
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физический факультет
Кафедра общей физики

Шатилов Данил Андреевич

КУРСОВАЯ РАБОТА

**Экспериментальное исследование решений уравнений
Максвелла
в виде узлов электромагнитного поля.**

Практикум электричества и магнетизма, 2 курс, группа 18306

Научные руководители:

_____ к.ф.-м.н., А. Г. Харламов

_____ В. Н. Жабин

«___» _____ 2019 г.

Оценка научного руководителя:

Преподаватель практикума

«Электричество и магнетизм»

_____ к.ф.-м.н., О. Е. Терещенко

Оценка преподавателя практикума:

«___» _____ 2019 г.

Куратор практикума

_____ к.т.н., В. Т. Астрелин

Итоговая оценка:

«___» _____ 2019 г.

Новосибирск, 2019 г.

Содержание

1. Введение	4
2. Теория	4
2.1. Радиационные поля	4
2.2. Топологическая структура	4
2.3. Рассматриваемые поля	6
2.4. Дисперсия волн	8
3. Описание установки	9
4. Проведение эксперимента	11
5. Заключение	17

Физический факультет
Кафедра общей физики

Шатилов Данил Андреевич

Экспериментальное исследование решений уравнений Максвелла

в виде узлов электромагнитного поля

Электромагнитный практикум, 2 курс, группа 18306

Аннотация

Уравнения Максвелла без источника допускают четырехмерные решения со сложной узловой структурой. В данной работе впервые было синтезировано поле, соответствующее узловому решению уравнений Максвелла в области средних радиочастот, высоких частот и очень высоких частот. Ранее такие решения уравнений Максвелла исследовались в оптическом излучении [1]. Используя результаты работы [2], была найдена необходимая зависимость сигнала от времени для подачи этого сигнала с генератора на экспериментальное оборудование и непосредственного получения узелкового поля. Наблюдались униполярные сигналы, форма которых не зависит от расстояния между катушками, что соответствует бездисперсионному волновому пакету.

[1] Hridesh Kedia, Iwo Bialynicki-Birula, Daniel Peralta-Salas, and William T. M. Irvine, Tying Knots in Light Fields, Phys. Rev. Lett. 111.150404 (2013). doi:10.1103/PhysRevLett.111.150404

[2] Andreani Petrou, Singular light knots, B. thesis in Leiden University (2017). leidenuniv:1887/50826

1. Введение

Впервые топологические идеи в физике использовал лорд Кельвин [1], предположив, что атомы являются узлами некоторого эфирного поля; с тех пор свое применение в физике топология находит все чаще: за счет стабильности узлов при действии отображений, которая связывается с постоянностью во времени каких-либо физических структур. Особенности такого рода полей [2] являются объектами теоретических исследований на данный момент [3]. Решения уравнений Максвелла в виде узлов строятся с помощью применения топологических методов, полученные решения по сути являются собственными для уравнений Максвелла [4]; по ним можно разложить любое другое решение. В данной работе теоретически рассматриваются свободные от источников и зарядов поля в вакууме, на основе же этого рассмотрения непосредственно создается узелковое поле в радиочастотном спектре.

2. Теория

2.1. Радиационные поля

В некоторых задачах электромагнетизма вводится особый вектор, называемый вектор Римана – Зильберштейна, представляющий собой комплексную сумму электрического и магнитного полей:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\sqrt{8\pi}}(\sqrt{\epsilon}\mathbf{E} + i\sqrt{\mu}c\mathbf{B}), \quad (1)$$

где c - скорость света в вакууме, ϵ и μ есть диэлектрическая и магнитные проницаемости среды, соответственно. Дополнительно, будем рассматривать свободные электрические и магнитные поля в вакууме без зарядов и источников, тогда система уравнений Максвелла в дифференциальной форме для векторного поля представляется в виде двух выражений:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 0, \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{i}{c} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}. \quad (3)$$

Квадрат вектора Римана - Зильберштейна есть сумма двух Лоренц-инвариантов электромагнитного поля:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{F} = (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) + 2i(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}). \quad (4)$$

В работе [2] показано, что поля вида $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$ и $|\mathbf{E}| = |\mathbf{B}|$, называемые радиационными или *null*-полями, образуют устойчивые во времени топологические структуры.

2.2. Топологическая структура

Если рассматривать непрерывные силовые линии электрического радиационного поля¹, удовлетворяющие в заданный момент времени следующему уравнению в

¹рассуждения также справедливы и для магнитного поля

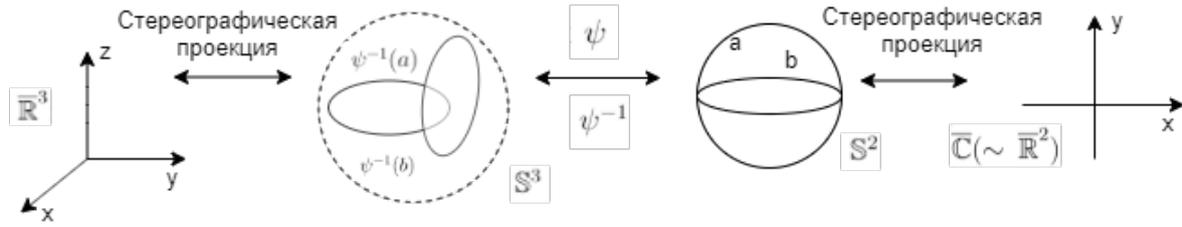


Рис. 1: Схема связи отображений.

сферической системе координат:

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{r d\theta}{E_\theta} = \frac{r \sin \theta d\phi}{E_\phi}, \quad (5)$$

как некоторый четырехмерный (три пространственных компоненты и одна временная) геометрический объект, то их множество можно описать некоторым заданным отображением для последующего деления на классы, отличающихся индексом Хопфа².

