для появления вихревого электрического поля необходимо, чтобы  $\partial H / \partial t$  было отлично от нуля. Поэтому для излучения нужно, чтобы заряд двигался с определенным ускорением  $v = \dot{x}$  (точка обозначает дифференцирование по времени) или, иначе, чтобы вторая производная по времени от момента диполя  $\ddot{p} = q\ddot{x}$  была не равна нулю. В

соответствии с этим точный расчет показывает, что электрическое поле  $E$  волны (а следовательно, и магнитное поле  $H$ ; ср. (240.4)) пропорционально  $\ddot{p}(t - r/c)$ . Аргумент  $(t - r/c)$  показывает, что колебания поля в точке, удаленной на расстояние  $r$  от диполя, запаздывают относительно колебаний  $\ddot{p}$  на время  $r/c$ , так что  $E(t)$  и  $H(t)$  в рассматриваемой точке в момент  $t$  определяются значением  $\ddot{p}$  в более ранний момент времени  $(t - r/c)$ .

Легко сообразить, как зависят оба поля  $E$  и  $H$  от расстояния  $r$ . Энергия, проходящая через каждую единицу поверхности в поле электромагнитной волны, пропорциональна  $E^2$  или соответственно  $H^2$ . Поэтому поток энергии, проходящий сквозь поверхность сферы радиусом  $r$ , окружающей диполь, пропорционален поверхности этой сферы  $4\pi r^2$  и  $E^2$ , т.е. пропорционален  $E^2 r^2$ . Так как эта энергия не зависит от  $r$  (вакуум, поглощение энергии не происходит), то отсюда следует что  $E$  и  $H$  пропорциональны  $1/r$ .

Значения полей  $E$  и  $H$  зависят еще от направления излучения, т.е. от угла  $\vartheta$ , составленного радиус-вектором  $r$  с осью диполя (рис. 447). Мы уже говорили что вблизи диполя его магнитное поле выражается той же формулой, что и для элемента тока. Это магнитное поле пропорционально  $\sin \vartheta$  и равно нулю в любой точке, лежащей на продолжении оси диполя. Совершенно так же и напряженности полей  $E$  и  $H$  в волновой зоне пропорциональны  $\sin \vartheta$ . Точный расчет приводит к следующему результату:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\ddot{p}(t - r/c) \sin \vartheta}{c^2 r}, \quad H = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E. \quad (1)$$

Здесь  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с — скорость распространения электромагнитных волн в вакууме, а все величины предполагаются измеренными в системе СИ. Оба поля  $E$  и  $H$  направлены перпендикулярно к направлению распространения, т.е. к направлению  $r$ , и связаны с ним правилом правого буравчика (рис. 447). Формула (1) справедлива лишь для таких движений зарядов, скорость которых  $v$  мала по сравнению со скоростью света  $c$  (нерелятивистский случай,  $\beta = v/c \ll 1$ ).

В частном случае, когда  $p$  изменяется по гармоническому закону (243.1), имеем

$$\ddot{p}(t - r/c) = -p_0 \omega^2 \sin[\omega(t - r/c)] = -p_0 \omega^2 \sin(\omega t - kr),$$

и первое соотношение выражения (1) принимает вид

$$E = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_0 \omega^2 \sin \vartheta}{c^2 r} \sin(\omega t - kr). \quad (2)$$

Энергия, излучаемая диполем. Модуль вектора потока энергии в какой-либо точке с координатами  $r$ ,  $\vartheta$  есть

$$P = EH = \frac{p_0^2 \omega^4 \sin^2 \vartheta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \sin^2(\omega t - kr).$$

Интерес представляет не мгновенное значение  $P$ , а его среднее значение  $\bar{P}$  за период колебаний, т.е. интенсивность излучения. Так как  $\sin^2(\omega t - kr) = 1/2$ , то

$$\bar{P} = \frac{1}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{p_0^2 \omega^4 \sin^2 \vartheta}{r^2}. \quad (3)$$

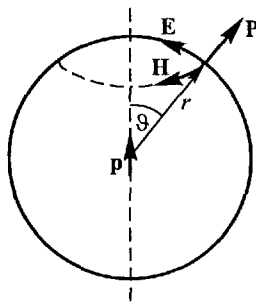


Рис. 447. Электромагнитное поле в шаровой волне, излучаемой диполем

Интенсивность излучения пропорциональна четвертой степени частоты колебаний  $\omega^4$ . Она зависит также от направления излучения (пропорциональна  $\sin^2 \vartheta$ ).

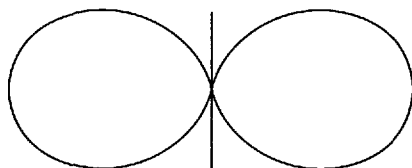


Рис. 448. Диаграмма направленности излучения элементарного диполя

Зависимость интенсивности излучения диполя от направления изображена на рис. 448 (диаграмма направленности излучения). Таким образом, в направлении своей оси диполь ничего не излучает. Напротив, в направлениях, перпендикулярных к оси диполя, интенсивность излучения наибольшая.

