
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования**

**НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

Физический факультет

Кафедра общей физики

Кудрявцев Артем Леонидович

КУРСОВАЯ РАБОТА

**Изучение свойств узлов электромагнитного поля – специальных
решений уравнений Максвелла**

Практикум электричества и магнетизма, 2 курс, группа 19311

Научные руководители

_____ к.ф.-м.н., А. Г. Харламов

_____ В. Н. Жабин

« ____ » _____ 2020 г.

Оценка научного руководителя:

Преподаватель практикума

«Электричество и магнетизм»

_____ С. В. Мураштин

Оценка преподавателя практикума:

« ____ » _____ 2020 г.

Куратор практикума

_____ к.ф.-м.н., В. Т. Астрелин

Итоговая оценка:

« ____ » _____ 2020 г.

Новосибирск, 2020 г.

Физический факультет

Кафедра общей физики

Кудрявцев Артем Леонидович

**Изучение свойств узлов электромагнитного поля – специальных
решений уравнений Максвелла**

Практикум электричества и магнетизма, 2 курс, группа 19311

Аннотация

Узловые решения уравнений Максвелла в вакууме [1] мало исследованы экспериментально, поэтому для их изучения ранее была создана специальная установка [2]. Было замечено то, что при подаче сигнала соответствующего узловому решению в форме трилистника, наблюдается сильное не линейное искажение сигнала. Искажение заключалось в том, что часть сигнала, соответствующая положительному напряжению, отрезалась, как в диоде. В данной работе удалось объяснить нелинейное искажение сигнала «трилистника» резонансными свойствами установки. Так же в данной работе был рассчитан и экспериментально сгенерирован сигнал, соответствующий полю с топологией, соответствующей топологии экспериментальной установки.

[1] A. F. Ranada (1992) Topological electromagnetism, *J. Phys. A: Math. Gen.* 25 1621 DOI: [10.1088/0305-4470/25/6/020](https://doi.org/10.1088/0305-4470/25/6/020)

[2] Жабин В. Н. (2013) Узловые решения уравнений Максвелла и проблема квантования заряда, НГУ

Содержание

| | |
|-------------------------------|-----------|
| 1. Введение..... | 4 |
| 2. Теория..... | 4 |
| 2.1. Нуль-поля..... | 4 |
| 2.2. Узловые поля..... | 5 |
| 2.3. Создание полей..... | 7 |
| 3. Эксперимент | 10 |
| 3.1. Установка..... | 10 |
| 3.2. Вычисление ЭДС..... | 11 |
| 3.3. Измерения | 12 |
| 3.4. Погрешности..... | 20 |
| 4. Заключение | 22 |
| 5. Благодарности | 23 |
| 6. Ссылки | 23 |

1. Введение

В данной работе исследуются узловые решения уравнений Максвелла в вакууме [1] при низких частотах. Построение таких решений основано на топологии.

Несмотря на то, что топология является довольно абстрактным разделом математики, она находит свое применение и в физике. В частности, из-за того, что она описывает фундаментальные свойства всевозможных гладких полей и пространств. На основе этого Antonio Ranada [1] разработал теорию, описывающую квантование спиральности фотонов, взяв за основу топологию электромагнитных полей. Теория А. Ranada совпадает с теорией Максвелла локально в любой конечной области пространства, но имеет некоторые отличия, которые мы бы хотели исследовать.

В работах [2] описаны различные конструкции таких полей и их свойства, что позволяет их создавать с нужной топологией и проводить с ними эксперименты и вычисления в явном виде. В нашей работе экспериментально исследовались свойства таких полей, а именно их излучение и прием с помощью катушек с нетривиальной топологией. Исследовалась передача сигналов различной формы и частоты между катушками, и был найден особый сигнал, значительно меняющий свою форму после передачи в определенном диапазоне частот. Для объяснения этого явления были предложены несколько гипотез, которые исследовались в этой работе.

2. Теория

2.1. Нуль-поля

В классической теории рассматривая систему из зарядов и электромагнитного поля мы можем говорить, что пространство не содержит зарядов везде кроме счетного числа точек, иначе говоря, классические

плотность тока и плотность заряда равны нулю в почти всюду, а значит эволюция полей, определяется уравнениями Максвелла в вакууме. Далее везде используется система СГС, а также скорость света принята за единицу.

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}, \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}$$

Ввиду их симметрии оказывается удобно ввести вместо двух вещественнозначных векторных полей \mathbf{E} и \mathbf{B} одно комплекснозначное \mathbf{F} , носящее название вектора Римана-Зильберштейна, и определяемое как

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} + i \mathbf{B}$$

Вектор Пойнтинга в этом случае выражается как

$$\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] = \frac{1}{8\pi i} [\mathbf{F}^* \times \mathbf{F}]$$

И тогда уравнения Максвелла можно записать в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = 0, \operatorname{rot} \mathbf{F} = i \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{F} \Rightarrow \square \mathbf{F} = 0$$

Как и следовало ожидать, из них непосредственно следует волновое уравнение.

Теперь мы будем среди всех удовлетворяющих этим уравнениям полей рассматривать поля, описывающие электромагнитные волны, для них оба инварианта поля должны быть равны нулю, и это условие выражается просто равенством нулю квадрата вектора \mathbf{F} .

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0, \mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 = 0 \Rightarrow \mathbf{F}^2 = 0$$

Такие поля будут называться нулевыми или нуль-полями.

2.2. Узловые поля

Узловыми полями называются поля, силовые линии которых образуют нетривиальную топологическую структуру, а так как силовые линии

одномерны, то их структуры – это структуры узлов. Узловые силовые линии характеризуются самозацеплениями, то есть их нельзя развернуть в окружность непрерывным образом без самопересечений. Причина, по которой узловые решения имеют такую важность – это то, что хоть они и являются полностью классическими полями, но они также обладают свойствами, похожими на квантовые, что позволяет с их помощью предсказать квантование заряда, как это показано в работе A. Ranada [1].

То самое, похожее на квантовое, свойство – это сохранение количества зацеплений силовых линий поля друг о друга, называемое индексом Хопфа. Для любого достаточно гладкого поля такое число должно сохраняться во времени, так как иначе силовые линии должны были бы пересекать друг друга, что невозможно, так как в таком случае в одной точке они поле будет вынуждено иметь 2 значения одновременно [1].

Для полей, которые чаще всего встречаются в жизни – этот индекс равен нулю, так что для его появления необходима специальная конструкция, позволяющая контролировать Хопф-индекс и знать вид силовых линий.

