

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Физический факультет  
Кафедра общей физики  
Беренгольц Константин Антонович  
КУРСОВАЯ РАБОТА

**Измерение удельного сопротивления материалов с использованием  
скин-эффекта**

Электромагнитный практикум, 2 курс, группа № 19305

**Научный руководитель:**

Краснопевцев  
Спартак Евгеньевич  
Оценка научного руководителя

«\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

**Преподаватель практикума**

к.ф.-м.н. А.А. Симонов  
Оценка преподавателя практикума

«\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

**Куратор практикума:**

к.т.н. В.Т. Астрелин  
Итоговая оценка

«\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

Новосибирск 2020

## **Аннотация**

Целью данной работы являлось экспериментальное определение удельного сопротивления металла при помощи явления, называемого скин-эффектом. В ходе проведения работы были выведены необходимые уравнения, описывающие данное явление, а также была получена формула для определения проводимости материала. Из данной формулы было получено искомое значение удельного сопротивления для трех материалов.

Ключевые слова: скин-эффект, переменное поле, проводимость, удельное сопротивление.

Работа выполнена в Межфакультетской лаборатории электричества и магнетизма Кафедры общей физики Физического факультета НГУ.

## **Оглавление**

Введение	4
1. Теоретическая часть	5
1.1. Проводник в переменном поле	5
2. Экспериментальная часть	7
2.1. Описание установки	7
2.2. Порядок выполнения эксперимента	9
2.3. Обработка полученных данных	9
2.4. Обсуждение полученных результатов	10
2.5. Оценка погрешностей	11
Вывод	11
Список литературы	12

## Введение

Целью данной работы является определение удельного сопротивления при помощи скин-эффекта.

Явление, называемое скин-эффектом, заключается в локализации тока и полей в слое проводника, прилегающем к его поверхности. Данное явление имеет место при периодическом во времени процессе и обуславливается явлением электромагнитной индукции. Для определения удельного сопротивления  $\rho$  можно использовать следующее соотношение

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}} \quad (1)$$

Где  $\delta$  – толщина скин-слоя.

Тогда, зная толщину скин-слоя, можно определить проводимость материала  $\sigma = 1/\rho$  и, следовательно, удельное сопротивление. Значит, работа сводится к определению величины  $\sigma$ .

Известно, что при слабом скин эффекте амплитудная зависимость магнитного поля имеет следующий характер

$$H = H_0 e^{-x/\delta} \quad (2)$$

Откуда при подстановке (1)  $\sigma$  выражается как

$$\sigma = \frac{c^2}{x^2} \ln^2 \left( \frac{H_1}{H_0} \right) \frac{1}{2\pi\omega} \quad (3)$$

где  $x$  – толщина стенки экрана,  $\omega = 2\pi f$  – циклическая частота.

Более подробное описание метода определения толщины скин-слоя и, следовательно, удельного сопротивления, приведено в описании теоретической части данной курсовой работы.

## 1. Теоретическая часть

### 1.1. Проводник в переменном поле

Явления, происходящие при наличии нестационарных электромагнитных полей в проводящей среде, описываются следующим уравнениями

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E} \quad (4)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (5)$$

получаемыми из уравнений Максвелла при исключении тока смещения ввиду его малости относительно второго члена выражения для магнитного поля, и использования дифференциального закона Ома для тока проводимости. [1]

Поскольку мы имеем дело с периодическими гармоническими процессами, в которых физические величины являются синусоидальными функциями времени, то для упрощения можно перейти к комплексным выражениям. Тогда решения уравнений (4) и (5) примут вид

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}(\vec{r}) e^{i\omega t}, \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) e^{i\omega t},$$

где  $\vec{H}$  и  $\vec{E}$  - комплексные амплитуды. Подставляя данные решения в уравнения (4) и (5), получаем дифференциальные уравнения, которые с использованием обозначения

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}} \quad (6)$$

приводятся к следующему виду

$$\Delta \vec{H} - \frac{2i}{\delta^2} \vec{H} = 0, \Delta \vec{E} - \frac{2i}{\delta^2} \vec{E} = 0 \quad (7)$$

Здесь  $\delta$  – параметр с размерностью длины. В дальнейшем будет показано, что он носит смысл глубины проникновения поля в проводник.