Вычислим, наконец, полную энергию  $w$ , излучаемую диполем по всем направлениям в единицу времени. Так как  $\bar{P}$  есть энергия, проходящая через единицу поверхности в 1 секунду, то

$$w = \int_S \bar{P}_n dS,$$

где интегрирование нужно производить по произвольной поверхности  $S$ , охватывающей диполь. Выбирая в качестве таковой сферу с радиусом  $r$  с центром в точке нахождения диполя и пользуясь сферическими координатами  $r$  и  $\vartheta$  (рис. 447), имеем

$$dS = 2\pi r^2 \sin \vartheta d\vartheta, \quad \bar{P}_n dS = \frac{p_0^2 \omega^4}{16\pi \epsilon_0 c^3} \sin^3 \vartheta d\vartheta.$$

Интегрируя это выражение по  $\vartheta$  в пределах от 0 до  $\pi$ , находим

$$w = \frac{1}{12\pi} \frac{p_0^2 \omega^4}{\epsilon_0 c^3}. \quad (4)$$

Написанное выражение можно представить в другом виде. Для этого выразим амплитуду колебаний момента  $p_0$  через амплитуду тока  $i_0$  в диполе, согласно (243.2). Тогда

$$w = \frac{1}{12\pi} \frac{l^2 \omega^2}{\epsilon_0 c^3} i_0^2, \quad (5)$$

где  $l$  — длина диполя. Это выражение подобно выражению для мощности, выделяемой переменным током в контуре с сопротивлением  $r$ :

$$w = r i_0^2 / 2.$$

Поэтому величину

$$r_{\text{изл}} = \frac{1}{6\pi} \frac{l^2 \omega^2}{\epsilon_0 c^3} \quad (6)$$

называют *сопротивлением излучения* диполя. Это понятие часто применяют в радиотехнике к излучающим антеннам передающих радиостанций.

## 12. Давление электромагнитных волн (к § 244)

Давление электромагнитной волны для простейшего случая нормального падения можно вычислить из уравнений Максвелла следующим образом.



Если  $j$  есть плотность тока, вызываемого в теле электрическим полем волны  $E$  (см. рис. 426), а  $H$  — магнитное поле волны, то сила  $f$ , действующая на единицу объема тела, есть

$$f = jB = \mu\mu_0 jH.$$

Поэтому давление волны равно

$$p = \int_0^{\infty} \bar{f} dx.$$

Здесь  $\bar{f}$  обозначает среднее по времени от силы  $f$ .

Обратимся теперь к уравнениям Максвелла, которые для плоской волны имеют вид

$$\frac{\partial D}{\partial t} + j = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\partial E}{\partial x}.$$

Умножая первое из уравнений на  $\mu\mu_0 H$ , а второе — на  $\epsilon\epsilon_0 E$  и складывая их, имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} (DB) + f = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} \right),$$

где выражение в круглых скобках в правой части есть объемная плотность энергии  $u$  электромагнитной волны в рассматриваемой точке.

Усредним теперь полученное соотношение по времени. Так как  $D$  и  $B$  суть периодические функции времени, то  $\partial(DB)/\partial t$  есть знакопеременная функция времени. Так, например, для синусоидальных волн  $D$  и  $B$  изменяются как  $\sin(\omega t - kx)$ . Следовательно,  $DB \sim \sin^2(\omega t - kx)$ , а  $\partial(DB)/\partial t \sim \sim \sin(\omega t - kx) \cos(\omega t - kx)$  и четыре раза за период колебания изменяет знак. Поэтому  $\partial(DB)/\partial t = 0$ , а значит,

$$\bar{f} = -\frac{d}{dx} \bar{u}.$$

Подставляя это выражение в формулу для давления волны  $p$ , имеем

$$p = -\int_0^{\infty} \frac{d\bar{u}}{dx} dx = \bar{u}(0) - \bar{u}(\infty).$$

В этом выражении  $\bar{u}(0)$  есть полная объемная плотность энергии суммарного электромагнитного поля у поверхности тела, а  $\bar{u}(\infty) = 0$ . Если коэффициент отражения тела равен нулю, то у поверхности будет только падающая волна и  $\bar{u}(0)$  равно объемной плотности энергии  $\bar{u}$  в падающей волне (формула (244.1)). Если коэффициент отражения равен единице (абсолютное зеркало), то перед зеркалом будут присутствовать и падающая, и отраженная волны, и  $\bar{u}(0)$  равно  $2\bar{u}$ . В промежуточном случае мы получим формулу (244.2).

Если волна падает на тело наклонно, то появляется нормальная к поверхности составляющая электрического поля волны  $E_n$ . Это значит, что на поверхности возникают электрические заряды с поверхностной плотностью  $\sigma = \epsilon_0 E_n$  и появляется еще электрическая сила, равная  $\sigma E_n$  на каждую единицу поверхности тела. Ее направление противоположно направлению магнитной силы, найденной выше, и поэтому она уменьшает давление волны. Расчет показывает, что разность обеих этих сил, магнитной и электрической, выражается формулой (244.4).