Основой такой конструкции послужит расслоение Хопфа – непрерывное гладкое отображение из трехмерной сферы в двумерную, причем прообраз каждой точки на двумерной сфере – это окружность на трехмерной, и, кстати, эти окружности, полученные из любых двух разных точек, имеют ровно одно сцепление – то что нам и надо. Так как трехмерная сфера – это объект в четырехмерном пространстве, то для удобства работы от нее берется стереографическая проекция на обычное трехмерное пространство, а для того, чтобы точки на двумерной сфере представлять проще – от нее тоже берут стереографическую проекцию, но уже на комплексную плоскость [2].

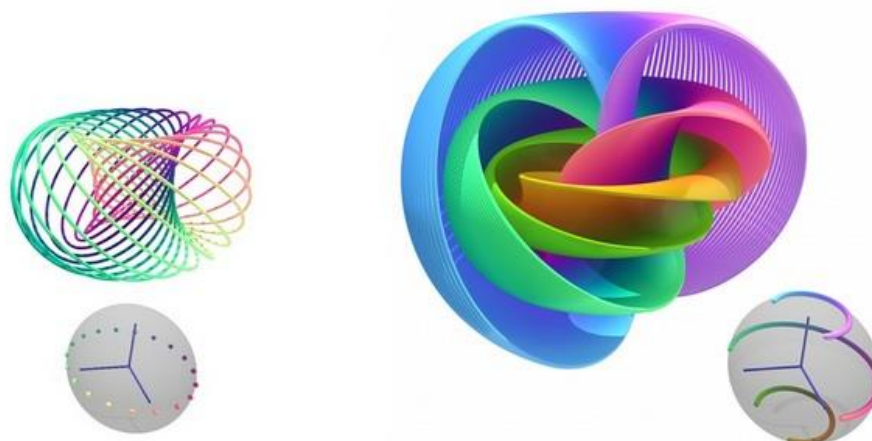


Рис. 1. Визуализация расслоения Хопфа

Таким образом расслоение Хопфа, имеющее нужные топологические свойства, полностью задается скалярным комплекснозначным полем в обычном пространстве.

Стоит особо оговорить, что если мы будем конструировать похожие отображения, а именно такие скалярные поля, то они обязаны обладать некоторыми свойствами, необходимыми для того, чтобы их отображение на сферы существовало. Первое – это гладкость во всем трехмерном пространстве, а второе – это существование предельной точки на бесконечности.

2.3. Создание полей

Обычное расслоение Хопфа задается следующим скалярным полем:

$$\phi = \frac{2y - 2ix}{x^2 + y^2 + (z - i)^2} = \frac{2y - 2ix}{r^2 - 1 - 2iz}$$

Также для него есть два других поля, силовые линии от которых будут перпендикулярны между собой и полю выше

$$\theta = \frac{2x - 2iz}{r^2 - 1 - 2iy}, \psi = \frac{2z - 2iy}{r^2 - 1 - 2ix}$$

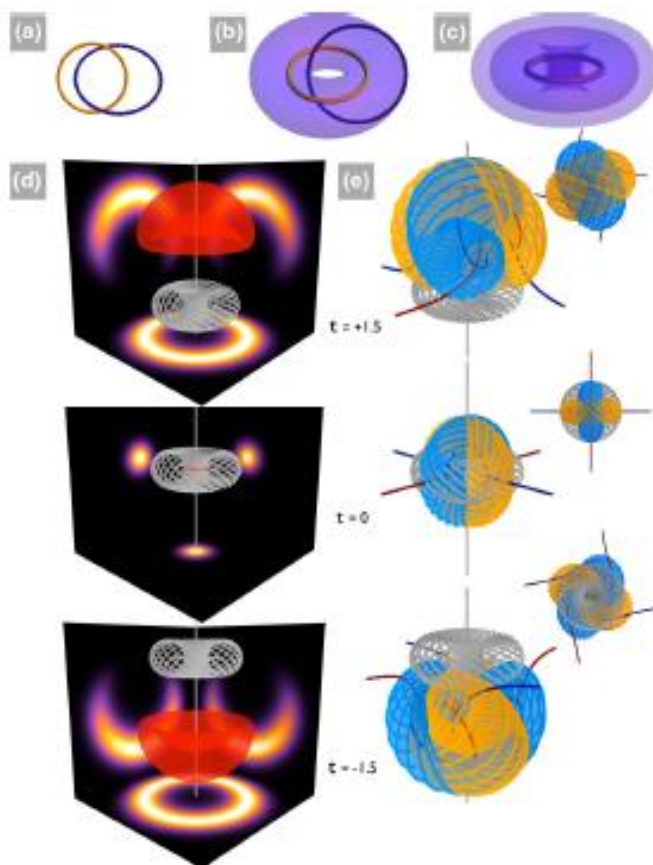


Рис. 2. Хопфово решение в различные моменты времени. Красная поверхность - изоповерхность для плотности энергии, серое - вектор Пойнтинга, желтое - электрическое поле, синее - магнитное поле.

Так как все изолинии этих полей ортогональны между собой, то можно соотнести касательные вектора к этим линиям с электрическим, магнитным полями и вектором Пойнтинга [1].

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2\pi i} \frac{[\nabla\phi^* \times \nabla\phi]}{(1 + |\phi|^2)^2}, \mathbf{E} = \frac{1}{2\pi i} \frac{[\nabla\theta^* \times \nabla\theta]}{(1 + |\theta|^2)^2}, \mathbf{B} = \frac{1}{2\pi i} \frac{[\nabla\psi^* \times \nabla\psi]}{(1 + |\psi|^2)^2}$$

Далее вводится зависимость полей от времени, но для этого используется другая конструкция, которая позволяет создавать поля не только с индексом Хопфа равным единице.

Она называется Bateman конструкцией [3] и нуждается также в двух скалярных полях, но уже каждое поле само по себе не описывает вид силовых линий, хотя, несмотря на это, они позволяют контролировать их топологию.

Для начала берется 2 скалярных поля α и β , которые должны удовлетворять условию

$$[\nabla\alpha \times \nabla\beta] = i(\partial_t\alpha\nabla\beta - \partial_t\beta\nabla\alpha)$$

Тогда вектор Римана-Зильберштейна выражается через них как

$$F = [\nabla\alpha \times \nabla\beta]$$

Сама конструкция в виде векторного произведения градиентов двух скалярных функций сразу дает **бездивергентность** поля F , а, чтобы удовлетворять условию на уравнение для частной производной по времени – как раз и введено условие выше.

Также такая конструкция обладает замечательным свойством: для любых двух аналитических функций f и g от α и β выражение снизу тоже будет нуль-полем

$$F = [\nabla f(\alpha, \beta) \times \nabla g(\alpha, \beta)] = h(\alpha, \beta)[\nabla\alpha \times \nabla\beta]$$

Таким образом, для поля, заданного расслоением Хопфа, α и β будут равны

$$\alpha = \frac{r^2 - t^2 - 1 + 2iz}{r^2 - (t - i)^2}, \beta = \frac{2x - 2iy}{r^2 - (t - i)^2}$$

Теперь создаются поля в виде узлов. Если ввести на трехмерной сфере координаты как 2 комплексных числа u и v , то сфера будет задаваться как $|u|^2 + |v|^2 = 1$, тогда тороидальный узел с взаимно простыми индексами p и q будет описываться уравнением $u^p \pm v^q = 0$ [3].

