

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ».

Физический факультет

Кафедра общей физики

Лысенко Михаил Петрович

КУРСОВАЯ РАБОТА

**Сглаживание спектральной характеристики вигглера конусообразным
синусоидальным магнитным полем**

Практикум по электромагнетизму, 2 курс, группа №19314

Научный руководитель:

к. ф.-м. н. Я. В. Ракшун

Оценка научного руководителя

«_____» _____ 20__ г.

Преподаватель практикума:

Д. Н. Капуста

Оценка преподавателя практикума

«_____» _____ 20__ г.

Куратор практикума:

к.т.н. В.Т. Астрелин _____

Итоговая оценка

«_____» _____ 20__ г.

Новосибирск 2020

Аннотация

Целью работы являлось качественное изучение спектра синхротронного излучения (СИ) вставного устройства с синусоидальным магнитным полем – вигглера, а также изучение влияния линейного и квадратичного изменения амплитуды синусоидального магнитного поля в вигглере. Для этого было использовано численное моделирование спектров с помощью программы SPECTRA на основе модельных и реальных данных, полученных с помощью холловского измерения поля в катушках устройства, установленного на SLS (UE212, Швейцария). Построено распределение спектральной плотности потока фотонов от их энергии. Теоретически получено выражение для поля релятивистского электрона в (r, ω) пространстве в параксиальном приближении. Смоделировано сглаживание распределения спектральной плотности потока фотонов от их энергии при линейном и квадратичном изменении поля вставного устройства. Предложены оптимальные коэффициенты сглаживания для линейного сглаживания $0,01 \text{ м}^{-1}$ и квадратичном $0,075 \text{ м}^{-2}$.

Ключевые слова: синхротронное излучение, вигглер, сглаживание спектра.

Содержание

1. Введение.....	4
2. Теоретическая часть.....	4
2.1 Уравнение движения электрона в синусоидальном магнитном поле	5
2.2 Теория работы вигглера и ондулятора.....	6
2.3 Решение волнового уравнения в параксиальном приближении	7
3. Численное моделирование	10
4. Выводы и заключение.....	15
Список литературы	16

1. Введение

Магнитную систему, создающую знакопеременное периодическое поле, называют ондулятором или вигглером, в зависимости от конструкции или режима работы. Эти устройства используются в качестве источников синхротронного излучения на циклических ускорителях. Например, в работе был исследован спектр ондулятора, установленного на источнике СИ SLS (Швейцария). На источнике СИ ЦКП «СКИФ», который планируется построить в р.п. Кольцово (Новосибирская область), также запланирована установка такого ондулятора на экспериментальной станции 1-6, при этом предполагается, что рабочий диапазон длин волн будет существенно выше, чем на SLS. При энергиях фотонов больше 1500 эВ предполагается использовать это вставное устройство в вигглерном режиме, то есть изучение сплошного спектра на высоких энергиях.

Целью работы является численное моделирование спектра излучения вигглера и рассмотрение способов изменения свойств пучка, а именно сужение магнитного поля (tapering) для расширения спектральной полосы. Задачей работы является в нахождении оптимальных сглаживающих коэффициентов.

2. Теоретическая часть

Приведенные расчеты траектории движения электрона в поле и самого поля описывают идеальный случай, когда, к примеру, поле не сглажено. Дальнейшие усложнения нельзя вывести аналитической формулой по, этому в таких случаях прибегают к численным методам. Численные расчеты, полученного поля и сглаживание спектра в идеальном случае, будут осуществляться при помощи программы SPECTRA [1].

2.1 Уравнение движения электрона в синусоидальном магнитном поле

Движение электрона в вставном устройстве описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{e}{\gamma c} [\vec{v} \times \vec{B}] = m \dot{\vec{v}} \quad 1)$$

где γ — релятивистский коэффициент, c — скорость света, m — масса электрона, e — заряд электрона, а \vec{v} и \vec{B} скорость частицы и магнитное поле соответственно. Направив ось OZ вдоль направления релятивистского движения электрона и введя магнитное поле в ондуляторе $B_0 \cos(k_\omega z)$, направленное вдоль оси OY , где k_ω связана с периодом вставного устройства следующим образом $k_\omega = 2\pi/\lambda_\omega$, λ_ω — длина испускаемой волны, уравнение 1) можно преобразовать к виду:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} = -\frac{eB_0}{m\gamma c} \dot{z} \cos(k_\omega z), \\ \ddot{z} = \frac{eB_0}{m\gamma c} \dot{x} \cos(k_\omega z); \end{array} \right. \quad 2.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} = -\frac{eB_0}{m\gamma c} \dot{z} \cos(k_\omega z), \\ \ddot{z} = \frac{eB_0}{m\gamma c} \dot{x} \cos(k_\omega z); \end{array} \right. \quad 2.2)$$

Введя замену вида $dz = \beta c dt$, где $\beta = \frac{\|\vec{v}\|}{c}$ и проинтегрировав первое уравнение системы (2.1) с следующими начальными условиями: измерения начинаются при $t = 0$ в середине полюса магнита, где поперечная скорость равна $\dot{x}_0 = 0$, уравнение сведется к виду (3.1) Затем, подставив полученное уравнение (3.1) в уравнение (2.2) и проинтегрировав с начальным условием, $\dot{z}_0 = \beta c$ — продольная скорость, получится система вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = -\frac{Kc}{\gamma} \sin(k_\omega z), \\ \dot{z} = \beta c - \frac{K^2 c}{2\beta\gamma^2} \sin^2(k_\omega z); \end{array} \right. \quad 3.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = -\frac{Kc}{\gamma} \sin(k_\omega z), \\ \dot{z} = \beta c - \frac{K^2 c}{2\beta\gamma^2} \sin^2(k_\omega z); \end{array} \right. \quad 3.2)$$