Процесс проникновения периодического магнитного поля в проводник и формирование скин-слоя можно рассмотреть, используя модель плоской плиты шириной  $2a$ , левая поверхность которой находится в начале которой находится в начале координат. Магнитное поле имеет z-компоненту

$$H_z(x, t) = H_z(x)e^{i\omega t} \quad (8)$$

где  $H_z$  удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 H}{dx^2} - \frac{2i}{\delta^2} H = 0 \quad (9)$$

Граничные условия формируются из предположения, что  $2a \gg \delta$ . Далее будет показано, что при таком предположении распределение поля вблизи левой границы  $x = 0$  не чувствует влияния правой границы (справедливо и обратное утверждение). Тогда вблизи  $x = 0$  граничные условия представляются в следующем виде

$$H(0) = H_0, H(\infty) = 0 \quad (10)$$

где плита конечной длины мысленно заменяется на проводящее полупространство  $x > 0$ . Уравнение (9) имеет два линейно независимых решения следующего вида

$$e^{\pm\sqrt{2i}x/\delta} = e^{\pm(1+i)x/\delta}$$

Решение, удовлетворяющее граничным условиям (10), будет следующим

$$H(x) = H_0 e^{-(1+i)x/\delta} = H_0 e^{-x/\delta} e^{-ix/\delta}$$

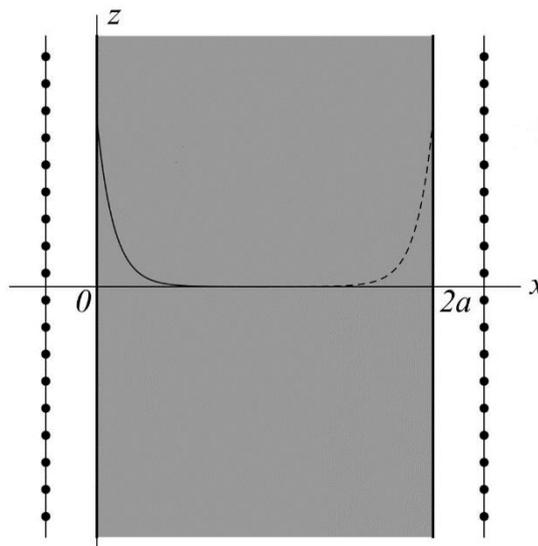
Теперь необходимо подставить данное решение в уравнение (8) и взять реальную часть для искомой величины

$$H_z(x, t) = H_0 e^{-x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)$$

Из этого выражения видно, что амплитуда колебаний поля, совпадающая с модулем

$$|H(x)| = H_0 e^{-x/\delta} \quad (11)$$

экспоненциально спадает по мере удаления от границы вглубь проводящей области. На глубине  $\delta$  эта величина падает в  $e$  раз. На расстояниях же в несколько  $\delta$  она практически зануляется. Если ширина пластины  $2a \gg \delta$ , то поле, проникающее в проводник со стороны  $x = 0$ , действительно не оказывает влияния на проникновение поля со стороны  $x = 2a$ . На рисунке 1 два этих процесса показаны соответственно сплошной и пунктирной линиями. Видно, что процессы являются независимыми друг от друга. Следовательно, выбранная модель проводящего полупространства оправдывает себя.



Таким образом,  $\delta$  действительно носит смысл глубины проникновения поля в проводник и называется толщиной скин-слоя. Само же явление локализации переменного поля в поверхностном слое проводника называется скин-эффектом.