Так как для указанных выше α и β выполняется условие $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, то в построении поля с тороидальными силовыми линиями логично взять как раз $f = \alpha^p, g = \beta^q$. Таким образом, пространственная конфигурация поля задается двумя натуральными взаимно простыми числами p и q . Так и строилось поле, исследуемое в данной работе.

3. Эксперимент

3.1. Установка

Экспериментальная установка состоит из двух пластиковых торов (малый радиус 18 мм, большой радиус 60 мм), на каждый из которых намотана пара медных проводов в виде тороидального узла (с индексами $p=3$ и $q=46$), причем на каждом торе узлы просто повернуты на половину угла, при котором они перейдут сами в себя. К концам проводов припаяны радиочастотные разъемы BNC 50Ω.

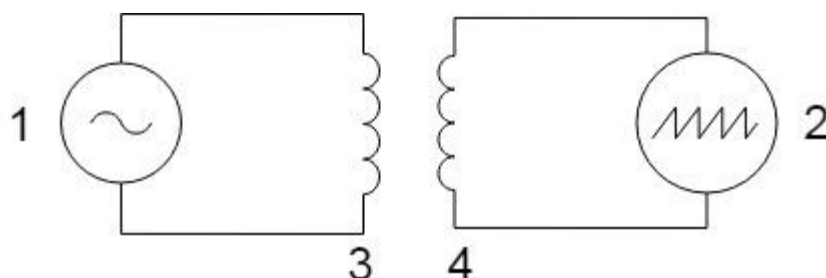


Рис. 3. Принципиальная схема установки. 1 - генератор, 2 - осциллограф, 3,4 - передающая и принимающая катушки

Расчет форм торов и их распечатка на 3D принтере описаны в работе [4]. Суть расчета и моделирования формы тора состояла в создании кривой, описывающей тороидальный узел и дальнейшее вырезание такого контура небольшой толщины из самого тора. Далее происходила распечатка двух половинок получившейся модели и их склейка. Там же и описана причина выбора именно таких p и q . Дело в том, что так как в работе [1] показано, что Хопф индекс связан с различными квантовыми величинами, и для возможности наблюдения эффектов, связанных с этим, Хопф индекс выбран так, чтобы его произведение на постоянную тонкой структуры было порядка единицы, так и получилось: $pq = 136 \cong 1/\alpha$.

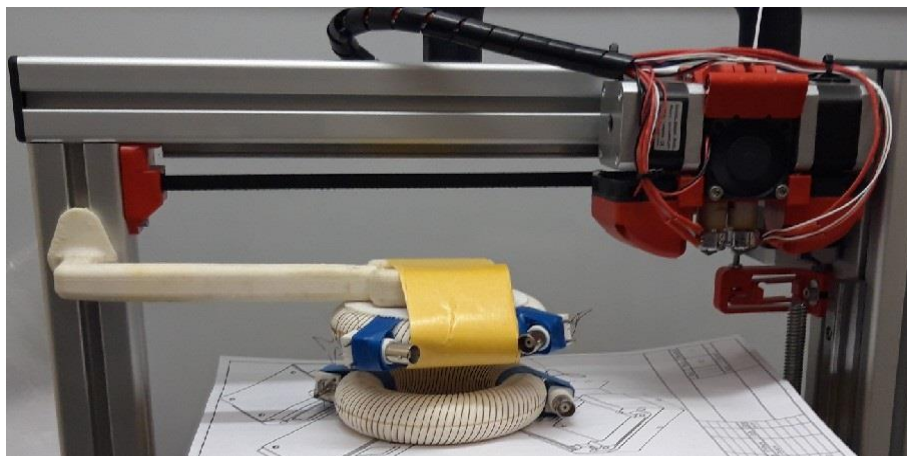


Рис. 4. Фотография катушек в установке

Один из торов лежит на столике 3D принтера с регулируемой высотой и подключен к генератору Tektronix AFG-3252, сигналом которого можно было управлять либо вручную с него, либо с компьютера посредством программы Arbexpress. Второй тор закреплен над первым и подключен к осциллографу Tektronix TDS3012, показания которого можно было сохранять в файл благодаря подключению напрямую через Ethernet.

3.2. Вычисление ЭДС

В работе исследовался сигнал, который одна катушек индуцировала на другую, для этого особенным будет сигнал, соответствующий узлу с такими же r и q , как у катушки. Очевидно, чтобы катушка генерировало поле узла, то напряжение на ней должно быть равно проинтегрированному по ней электрическому полю от узла, ведь силовая линия от катушки имеет такую же топологию, как и поле, которое мы хотим создать.

Интегрирование этого поля является далеко не такой простой задачей, так как формула для поля получается довольно громоздкой, контур сложным, а интеграл – второго рода. Тем не менее в силу симметрии можно уменьшить в q раз интервал интегрирования. В итоге в программе Wolfram Mathematica 7.0 была записана формула для поля, задана параметризация катушки, и получена подынтегральная функция. Затем численным методом первого

порядка, то есть просто методом Римана, посчитан интеграл для промежутка времени, в котором сигнал отличен от нуля.

$$\mathbf{R}(s) = (\mathbf{ShiftVector}) + (\mathbf{RotationMatrix}) \begin{pmatrix} (R_{big} + R_{small} \cos(q s)) \cos(p s) \\ (R_{big} + R_{small} \cos(q s)) \sin(p s) \\ -R_{small} \sin(q s) \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon(t) = \oint \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r} = q \int_0^{\frac{2\pi}{q}} \mathbf{R}'(s) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{R}(s), t) ds$$

$$\approx \sum_{n=1}^N \mathbf{R}'\left(\frac{2\pi n}{qN}\right) \cdot \mathbf{E}\left(\mathbf{R}\left(\frac{2\pi n}{qN}\right), t\right) \frac{2\pi}{N}$$

3.3. Измерения

В начале была измерена АЧХ полученной системы. На генератор подавался гармонический сигнал с частотой, линейно изменяющейся со временем в диапазонах: 100кГц – 2МГц, 1МГц – 10МГц, 10МГц – 50МГц чтобы тщательно промерить весь доступный диапазон частот. Затем все АЧХ были «склеены».