Где введен коэффициент ондуляторности K

$$K = \frac{eB_0\lambda}{2\pi mc^2},$$

который показывает угол отклонения электрона от оси OZ. Проинтегрировав оба уравнения системы (3) еще раз, получится система

$$\begin{cases} x = \frac{K}{\beta\gamma k_\omega} \cos(k_\omega \bar{\beta} ct), \\ z = \bar{\beta} ct + \frac{K^2}{\beta^2 \gamma^2 k_\omega} \sin(2k_\omega \bar{\beta} ct); \end{cases} \quad 4)$$

для которой введено обозначение $\bar{\beta}$, определяемое как

$$\bar{\beta} = \beta \left(1 - \frac{K^2}{4\beta^2 \gamma^2} \right)$$

Для более подробной информации [2].

2.2 Теория работы вигглера и ондулятора

В работе используется вставное устройство, работающее на высоких энергиях в режиме вигглера. Такое устройство устанавливается на электронный накопитель так, что пучок заряженных частиц, проходя сквозь такой магнит по извилистой траектории, сбрасывают часть своей энергии в виде СИ в направлении своего движения.

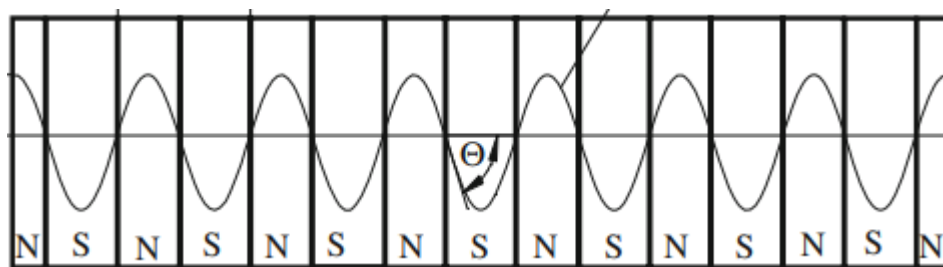


Рисунок 1 – Волнообразная траектория частицы в знакопеременном поле

Электрон движется со средней скоростью, заданной как $\bar{\beta}$ и ему требуется время $\tau = \frac{\lambda_\omega}{c\bar{\beta}}$, чтобы пройти один период ондулятора. За это же время фронт излучения проходит расстояние $s = c\tau$, опережающий частицу. Для суперпозиции излучения всех периодов требуется, чтобы разность $s - \lambda_\omega \cos v$ была равна целому числу кратному длине волны λ_γ [2]. В связи же с общей длиной вставного устройства, и как следствие малым периодом, уложение всех длин волн, аккурат в фазу будет невозможно. Из-за этого на низких

энергиях формируемое распределение будет схоже с ондуляторным, а на высоких энергиях будет образовываться сплошной спектр – виглерный.

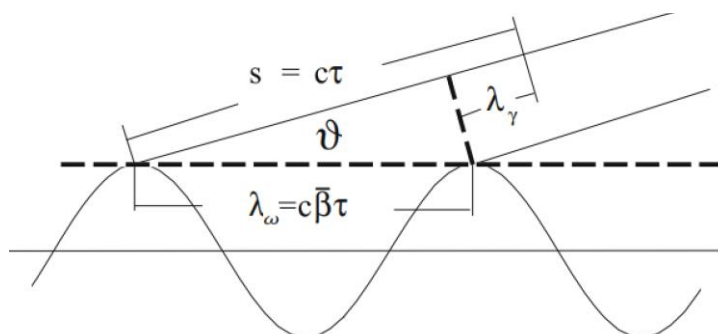


Рисунок 2 – интерференция синхротронного излучения

Виглерный спектр, складывается из интенсивности излучения от каждого периода устройства, а, на энергиях ниже некоторой - критической, наблюдается гребенчатый вид спектра, что отвечает интерференционным эффектам при сложении поле от каждого периода. Гребенчатый вид спектра характерен для устройств, называемых ондуляторами. Отличие ондулятора от вигглера - определяется параметром К. При $K = 1$ устройство принято называть ондулятором - в спектре устройства выражена только первая гармоника, при повышении параметра ондуляторности появляются высшие гармоники, а значит на высоких энергиях (гармониках) спектр “сольётся” в сплошной [3].