### 13. Система единиц Гаусса

Мы видели, что для электрических и магнитных величин можно построить две различные системы единиц СГС: абсолютную электростатическую систему СГСЭ (§ 3) и абсолютную электромагнитную систему СГСМ (§ 77). Принципиально вполне возможно пользоваться только одной из этих систем, безразлично какой, так как все магнитные величины можно выразить в электростатических единицах, а все электрические величины — в электромагнитных единицах.

Рассмотрим сначала, как будет выглядеть основной закон электростатики — закон Кулона в системе СГСМ. Представим себе, что в среде, диэлектрическая проницаемость которой в системе СГСЭ есть  $\epsilon$ , имеется точечный заряд  $q_{1э}$  (измеренный в единицах системы СГСЭ), действующий на второй точечный заряд  $q_{2э}$ , помещенный в узкой полости, параллельной линиям поля. Тогда сила взаимодействия в системе СГСЭ (нерационализованной) равна

$$F = \frac{q_{1э}q_{2э}}{\epsilon r^2},$$

где  $F$  выражено в динах, а  $r$  — в сантиметрах. При этом  $\epsilon$  есть безразмерная величина, а ее значение для вакуума равно единице. Если измерять заряды в единицах системы СГСМ, то  $q_{1э} = cq_{1м}$ ,  $q_{2э} = cq_{2м}$ , и та же сила будет выражаться формулой

$$F = \frac{c^2}{\epsilon} \frac{q_{1м}q_{2м}}{r^2},$$

где  $F$  и  $r$  по-прежнему измеряются в динах и сантиметрах. Отсюда видно, что диэлектрическая проницаемость в системе единиц СГСМ есть  $\epsilon_m = \epsilon/c^2$ . Она оказывается теперь уже не безразмерной, а имеет размерность, обратную размерности квадрата скорости.

Посмотрим теперь, какой вид будет иметь закон магнитного взаимодействия токов в системе единиц СГСЭ. Для этого рассмотрим пример взаимодействия двух бесконечно длинных параллельных токов. Сила, действующая на отрезок длины  $l$  каждого из проводов в вакууме, в системе единиц СГСМ выражается формулой (83.2). В среде с магнитной проницаемостью  $\mu$  она равна

$$F = \mu \frac{2i_{1м}i_{2м}}{R} l.$$

Здесь  $\mu$  есть безразмерная величина, а ее значение для вакуума равно единице. Если  $i_{1э}$  и  $i_{2э}$  — силы тех же токов, измеренные в единицах системы СГСЭ, то  $i_{1м} = i_{1э}/c$ ,  $i_{2м} = i_{2э}/c$ , и поэтому предыдущая формула в системе единиц СГСЭ принимает вид

$$F = \frac{\mu}{c^2} \frac{2i_{1э}i_{2э}}{R} l.$$

Таким образом, в системе единиц СГСЭ магнитная проницаемость есть размерная постоянная:  $\mu_э = \mu/c^2$ .

Резюмируя сказанное, мы видим, что в каждой из двух абсолютных систем (СГСЭ и СГСМ) диэлектрическая и магнитная проницаемости  $\epsilon$  и  $\mu$  играют неравноправные роли. Если  $\epsilon$  имеет нулевую размерность (система единиц СГСЭ), то  $\mu$  оказывается размерной постоянной и, наоборот, если  $\mu$  безразмерна (система единиц СГСМ), то  $\epsilon$  имеет размерность. При этом

оказываются различными и их значения  $\epsilon_0$  и  $\mu_0$  для вакуума:

$$\text{система единиц СГСЭ: } \epsilon_0 = 1, \quad \mu_0 = \frac{1}{9 \cdot 10^{20}} \text{ c}^2/\text{см}^2,$$

$$\text{система единиц СГСМ: } \epsilon_0 = \frac{1}{9 \cdot 10^{20}} \text{ c}^2/\text{см}^2, \quad \mu_0 = 1.$$

Чтобы обойти это неудобство и сделать обе характеристики вещества  $\epsilon$  и  $\mu$  равноправными величинами нулевой размерности, была разработана так называемая *абсолютная симметричная система электрических и магнитных единиц*, которая является сочетанием систем СГСЭ и СГСМ. Принцип ее построения был указан в работах Гаусса и Вебера, а сама система получила название *системы единиц Гаусса*. В этой системе единицы всех электрических величин (заряда, напряженности электрического поля, разности потенциалов, электрического смещения, емкости, силы тока, сопротивления, проводимости и ЭДС) совпадают с единицами системы СГСЭ; диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  есть безразмерная величина, равная для вакуума единице. Единицы же всех магнитных величин (напряженности магнитного поля, магнитной индукции, магнитного потока, индуктивности, магнитного напряжения и «магнитных зарядов») совпадают с единицами системы СГСМ. Магнитная проницаемость  $\mu$  считается безразмерной величиной, равной для вакуума единице.