Получившийся результат представлен ниже

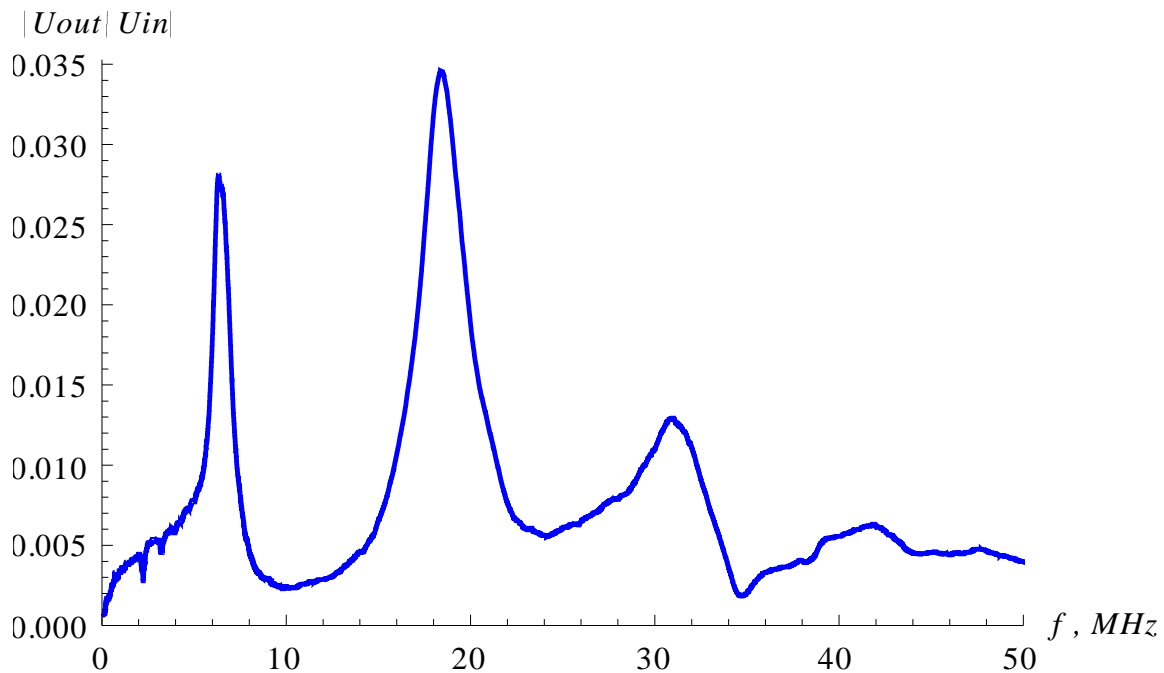


Рис. 5. Амплитудно-частотная характеристика для системы из двух катушек

На частотах около 6МГц наблюдается резонанс, связанный с наличием различных индуктивностей и емкостей в излучающей катушке. На частотах ниже 1МГц АЧХ практически линейна, как и должно быть при индуктивной связи.

Далее подавались сигналы различной формы и частоты и измерялось ЭДС на принимающей катушке. Каждый конечный сигнал был аппроксимирован начальным по методу наименьших квадратов (МНК) также с использованием Wolfram Mathematica 7.0.