2.3 Решение волнового уравнения в параксиальном приближении

Для нахождения поля вставного устройства необходимы следующие уравнения Максвелла в вакууме:

$$\begin{cases} (\nabla \cdot \vec{E}) = 4\pi\rho, \\ [\vec{\nabla} \times \vec{E}] = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ [\vec{\nabla} \times \vec{B}] = \frac{1}{4\pi} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \end{cases} \quad 5)$$

После преобразований над системой, можно получить неоднородное волновое уравнение в системе координат (\vec{r}, t) :

$$c^2 \nabla^2 \vec{E} - \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 4\pi c^2 \vec{\nabla} \rho + 4\pi \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \quad 6)$$

Для перехода из системы (\vec{r}, t) в систему (\vec{r}, ω) применяется преобразованием Фурье. Воспользовавшись свойствами преобразования Фурье, и самим преобразованием, переписав каждый член, собрав все и подставив в неоднородное волновое уравнение (6), получится:

$$\omega^2 \vec{\tilde{E}} + c^2 \vec{\nabla}^2 \vec{\tilde{E}} = 4\pi c^2 \vec{\nabla} \tilde{\rho} - 4\pi i \omega \vec{\tilde{j}} \quad (7)$$

Воспользовавшись следующей заменой, при условии, что $\vec{\tilde{E}}$ изменяется медленно, вдоль оси OZ, по отношению к $\lambda = 2\pi c/\omega$:

$$\vec{\tilde{E}} = \vec{\bar{E}} e^{i\omega \frac{z}{c}},$$

и подставив эту замену в уравнение (7), получится:

$$c^2 \left(\vec{\nabla}^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \vec{\bar{E}} e^{i\omega \frac{z}{c}} = 4\pi c^2 \vec{\nabla} \tilde{\rho} - 4\pi i \omega \vec{\tilde{j}} \quad (8)$$

Расписывая левую часть уравнения (8), как:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \vec{\bar{E}} e^{i\omega \frac{z}{c}} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{\bar{E}} e^{i\omega \frac{z}{c}} = \\ & = \vec{\nabla}^2 \vec{\bar{E}} e^{i\omega \frac{z}{c}} + \frac{2i\omega}{c} e^{i\omega \frac{z}{c}} \frac{\partial}{\partial z} (\vec{\bar{E}}) \end{aligned}$$

Следовательно исходное уравнение (8) преобразуется в

$$c^2 e^{i\omega \frac{z}{c}} \left(\vec{\nabla}^2 + \frac{2i\omega}{c} \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{\bar{E}} = 4\pi c^2 \vec{\nabla} \tilde{\rho} - 4\pi i \omega \vec{\tilde{j}}. \quad (9)$$

Система электромагнитных источников удобно описывается плотностью заряда $\rho(\vec{r}, t)$ и плотностью тока $\vec{j}(\vec{r}, t)$ и так, как в работе интерес представляет один электрон, то плотности можно представить с помощью Дельта функцией Дирака:

$$\rho(\vec{r}, t) = -e \delta(\vec{r} - \vec{r}'(t)) \quad (10)$$

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = -e \vec{v}(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}'(t)) \quad (11)$$

Пусть $s = vt$, где $v = |\vec{v}(t)|$. Используя общее свойство

$$\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|},$$

можно записать

$$\delta(z - z'(t)) = \frac{1}{v_z(z)} \delta(t - t(z)).$$

Затем применив это к уравнениям плотности заряда 10) и тока 11) получатся, с использованием того, что $s(z) = vt(z)$, уравнения вида:

$$\rho(\vec{r}_\perp, z, t) = -\frac{e}{v_z(z)} \delta(\vec{r}_\perp - \vec{r}'_\perp(z)) \delta\left(\frac{s(z)}{v} - t(z)\right) \quad 12)$$

$$\vec{j}(\vec{r}_\perp, z, t) = -\frac{e\vec{v}(z)}{v_z(z)} \delta(\vec{r}_\perp - \vec{r}'_\perp(z)) \delta\left(\frac{s(z)}{v} - t(z)\right) \quad 13)$$

Взяв преобразование Фурье от уравнений 12) и 13), и воспользовавшись свойством Дельта функции,

$$\int_a^b \delta(t - t') \varphi(t) dt = \varphi(t'), \quad \text{при } a < t' < b,$$

можно привести эти уравнения к виду:

$$\tilde{\rho}(\vec{r}_\perp, z, \omega) = -\frac{e}{v_z(z)} \delta(\vec{r}_\perp - \vec{r}'_\perp(z)) e^{i\omega \frac{s(z)}{v}} \quad 14)$$

$$\tilde{\vec{j}}(\vec{r}_\perp, z, \omega) = -\frac{e\vec{v}(z)}{v_z(z)} \delta(\vec{r}_\perp - \vec{r}'_\perp(z)) e^{i\omega \frac{s(z)}{v}} \quad 15)$$

Подставив полученные выражения 14) и 15) в уравнение 9) и совершив простые преобразования, можно привести его к виду:

$$c^2 e^{i\omega \frac{z}{c}} \left(\vec{\nabla}^2 + \frac{2i\omega}{c} \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{E} = \frac{4\pi e}{v_z(z)} e^{i\omega \frac{s(z)}{v}} (i\omega \vec{v}(z) - c^2 \vec{\nabla}) \delta(\vec{r}_\perp - \vec{r}'_\perp(z)) \quad 16)$$

Применив параксиальное приближение [4] так, как E слабо меняется от z , то так, как вторая частная производная много меньше первой, следует:

$$\left(\vec{\nabla}_\perp^2 + \frac{2i\omega}{c} \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{E}_\perp = \frac{4\pi e}{v_z(z)} e^{i\omega \left(\frac{s(z)}{v} - \frac{z}{c} \right)} \left(\frac{i\omega}{c^2} \vec{v}_\perp(z) - \vec{\nabla}_\perp \right) \delta(\vec{r}_\perp - \vec{r}'_\perp(z)) \quad 17)$$