В $(n+1)$ -мерном Евклидовом пространстве (изоморфным \mathbb{R}^{n+1}) n -мерной сферой \mathbb{S}^n называется множество $\{\|x\|_2 = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$. Расслоение Хопфа есть отображение $h : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$, определенное следующим образом:

$$h(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2, 2(x_1x_4 + x_2x_3), 2(x_1x_4 - x_2x_3)) = (u_1, u_2, u_3), \quad (6)$$

где $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$ - декартовы координаты обычной сферы. Это отображение также можно описать с помощью комплексной функции:

$$\phi_H = \frac{2(x_1 + ix_2)}{2x_3 + i(\|x\|_2 - 1)}. \quad (7)$$

У каждой точки a , принадлежащей \mathbb{S}^2 , в общем случае, есть ее прообраз в \mathbb{S}^3 - замкнутая кривая $h^{-1}(a)$ [5].

По аналогии с обычной стереографической проекцией $z : \mathbb{S}^2 \rightarrow \bar{\mathbb{C}}(\sim \mathbb{R}^2)$, $z = \frac{x_1}{1-x_3} + i \frac{x_2}{1-x_3}$ вводится проекция $\mathbb{S}^3 \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^3$:

$$(y_1, y_2, y_3) = \left(\frac{x_1}{1-x_4}, \frac{x_2}{1-x_4}, \frac{x_3}{1-x_4} \right), \quad (8)$$

используя ее можно определить $\bar{\mathbb{R}}^3$ и $\bar{\mathbb{C}}$ как преобразования гладких векторных полей (Рис. 1). Поэтому обычно строится целый класс отображений $\psi : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$. Рассмотрим две различные точки a и b 2-сферы: подобно расслоению Хопфа, $\psi^{-1}(a), \psi^{-1}(b)$ преобразуют точки в замкнутые кривые на 3-сфере, которые могут быть связанными или нет. Пусть, $\delta\Sigma_a = \psi^{-1}(a)$ ограничивает ориентированную

²который можно понимать как число зацеплений двух кривых (в данном случае - силовых линий), т.е. число пересечений, необходимых, чтобы рассоединить их.

поверхность Σ_a , которую пересекает k раз образ точки b , тогда введя 2-форму площади:

$$\Phi = \frac{1}{2\pi i} \frac{d\psi^* \wedge d\psi}{(1 + \psi^*\psi)^2}, \quad (9)$$

можно показать [5], опираясь на теорему де Рама и ограниченность Φ на компакте \mathbb{S}^3 , что Хопф-индекс (или инвариант Хопфа)

$$n = \int_{\mathbb{S}^3} A \wedge \Phi, \quad (10)$$

равен n , где $A = d\Phi$ 1-форма Φ . К примеру, для ϕ_H индекс Хопфа равен 1. Из работы [2] следует, что поля вида $\mathbf{A} = -A^i dx_i$ и $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, полученные переходом от дифференциальных форм к векторным полям, удовлетворяют уравнениям Максвелла в форме ур. (2)-(3), при этом интеграл ур. (10) принимает форму:

$$n\gamma = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}, \quad (11)$$

где γ - размерная константа. Энергию же электрического поля в данных терминах можно определить как:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{F}^* \cdot \mathbf{F} d^3r = n\gamma. \quad (12)$$

2.3. Рассматриваемые поля

В данной работе исследовались свободные поля конструкции, предложенной *A. Ranada*:

$$F = \nabla\alpha^p \times \nabla\beta^q, \quad (13)$$

где α, β называются *Bateman*-переменными и выражаются как функции от пространственных и временных координат:

$$\alpha(\mathbf{r}, t) = \frac{r^2 - a^2 - t^2 + 2iaz}{r^2 - (t - ia)^2}; \quad (14)$$

$$\beta(\mathbf{r}, t) = \frac{2a(x - iy)}{r^2 - (t - ia)^2}, \quad (15)$$

при a являющимся вещественным параметром, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Интересно заметить, что $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ и в момент времени $t = 0$ преобразование (α, β) совпадает с обратной стереографической проекцией из 3-х сферы в пространственную часть пространства Минковского.

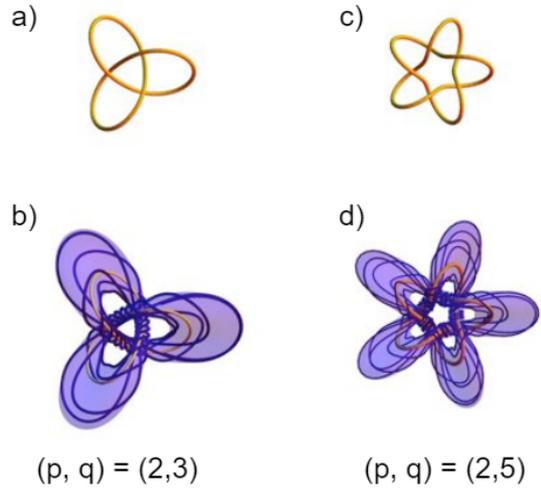


Рис. 2: (a), (c) - линия, формирующая основу узла; (b), (d) - остальные силовые линии, оборачивающие тор. Источник [6]

Взаимно простые числа (p, q) в данном случае будут связаны с количеством обвиваний поверхности тора в двух направлениях одной из силовых линий, представляющую собой ядро такого расслоения (Рис. 2). Иначе говоря, остальные силовые линии поля могут быть получены действием некоторого линейного оператора на рассматриваемой и являются подобными ей³.

Предложенная формула для вектора Римана - Зильберштейна не случайна, она введена для того, чтобы совпадать с оговоренными в предыдущих главах условиями и формировать топологическую структуру электрических и магнитных силовых линий, сгруппированных на поверхностях пересекающихся узловых торов⁴.