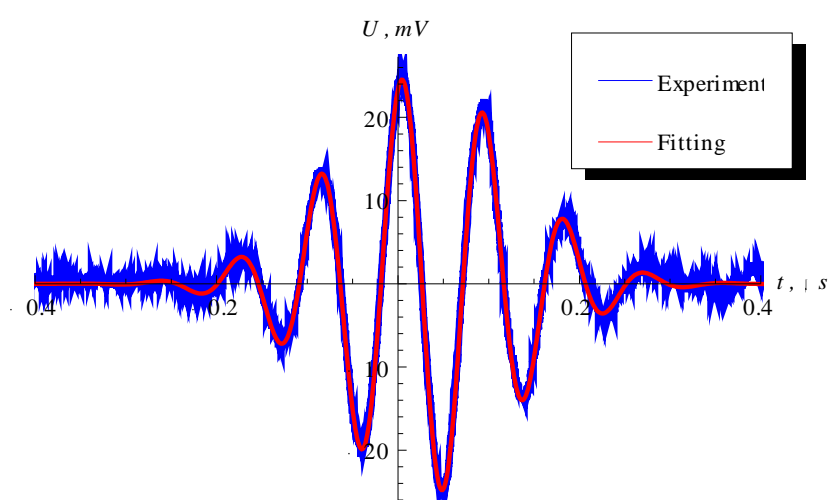


Рис. 6. Синус, модулированный гауссианом, $\chi^2 = 2.75$

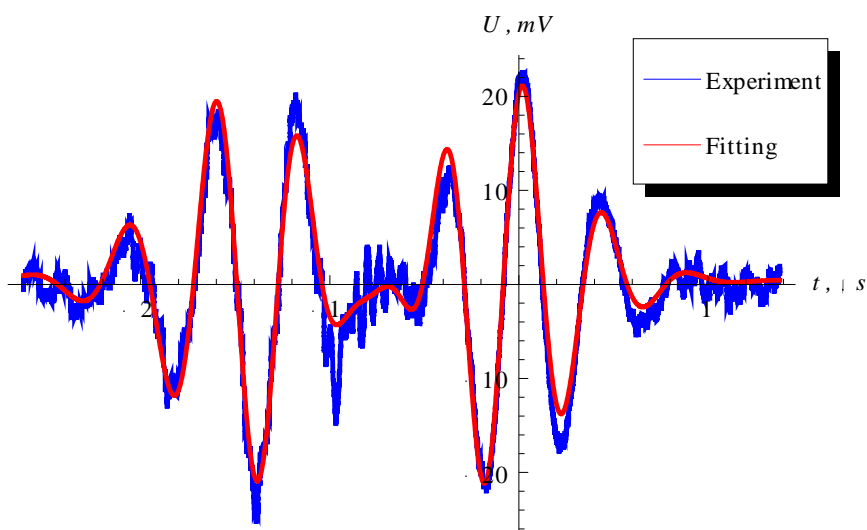


Рис. 7. Расчетный сигнал, $\chi^2 = 5.59$

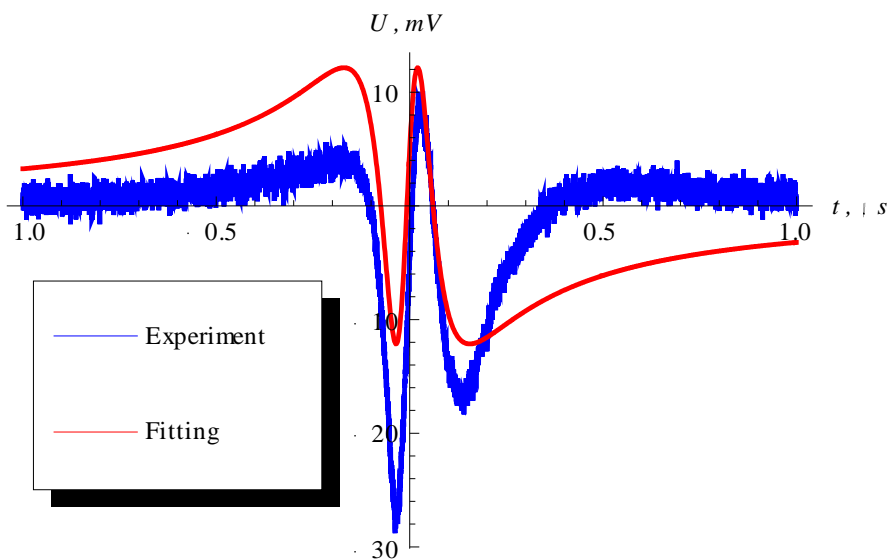


Рис. 8. Сигнал для трилистника, $\chi^2 = 37.5$

Видно, что в первых двух случаях принимаемый сигнал является просто сдвинутым и масштабированным исходным с небольшой добавкой резонансных гармоник, и среднее значение напряжения в итоге оказывается равно нулю. Но в третьем же случае видны заметные отличия двух сигналов, ведь как минимум среднее значение напряжения явно не ноль, а заметно ниже нуля.

Причиной такого странного поведения не могло стать просто изменение фаз различных гармоник, ведь тогда среднее значение все равно должно было остаться нулем. Для лучшего видения проблемы, снизу представлены амплитуды дискретного преобразования Фурье для всех сигналов.

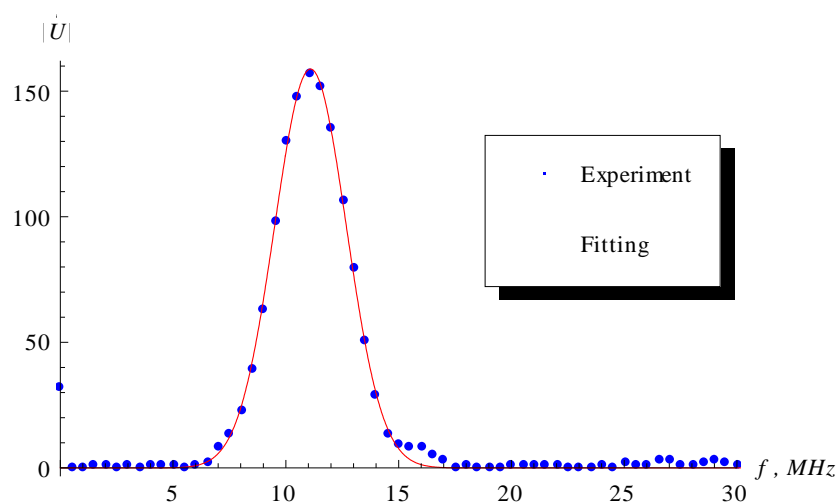


Рис. 9. Спектр для синуса, модулированного гауссианом

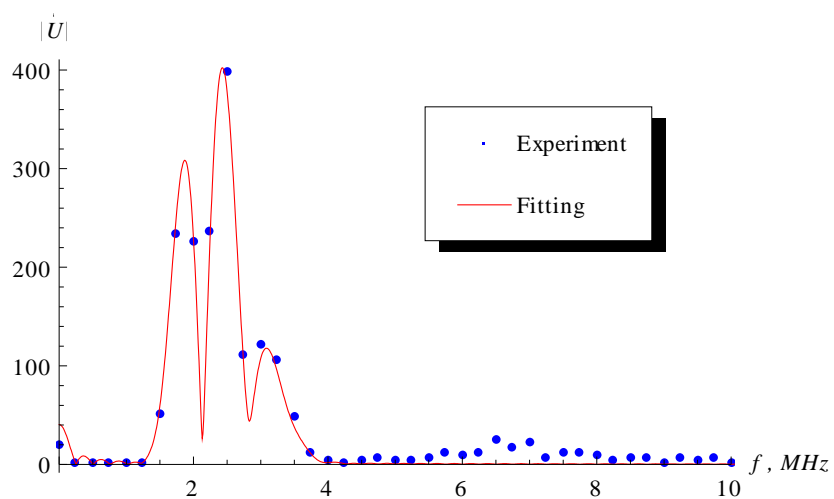


Рис. 10. Спектр для расчетного сигнала

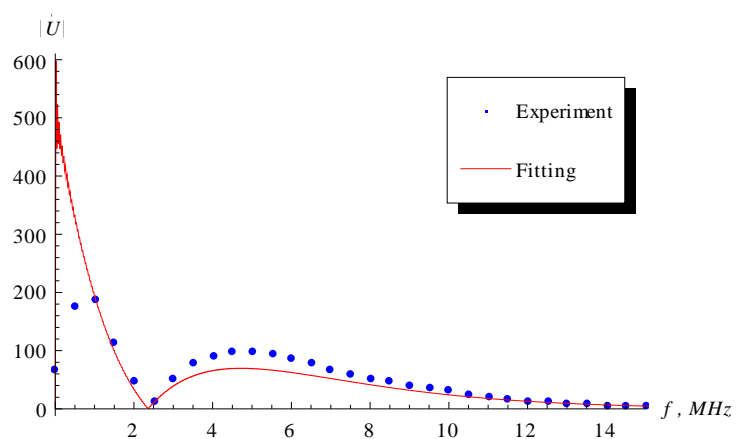


Рис. 11. Спектр для сигнала трилистника

Теперь можно объяснить отличие от нуля среднего значения третьего сигнала. За среднее значение на интервале порядка 1 мкс отвечать могут частоты от 0 до порядка 1 МГц. Как и видно на последнем рисунке, значительные отличия между отправленным сигналом и принятым как раз в этом диапазоне. Из-за того, что АЧХ в этом диапазоне прямо пропорционально частоте, то низкие частоты «отрезаются» и изменяется среднее значение на этом интервале.

Физически дифференцирование объясняется тем, что на низких частотах система ведет себя как дифференцирующая RL цепь, где напряжение с одной индуктивности передается на другую благодаря электромагнитной индукции.

Поэтому для подтверждения слов выше Фурье-образ передаваемого сигнала бы умножен на типичный для RLC цепи АЧХ:

$$k = \left| \frac{A}{1 + \frac{i\lambda}{\pi} \left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right)} \right|$$

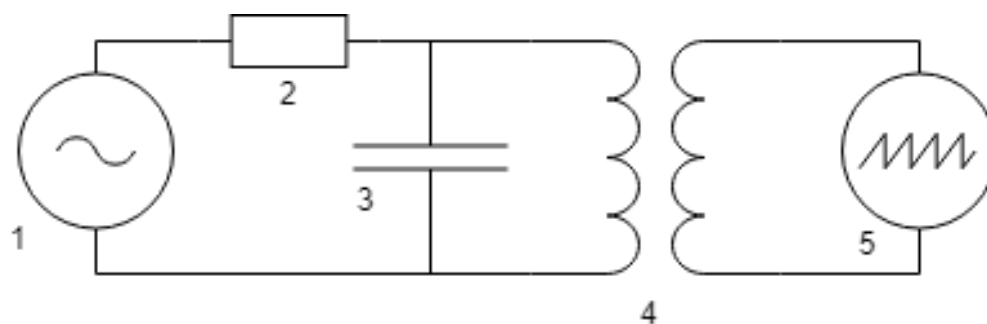


Рис 12. Эквивалентная схема для установки. 1 – генератор, 2 – эффективное сопротивление, 3 – эффективная емкость, 4 – передающая и принимающая катушки, 5 – осциллограф.