Это неоднородное дифференциальное уравнение в частных производных, которое решается с помощью функции Грина [4]. Получится решение для функции распределения поля:

$$\begin{aligned} \overline{\vec{E}}_{\perp}(z_0, \vec{r}_{\perp 0}, \omega) = & -\frac{e}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{z_0 - z'} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r}' \left(\frac{i\omega}{c^2} \vec{v}_{\perp}(z) - \vec{\nabla}_{\perp} \right) \delta(\vec{r}_{\perp} - \vec{r}'_{\perp}(z)) \times \\ & \times \exp \left[i\omega \left(\frac{|\vec{r}_{\perp 0} - \vec{r}'_{\perp}(z')|^2}{2c(z_0 - z')} + \frac{s(z)}{v} - \frac{z}{c} \right) \right] \end{aligned} \quad (18)$$

Проинтегрировав по $d\vec{r}'$, получится общее решение исходного уравнения:

$$\begin{aligned} \overline{\vec{E}}_{\perp}(z_0, \vec{r}_{\perp 0}, \omega) = & -\frac{e}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{z_0 - z'} \left(\frac{\vec{v}_{\perp}(z')}{c} - \frac{\vec{r}_{\perp 0} - \vec{r}'_{\perp}(z')}{(z_0 - z')} \right) \times \\ & \times \exp \left[i\omega \left(\frac{|\vec{r}_{\perp 0} - \vec{r}'_{\perp}(z')|^2}{2c(z_0 - z')} + \frac{s(z)}{v} - \frac{z}{c} \right) \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

3. Численное моделирование

Моделирования будут проводиться в программе SPECTRA версии 10.2. Для моделирования используются значения идеального поля и полученные, с помощью холловского измерения, поля в катушках устройства, установленного на SLS (UE212, Швейцария).

. Расчеты проводились для угла $\theta = 0$, энергии электронов 3 эВ, на расстоянии от источника 25 м, для энергий от 0 до 5000 эВ. Построенная зависимость плотности потока от значения энергии, в идеальном случае, идеального синусоидального поля с учётом корректирующих катушек, представлена на рисунке 3. Из построенного распределения видно, что при высоких энергиях, при 1,8 кэВ, образуется вигглерный спектр

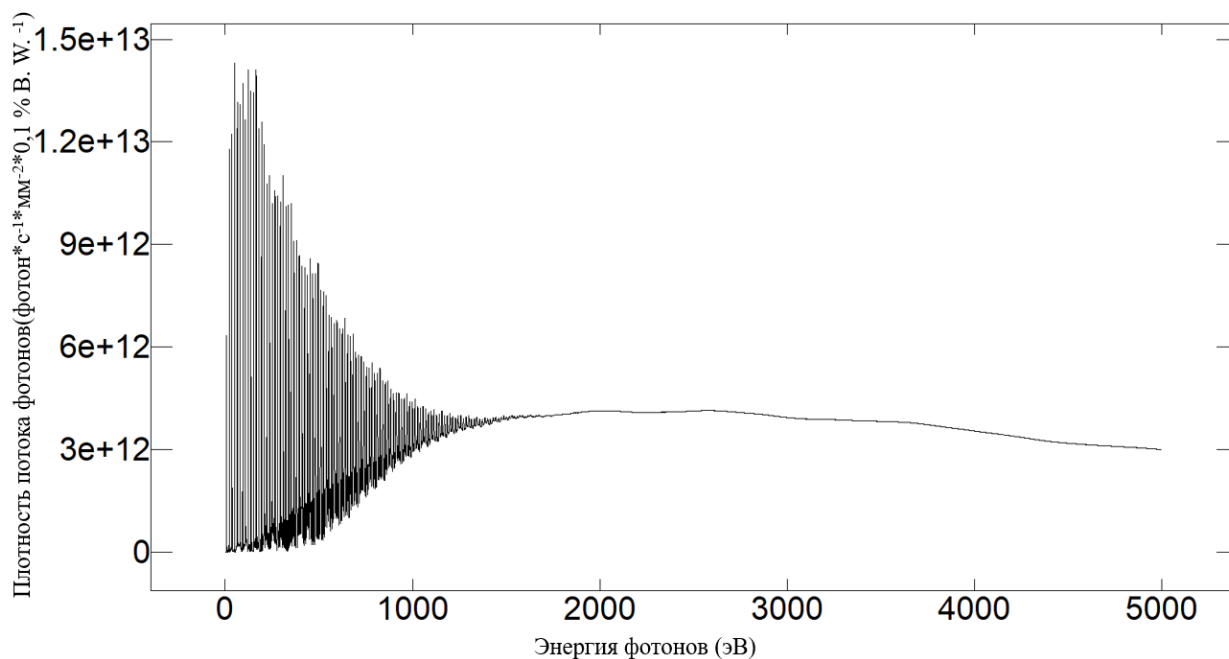


Рисунок 3 –распределение в идеальном случае.

Решение уравнения движения при идеальном поле представлено на рисунке 4.