Однако в § 77 мы видели, что для обращения в единицу коэффициента пропорциональности в законах магнитного взаимодействия токов силу тока нужно измерять в единицах системы СГСМ. Поэтому при переходе к системе единиц Гаусса во всех законах магнитного поля появится размерная постоянная, а именно электродинамическая постоянная  $c$ .

Система единиц Гаусса употребляется в нерационализованной форме, т.е. в нее не вводят множитель  $1/4\pi$  в законы электрического и магнитного взаимодействий.

Из сказанного следует, что основной закон электростатики — закон Кулона в системе единиц Гаусса — имеет тот же вид, что и в системе единиц СГСЭ:

$$\mathbf{F} = \frac{q_1 q_2}{\epsilon r^3} \mathbf{r}. \quad (1)$$

Основные же законы магнитного взаимодействия токов в система единиц СГСМ принимают иной вид. Сила, действующая на элемент тока в магнитном поле, теперь выражается формулой

$$d\mathbf{F} = \frac{i}{c} [d\mathbf{l} \mathbf{B}]. \quad (2)$$

Индукция  $d\mathbf{B}$ , создаваемая каким-либо элементом тока в точке  $\mathbf{r}$ , равна

$$d\mathbf{B} = \mu d\mathbf{H} = \mu \frac{i}{c} \frac{[d\mathbf{l} \mathbf{r}]}{r^3}. \quad (3)$$

Закон электромагнитной индукции имеет вид

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}, \quad (4)$$

где ЭДС  $\mathcal{E}$  измеряется в единицах системы СГСЭ, а магнитный поток  $\Phi$  — в единицах системы СГСМ.

Исходя из этих основных законов, легко найти и все другие формулы электромагнетизма в системе единиц Гаусса (см. табл. 20).

Законы постоянных и квазистационарных токов (гл. VI, VII, XX, XXI) не зависят явно от формы записи основных законов электрического и магнитного взаимодействий и поэтому выражаются одинаково в системах единиц СИ и Гаусса.

Таблица 20

Некоторые формулы в системе единиц Гаусса<sup>1)</sup>

Напряженность поля точечного заряда (§ 9)	$E = \frac{q}{\epsilon r^3} \mathbf{r}$
Электрическое смещение точечного заряда (§ 13)	$D = \frac{q}{r^3} \mathbf{r}$
Напряженность поля внутри плоского конденсатора (§ 13)	$E = 4\pi\sigma/\epsilon$
Уравнение Пуассона (§ 14)	$\operatorname{div} D = 4\pi\rho$
Потенциал в поле точечного заряда (§ 24)	$U = q/\epsilon r$
Электрическое поле элементарного диполя (§ 25)	$E_r = \frac{2p \cos \alpha}{r^3},$ $E_\alpha = \frac{p \sin \alpha}{r^3}$
Емкость плоского конденсатора (§ 32)	$C = \frac{\epsilon S}{4\pi d}$
Емкость шарового конденсатора (§ 32)	$C = \frac{\epsilon}{1/a - 1/b}$
Емкость цилиндрического конденсатора на единицу длины (§ 32)	$C_1 = \frac{\epsilon}{2 \ln(b/a)}$
Объемная плотность энергии электрического поля (§ 37)	$u = \frac{\epsilon E^2}{8\pi}$
Поляризованность диэлектрика (§ 39)	$P = \sum_i \mathbf{p}_i/\tau$
Электрическое смещение (§ 41)	$D = E + 4\pi P$
Диэлектрическая восприимчивость (§ 42)	$P = \alpha E$
D и E в изотропных диэлектриках (§ 42)	$D = \epsilon E,$ $\epsilon = 1 + 4\pi\alpha$
Теорема Остроградского–Гаусса (§ 44)	$\oint_S D_n dS = 4\pi q$
Поле, действующее на молекулу внутри диэлектрика (внутреннее поле) (§ 47)	$E' = E + \frac{4\pi}{3} P$

<sup>1)</sup> Здесь помещены только формулы, написание которых в системах единиц СИ и Гаусса различны. (Примеч. ред.)