Подставляя α, β из ур. (14-15) в выражение, задающее рассматриваемую конструкцию радиационного поля, ур. (13), и производя алгебраические операции:

$$F(\mathbf{r}, t) = pq\alpha^{p-1}\beta^{q-1} \frac{4a^2}{(r^2 - (t - ia)^2)^3} \begin{bmatrix} -(x - iy)^2 + (z - (t - ia))^2 \\ i((x - iy)^2 + (z - (t - ia))^2) \\ 2(x - iy)(z - (t - ia)) \end{bmatrix}. \quad (16)$$

В пространстве Фурье⁵ у вектора Римана-Зельберштейна можно выделить временную и пространственные компоненты (с принятием $c = 1$), он выражается в общем виде:

$$F(\mathbf{k}, t) = \mathbf{e}(\mathbf{k})f_+(\mathbf{k})e^{-i\omega t} + \mathbf{e}(-\mathbf{k})f_-^*(\mathbf{k})e^{i\omega t}, \quad (17),$$

где $f_{\pm}(\mathbf{k})$ есть комплексные амплитуды поля, а $\mathbf{e}(\mathbf{k})$ - комплексный нормированный вектор поляризации, ортогональный волновому вектору \mathbf{k} . Обратное Фурье-преобразование от ур. 17, выглядит так:

$$F(\mathbf{r}, t) = \mathcal{F}_-[F(\mathbf{k}, t)](\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \mathbf{e}(\mathbf{k})(f_+(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} + f_-^*(\mathbf{k})e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}). \quad (18)$$

После длительных преобразований с привлечением теории вычетов автором [3] было получено⁶, что:

$$f_{\pm}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{(1 \pm \text{sgn}(a))}{2} a^2 \sqrt{\pi} (\omega - k_z) e^{-|a|\omega}. \quad (19)$$

Т.е. комплексная амплитуда поля будет зависеть только от времени при постоянной вертикальной компоненте волнового вектора. Стоит отметить, что график модуля $f_{\pm}(\mathbf{k}, \omega)$ от частоты ω имеет весьма характерную форму (Рис. 3) с четко выделенными максимумами⁷. Если теперь перейти из пространство частот в пространство

³математически, такую линию можно назвать ядром Фредгольма или ядром интегрального оператора

⁴здесь имеется ввиду поверхность линии, формирующей узел

⁵преобразование берется только относительно пространственных компонент, так как времени-частотная степень свободы вырождается из условия $\omega = kc$, которое ставит в соответствие частоту ω и амплитуду волнового вектора \mathbf{k}

⁶несмотря на то, что результат найден при допущении $(p, q) = (1, 1)$, в той же работе показана схожесть общего поведения комплексной амплитуды для произвольных переменных

⁷это верно и при произвольных (p, q)

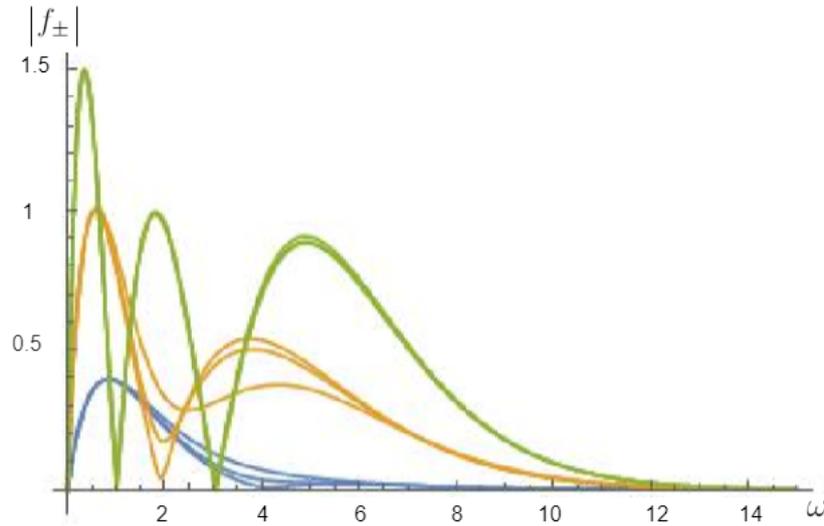


Рис. 3: Абсолютное значение амплитуды Фурье как функция от частоты для $a = 1$, здесь $(p, q) = (2, 3)$. Различные линии соответствуют различным полярным углам (зависимость от него появляется при вычислении комплексной амплитуды в случае $(p, q) \neq (1, 1)$). Источник [3]

времени с помощью синус-преобразования Фурье, что по сути своей эквивалентно получению оригинального сигнала из его спектра, то новая амплитуда поля с точностью до умножения на постоянную будет равна:

$$\tilde{f}(t) = -\frac{t(a(ab - 2) + bt^2)}{(a^2 + t^2)^2}. \quad (20)$$

В выражении введена вещественная ненулевая константа b . Вид данного уравнения наталкивает на мысль о возможном экспериментальном исследовании представленной теории: если смоделировать источник «узловых полей», то проследив за изменением амплитуды поля в зависимости от частоты, можно убедиться в сложной топологической структуре силовых линий электромагнитного поля. В этой работе был выбран способ исследования измерения амплитуды поля при помощи 2 катушек, работающих по принципу трансформатора.

2.4. Дисперсия волн

Заметим еще одно интересное свойство узловых решений уравнений Максвелла. Уравнения Максвелла в форме ур. (2) - (3) приводятся к волновому уравнению взятием ротора:

$$\nabla^2 \mathbf{F} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial t^2} \quad (21)$$

и его решение в виде плоской волны в терминах напряженности:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}. \quad (22)$$

Образуем волновой пакет⁸ из рассматриваемой суперпозиции плоских волн:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_i J_i \mathbf{E}_i, \quad (23)$$

причем $\sum_i J_i^2 = 1$. Раскладывая распределение частот в пакете с помощью формулы Тейлора до третьего члена и записывая ур. (23) в виде интеграла, можно определить так называемое «расплывание волнового пакета», характеризуемое наличием дополнительной фазы смещения, линейно зависящей от времени. И только для бездисперсионных волновых пакетов такая фаза равна нулю и набор волн устойчив во времени. Иначе, можно сказать, что:

$$v_p = \frac{\omega(\mathbf{k})}{|\mathbf{k}|}; \quad v_g = \frac{d\omega(\mathbf{k})}{d|\mathbf{k}|} \quad (24)$$

фазовая и групповая скорости не изменяются во времени и постоянны.

Рассматриваемое радиационное поле, являющееся узловым решением, а, следовательно, удовлетворяющее ур. (21), также создает своего рода волновой пакет, который не расплывается и при изменении точки наблюдения (радиус-вектора) узелок эволюционирует целиком.