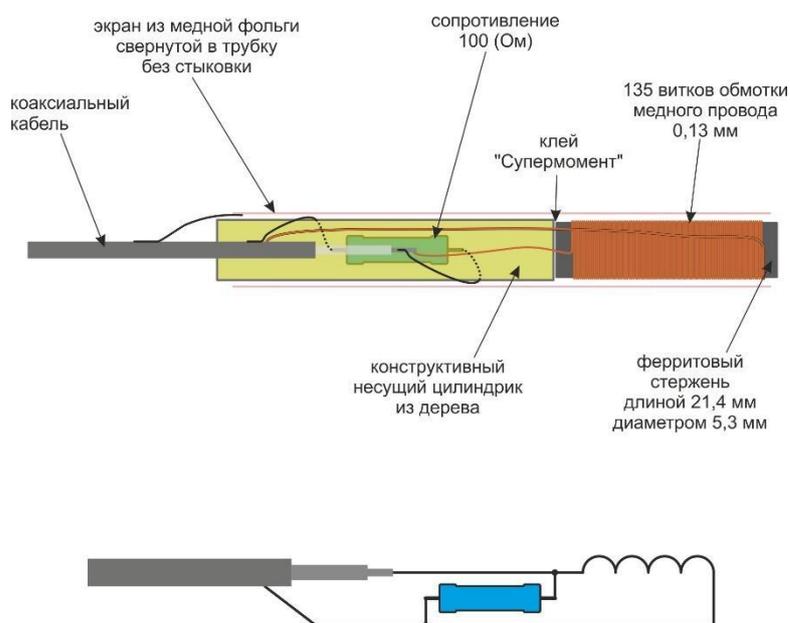
## 2. Экспериментальная часть

### 2.1. Описание установки

Принципиальная схема экспериментальной установки представлена на рисунке 4. Сигналы регистрируются с помощью четырёх-лучевого цифрового

осциллографа GDS-71054B, что позволяет определять как величину сигналов, так и разность фаз между ними. В качестве источника переменного тока для питания соленоида можно использовать генератор Актакоком ADG-1005.

Магнитное поле регистрируется при помощи идентичных индуктивных датчиков (рисунок 3), намотанных на ферритовом стержне.



Соленоид длины  $l$  с числом витков  $N$  питается от генератора гармонических колебаний. Внутри генератора может быть вставлен проводящий цилиндр и измерительная катушка с количеством витков равным  $n$ .

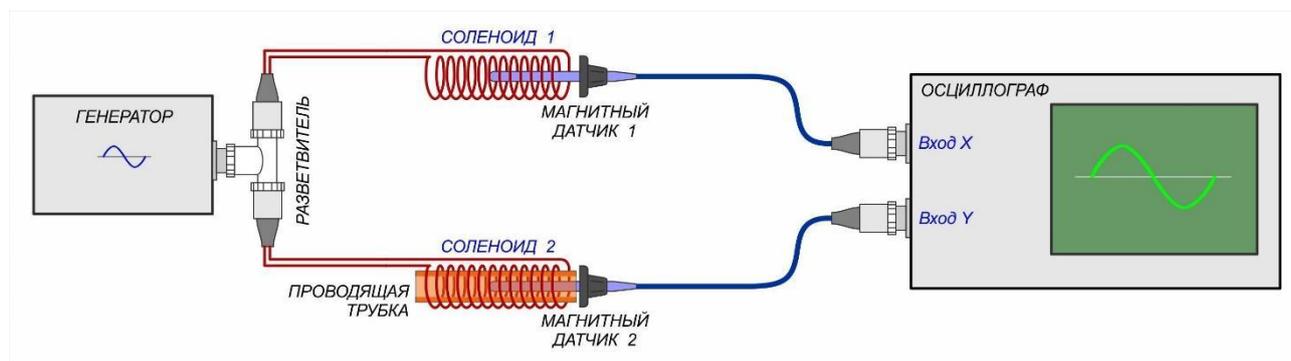


Рис. 3. Схема эксперимента по исследованию экранирования внешнего переменного магнитного поля проводящим цилиндрическим экраном

Напряжение  $U_n$ , которое снимается с измерительной катушки, пропорционально величине магнитного поля на оси соленоида и зависит от частоты и наличия/отсутствия проводящего экрана. [2]

## 2.2 Порядок выполнения эксперимента

Для эксперимента были выбраны 3 проводящих экрана из меди, латуни и алюминия. Характерные размеры образцов представлены в таблице 1.