Продолжение таблицы 20

Формулу Клаузиуса–Моссоти (§ 47)	$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4\pi}{3} n\beta$
Диэлектрическая проницаемость полярных диэлектриков (§ 48)	$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4\pi}{9} \frac{p_0^2 n}{kT}$
Максвелловское время релаксации (§ 73)	$\tau_M = \frac{\varepsilon}{4\pi\lambda}$
Сила, действующая на элемент тока в магнитном поле (§ 76)	$d\mathbf{F} = \frac{t}{c} [d\mathbf{I}\mathbf{B}]$
Напряженность магнитного поля, создаваемая элементом тока (§ 79)	$d\mathbf{H} = \frac{i}{c} \frac{[d\mathbf{r}]}{r^3}$
Циркуляция напряженности магнитного поля (§ 81)	$\oint H_s ds = \frac{4\pi i}{c}$
Напряженность магнитного поля внутри соленоида (§ 81)	$H = \frac{4\pi ni}{c}$
Магнитный момент контура с током (§ 82)	$p_m = \frac{1}{c} iS\mathbf{n}$
Напряженность магнитного поля элементарного тока в произвольной точке (§ 82)	$H_r = \frac{2p_m \cos \alpha}{r^3},$ $H_\alpha = \frac{p_m \sin \alpha}{r^3}$
Взаимодействие двух параллельных проводников с током в вакууме (§ 83)	$F = \frac{1}{c^2} \frac{2i_1 i_2 l}{R}$
Напряженность магнитного поля движущегося заряда (§ 86)	$\mathbf{H} = \frac{q[\mathbf{v}\mathbf{r}]}{cr^3}$
Сила Лоренца (§ 88)	$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}]$
ЭДС электромагнитной индукции (§ 91)	$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}$
Магнитный поток, пронизывающий катушку индуктивности $L$ (§ 93)	$\Phi = \frac{1}{c} Li$
Индуктивность соленоида (§ 93)	$L = 4\pi\mu \frac{N^2 S}{l}$
Энергия магнитного поля контура с током (§ 96)	$W = \frac{1}{2c^2} Li^2$
Объемная плотность энергии магнитного поля (§ 97)	$u = \frac{\mu H^2}{8\pi}$

Продолжение таблицы 20

Магнитная индукция (§ 105)	$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{I}$
$\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ в изотропных магнетиках (§ 105)	$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \quad \mu = 1 + 4\pi\kappa$
Работа при намагничивании единицы объема магнетика (§ 111)	$dw = \frac{1}{4\pi} H dB$
Частота ларморовой прецессии (§ 115)	$\Omega = \frac{eB}{2mc}$
Магнитная восприимчивость парамагнетика (§ 118)	$\kappa = \frac{np_m^2}{3kT}$
Магнитодвижущая сила (§ 120)	$\mathcal{E}_m = \frac{4\pi}{c} Ni$
Подъемная сила электромагнита (§ 121)	$F = \frac{B^2}{8\pi} S$
Плотность тока смещения (§ 136)	$\mathbf{j}_c = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$
Уравнения Максвелла (§ 138)	$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + 4\pi\mathbf{j} = \text{rot} \mathbf{H}$ $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\text{rot} \mathbf{E}$
Преобразования Лоренца (§ 143)	$E_x = E_{1x},$ $H_x = H_{1x},$ $\sqrt{1 - \beta^2} E_y = E_{1y} - \beta H_{1z},$ $\sqrt{1 - \beta^2} H_y = H_{1y} + \beta E_{1z},$ $\sqrt{1 - \beta^2} E_z = E_{1z} + \beta H_{1y},$ $\sqrt{1 - \beta^2} H_z = H_{1z} - \beta E_{1y}.$
Постоянная Холла (§ 150)	$R = 1/cne$
Циклотронная частота (§ 180)	$\omega_c = eB/mc$
Фазовая скорость электромагнитных волн (§ 240)	$v = c/\sqrt{\epsilon\mu}$
Соотношение $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в распространяющейся электромагнитной волне (§ 240)	$\sqrt{\epsilon} \mathbf{E} = \sqrt{\mu} \mathbf{H}$
Поток энергии электромагнитного поля (§ 242)	$\mathbf{P} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}]$
Энергия излучения диполя в единицу времени (Добавление 11)	$w = \frac{1}{3c^3} p_0^2 \omega^4 = \frac{1}{3c^2} l^2 \omega^2 i_0^2$

Таблица 21

## Электрические и магнитные единицы

В таблице приведены наиболее важные электрические и магнитные единицы в системах СИ и Гаусса. Размерности производных единиц выражены через основные единицы длины ( $L$ ), массы ( $M$ ), времени ( $T$ ) и силы тока ( $I$ ) в системе СИ и  $L$ ,  $M$  и  $T$  — в системе Гаусса.

В последнем столбце таблицы приведены также переводные множители для пересчета значений электрических и магнитных величин при переходе от системы Гаусса к системе СИ.

Величина	Обозначения	Система единиц СИ			Система единиц Гаусса		
		Наименование	Размерность	Наименование	Размерность	Соотношение с единицей СИ	
Электрический заряд	$q$	кулон (Кл)	ТИ	СГСЭ $_q$	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}$	$\frac{1}{3 \cdot 10^9}$ Кл	
Напряженность электрического поля	$E$	вольт на метр (В/м)	$LMT^{-3}I^{-1}$	СГСЭ $_E$	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$3 \cdot 10^4$ В/м	
Электрическая постоянная	$\epsilon_0$	фарад на метр (Ф/м)	$L^{-3}M^{-1}T^4I^2$	СГСЭ $_{\epsilon_0}$	равна 1 (безразмерна)	$8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м	
Поток электрического смещения	$N$	кулон (Кл)	ТИ	СГСЭ $_N$	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}$	$\frac{1}{4\pi \cdot 3 \cdot 10^9}$ Кл	
Электрическое смещение	$D$	кулон на квадратный метр (Кл/м <sup>2</sup> )	$L^{-2}ТИ$	СГСЭ $_D$	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$\frac{1}{4\pi \cdot 3 \cdot 10^5}$ Кл/м <sup>2</sup>	
Разность потенциалов, напряжение, ЭДС	$U, \mathcal{E}$	вольт (В)	$L^2MT^{-3}I^{-1}$	СГСЭ $_{U, \mathcal{E}}$	$L^{1/2}M^{1/2}T^{-1}$	300 В	