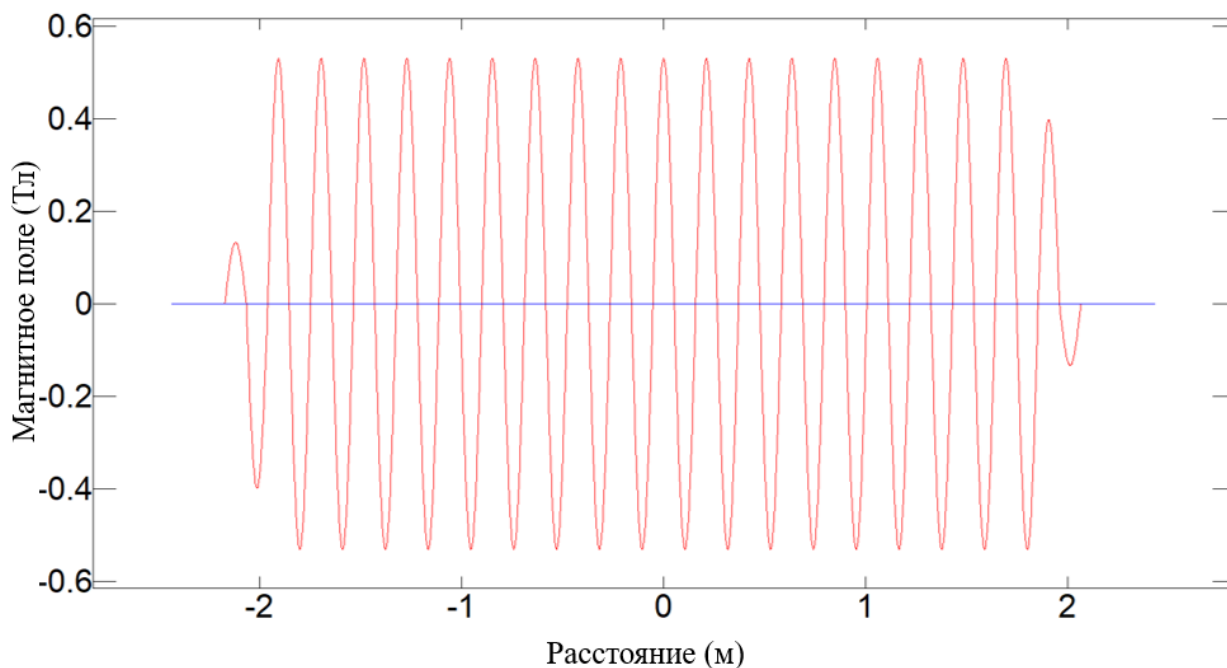


Рисунок 4 – решение уравнения движения.

В диапазоне энергий от 1,3 до 1,7 кэВ присутствуют малые колебания спектра(биения). Для того, чтобы подавить биения существует несколько методов, один из которых – изменение поля вдоль вставного устройства.

SPECTRA позволяет изменять поле спектральной полосы tapering магнитного поля вводя долю сужения измеряемых в $\left[\frac{1}{M}\right]$ и $\left[\frac{1}{M^2}\right]$ для линейного и квадратичного соответственно.

Далее, с помощью программы SPECTRA, подбираются различные линейные коэффициенты и строятся для каждого соответствующие распределение. Из используемых коэффициентов, наиболее удачным является 0,01 так, как при нем сглаживание наиболее широко.

Таблица 1 – коэффициенты линейного сглаживания.

Коэф. Сглаж.	0,07	0,05	0,03	0,01
Сглаженная часть	-	-	-	-
Диапазон биения	1242-2233	1488-1995	1320-2010	1170-1670