3. Описание установки

Для проведения эксперимента использовались две идентичных катушки тороидальной формы, смоделированные для создания электромагнитных полей, описываемых ур. (16), в форме математических узлов [7]. Одна из катушек служила излучателем, вторая - приемником; для обеих $p = 3, q = 46$, что соответствует Хопф индексу:

$$n = pq = 136. \quad (25)$$

Катушки были распечатаны на 3D-принтере (большой радиус тора $R = 60$ мм, малый $r = 18$ мм), на них намотана медная проволока длиной $l = 5,5$ м. На каждый тор намотано две катушки. Катушки рассчитаны так, чтобы соответствовать силовым линиям электрического поля узлового решения уравнений Максвелла с соответствующими p и q . Одна катушка соответствует линии положительного потенциала, другая - линии отрицательного потенциала.

Сигнал подается на два коаксиальных радиочастотных разъема типа BNC 50 Ω с учетом полярности (противоположной ориентации, разница фаз сигналов есть 180°). Схема и фотографии катушек представлены на Рис. 4 - 5.

⁸совокупность волн различной частоты, которые описывают обладающую волновыми свойствами формацию

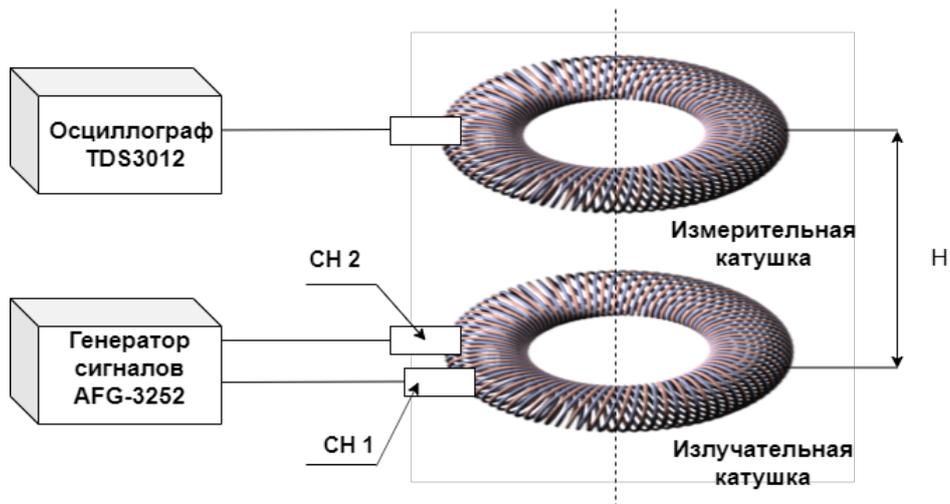
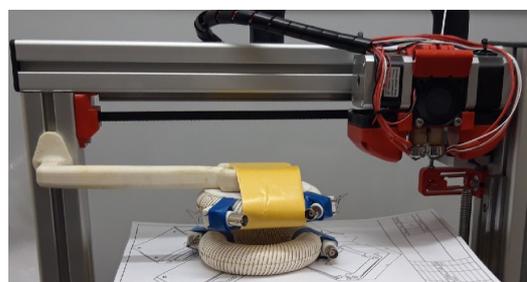


Рис. 4: Основная схема экспериментальной установки.



(а) Две использовавшихся катушки ($p = 3, q = 46$) с подключенными к приборам, вид сверху.



(б) Катушки, одна из которых закреплена сверху, а вторая при помощи подвижной регулируемой платформы передвигается.

Рис. 5: Фотографии установки.

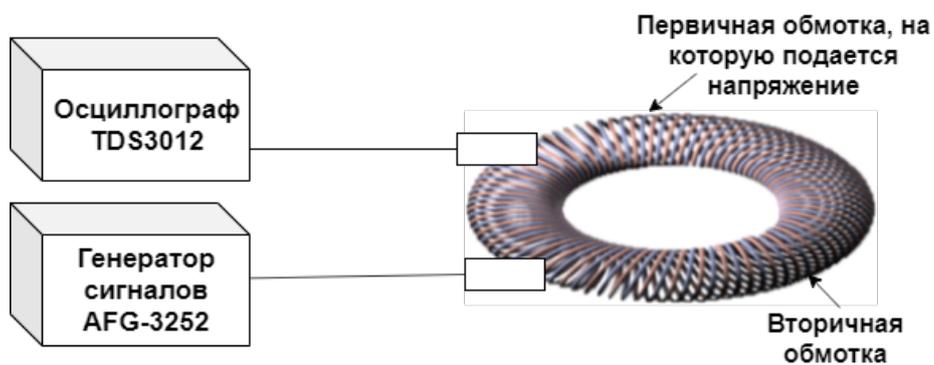


Рис. 6: Схема установки для снятия АЧХ. Со вторичной обмотки сигнал снимается при помощи осциллографа.

4. Проведение эксперимента

Сперва были проведены измерения амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) передачи гармонического синусоидального сигнала внутри одного тора с катушки соответствующей линии положительного потенциала на линию отрицательного потенциала. Использовался только один тор, включенный в режиме трансформатора (Рис 6). Генератор при этом работал в режиме свипирования. Частота генератора изменялась от 100 кГц до 240 МГц по линейной функции. Полное время изменения частоты составило 10 секунд. В качестве генератора сигналов был выбран Tektronix AFG-3252 (диапазон рабочих частот до 240 МГц). Используемый осциллограф - Tektronix TDS3012.