Величина	Обозначения	Система единиц СИ		Система единиц Гаусса		
		Наименование	Размерность	Наименование	Размерность	Соотношение с единицей СИ
Емкость	$C$	фарад (Ф)	$L^{-2}M^{-1}T^4I^2$	сантиметр (см)	L	$\frac{1}{9 \cdot 10^{11}} \Phi$
Сила тока	$i$	ампер (А)	I	СГСЭ <sub>1</sub>	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}$	$\frac{1}{3 \cdot 10^9} A$
Электрическое сопротивление	$R, r$	ом (Ом)	$L^2MT^{-3}I^{-2}$	СГСЭ <sub>R</sub>	$L^{-1}T$	$9 \cdot 10^{11} \text{ Ом}$
Напряженность магнитного поля	$H$	ампер на метр (А/м)	$L^{-1}I$	эрстед (Э)	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$\frac{10^3}{4\pi} \text{ А/м}$
Магнитная постоянная	$\mu_0$	генри на метр (Г/м)	$LMT^{-2}I^{-2}$	СГСМ <sub><math>\mu_0</math></sub>	безразмерна, равна 1	$4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$
Поток магнитной индукции	$\Phi$	вебер (Вб)	$L^2MT^{-2}I^{-1}$	максвелл (Мкс)	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}$	$10^{-8} \text{ Вб}$
Магнитная индукция	$B$	тесла (Тл)	$MT^{-2}I^{-1}$	гаусс (Гс)	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$10^{-4} \text{ Тл}$
Индуктивность	$L$	генри (Гн)	$L^2MT^{-2}I^{-2}$	сантиметр (см)	L	$10^{-9} \text{ Гн}$
Магнитодвижущая сила (магнитное напряжение по замкнутому контуру)	$\mathcal{E}_m$	ампер (А)	I	гильберт (Гб)	$L^{1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$\frac{10}{4\pi} A$



## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Автоколебания 497  
—, условия самовозбуждения 503  
Анионы 436  
Анод 19, 120, 364  
Антиферромагнетики 269
- Вектор** Пойнтинга 568  
**Взаимодействие** магнитное 164  
— электрическое 13  
**Волна** электромагнитная 545  
— —, длина 546  
— —, свободная 557, 560  
— —, скорость распространения 554  
— —, стоячая 547–557  
**Восприимчивость** диэлектрическая 88  
— магнитная 227  
**Время жизни** неравновесных носителей заряда 481  
— релаксации максвелловское 158, 506, 602
- Гальванометр** баллистический 122  
**Генератор** ламповый 500  
— переменного тока 278  
— постоянного тока 280  
— электростатический 61  
**Гиромагнитное отношение** 256, 260  
**Гистерезис** диэлектрический 101  
— магнитный 240, 241, 271  
—, петля 241  
— разряда 408
- Давление** Фарадея–Максвелла 221  
**Диаграммы** векторные 290–293, 508, 510, 513, 514, 519, 526, 527, 533  
**Диамagnetизм** 236  
**Диамagnetикн** 236  
**Диод** вакуумный 364  
— вентильное действие 369  
— вольт-амперная характеристика 365
- Диполь** 38  
—, момент 38  
— элементарный 55, 180, 571  
**Диэлектрик** 11, 77  
**Диэлектрик** анизотропный 88  
— изотропный 88  
**Добротность** 494
- Единица** емкости 63  
— заряда 15, 17  
— индуктивности 202  
— индукции магнитной 198  
— напряжения 137  
— напряженности магнитного поля 172–173  
— — электрического поля 45  
— потока магнитного 184  
— смещения 31  
— силы тока 116, 182  
— — — электромагнитная абсолютная 168  
— сопротивления 124  
**Емкость** 63–66
- Закон** Био–Савара–Лапласа 167  
— Богуславского–Лэнгмюра 367, 604  
— Видемана–Франца 339  
— Джоуля–Ленца 137, 338  
— Дюлонга и Пти 345  
— Кулона 12–15  
— — в диэлектриках 91  
— — для магнитных зарядов 248  
— Кюри 241, 263  
— Кюри–Вейсса 242  
— Ленца 194, 197  
— Ома 123, 337  
— — в дифференциальной форме 129  
— — для замкнутой цепи 140  
— — — участка с ЭДС 143  
— — — электролитов 444  
— распределения скоростей Максвелла 359
- Законы** электролиза Фарадея 435, 436  
**Заряд** индуцированный 20  
—, плотность 24, 25  
— поляризационный 79  
— —, плотность 81  
— пробный 22  
— пространственный 366  
—, распределение на проводнике 60  
— свободный 84  
— точечный 12  
**Зоны** 354