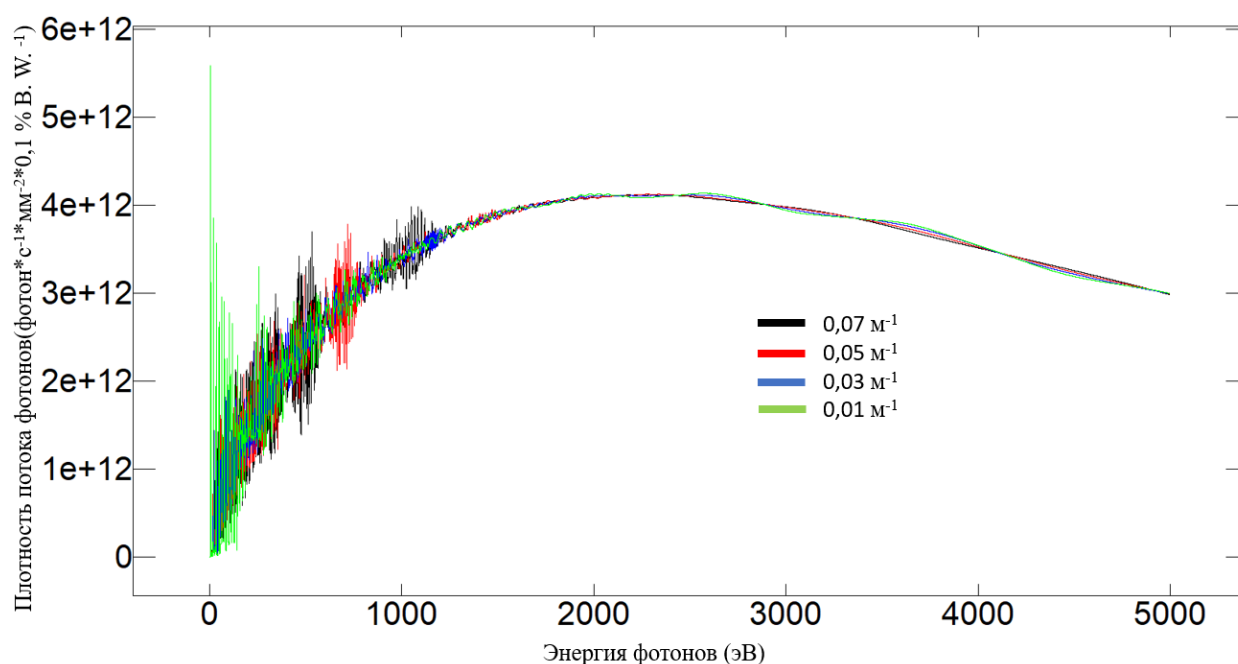


Рисунок 5 – распределение при разном линейном сглаживании.

Траектория частицы в линейно сглаженном поле при коэффициенте 0,01 ($1/M$) представлено на рисунке 6.

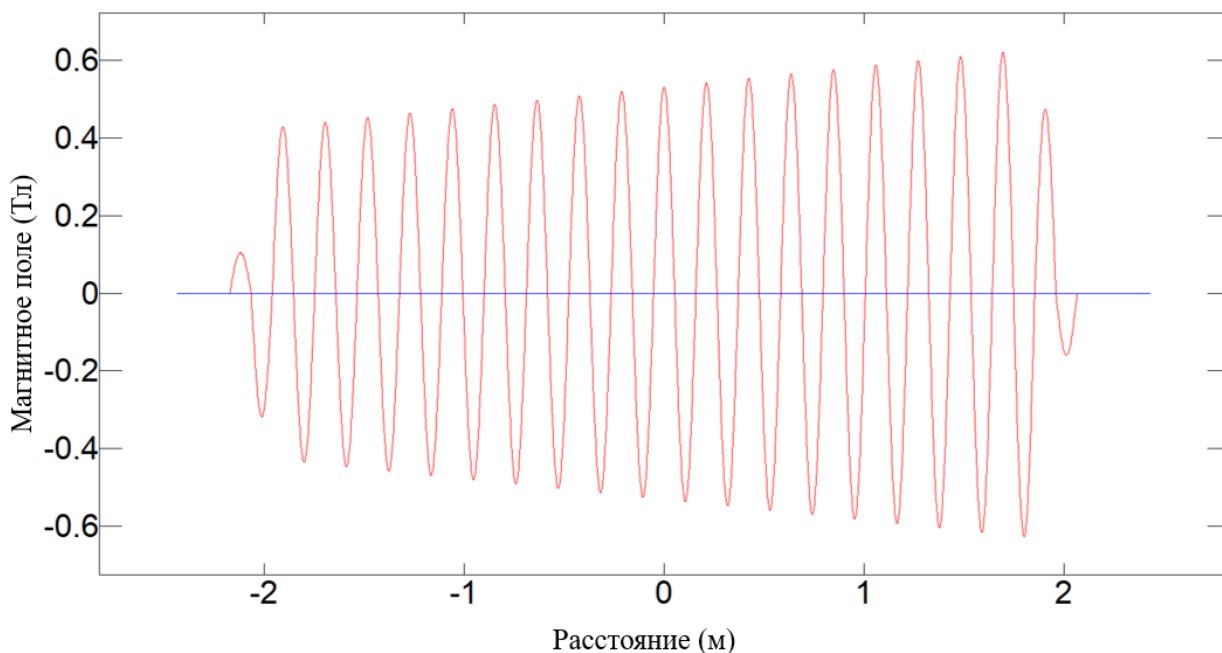


Рисунок 6 – решение уравнения движения при линейном сглаживании.

Основываясь на полученном линейном сглаживании можно рассмотреть квадратичное сглаживание. Оно отличается от линейного тем, что профиль поля изменяется по параболе. При этом спектр строится начиная с левой ветви, а не с вершины параболы так, как программой не предусмотрен настраиваемый сдвиг.