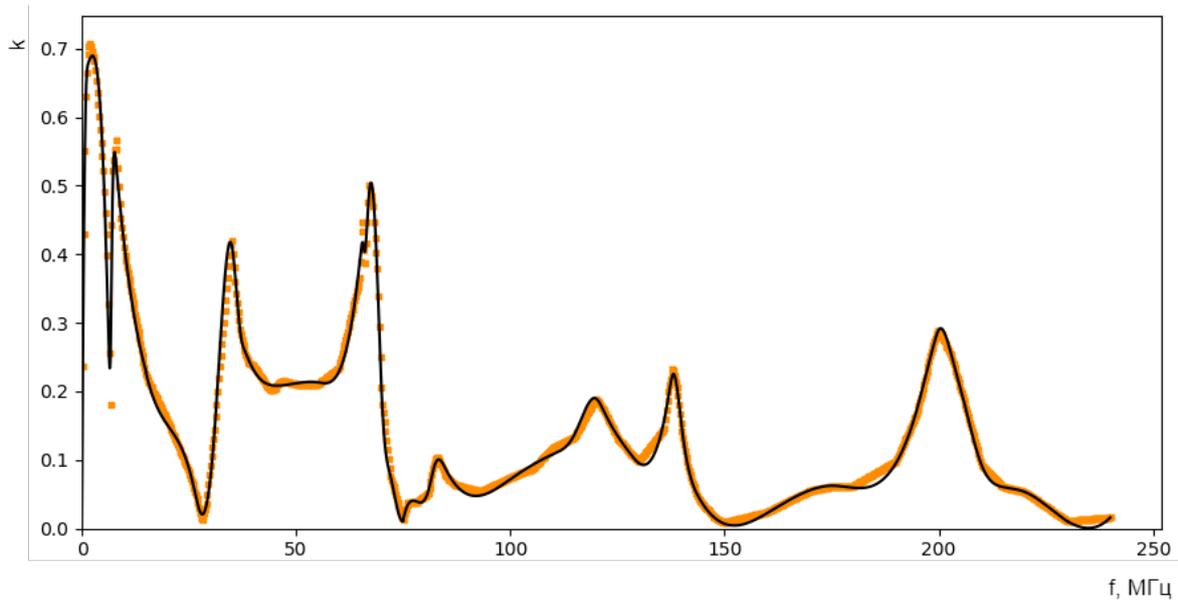


Рис. 7: Амплитудно-частотная характеристика ($k = \frac{U_{out}}{U_{in}}$ – коэффициент передачи). Черной линией показана сглаженная кривая.

По полученным данным (Рис. 7) было найдено 8 четко выраженных максимумов (Табл. 1), соответствующих резонансным процессам. Такого рода резонансы с асимметричным профилем называются резонансами Фано, вероятно, возникшие за счет интерференции двух волновых процессов: электромагнитная волна распространяется по спирали проводника и по воздуху с одного витка на следующий так, что между двумя образовавшимися фронтами существует разность фаз.

Также была исследована зависимость передачи сигнала с одной катушки (Рис. 8-9), при подключении обеих ее обмоток в противоположной фазе, на другую катушку при фиксированной частоте в

f , МГц	k
2	0,72
8	0,572
35	0,426
67	0,502
83	0,106
125	0,192
138	0,235
200	0,29

Таблица 1: Максимумы АЧХ

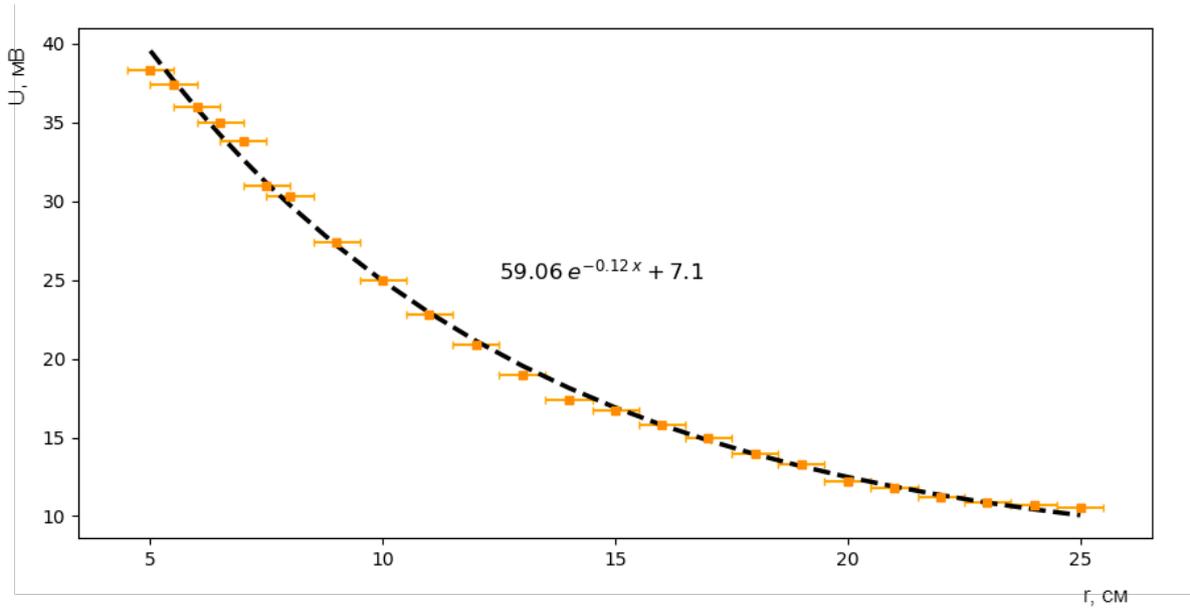


Рис. 8: Зависимость амплитуды возбужденного сигнала в измерительной катушке от расстояния при движении в горизонтальной плоскости. $f = 225$ МГц, $U_{in} = 1$ В. Пунктирной линией изображена экспоненциальная аппроксимация.