Таблица 1. Характерные размеры экранов  
(длина L, толщина стенки x)

	Cu	La	Al
L, мм	160	80	80
x, мм	1,2	1	1

Затем были проведены измерения отношения амплитуд двух сигналов от датчиков без экрана и с экраном соответственно, а также разность фаз между этими сигналами. Результаты проведенных измерений для каждого экрана представлены в таблице 2.

Таблица 2. Результаты измерения отношений амплитуд и разности фаз двух сигналов для различных экранов

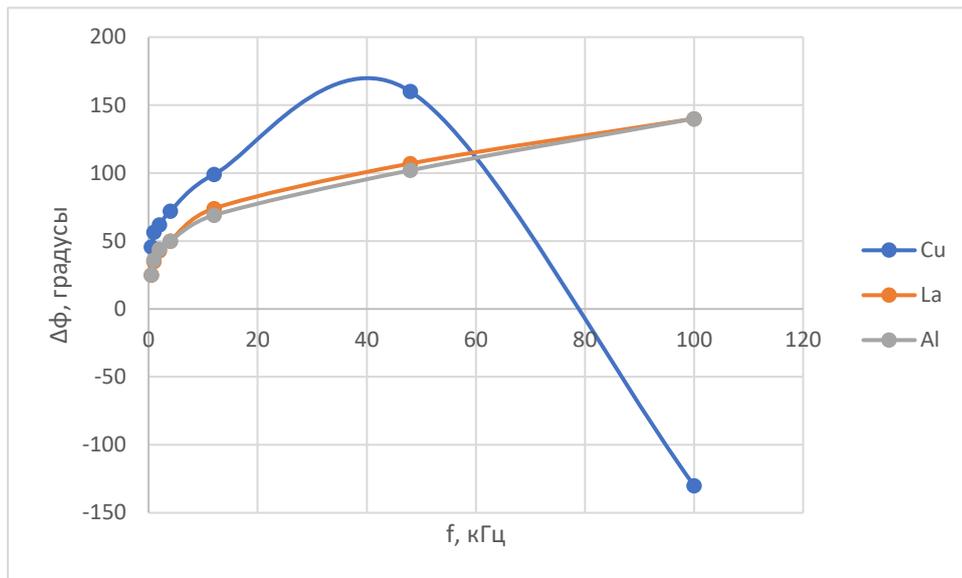
f, кГц	Cu		La		Al	
	U <sub>1</sub> /U <sub>2</sub>	Δφ, граду сы	U <sub>1</sub> /U <sub>2</sub>	Δφ, граду сы	U <sub>1</sub> /U <sub>2</sub>	Δφ, граду сы
0,5	0,68	45,7	0,96	25	0,96	25
1	0,49	56,5	0,8	35	0,82	36
2	0,3	62	0,6	43	0,61	44
4	0,21	72	0,42	50	0,43	50
12	0,086	99	0,22	74	0,22	69
48	0,017	160	0,064	107	0,072	102
100	0,005	-130	0,03	140	0,033	140

## 2.3. Обработка полученных данных

По полученным данным были построены графики разности фаз от частоты (график 1) и отношения  $\xi$  (график 2), которое имеет следующий смысл

$$\xi = \left| \frac{H_1}{H_0} \right| \quad (12)$$

где  $H_1$  – амплитуда магнитного поля, измеряемого индуктивным датчиком внутри экрана,  $H_0$  – амплитуда магнитного поля без экрана.