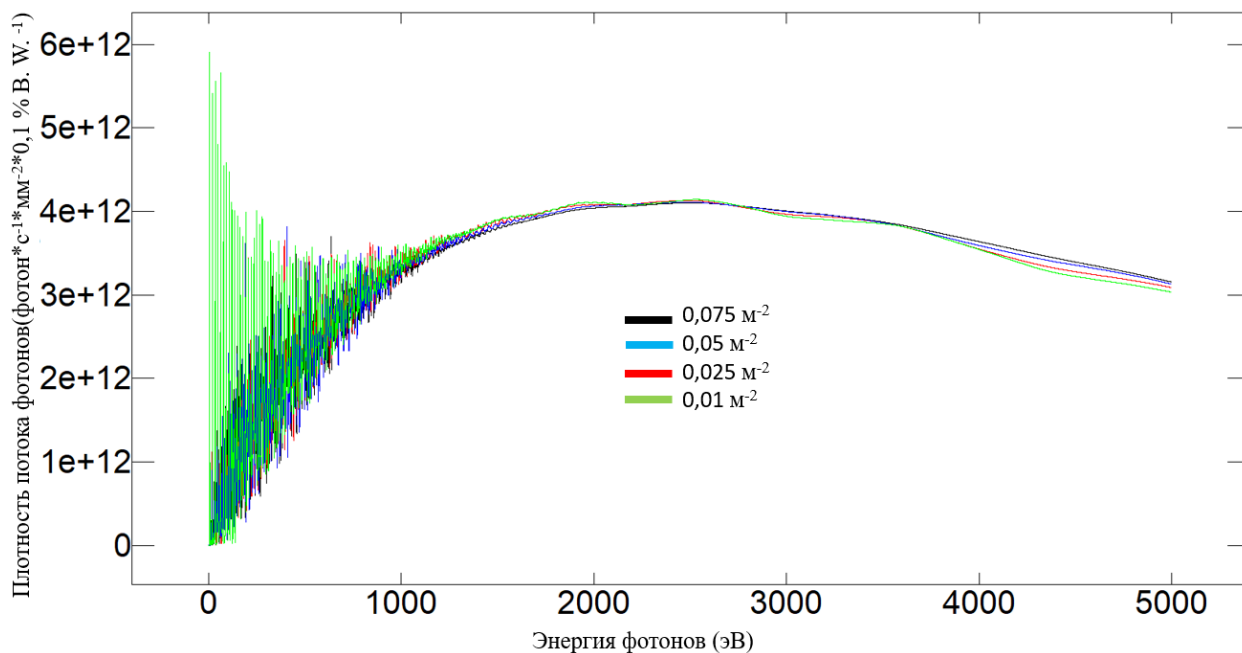


Рисунок 7 – распределение при разном квадратичном сглаживании.

Таблица 2 – коэффициенты квадратичного сглаживания.

Кэф. Сглаж.	0,01	0,025	0,05	0,075
Сглаженная часть	1687-1769	-	1732-1769	1650-1769
Диапазон биения	1209-1687	1223-1861	1312-1732	1225-1650

Наиболее эффективное сглаживание достигнуто при $0,075 \left(\frac{1}{\text{м}^2} \right)$. Траектория частицы в квадратично сглаженном поле при этом коэффициенте представлена на рисунке 8.

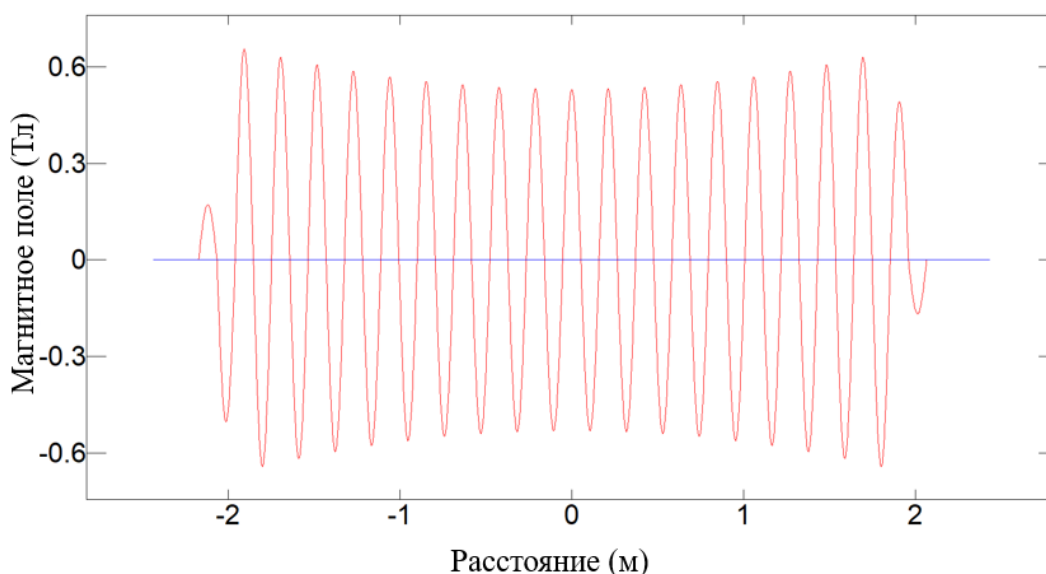


Рисунок 8 – решение уравнения движения при квадратичном сглаживании.

Построенная зависимость спектральной плотности потока фотонов от их энергии, в измеренном случае, представлена на рисунке 9.