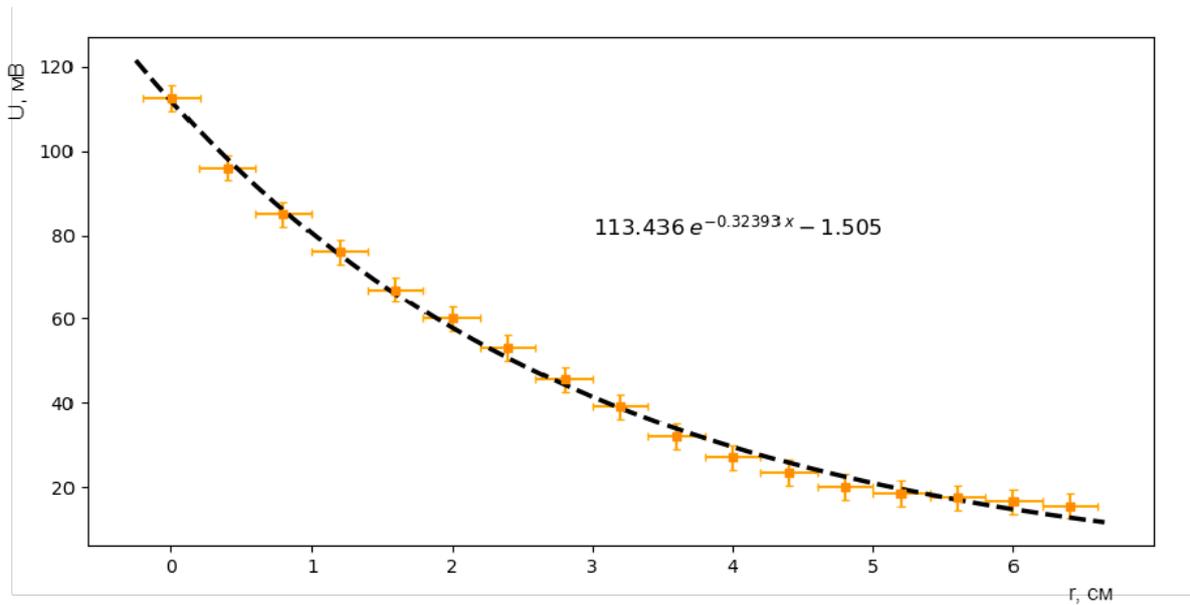


Рис. 9: Зависимость амплитуды возбужденного сигнала в измерительной катушке от расстояния при передвижении в вертикальной плоскости. $f = 225$ МГц, $U_{in} = 4$ В. Пунктирной линией изображена экспоненциальная аппроксимация.

зависимости от расстояния от их центров (расположение катушек было такое же, как на Рис. 5а). Частота синусоидального сигнала составляла 225 МГц. Аналогичная зависимость по вертикальной оси снята для расположения катушек на высоте порядка половины внутреннего радиуса (расположение как на Рис. 5б), при этом использовалась подвижная платформа, двигавшаяся с постоянной скоростью $v = 300$ мм/мин.

Конструкция катушек, намотанных на тор, обеспечивает пространственное распределение потенциала электрического поля соответствующее узловому решению уравнений Максвелла (ур. 16). Но для создания именно узлового поля требуется, чтобы сигнал изменялся со временем определенным образом (ур. 20) и имел соответствующий частотный спектр (ур. 19). Одной из моих задач было вычислить обратное преобразование Фурье от узлового спектра и сгенерировать сигнал, соответствующий этому обратному преобразованию Фурье (Рис. 11 а), ур. 20). Генератор Tektronix AFG-3252 позволяет синтезировать сигнал произвольной формы. Для этого мне потребовалось специальное программное обеспечение Arbexpress (2), которое было установлено и освоено. Сигнал был задан ур. (20) с $a = 1$, $b = 1$:

$$A(t) = \frac{t(1 - t^2)}{(1 + t^2)^2}. \quad (26)$$

При этом подключалась лишь одна из обмоток излучательной катушки и на измерительной были получены униполярные сигналы характерной формы (Рис. 10) в зависимости от выбора обмотки, на которую подавался ток. Для синхронизации сигнала на осциллографе был установлен триггер на синхроимпульс. Интересно заметить, что отклик катушки очень сильно напоминает верхнюю или нижнюю часть сгенерированного сигнала.

Полученная картина была исследована на бездисперсионность от положения в пространстве (Рис. 11), которая должна проявляться в случае создания электрического узлового поля. И, действительно, качественно картина эволюционирует одновременно во всех своих частях: сигнал мало того, что сохраняет свою форму, так и уменьшаются его отдельные части одинаково. При работе наблюдался резкий спад отклика на измерительной катушке от расстояния, даже его исчезновение при передвижении одной катушки относительно другой по оси X на 7 см, данное

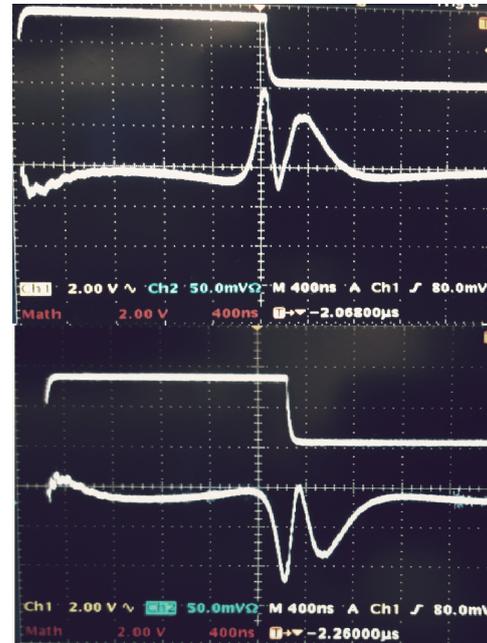
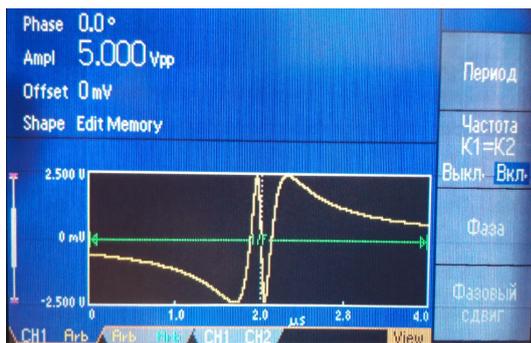
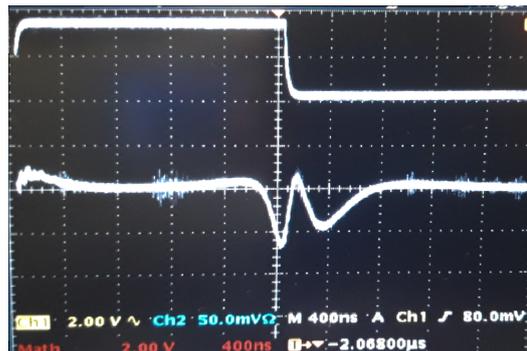


Рис. 10: Полученный сигнал при поочередном подключении намоток излучательной катушки.