Так как магнитное поле пропорционально напряжению  $U$ , можно представить формулу (12) в следующем виде

$$\xi = \frac{U_{\text{с экраном}}}{U_{\text{без экрана}}} \quad (13)$$

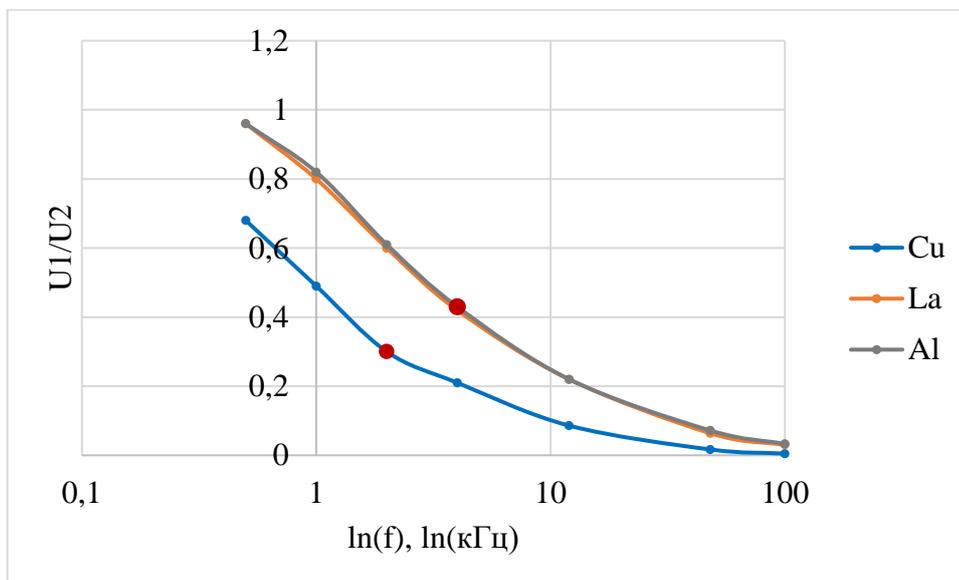


График 2. Зависимость  $\xi$  от частоты в логарифмическом масштабе

#### 2.4. Обсуждение полученных результатов

На графике 1 присутствует точка, соответствующая значению разности фаз для меди при частоте 100кГц, сильно отличающаяся от теоретических ожиданий. Это связано с не выявленной вовремя ошибкой при проведении измерений.

На графике 2 красными маркерами отмечены точки, где амплитуда магнитного поля уменьшилась приблизительно в  $e$  раз. Тогда, опираясь на формулу (11), можно сделать вывод, что в данной точке толщина скин слоя  $\delta$  примерно равна толщине стенки экрана  $x$ . Следовательно, выражение (3) принимает следующий вид

$$\sigma = \frac{c^2}{x^2} \frac{1}{2\pi\omega} \quad (14)$$

Используя эту формулу, рассчитывается значение  $\sigma$  для каждого из экранов. Тогда, зная, что  $1/\sigma = \rho$ , рассчитывается значение удельного сопротивления для каждого из экранов. Результаты представлены в таблице 3.

Таблица 3. Результаты расчёта проводимости и удельного сопротивления

	Cu	La	Al
$\sigma, \text{c}^{-1}$	2,64E+10	1,90E+10	1,90E+10
$\rho, \text{c}$	3,79E-11	5,26E-11	5,26E-11

### 2.5. Оценка погрешностей

В ходе данной работы возникают погрешности, причинами для которых служат следующие факторы:

- В пункте 2.4. определяется точка, где амплитуда уменьшается  $\sim$  в  $e$  раз, однако для полной справедливости формулы (11) необходимо падение ровно в  $e$  раз.
- При измерении отношения  $U_1/U_2$  использовалось усреднение с помощью встроенных средств осциллографа, что влечет за собой отклонения от истинного значения.

### Вывод

В ходе выполнения работы я ознакомился с явлением скин-эффекта, а также мной был найден метод определения удельного сопротивления материала при помощи данного явления. Выведена формула для определения проводимости материала, с помощью которой определяется внутреннее сопротивление.

## Список литературы

1. Яковлев В.И. Классическая электродинамика: Учеб. Пособие Новосиб. НГУ, 2003. -267с.
2. М. И. Захаров, А. А. Дорошкин, Б. А Князев, И. А. Котельников, А. В. Сорокин, А.А. Тютин, В.С. Черкасский: Лабораторный практикум “Электричество и магнетизм”: Учебно-методическое пособие Выпуск 6 “Проникновение электромагнитного поля в вещество”. НГУ, 2008. -63с.