- Импеданс 537  
 Индуктивность 202  
 Индукция взаимная 213  
   — магнитная 165  
   — электрическая — см. смещение электрическое  
   — электромагнитная 192  
   — — в движущихся проводниках  
   — —, основной закон 196
- Катионы 437  
 Катод 19, 120, 364  
 Катодное падение потенциала 395  
   — пространство темное 394  
   — — — второе 394  
   — свечение 394  
 Колебания 445  
   —, амплитуда комплексная 533  
   — вынужденные 506, 507, 520  
   —, затухание 489  
   —, —, коэффициент 493  
   —, —, логарифмический декремент 490, 494  
   — затухающие 493  
   — линейные 491  
   — незатухающие 497  
   — релаксационные 506  
   — собственные 487  
   — — линии 553  
   — —, уравнение 491  
   —, установление 520  
 Конденсатор 63  
   —, емкость 63, 64  
   — плоский 28, 52, 65  
   — сложный 72–74  
   — цилиндрический 35, 53, 66  
   — шаровой 34, 52, 65  
 Контур электрический 486  
   — —, добротность 494  
   — — искровой 496  
 Коэффициент пьезоэлектрический 107, 108  
 Кристаллы, ось оптическая 105  
   —, — пьезоэлектрическая 105
- Линии индукции магнитного поля 173, 194  
   — — — —, преломление 232  
   — — напряженности электрического поля 26  
   — — — —, преломление 89, 90  
   — тока 115  
   — эквипотенциальные 46, 47  
   — электрического смещения 29–31
- Магнетики 222  
   — анизотропные 227  
   — изотропные 227  
 Магнетон 261  
 Магнетрон 419  
 Магнитострикция 268  
 Метод зеркальных изображений 68  
   — электролитической ванны 132  
 Момент тока магнитный 179–181, 223
- Намагниченность 223  
 Намагничивание 222–224  
 Напряжение линейное 286  
   — магнитное 175  
   — —, измерение 200  
   — электрическое 41  
   — —, составляющая активная 515  
   — —, реактивная 515  
   — фазное 285  
 Напряженность поля магнитного 171  
   — — — внутри магнетика 224  
   — — — электрического 22, 23  
   — — — внутри диэлектрика 83  
 Натяжение Фарадея–Максвелла 221  
 Носители заряда 353
- Обратная связь 502  
 Оптика ионная 431–432  
   — электронная 431–432
- Парамагнетизм 236, 261–265  
 Парамагнетики 236, 264  
 Переходы электронно-дырочные 474  
 Плазма 410–411  
 Поверхности эквипотенциальные 46  
 Подвижности ионов 387, 442  
   — электронов 337  
 Поле вихревое 298  
   — магнитное 164  
   — —, напряженность 171  
   — — размагничивающее 230  
   — — —, энергия 210  
   — электрическое 21  
   — — микроскопическое 83  
   — —, напряженность 22  
   — —, принцип суперпозиции 24  
   — —, энергия 74–77  
   — электромагнитное 297  
   — —, импульс 575  
   — —, масса 577  
 Полупроводники дырочные 353, 474  
   — магнитные 247  
   — электронные 349, 474

- Поляризация 77  
 —, вектор — см. поляризованность  
 — дипольная 95  
 — диэлектриков 79  
 — ионная 96  
 — однородная 81  
 — смещения электронная 95  
 — электродов 453  
 Поляризованность 80  
 Поляризуемость 95  
 Постоянная баллистическая 122  
 — времени 161, 207  
 — магнитная 170, 204  
 — Планка 360  
 — Фарадея 436  
 — Холла 346  
 — электрическая 18, 67  
 — электродинамическая 169  
 Потенциал химический 462  
 — электродный 447  
 — — нормальный 450  
 — — — абсолютный 449  
 — — стандартный 451  
 Поток магнитный 183  
 Правило Кирхгофа второе 147, 536, 601  
 — — первое 146, 536, 601  
 — правого буравчика 167  
 Преобразование Лоренца 326  
 Прецессия вынужденная 258  
 — ларморова 257, 264  
 Принцип относительности 325  
 — Паули 357  
 Проводимость 124  
 — дырочная 351, 353  
 — примесная 353  
 — смешанная 353  
 — собственная 352  
 — электронная 336, 353  
 Проницаемость диэлектрика неполярного 96  
 — — полярного 98  
 — диэлектрическая 64, 89  
 — магнитная 205, 227  
  
 Работа выхода 364, 367, 461  
 Разность потенциалов — см. напряжение электрическое  
 — — контактная 459–462  
 Разряд 384  
 — дуговой 403  
 — искровой 397  
 — коронный 400  
 — несамостоятельный 389  
 — самостоятельный 390  
  