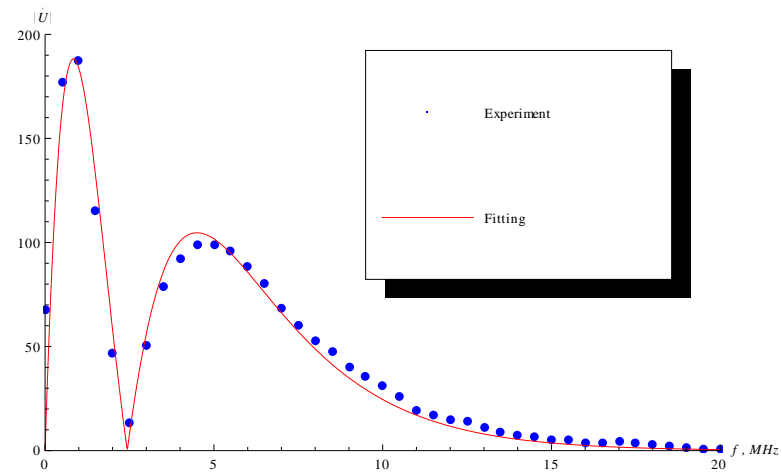


Рис 13. Спектр для сигнала трилистника, умноженный на АЧХ

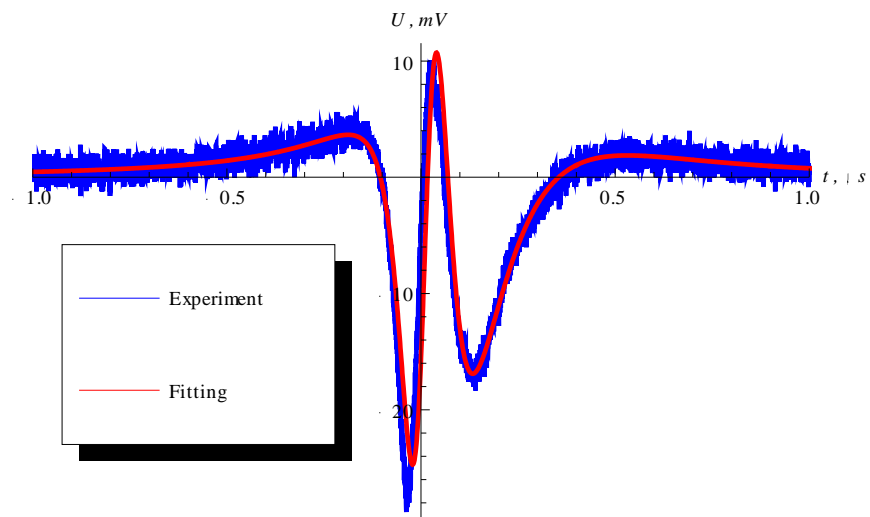


Рис 14. Сравнение экспериментального сигнала с исходным сигналом, свернутым с АЧХ, $\chi^2 = 2.13$

Как видно, изменение спектра сигнала хорошо описывается АЧХ обычного RLC контура, но получившиеся для него параметры оказались отвлеченными от реальности, и тот факт, что аппроксимация выполняется и при в приближении, что емкостный импеданс гораздо больше индуктивного позволяет занулить индуктивность и избавиться от одной переменной.

$$k \approx \left| \frac{A}{1 - \frac{i}{2\pi f\tau}} \right|$$

Параметр аппроксимации получился равным $\tau = 137$ нс. Хи квадрат меняется на единицу если параметр в диапазоне $\tau \in [120 \div 180]$

Также было решено проверить сигнал, похожий на этот, но уже наоборот, имеющий ненулевое среднее значение. Проявился подобный эффект, сигнал стал походить на прошлый, то есть антисимметричный и, соответственно, с нулевым средним значением. Тут видно, что проявился следующий резонансный пик, но за исключением него, графики хорошо совпадают. Здесь параметр аппроксимации $\tau = 47$ нс. Хи квадрат меняется на единицу если параметр в диапазоне $\tau \in [35 \div 66]$. Тут видно, что параметры аппроксимации не совпадают в двух случаях. **Вероятно, это обусловлено тем, что оба эксперимента проводились в разное время и генератор оказался подключен к другой катушке с немного другими параметрами.**