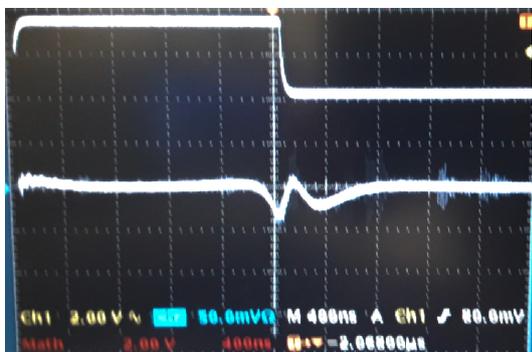
поведение можно связать с компактностью узелка. Все измерения, как и прежде, проводились в ближней волновой зоне. Свойство локализованности в части пространства, сравнимым с размерами самой системы, и отсутствия дисперсии, в самом деле, являются характерными для узелка; для периодического сигнала же произвольной формы это неверно (Рис. 12). Из представленных фотографий можно отметить резкое возрастание и спад (вплоть до их исчезновения) отдельных пиков от расстояния; на больших же расстояниях, относительно размеров самих торов, измерительная катушка продолжает улавливать некоторые импульсы.



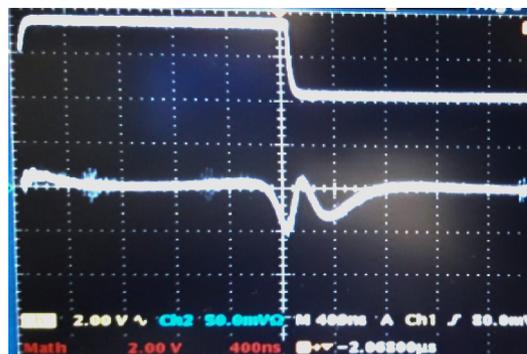
(a) Полученный на генераторе сигнал при помощи программного обеспечения Arbexpress (2). Частота сигнала равна 250 кГц.



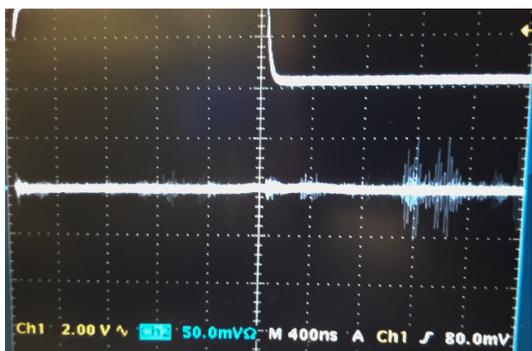
(b) Отклик измерительной катушки на сгенерированный сигнал, расстояния между катушками $r_z = 2$ см по вертикальной оси, $r_x = 0$ см.



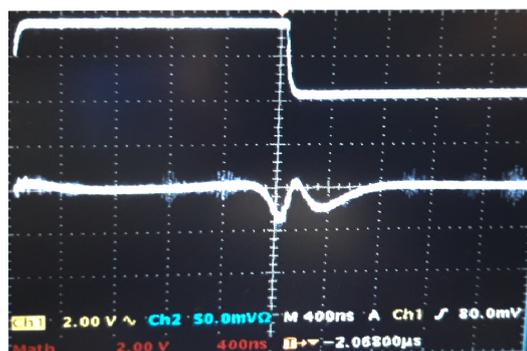
(c) Расстояния между катушками $r_x = 3$ см по горизонтальной оси, $r_z = 2$ см.



(d) Расстояния между катушками $r_z = 3$ см по вертикальной оси.

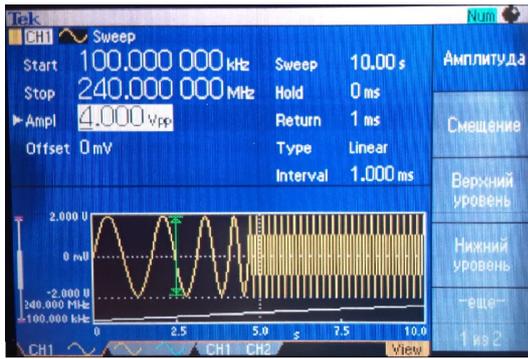


(e) Расстояния между катушками $r_x = 7$ см по горизонтальной оси.

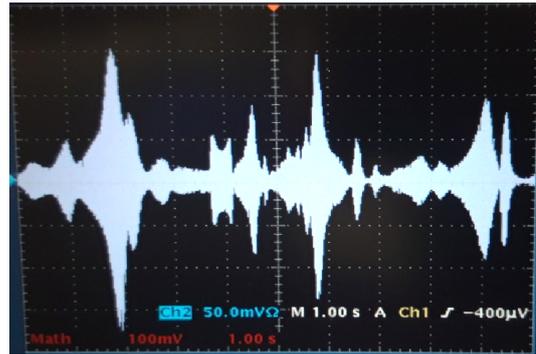


(f) Расстояния между катушками $r_z = 4$ см по вертикальной оси.

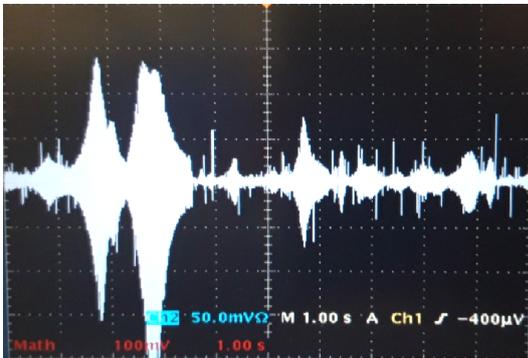
Рис. 11: Отклик на рассчитанный сигнал.