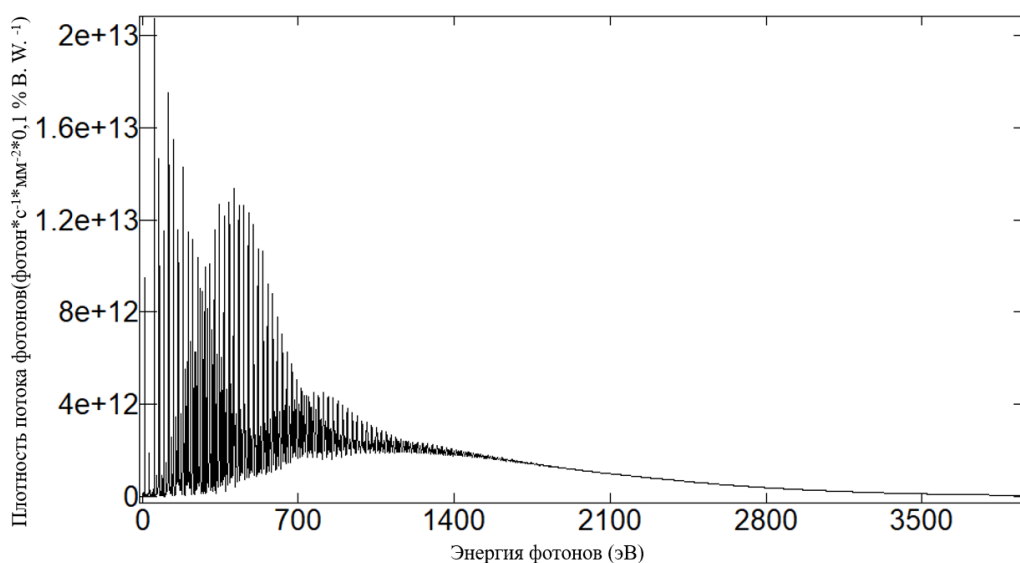


Рисунок 9 – распределение в измеренном случае.

Сравнение полученных значений с идеальными:

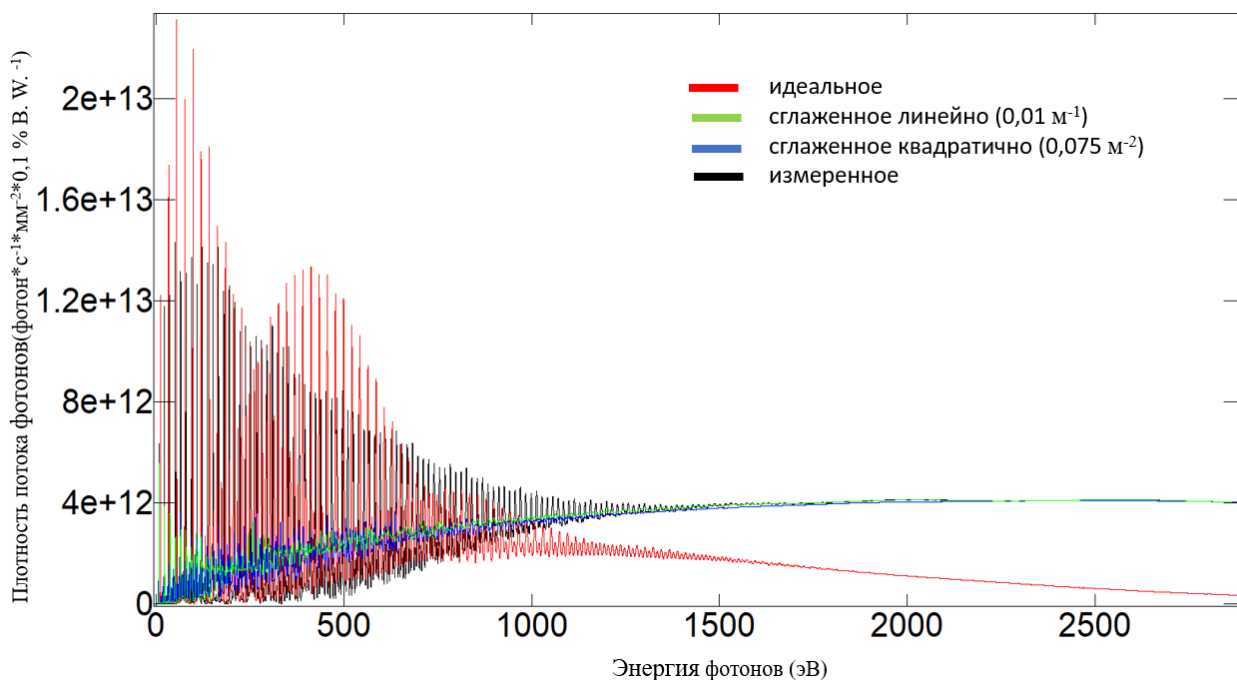


Рисунок 10 – графики при различных полях.

4. Выводы и заключение

В ходе данной работы на основе смоделированных данных идеального и измеренного источников СИ получены следующие выводы:

- 1) На основе уравнений Максвелла изучено излучение релятивистских пучков в синусоидальном магнитном поле.
- 2) Освоена специальная программа SPECTRA, для расчетов параметров излучения и его визуализации.
- 3) Построены на основе характеристик установки распределения плотности потока фотонов от их энергии при отсутствии сглаживания, при линейном сглаживании и при квадратичном сглаживании.
- 4) Построены на основе экспериментальных данных распределение плотности потока фотонов от их энергии, согласующиеся с теорией.
- 5) Показано преимущество использования вигглеров, как источника СИ с гибкими настройками, с помощью которых можно изменять полученный спектр.

Список литературы

1. Tanaka T. SPECTRA - a synchrotron radiation calculation code / T. Tanaka, H. Kitamura // Synchrotron Radiation. – 2001. – №8.
2. Wiedemann P. Particle Accelerator Physics / P. Wiedemann. – Stanford University: Springer, 2015. – Part IX. – Chapter 26.1.
3. Винокуров Н. А. Ондуляторы и вигглеры для генерации излучения и других применений / Н. А. Винокуров, Е. Б. Левичев // Успехи физических наук. – 2015. – Т. 185, №9. – С. 917-939.
4. Paraxial Green's functions in Synchrotron Radiation theory / G. Geloni [et al.]. – Hamburg: Deutsches Elektronen-Synchrotron, 2018. – Part II. – В.