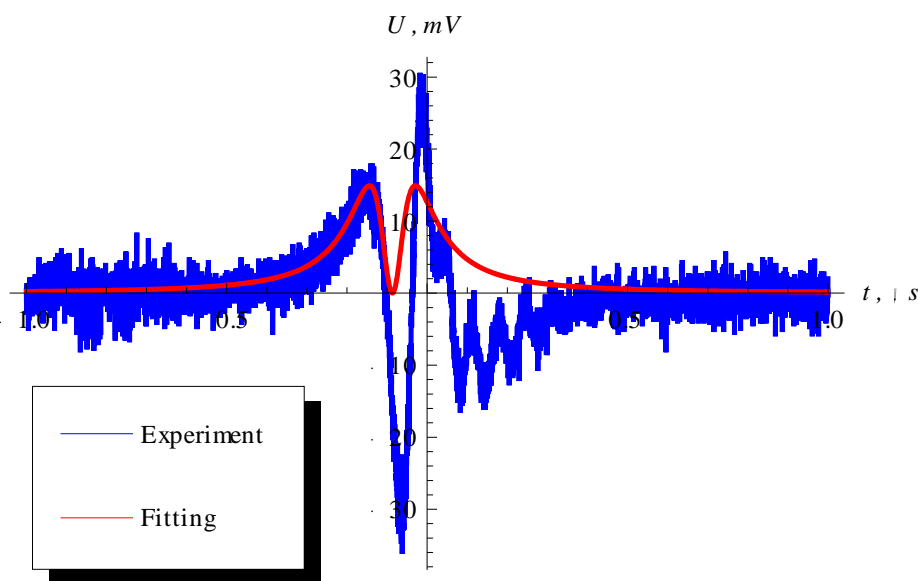


Рис. 15. Сигнал, подобный сигналу трилистника

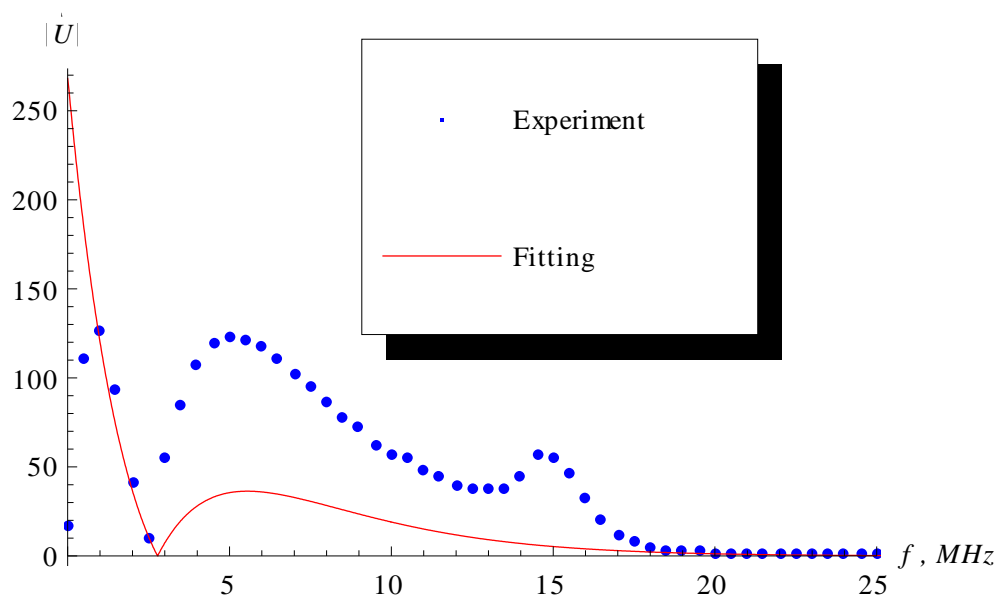


Рис. 16. Спектр сигнала, подобного сигналу трилистника

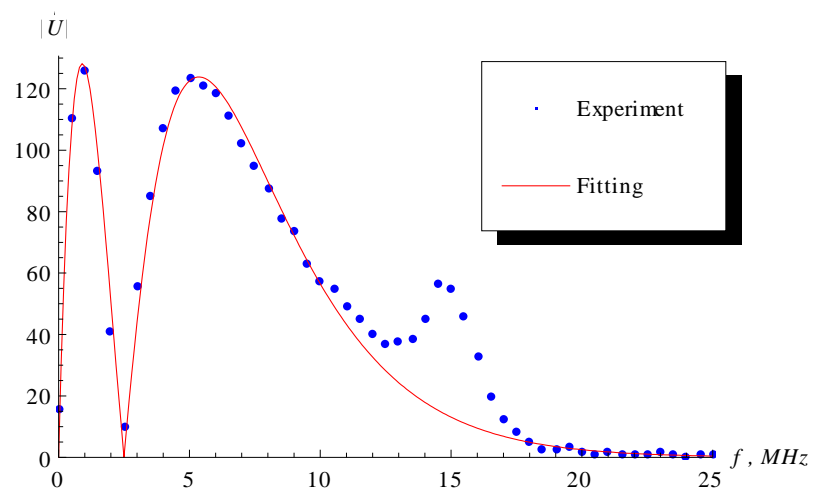


Рис. 17. Спектр сигнала, подобного сигналу трилистника, умноженный на АЧХ

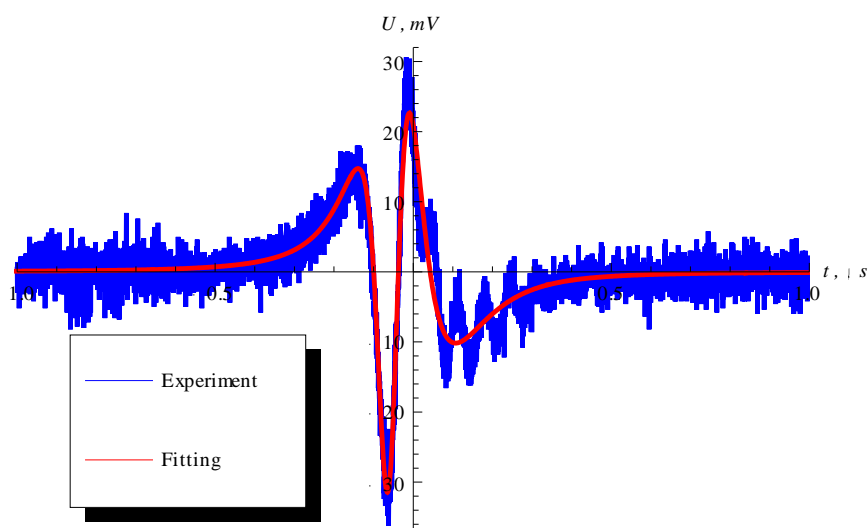


Рис. 18. Сравнение экспериментального сигнала, подобного трилистнику и изначального, свернутого с АЧХ, $\chi^2 = 2.04$

3.4. Погрешности

Так как напряжения измерялись в милливольтном диапазоне, в итоговой картине неизбежно присутствовали шумы. Они были измерены и посчитано их среднеквадратичное напряжение $U_{\text{шумов}} = 0.68$ мВ. Отсюда следует, что статистическая погрешность измерения напряжения равна 0.68 мВ.

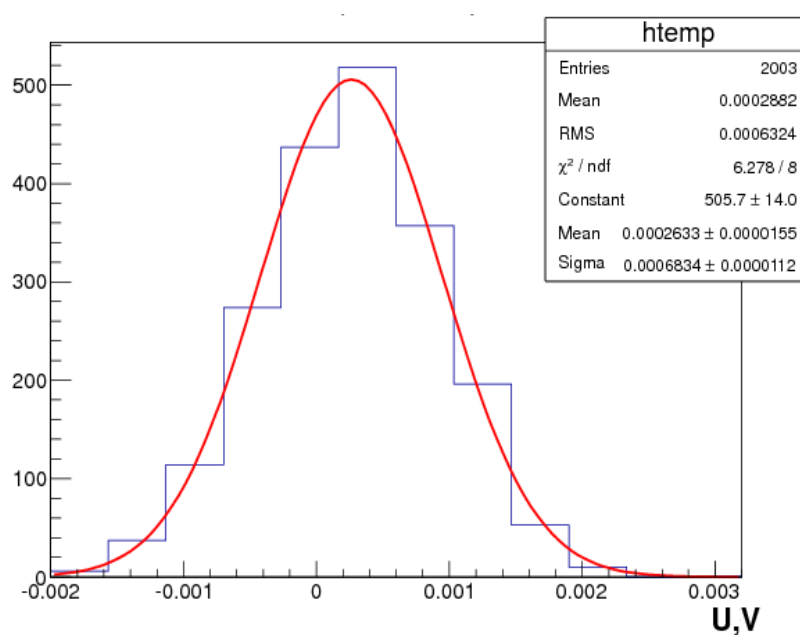


Рис. 18. Гистограмма напряжения шумов и его аппроксимация гауссианом

Также наблюдалась заметно выделяющаяся на фоне шумов и сигнала наводка. Как выяснилось, она возникает из-за люминесцентных ламп на потолке комнаты. Отключив весь свет амплитуда наводки заметно уменьшалась, но не до нуля. Похоже, что наводка сама по себе представляет импульс небольшой длительности, который возбуждает колебания внутри катушки на ее резонансной частоте около 6 МГц. Амплитуда наводки 100 мВ, длительность наводки около 2 мкс. Таким образом систематическая погрешность не может превышать 100 мВ, но фактически в измерениях она отсутствовала, так как из-за крайне малой частоты самих импульсов наводки, она практически не попадала в измерения, а если и попадала, то это было заметно, и сигнал перемерялся.