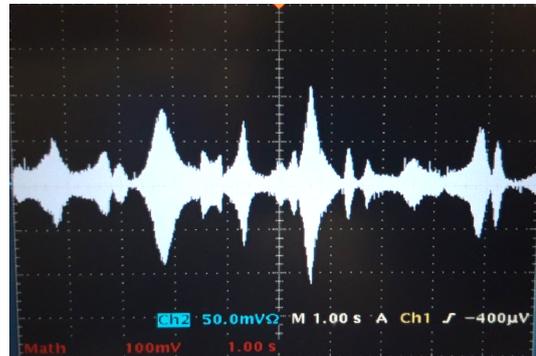
(a) Сгенерированный синус-сигнал, $U_{max} = 4$ В, $f_{min} = 100$ кГц, $f_{max} = 240$ МГц, свипирование выполняется за 10 секунд. Частота линейно зависит от времени.



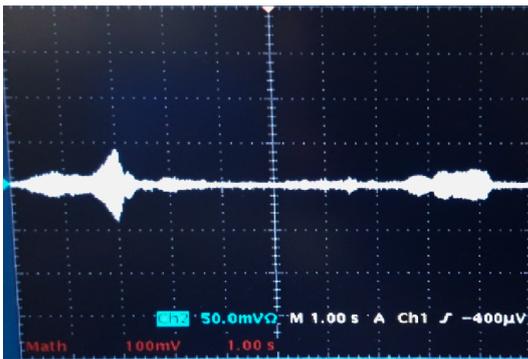
(b) Отклик измерительной катушки на свипированный синус-сигнал, расстояние между катушками $r_z = 2$ см по вертикальной оси, $r_x = 0$ см. Фактически, по горизонтальной оси на рисунке отложена частота.



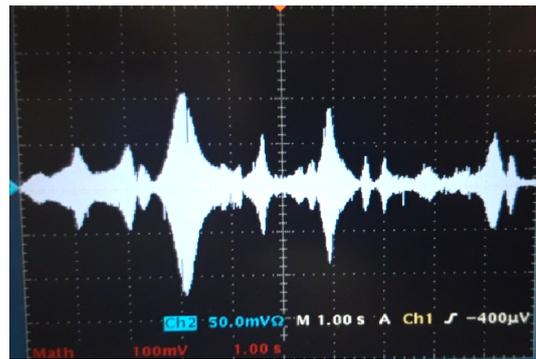
(c) Расстояние между катушками $r_x = 3$ см по горизонтальной оси, $r_z = 2$ см.



(d) Расстояние между катушками $r_z = 3$ см по вертикальной оси.



(e) Расстояние между катушками $r_x = 17$ см по горизонтальной оси.



(f) Расстояние между катушками $r_z = 5$ см по вертикальной оси.

Рис. 12: Отклик на синус-сигнал.

5. Заключение

В результате моей работы впервые было синтезировано поле, соответствующее узловому решению уравнений Максвелла в области средних радиочастот (СЧ), высоких частот (ВЧ) и очень высоких частот (ОВЧ). Поле описывается следующей формулой с $p = 3$ и $q = 46$ из раздела 2.3:

$$F(\mathbf{r}, t) = 136 \left(\frac{r^2 - a^2 - t^2 + 2ia z}{r^2 - (t - ia)^2} \right)^2 \cdot \left(\frac{2a(x - iy)}{r^2 - (t - ia)^2} \right)^{45} \cdot \frac{4a^2}{(r^2 - (t - ia)^2)^3} \begin{bmatrix} -(x - iy)^2 + (z - (t - ia))^2 \\ i((x - iy)^2 + (z - (t - ia))^2) \\ 2(x - iy)(z - (t - ia)) \end{bmatrix} \quad (27)$$

Ранее такие решения уравнений Максвелла наблюдались и исследовались в оптическом излучении [6].

Для того, чтобы синтезировать поле, соответствующее узловому решению уравнений Максвелла, я проделал следующее:

- 1) Используя результаты работы [3] вычислил обратное преобразование Фурье от спектра узлового решения и получил зависимость сигнала от времени:

$$\tilde{f}(t) = -\frac{t(a(ab - 2) + bt^2)}{(a^2 + t^2)^2};$$

- 2) С помощью генератора Tektronix AFG-3252 и специального программного обеспечения Arbexpress (2) сгенерировал временную структуру сигнала узлового решения;
- 3) Наблюдал униполярные сигналы, форма которых не зависит от расстояния между катушками, что соответствует бездисперсионному волновому пакету - узловому решению уравнений Максвелла;
- 4) Измерил АЧХ катушек и наблюдал множественные интерферирующие резонансы (резонансы Фано), найдены максимумы;
- 5) Исследована пространственная зависимость передачи сигнала с излучательной катушки на измерительную и определен ее характер.

Благодарности

Выражаю глубокую благодарность научным руководителям, Алексею Георгиевичу Харламову и Жабину Виктору Николаевичу, за интересную тему для курсовой работы, предоставление необходимого оборудования и помощь при ее выполнении, а также за создание рабочей атмосферы и полезные советы и наставления.

Использованное программное обеспечение

- 1) JetBrains PyCharm Edu 2019, v2.1
- 2) Arbexpress waveform creation and editing SW, v3.5
- 3) Wolfram Mathematica 9
- 4) TiePie Multi Channel software

Список литературы

- [1] W. Thomson, *Philos. Mag.* 34, 15 (1867)
- [2] Antonio F. Ranada Topological electromagnetism, *J. Phys. A: Math Gen* 25 (1992) 1621–1641.
- [3] Andreani Petrou, Singular light knots, B. thesis in Leiden University (2017). leidenuniv:1887/50826
- [4] Р.С. САКС, Решение спектральных задач для операторов ротора и Стокса, *Уфимский математический журнал*. Том 5. № 2 (2013). С. 63-81
- [5] David W. Lyons, An Elementary Introduction to the Hopf Fibration, *Math. Mag.* 76, 2 (2003), 87–98. doi:10.2307/3219300
- [6] Hridesh Kedia, Iwo Bialynicki-Birula, Daniel Peralta-Salas, and William T. M. Irvine, Tying Knots in Light Fields, *Phys. Rev. Lett.* 111.150404 (2013). doi:10.1103/PhysRevLett.111.150404
- [7] Жабин Виктор Николаевич, Узловые решения уравнений Максвелла и проблема квантования заряда, НГУ (2014)