 Разряд самостоятельный, напряжение пробоя 390  
 — тлеющий 394  
 —, устойчивость 406  
 Резонанс напряжений 518  
 — параметрический 530  
 — токов 527  
 — циклотронный 425–427  
  
 Самоиндукция 201  
 —, экстратоки 201, 210  
 Сверхпроводимость 128, 340–344  
 Сегнетоэлектрики 101–104  
 Сила Лоренца 191  
 — магнитодвижущая 273  
 — пондеромоторная 154, 218  
 Сила сторонняя 136, 298  
 — термоэлектродвижущая (термо-ЭДС) 464  
 — — дифференциальная 465  
 — электродвижущая (ЭДС) 140  
 — — индукции 195, 297, 323  
 — — самоиндукции 201  
 Системы единиц 15, 16, 168, 169  
 Скачок потенциала контактный 460  
 Скин-эффект 304–306  
 Смещение электрическое 29, 31, 227  
 — — в вакууме 29  
 — — в диэлектриках 85–88  
 — —, вектор 29  
 — —, —, поток 29  
 Сопротивление 124  
 — активное 515  
 — дифференциальное 373, 407  
 — — отрицательное 407, 498  
 — комплексное 536  
 — магнитное 273  
 — реактивное 515  
 —, температурный коэффициент 127  
 — удельное 126  
 Сродство электронное 363, 462  
 Стримеры 399  
  
 Температура Кюри 102, 242, 269  
 — Нееля 269  
 Теорема Лармора 257  
 — Остроградского–Гаусса 31, 92, 312  
 — — — для магнитного поля 229, 312  
 — Пойнтинга 569  
 Теория Максвелла 297  
 Тепло Джоуля–Ленца 139, 155, 209, 468  
 — Пельтье 467  
 — Томсона 471  
 Термопара 472

- Ток вихревой 293, 299–301  
 — двухфазный 285  
 —, действие магнитное 118  
 —, — тепловое 120  
 —, — химическое 119  
 — индукционный 193  
 —, источники 136  
 — квазистационарный 157  
 — контурный 600  
 — линейный 286  
 — молекулярный 222, 247, 255  
 — насыщения 365  
 —, плотность 115  
 —, полный 310  
 — проводимости 310  
 —, сила 115  
 — смещения 308, 309  
 — трехфазный 287  
 — фазный 285  
 Триод 371  
 — диффузионный 482  
 — —, база 483  
 — —, коллектор 483  
 — —, эмиттер 483  
 — коэффициент усиления 372  
 — сетка 371  
 —, проницаемость 372  
 —, характеристика анодная 373  
 —, сеточная 372
- Уравнение волновое 560  
 — Лапласа 56  
 — Максвелла 312, 562  
 — — в дифференциальной форме 313–316  
 — непрерывности 117  
 — Пуассона 37  
 Уровень Ферми 360, 367  
 Усилитель ламповый 377  
 — полупроводниковый 482  
 Ускоритель заряженных частиц 416  
 — индукционный 306
- Фактор размагничивающий 230  
 Ферриты 246  
 Ферромагнетизм 238, 265  
 Ферромагнетики 238, 265  
 —, домены 266–271  
 —, коэрцитивная сила 241  
 —, намагничивание 238  
 — —, анизотропия 239  
 — —, кривая 238, 270  
 — — спонтанное 266  
 —, температура Кюри 241, 266  
 Флуктуации электрические 377
- Формула Клаузиуса–Моссоти 97  
 — Ричардсона–Дэшмана 367  
 Фотопроводимость 480  
 Фотозмиссия 364  
 Фотозффект 393  
 Функция Ферми–Дирака 360
- Цепи магнитные 271  
 Циклотрон 416
- Частота циклотронная 415, 416, 426  
 Числа переноса 444  
 Число волиное 546
- Шумы 378
- Электролиты 120  
 —, диссоциация 438  
 —, —, коэффициент 439, 443  
 —, напряжение разложения 457  
 —, проводимость 443  
 Электрометр 47  
 Электрон 20  
 —, заряд удельный 256  
 —, — —, измерение 329, 418, 424  
 —, масса эффективная 357, 427  
 —, момент магнитный 259  
 —, — механический 259  
 —, подвижность 337, 346  
 — проводимости 334  
 — связи 351  
 Электропроводность — см. проводимость  
 Электрострукция 84, 94  
 Электрохимический эквивалент 436  
 Элемент Вольты 19, 138,  
 — гальванический 18, 138,  
 — —, ЭДС 138–141  
 — нормальный 49  
 — топливный 455  
 Эмиссия автоэлектронная 383  
 — электронная 363–364  
 — — вторичная 364, 379–381, 392  
 — — —, коэффициент 379, 391  
 — термоэлектронная 364  
 Эффект дробовой 378  
 — Пельтье 467  
 — пьезоэлектрический 104–110  
 — — обратный 110–114  
 — — поперечный 106  
 — — продольный 105  
 — Томсона 470  
 — Холла 346–348
- Явление магнитомеханическое 258  
 — механомагнитное 259