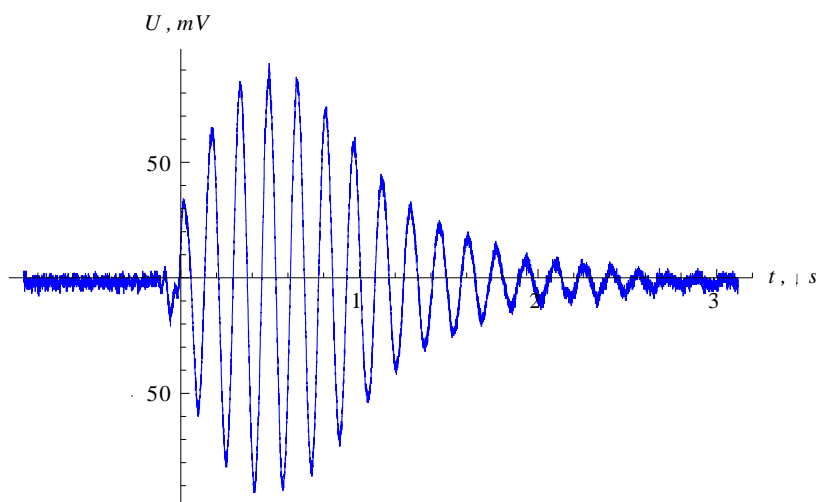


Рис. 19. Наводка из-за ламп

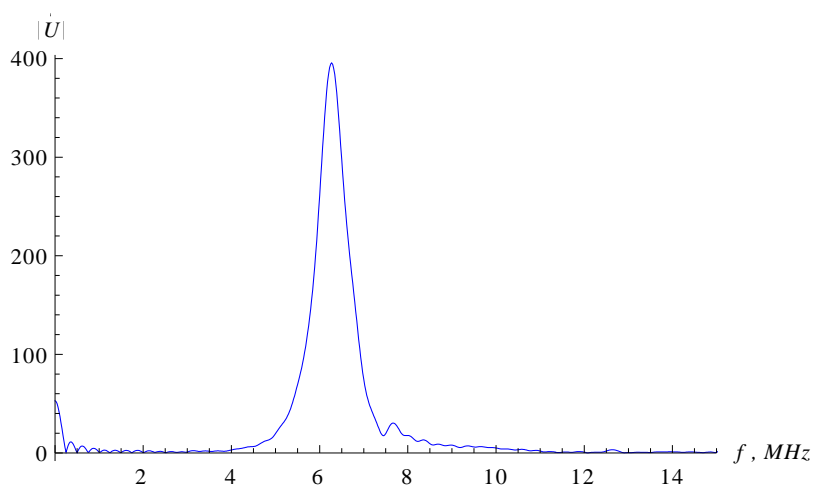


Рис. 20. Спектр наводки из-за ламп

4. Заключение

Был получен сигнал, соответствующий проинтегрированному полю с такой же топологией, как и у использованных в эксперименте катушек. Было исследовано, как при передаче между катушками, имеющими нетривиальную топологию, изменяется форма некоторых сигналов – синуса, модулированного гауссианом, «родного» для узлового поля (по силовым линиям которого идет обмотка катушки) сигнала для таких катушек (похож на сумму двух первых сигналов), специального сигнала для трилистника. Из этого было выяснено, что сигналы, сильно меняющие форму на небольшом временном интервале – меняют ее из-за дифференцирующих свойств передающей системы, а не из-за топологии полей и катушек.

Следующие результаты были получены в работе:

- 1) Найден способ проинтегрировать сложное поле по сложному контуру для описанных узловых полей, и произведен расчет для «родного» поля имеющийся катушки.
- 2) Измерена форма сигнала на принимающей обмотке для нескольких форм сигнала на излучающей катушке. Замечено, что некоторые сигналы значительно изменяются **после этого** (например, становится отличным от нуля среднее значение).
- 3) С помощью МНК выполнена аппроксимация получившихся сигналов начальными и взято от них преобразование Фурье.
- 4) Предположено, что изменение формы является всего лишь результатом характерной для данной системы АЧХ и спектра начального сигнала.
- 5) Произведена аппроксимация полученного спектра изначальным, умноженным на АЧХ для RLC контура в приближении, что емкость крайне мала.

- 6) Установлено, что полученным спектр действительно описывается таким образом, а значит изменение формы сигнала в небольшом диапазоне является результатом «дифференцирования» сигнала для низких частот и будет проявляться именно для сигналов со спектром, значительно отличным от нуля в области низких частот.
- 7) Гипотеза так же проверена для другого сигнала, где подтвердилась еще раз.

5. Благодарности

Я выражаю благодарность моим научным руководителям А. Г. Харламову и В. Н. Жабину за помощь в расчетах, понимании и решении проблем, а также создание экспериментальной установки.

6. Ссылки

- [1] A. F. Ranada (1992) Topological electromagnetism, *J. Phys. A: Math. Gen.* 25 1621 DOI: [10.1088/0305-4470/25/6/020](https://doi.org/10.1088/0305-4470/25/6/020)
- [2] David W. Lyons (2003) An Elementary Introduction to the Hopf Fibration, *Mathematics Magazine*, 76:2, 87-98, DOI: [10.1080/0025570X.2003.11953158](https://doi.org/10.1080/0025570X.2003.11953158)
- [3] Hridesh Kedia, Iwo Bialynicki-Birula, Daniel Peralta-Salas, and William T. M. Irvine (2013) Tying Knots in Light Fields, *Phys. Rev. Lett.* 111, 150404 DOI: [10.1103/PhysRevLett.111.150404](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.111.150404)
- [4] Жабин В. Н. (2013) Узловые решения уравнений Максвелла и проблема квантования заряда, НГУ
- [5] Andreani Petrou (2017) Singular light knots, Leiden university